arXiv:2302.00749v1 [math.AP] 1 Feb 2023

旋转群上的径向拉普拉斯算子

Pierre Degond

图卢兹数学研究所；UMR5219 图卢兹大学；法国国家科学研究中心 UPS，F-31062 图卢兹 Cedex 9，法国 pierre.degond@math.univ-toulouse.fr

谨以此文缅怀我们敬重的同事和朋友 Sao Carvalho

摘要

旋转群上的拉普拉斯算子在共轭作用下不变，因此它将类函数映射为类函数。极大环面由分块对角矩阵构成，其块为平面旋转。类函数由其在该极大环面上的取值确定。因此，拉普拉斯算子在极大环面上诱导出一个称为径向拉普拉斯算子的二阶算子。本文推导径向拉普拉斯算子的表达式。随后，我们利用特征标是类函数且其表达式由 Weyl 特征标公式给出这一事实，求出拉普拉斯算子的特征值。尽管李群专家对此内容十分熟悉，我们仍以简明易懂的方式汇集于此，希望能帮助需要运用这些概念的非专业人士。

致谢：PD 与英国伦敦帝国理工学院数学系保持访问教授关系。

关键词：表示、特征标、特征函数

美国数学学会主题分类：22E30、22E46、22E70、81R05

1 引言

旋转群具有基础性的物理重要性，因为它们编码了底层空间的对称性。近年来，旋转群在描述大量集体运动的自驱动粒子系统方面，日益成为重要的研究对象。此类系统在生命科学中十分常见，例如群集的细菌、迁移中的细胞或成群游动的鱼类。物理粒子的运动由其动量决定，而动量张成一个平坦空间；相比之下，集体运动的粒子则呈现出更多样的情形。粒子动力学往往以李群的元素或齐性空间的元素来描述（即李群对其某个子群取商所得的空间）。

这类模型中最早的例子之一是 Vicsek模型 [30], , 其中粒子以恒定速度运动。因此, 它们的动力学由速度方向决定, 而速度方向属于齐性空间 $\mathbb{S}^{n-1} \cong \mathrm{SO}_n\mathbb{R}/\mathrm{SO}_{n-1}\mathbb{R}$。近来, 有人提出了一种粒子动力学由旋转群 $\mathrm{SO}_n\mathbb{R}$ 的元素决定的模型 [9]。该模型的若干变体也已得到研究[6, 7, 10, 11]。其他涉及旋转群的集体动力学模型可见于 [16], , 也有涉及其他群或齐性空间的模型, 例如 $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ 中的模型、 [12] $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^1$ 中的模型, 或 [8] 中涉及酉群 SU_n 的模型 [20, 22]。更一般地说, 集体动力学与几何之间的相互作用是一个活跃的研究领域, 参见例如 [2, 17]。

本文聚焦于与 [9] 中所述模型相关的旋转群。本文提出了一个通过体姿态对齐相互作用的刚体粒子系统, 并在粒子数量较多时推导出一个动力学模型。最后, 在对齐相互作用较强的假设下, 从动力学模型推导出流体动力学模型。在动力学层面, 相互作用算子属于福克-普朗克型, 因此涉及 $\mathrm{SO}_n\mathbb{R}$ 上的拉普拉斯算子。在 [9] 中推导流体动力学模型时, 充分利用了 $\mathrm{SO}_3\mathbb{R}$ 的特殊结构（罗德里格公式或如 [11] 中所示的四元数表示）, 因此仅适用于维数为 $n = 3$ 的情形。 [6], 进一步将结果推广到任意维数 n , 但在这种情况下, 相互作用算子被 BGK 型弛豫算子取代, 从而避免处理 $\mathrm{SO}_n\mathbb{R}$ 上的拉普拉斯算子。本文旨在汇集适当的数学框架, 以期将 [9] 的结果推广到任意维数。本文聚焦于旋转群。将其用于 [9] 的模型将留待未来研究。

尽管这里介绍的内容对李群专家来说早已耳熟能详, 但我们未能找到以通俗易懂的方式向非专业人士阐述这些内容的资料。尤其是, 我们没有找到任何地方像下文第3节那样给出径向拉普拉斯算子的表达式。本研究在很大程度上借鉴了 [15] 的论述, 但 [15] 仅限于酉群 SU_n , 因此我们不得不重新处理旋转群的所有细节。将径向拉普拉斯算子作用于不可约表示的特征标（借助 Weyl 特征标公式即可得知）, 便可确定拉普拉斯算子的所有特征值, 详见第4节。参考文献 [18] 对李群和李代数表示作了全面介绍。另一种侧重于紧李群的观点见 [29]。最后, [21, 24], 讨论了径向拉普拉斯算子在拉普拉斯算子谱理论中的作用, 不过其论述较为抽象, 实际应用起来颇为困难。当然, 李群理论是一门非常成熟的学科, 相关书籍和专著不胜枚举。以上仅是其中的一小部分。我们还要提及经典著作 [5, 32]。其他有用的参考文献包括（但不限于） [1, 3, 4, 14, 23, 26, 27, 28]。

本文的组织结构如下。第2节介绍有关旋转群、作用于旋转群上的拉普拉斯算子以及径向拉普拉斯算子的基本记号和事实。第3节致力于计算径向拉普拉斯算子, 第4节则阐述拉普拉斯算子和径向拉普拉斯算子的谱理论。最后, 第5节给出结论。两个附录给出了辅助结果的证明。

2 旋转群上的拉普拉斯算子

下面的介绍较为简略。详情请参阅例如 [15]。我们将 $\mathrm{SO}_n\mathbb{R}$ 记为 $\mathbb{R}^n$ 的旋转群，即 $M_n\mathbb{R}$ 空间中由下式定义的 $n \times n$ 实矩阵的子集：

$$\mathrm{SO}_n\mathbb{R} = \{A \in M_n\mathbb{R} \mid AA^T = A^TA = \mathrm{I}, \quad \det A = 1\},$$

其中，A^T 表示 A的转置，I 是 $\mathbb{R}^n$ 的单位矩阵，而 $\det A$ 是 A的行列式。空间 $M_n\mathbb{R} \approx \mathbb{R}^{2n}$ 是一个向量空间，可以通过以下内积赋予欧几里得结构

$$A \cdot B = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\{A^TB\}, \quad \forall A, B \in M_n\mathbb{R}, \tag{2.1}$$

其中，$\mathrm{Tr}A$表示矩阵 A的迹。注意，(2.1) 是通常的弗罗贝尼乌斯内积乘以因子[1 2]。事实证明，在处理旋转群时，这是一种方便的矩阵内积定义。集合 $\mathrm{SO}_n\mathbb{R}$既是关于矩阵乘法构成的群，也是嵌入在 $M_n\mathbb{R}$ 中的嵌入子流形，其中矩阵乘法为 C^∞。因此，它是一个李群。它在 I 处的切空间是由反对称矩阵构成的李代数 $\mathfrak{so}_n\mathbb{R}$，并赋有李括号 $[P, Q] = PQ - QP$，其中对所有 P、$Q \in \mathfrak{so}_n\mathbb{R}$均成立。它在任意 $A \in \mathrm{SO}_n\mathbb{R}$ 处的切空间为 $T_A\mathrm{SO}_n\mathbb{R} = A\,\mathfrak{so}_n\mathbb{R} = \mathfrak{so}_n\mathbb{R}\,A$。从现在起，我们将 $T_A\mathrm{SO}_n\mathbb{R}$ 简写为 T_A。作为李群，$\mathrm{SO}_n\mathbb{R}$可赋予唯一的（相差一个乘法因子）哈尔测度，即一种在左乘下不变的测度。由于 $\mathrm{SO}_n\mathbb{R}$是紧的，它是一个模群。因此，哈尔测度也在右乘下不变，并且在群求逆下不变，从而也在转置下不变。此外，哈尔测度可以归一化，所得的归一化哈尔测度是唯一的。

作为复数域 $M_n\mathbb{R}$中的嵌入子流形，$\mathrm{SO}_n\mathbb{R}$ 也带有黎曼内积和度量（关于黎曼几何，请参见 [13, 19]）。对于 T_A中的两个元素AP和 AQ，其中 P 和 Q 属于 $\mathfrak{so}_n\mathbb{R}$，黎曼内积定义为 $(AP, AQ) = AP \cdot AQ = P \cdot Q$。在定向流形上，黎曼度量会导出一个黎曼体积形式 ω，从而得到一个正测度，为方便起见记作 $d\omega$。由于任意李群都是可定向的 [31, 第4节 4.3 节，例 (a)]，，$\mathrm{SO}_n\mathbb{R}$ 因此带有一个黎曼体积形式 ω。对于一般的李群，黎曼测度 $d\omega$ 与哈尔测度未必互为常数倍。不过，正如下文引理所述，在 $\mathrm{SO}_n\mathbb{R}$ 上它们确实互为常数倍，该引理的证明见附录 A：

引理 2.1。设 $d\omega$ 和 $d\mu$ 分别为 $\mathrm{SO}_n\mathbb{R}$ 上的黎曼测度和哈尔测度。则存在一个常数 $C_n > 0$，使得 $d\omega = C_n d\mu$。

在黎曼流形上，我们可以定义梯度和散度算子。光滑映射 $\mathrm{SO}_n\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $A \mapsto f(A)$ 在 A 处的梯度是 T_A 的一个元素 $\nabla f(A)$，其定义为

$$\nabla f(A) \cdot X = df_A(X), \quad \forall X \in T_A, \tag{2.2}$$

其中 df_A 是 f 在 A处的微分。我们回顾一下，df_A 是一个线性映射 $T_A \to \mathbb{R}$，而$df_A(X)$ 是切向量 X 在此映射下的像。一个光滑切向量场

ϕ 是一个光滑映射 $\mathrm{SO}_n\mathbb{R} \to M_n\mathbb{R}$, $A \mapsto \phi(A)$，满足 $\phi(A) \in T_A$，对所有 $A \in \mathrm{SO}_n\mathbb{R}$均成立。例如，光滑映射 $\mathrm{SO}_n\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 的梯度是一个光滑向量场。切向量场 ϕ 的散度 $\nabla \cdot \phi$ 通过对偶定义如下：

$$\int_{\mathrm{SO}_n\mathbb{R}} \nabla \cdot \phi \, \psi \, d\omega = -\int_{\mathrm{SO}_n\mathbb{R}} \phi \cdot \nabla\psi \, d\omega,$$

其中， ψ 是从 $\mathrm{SO}_n\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$的任意光滑映射。这里需要注意，积分中使用的是黎曼测度。不过，根据引理 2.1，黎曼测度 $d\omega$ 可以替换为哈尔测度 $d\mu$。

黎曼拉普拉斯算子 Δ_M 定义为梯度与散度的复合，即

$$\Delta_M f = \nabla \cdot (\nabla f).$$

若 ϕ 是一个切向量场，且 f 是 $\mathrm{SO}_n\mathbb{R}$上的实值函数，则微分几何中通常依据 [31, 第 1.22 节，公式 (6)] 将映射 $\phi(f)$、$\mathrm{SO}_n\mathbb{R} \to \mathbb{R}$定义为

$$\phi(f)(A) =: df_A\big(\phi(A)\big) = \nabla f(A) \cdot \phi(A). \tag{2.3}$$

换言之， $\phi(f)(A)$ 是 f 在 A处沿 ϕ 方向的方向导数。对于 $\{1, ...n\}$中的 i、 j，令 $E_{ij} = e_i \otimes e_j \in M_n\mathbb{R}$，其中 e_i是 $\mathbb{R}^n$的第 i个典范基向量，且$\otimes$ 是张量积。换言之，$(E_{ij})_{k\ell} = \delta_{ij}\delta_{k\ell}$，其中 δ 是克罗内克δ。于是，$\big(\sqrt{2}E_{ij}\big)_{(i,\ j)\in\{1,\dots,n\}^2}$ 是 $M_n\mathbb{R}$ 关于内积 (2.1) 的标准正交基。记 P_{T_A} 为 $M_n\mathbb{R}$ 在 T_A上的正交投影。容易验证

$$P_{T_A}M = A\frac{A^TM - M^TA}{2}, \quad \forall M \in M_n\mathbb{R}, \quad \forall A \in \mathrm{SO}_n\mathbb{R}. \tag{2.4}$$

于是，根据 [25, 定理 3.1.4]，我们有

$$\Delta_M f(A) = 2 \sum_{(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2} (P_{T_A}E_{ij})^2(f)(A), \quad \forall A \in \mathrm{SO}_n\mathbb{R}, \tag{2.5}$$

其中，平方表示算子 $P_{T_A}E_{ij}$ （其定义见 (2.3)）作用于 f 两次。可以证明，(2.5) 右端与 $M_n\mathbb{R}$ 的标准正交基的选取无关。显然，如上所述，拉普拉斯算子的这一种定义并不依赖 $\mathrm{SO}_n\mathbb{R}$ 的李群结构。

对于李群，还有另一种拉普拉斯算子的概念（见 [15, 第 8 节2]）。我们首先提醒读者，矩阵指数映射将 $\mathfrak{so}_n\mathbb{R}$ 映入 $\mathrm{SO}_n\mathbb{R}$（实际上是映上，但这里不会用到）。对于任意 $X \in \mathfrak{so}_n\mathbb{R}$， $\rho(X)$ 表示如下线性映射： $C^\infty(\mathrm{SO}_n\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathrm{SO}_n\mathbb{R})$， $f \mapsto \rho(X)f$ ，满足

$$\big(\rho(X)f\big)(A) = \frac{d}{dt}\big(f(Ae^{tX})\big)|_{t=0}.$$

不难看出

$$(\rho(X)f)(A) = df_A(AX) = \nabla f(A) \cdot AX = AX(f). \tag{2.6}$$

特别地， ρ 关于 X是线性的。映射 ρ: $\mathfrak{so}_n\mathbb{R} \to \mathcal{L}\big(C^\infty(\mathrm{SO}_n\mathbb{R})\big)$, $X \mapsto \rho(X)$实际上是一个李代数表示，也就是说，除了满足线性性外，它还满足

$$\rho([X,Y])f = [\rho(X),\rho(Y)]f, \quad \forall X,Y \in \mathfrak{so}_n\mathbb{R}, \quad \forall f \in C^\infty(\mathrm{SO}_n\mathbb{R}),$$

其中 $\mathcal{L}\big(C^\infty(\mathrm{SO}_n\mathbb{R})\big)$ 是从 $C^\infty(\mathrm{SO}_n\mathbb{R})$ 映射到其自身的线性映射空间。现在引入 $F_{ij} = E_{ij} - E_{ji} = e_i \wedge e_j$，其中两个向量 a 和 b 的楔积是它们的反对称化张量积: $a \wedge b = a \otimes b - b \otimes a$。那么，$(F_{ij})_{1\le i<j\le n}$ 是关于内积 (2.1) 的 $\mathfrak{so}_n\mathbb{R}$ 的一组标准正交基。李群拉普拉斯算子 Δ_G 对函数 $f \in C^\infty(\mathrm{SO}_n\mathbb{R})$ 定义如下:

$$(\Delta_G f)(A) = \sum_{1\le i<j\le n} \frac{d^2}{dt^2} f(Ae^{tF_{ij}})\Big|_{t=0} = \sum_{1\le i<j\le n} \big(\rho(F_{ij})^2 f\big)(A). \tag{2.7}$$

可以证明，标准正交基 $(F_{ij})_{1\le i<j\le n}$ 可以替换为 $\mathfrak{so}_n\mathbb{R}$的任意其他标准正交基，而不改变算子 Δ_G。

分别用“Ad”和“ad”表示 $\mathrm{SO}_n\mathbb{R}$ 和 $\mathfrak{so}_n\mathbb{R}$的伴随表示。Ad 将 $\mathrm{SO}_n\mathbb{R}$ 映射到群 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{so}_n\mathbb{R})$（即 $\mathfrak{so}_n\mathbb{R}$ 的自同构群）中，而 ad 则将 $\mathfrak{so}_n\mathbb{R}$ 线性地映射到空间 $\mathcal{L}(\mathfrak{so}_n\mathbb{R})$，即 $\mathfrak{so}_n\mathbb{R}$ 的自同态空间。它们分别对 $A \in \mathrm{SO}_n\mathbb{R}$ 和 $X, Y \in \mathfrak{so}_n\mathbb{R}$ 定义如下:

$$\mathrm{Ad}(A)(Y) = AYA^{-1}, \quad \mathrm{ad}(X)(Y) = [X,Y] = XY - YX.$$

Ad 是 $\mathrm{SO}_n\mathbb{R}$ 的李群表示，而 ad 是 $\mathfrak{so}_n\mathbb{R}$的李代数表示，也就是说，它们满足

$$\mathrm{Ad}(A)\mathrm{Ad}(B) = \mathrm{Ad}(AB), \quad [\mathrm{ad}(X),\mathrm{ad}(Y)] = \mathrm{ad}([X,Y]),$$

对所有的 $A, B \in \mathrm{SO}_n\mathbb{R}$ 以及所有的 $X, Y \in \mathfrak{so}_n\mathbb{R}$均成立。后一个公式是利用李括号的反交换性对雅可比恒等式的重新表述。现在，对于 $A \in \mathrm{SO}_n\mathbb{R}$，我们有 $A^{-1} = A^T$，因此 $\mathfrak{so}_n\mathbb{R}$ 上的内积满足

$$\mathrm{Ad}(A)(X) \cdot \mathrm{Ad}(A)(Y) = X \cdot Y, \quad \mathrm{ad}(Z)(X) \cdot Y + X \cdot \mathrm{ad}(Z)(Y) = 0. \tag{2.8}$$

满足 (2.8) 的内积称为不变内积。此外，记 L和 R 为 $\mathrm{SO}_n\mathbb{R}$ 在 $C^\infty(\mathrm{SO}_n\mathbb{R})$ 上的左正则表示和右正则表示，它们对任意$A, B \in \mathrm{SO}_n\mathbb{R}$ 以及任意 $f \in C^\infty(\mathrm{SO}_n\mathbb{R})$ 定义为 $(L(B)f)(A) = f(B^{-1}A)$ 和 $(R(B)f)(A) = f(AB)$。我们有 $L(B)(\Delta_G f) = \Delta_G(L(B)f)$，这意味着李群拉普拉斯算子是左不变的。由于 $\mathfrak{so}_n\mathbb{R}$ 上的内积是不变的（见 (2.8)），我们有$R(B)(\Delta_G f) = \Delta_G(R(B)f)$，这意味着李群拉普拉斯算子也是右不变的。

事实证明，正如下述引理所述，拉普拉斯算子的这两个概念在 $\mathrm{SO}_n\mathbb{R}$ 上是一致的。该引理的证明见附录 B。

引理 2.2。我们有 $\Delta_M = \Delta_G$。

因此，我们可以省略 Δ 的下标 M 或 G。

若且唯若存在$g \in \mathrm{SO}_n\mathbb{R}$ 使得 $B = gAg^{-1}$，则称 $\mathrm{SO}_n\mathbb{R}$ 中的两个元素 A和 B 共轭。共轭是一种等价关系；当 A 和 B 共轭时，我们记作$A \sim B$ 。类函数是定义在 $\mathrm{SO}_n\mathbb{R}$ 上的、在共轭作用下不变的函数，即满足：

$$f(gAg^{-1}) = f(A), \quad \forall A,\, g \in \mathrm{SO}_n\mathbb{R}.$$

因此，类函数只依赖于共轭类。得益于矩阵约化的经典结果，$\mathrm{SO}_n\mathbb{R}$ 上的共轭类是众所周知的。设 $\theta \in \mathbb{R}$。我们将平面旋转矩阵 R_θ 定义为

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

For $(\theta_1, \ldots, \theta_p) \in \mathbb{R}^p$, $A_{\theta_1,\ldots,\theta_p}$表示由块定义的以下矩阵 :

- 在 $n = 2p$, $p \geq 2$的情况下,

$$A_{\theta_1,\ldots,\theta_p} = \begin{pmatrix} R_{\theta_1} & & & 0 \\ & R_{\theta_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & R_{\theta_p} \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}_{2p}\mathbb{R}, \tag{2.9}$$

- 在 $n = 2p + 1$, $p \geq 1$的情况下,

$$A_{\theta_1,\ldots,\theta_p} = \begin{pmatrix} R_{\theta_1} & & & 0 & 0 \\ & R_{\theta_2} & & & \vdots \\ & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & R_{\theta_p} & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}_{2p+1}\mathbb{R}. \tag{2.10}$$

我们记 $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p) \in \mathbb{R}^p$。我们将 $\mathrm{SO}_{2p}\mathbb{R}$ 或 $\mathrm{SO}_{2p+1}\mathbb{R}$ 的子集 $\mathbb{T}$ 定义为

$$\mathbb{T} = \{A_\Theta \mid \Theta \in \mathbb{R}^p\}.$$

$\mathbb{T}$ 是 $\mathrm{SO}_{2p}\mathbb{R}$ 或 $\mathrm{SO}_{2p+1}\mathbb{R}$ 的阿贝尔子群。考虑映射 ψ: $\Theta \to A_\Theta$。由于我们有 $A_\Theta A_{\Theta'} = A_{\Theta+\Theta'}$, $A_0 = \mathrm{I}$, ψ 是一个满射群同态 $\mathbb{R}^p \to \mathbb{T}$ ，其核为$\tilde{}(2\pi\mathbb{Z})^p$。因此，它诱导出一个群同构 ψ, $\mathcal{T} =: (\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}))^p \to \mathbb{T}$。注意，$\mathcal{T} \cong (\mathbb{S}^1)^p$ 是一个 p 维环面。可以证明， $\mathbb{T}$ 是 $\mathrm{SO}_n\mathbb{R}$ 的阿贝尔子群中极大的一个。因此，它被称为极大环面。

于是，根据矩阵约化理论，$\mathrm{SO}_{2p}\mathbb{R}$或 $\mathrm{SO}_{2p+1}\mathbb{R}$ 中的任意元素都与 $\mathbb{T}$中的某个元素共轭。设 f 是 $\mathrm{SO}_{2p}\mathbb{R}$ 或 $\mathrm{SO}_{2p+1}\mathbb{R}$上的一个 C^∞ 类函数。定义$\varphi_f(\Theta) = f(A_\Theta)$，我们有

$$f(A) = \varphi_f(\Theta), \quad \forall A \text{ such that } A \sim A_\Theta, \tag{2.11}$$

以及 $\varphi_f \in C^\infty(\mathcal{T})$。因此，要了解一个类函数，只需了解 $\Theta \in \mathcal{T}$的一个函数。这大幅降低了复杂度。

然而， $\mathbb{T}$ 中与给定的 A 共轭的元素并不唯一。这些元素的列表在偶数维和奇数维情形下有所不同:

- 在 $\mathrm{SO}_{2p}\mathbb{R}$ 的情形下，$(\theta_1, \ldots, \theta_p)$ 可以进行 $\{1, \ldots, p\}$ 的任意置换。对 θ_i 和 θ_j 进行置换，相当于通过置换矩阵进行共轭；该矩阵一方面交换 e_{2i-1} 和 e_{2j-1}，另一方面交换 e_{2i} 和 e_{2j}。由于相应的置换是两个对换的乘积，其符号为 $+1$，因此相应的置换矩阵是 $\mathrm{SO}_{2p}\mathbb{R}$ 的一个元素。但也可以一方面交换 e_{2i-1} 和 e_{2i}，另一方面交换 e_{2j-1} 和 e_{2j}。同样，相应的置换矩阵是 $\mathrm{SO}_{2p}\mathbb{R}$ 的一个元素，用它对 A_Θ进行共轭，相当于作如下变换：$(\ldots, \theta_i, \ldots, \theta_j, \ldots) \to (\ldots, -\theta_i, \ldots, -\theta_j, \ldots)$。注意，我们不能直接用对应于交换 e_{2i-1} 和 e_{2i} 的单个对换的置换矩阵进行共轭，因为相应的矩阵的行列式为 -1，不属于 $\mathrm{SO}_{2p}\mathbb{R}$。因此，只允许改变 θ_i中的偶数个符号。我们将由以下变换生成的双射$\mathcal{T} \to \mathcal{T}$群记作 $\mathcal{G}$：$(\ldots, \theta_i, \ldots, \theta_j, \ldots) \to (\ldots, \theta_j, \ldots, \theta_i, \ldots)$ 和 $(\ldots, \theta_i, \ldots, \theta_j, \ldots) \to (\ldots, -\theta_i, \ldots, -\theta_j, \ldots)$，其中 (i, j) 遍历 $\{1, \ldots, p\}$ 中满足 $i \neq j$ 的所有整数对。

- 对于 $\mathrm{SO}_{2p+1}\mathbb{R}$，出于与偶数维情形相同的原因，$(\theta_1, \ldots, \theta_p)$ 仍可对 $\{1, \ldots, p\}$进行任意置换。不过，也可以用一个交换 e_{2i-1} 和 e_{2i}、且最后一个对角元为 -1 的矩阵进行共轭（这在奇数维情形中是不可能的）。该矩阵的行列式为 1，因此属于 $\mathrm{SO}_{2p+1}\mathbb{R}$。用它对 A_Θ 进行共轭，相当于作如下变换：$(\ldots, \theta_i, \ldots) \to (\ldots, -\theta_i, \ldots)$。因此，在这种情形下，$\theta_i$可以任意改变个数的符号。在这种情形下，$\mathcal{G}$ 由以下变换生成：$(\ldots, \theta_i, \ldots, \theta_j, \ldots) \to (\ldots, \theta_j, \ldots, \theta_i, \ldots)$，其中 (i, j) 遍历 $\{1, \ldots, p\}$ 中的所有整数对，满足 $i \neq j$；此外还由 $(\ldots, \theta_i, \ldots) \to (\ldots, -\theta_i, \ldots)$ 生成，其中 i 遍历 $\{1, \ldots, p\}$中的所有整数。

在偶数维和奇数维情形中，将 $\mathbb{T}$ 中的两个元素相互映射的所有共轭作用，均由上述共轭作用生成。为说明这一点，我们引入 $\mathrm{SO}_n\mathbb{R}$ 中所有能将 $\mathbb{T}$ 中的一个元素共轭到 $\mathbb{T}$中某个元素的元素所组成的集合。这个集合是一个群，称为 $\mathbb{T}$ 的正规化子，其定义为

$$N(\mathbb{T}) = \left\{ g \in \mathrm{SO}_n\mathbb{R} \mid g\mathbb{T}g^{-1} = \mathbb{T} \right\}.$$

引入群同态 Φ: $N(\mathbb{T}) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{T})$, $g \mapsto \Phi_g$（其中 $\mathrm{Aut}(\mathbb{T})$ 表示 $\mathbb{T}$ 的群自同构群），使得 $\Phi_g(h) = ghg^{-1}$, $\forall h \in \mathbb{T}$。该同态的核为 $\mathbb{T}$（显然有 $\mathbb{T} \subset \ker\Phi$。反过来，则是因为 $\mathbb{T}$ 是 $\mathrm{SO}_n\mathbb{R}$ 的极大阿贝尔子群。因此，Φ 诱导出一个群同构 $\tilde{}$: $N(\mathbb{T})/\mathbb{T} \to \mathrm{im}(\Phi) \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{T})$。现在，定义同构 Ψ: $\tilde{} \quad \tilde{} \quad \tilde{}\mathrm{Aut}(\mathbb{T}) \to \mathrm{Aut}(\mathcal{T})$, $\varphi \mapsto \psi^{-1} \circ \varphi \circ \psi$, $\forall \varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{T})$，其中 ψ: $\mathcal{T} \to \mathbb{T}$ 已在上文定义。于是，$\Psi \circ \Phi$ 是 $N(\mathbb{T})/\mathbb{T}$ 与由共轭作用诱导的 $\mathcal{T}$ 变换群之间的一个同构。事实证明，群 $N(\mathbb{T})/\mathbb{T}$ 是一个熟知的

与 Weyl 群同构。 $\mathfrak{W}$ [18, 命题 26。15]。 $\mathfrak{W}$ 是空间 $\mathbb{R}^p$ 的正交群的有限子群。若 $\mathbb{R}^p$ 取典范基 $(e_i)_{i=1}^p$，则 $\mathfrak{W}$ 由超平面 $\{e_i \pm e_j\}^\perp$ 上的正交对称变换生成，其中i, $j \in \{1, \ldots, p\}$, $i \neq j$适用于 $n = 2p$ 的情形；而在 $n = 2p+1$ [18, p 的情形下，则由超平面 $\{e_i \pm e_j\}^\perp$ 和 $\{e_i\}^\perp$ 上的正交对称变换生成。 271]。但很容易验证，上文定义的 $\mathcal{T}$ 的变换群 $\mathcal{G}$ 也由相同的变换生成。因此， $\mathcal{G} = \mathfrak{W}$ 这就证明了该命题。

由此可知，若 $f \in C^\infty$ 是类函数，则通过 (2.11) 与之关联的函数 $\varphi_f \in C^\infty(\mathcal{T})$ 必须在 $\mathfrak{W}$ 的作用下保持不变。因此， φ_f 是定义在商空间 $\mathcal{T}' =: \mathcal{T}/\mathfrak{W}$上的函数。为简便起见，我们将省略撇号，从现在起， $\mathcal{T}$实际上表示 $\mathcal{T}'$。

现在，由于 Δ 左不变且右不变，它在共轭作用下保持不变（事实上，由 g 进行共轭等于复合 $L(g^{-1})R(g^{-1})$）。由此可知，若 f 是类函数，则 Δf 也是类函数。对于任意 $\varphi \in C^\infty(\mathcal{T})$, 存在唯一的函数 $f \in C^\infty(\mathrm{SO}_n\mathbb{R})$，使得 $\varphi = \varphi_f$。事实上，对于任意满足 $A \sim A_\Theta$的 Θ， f由 $f(A) = \varphi(\Theta)$ 给出。然后，我们可以定义一个线性算子 $L\colon\ C^\infty(\mathcal{T}) \to C^\infty(\mathcal{T})$，其定义为

$$L\varphi_f = \varphi_{\Delta f}, \quad \forall f \in C^\infty(\mathbb{T}).$$

算子 L 称为径向拉普拉斯算子。本文旨在求出 L 的显式表达式，并阐述其若干性质。

3 径向拉普拉斯算子

3.1 表达式

径向拉普拉斯算子的表达式如下：

定理 3.1. 旋转群上的径向拉普拉斯算子由以下表达式给出：

(i) $\mathrm{SO}_{2p}\mathbb{R}$ 在 $p \geq 2$的情形：

$$L = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial^2}{\partial\theta_j^2} + \sum_{1\leq j<k\leq p} \frac{2}{\cos\theta_k - \cos\theta_j} \Big(\big(\sin\theta_j \frac{\partial}{\partial\theta_j} - \sin\theta_k \frac{\partial}{\partial\theta_k} \big) \Big); \tag{3.1}$$

（ii） $p \geq 1$ 时 $\mathrm{SO}_{2p+1}\mathbb{R}$ 的情形：

$$\begin{aligned} L = \sum_{j=1}^{p} \Big(\frac{\partial^2}{\partial\theta_j^2} + \frac{\sin\theta_j}{1-\cos\theta_j} \frac{\partial}{\partial\theta_j} \Big) \\ + \sum_{1\leq j<k\leq p} \frac{2}{\cos\theta_k - \cos\theta_j} \Big(\big(\sin\theta_j \frac{\partial}{\partial\theta_j} - \sin\theta_k \frac{\partial}{\partial\theta_k} \big) \Big). \end{aligned} \tag{3.2}$$

我们注意到，在 $p = 1$ 的情况下，式 (3.2) 中的第二个求和项会直接消失。我们不讨论 $\mathrm{SO}_2\mathbb{R}$ 的情形，因为该群是阿贝尔群，这种情况是平凡的。

为证明该定理，我们将首先回顾 $\mathrm{SO}_3\mathbb{R}$ 和 $\mathrm{SO}_4\mathbb{R}$ 的情形，然后将分析推广到一般情形 $\mathrm{SO}_{2p}\mathbb{R}$ 和 $\mathrm{SO}_{2p+1}\mathbb{R}$。我们将采用 [15] 中介绍的方法（参见命题 8.3.3 的证明和第 10.2 节）。该方法依赖于以下引理：

引理 3.2. 若 f 是 $\mathrm{SO}_n\mathbb{R}$ 上的类函数，则对所有 $X \in \mathfrak{so}_n\mathbb{R}$ 以及所有 $A \in \mathrm{SO}_n\mathbb{R}$，有

$$\rho\big(Ad(A^{-1})X - X\big)^2 f(A) - \rho\big([Ad(A^{-1})X, X]\big) f(A) = 0. \tag{3.3}$$

证明. 若 f是类函数，则对所有 $A \in \mathrm{SO}_n\mathbb{R}$ 以及所有 $X \in \mathfrak{so}_n\mathbb{R}$，有 $f(A) = f(e^{tX}Ae^{-tX})$。此公式可改写为 $f(A) = f(Ae^{t\mathrm{Ad}(A^{-1})X}e^{-tX})$。对该公式关于 t 在 $t = 0$ 处求二阶导数，并利用

$$\frac{d^2}{dt^2} f(Ae^{tX}e^{tY})\big|_{t=0} = \rho(X+Y)^2 f(A) + \rho\big([X,Y]\big) f(A), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{so}_n\mathbb{R}, \tag{3.4}$$

我们得到 (3.3)。式 (3.4) 已在 [15, 第 8.2 (d) 节]中证明。 ∎

我们将使用以下公式，其证明显而易见：

$$[F_{ij}, F_{k\ell}] = \big(\delta_{jk}F_{i\ell} + \delta_{i\ell}F_{jk} - \delta_{ik}F_{j\ell} - \delta_{j\ell}F_{ik}\big). \tag{3.5}$$

我们还将用记号 $\{A, B\}$ 表示两个算子 A、B的反对易子，即

$$\{A, B\} = AB + BA.$$

3.2 定理 3.1 的证明：$\mathrm{SO}_3\mathbb{R}$ 的情形

这是 $\mathrm{SO}_{2p+1}\mathbb{R}$ 且具有 $p = 1$ 的情形。因此，矩阵 (2.10) 只有一个块 R_θ。所以，向量 Θ 只有一个坐标 θ，我们用记号 A_θ 表示 A_Θ。设 f 是 $\mathrm{SO}_3\mathbb{R}$ 上的一个 C^∞ 类函数，$\varphi_f = \varphi_f(\theta)$ 是相应的 θ 函数。

定义

$$\begin{aligned} G^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(F_{13} + F_{23}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \otimes e_3 + e_2 \otimes e_3 - e_3 \otimes e_1 - e_3 \otimes e_2), \\ G^- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(F_{13} - F_{23}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \otimes e_3 - e_2 \otimes e_3 - e_3 \otimes e_1 + e_3 \otimes e_2). \end{aligned}$$

于是，(F_{12}, G^+, G^-) 仍然是 $\mathfrak{so}_3\mathbb{R}$ 的标准正交基。我们选取这个基来表示 $\mathrm{SO}_3\mathbb{R}$ 上 C^∞ 函数 f 的拉普拉斯算子：

$$\Delta f(A) = \big(\rho(F_{12})^2 f\big)(A) + \big(\rho(G^+)^2 f\big)(A) + \big(\rho(G^-)^2 f\big)(A). \tag{3.6}$$

现在依次对 $A = A_\theta$、$X = G^+$ 和 $X = G^-$ 使用 (3.3)。我们得到

$$\mathrm{Ad}(A_{-\theta})G^+ = \cos\theta\, G^+ + \sin\theta\, G^-, \quad \mathrm{Ad}(A_{-\theta})G^- = -\sin\theta\, G^+ + \cos\theta\, G^-.$$

那么，利用映射 $X \mapsto (\rho(X)f)(A)$ 的线性性，对任意 $A \in \mathrm{SO}_2\mathbb{R}$，我们得到 t:

$$\begin{aligned}
\rho\big(\mathrm{Ad}(A_{-\theta})G^+ - G^+\big)^2 f(A_\theta) &= \Big(\big((\cos\theta-1)^2\,\rho(G^+)^2 + \sin^2\theta\,\rho(G^-)^2 \\
&\qquad +(\cos\theta-1)\,\sin\theta\,\{\rho(G^+),\rho(G^-)\}\big)f\Big)(A_\theta), \\
\rho\big(\mathrm{Ad}(A_{-\theta})G^- - G^-\big)^2 f(A_\theta) &= \Big(\big((\cos\theta-1)^2\,\rho(G^-)^2 + \sin^2\theta\,\rho(G^+)^2 \\
&\qquad -(\cos\theta-1)\,\sin\theta\,\{\rho(G^+),\rho(G^-)\}\big)f\Big)(A_\theta).
\end{aligned}$$

此外，利用 (3.5)，我们得到

$$\begin{aligned}
[\mathrm{Ad}(A_{-\theta})G^+, G^+] &= [\mathrm{Ad}(A_{-\theta})G^-, G^-] = \sin\theta\,[G^-, G^+] \\
&= \sin\theta\,[F_{13}, F_{23}] = -\sin\theta\,F_{12}.
\end{aligned}$$

因此，将对应于 G^+ 和 G^- 的方程 (3.3) 相加，得到

$$2(1-\cos\theta)\Big(\big(\rho(G^+)^2 + \rho(G^-)^2\big)f\Big)(A_\theta) = -2\,\sin\theta\,\big(\rho(F_{12})f\big)(A_\theta). \tag{3.7}$$

因此，由 (3.6) 可得

$$(\Delta f)(A_\theta) = \Big(\big(\rho(F_{12})^2 - \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\,\rho(F_{12})\big)f\Big)(A_\theta). \tag{3.8}$$

现在，我们注意到 $e^{tF_{12}} = A_{-t}$。因此，根据 ρ 的定义：

$$\begin{aligned}
\big(\rho(F_{12})f\big)(A_\theta) &= \frac{d}{dt} f(A_\theta e^{tF_{12}})\big|_{t=0} = \frac{d}{dt} f(A_{\theta-t})\big|_{t=0} &(3.9)\\
&= \frac{d}{dt}\varphi_f(\theta-t)\big|_{t=0} = -\frac{d}{d\theta}\varphi_f(\theta). &(3.10)
\end{aligned}$$

将这个表达式代入 (3.8)，得到 $\mathrm{SO}_3\mathbb{R}$ 上的径向拉普拉斯算子的表达式：

$$L = \big(\frac{d^2}{d\theta^2} + \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\,\frac{d}{d\theta}\big),$$

这对应于 $p=1$ 情形下的 (3.2)。 ∎

3.3 定理 3.1 的证明：$\mathrm{SO}_4\mathbb{R}$ 情形

这是 $\mathrm{SO}_{2p}\mathbb{R}$ 且 $p=2$ 的情形。因此，矩阵 (2.9) 有两个块 R_{θ_1} 和 R_{θ_2}。所以，$\Theta = (\theta_1, \theta_2)$。设 f 是 $\mathrm{SO}_4\mathbb{R}$ 上的 C^∞ 类函数，且 $\varphi_f = \varphi_f(\theta_1, \theta_2)$ 是 (θ_1, θ_2) 对应的函数。

现在我们定义

$$\begin{aligned}
H^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(F_{13}+F_{24}), \quad H^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(F_{13}-F_{24}), \\
K^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(F_{14}+F_{23}), \quad K^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(F_{14}-F_{23})
\end{aligned}$$

那么，$(F_{12}, F_{34}, H^+, H^-, K^+, K^-)$ 仍然是 $\mathfrak{so}_4\mathbb{R}$ 的标准正交基。我们选用这个基来表示 $\mathrm{SO}_4\mathbb{R}$ 上的 C^∞ 函数 f 的拉普拉斯算子：

$$\Delta f(A) = \Big(\big(\rho(F_{12})^2 + \rho(F_{34})^2 + \rho(H^+)^2 + \rho(H^-)^2 + \rho(K^+)^2 + \rho(K^-)^2\big) f \Big)(A). \quad (3.11)$$

现在我们依次将 (3.3) 与 $A = A_{\theta_1,\theta_2}$ 以及 $X = H^+, H^-, K^+, K^-$ 结合使用。得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ad}(A_{-\theta_1,-\theta_2})H^+ &= (c_1c_2 + s_1s_2)H^+ - (c_1s_2 - s_1c_2)K^-,\\
\mathrm{Ad}(A_{-\theta_1,-\theta_2})H^- &= (c_1c_2 - s_1s_2)H^- - (c_1s_2 + s_1c_2)K^+,\\
\mathrm{Ad}(A_{-\theta_1,-\theta_2})K^+ &= (c_1s_2 + s_1c_2)H^- + (c_1c_2 - s_1s_2)K^+,\\
\mathrm{Ad}(A_{-\theta_1,-\theta_2})K^- &= (c_1s_2 - s_1c_2)H^+ + (c_1c_2 + s_1s_2)K^-,
\end{aligned}$$

其中 $c_i = \cos\theta_i$, $s_i = \sin\theta_i$，适用于 $i = 1, 2$。于是得到：

$$\begin{aligned}
\rho\big(\mathrm{Ad}(A_{-\theta_1,-\theta_2})H^+ - H^+\big)^2 f(A_{\theta_1,\theta_2}) = \Big(&\big((c_1c_2 + s_1s_2 - 1)^2 \rho(H^+)^2\\
&+(c_1s_2 - s_1c_2)^2 \rho(K^-)^2\\
&-(c_1c_2 + s_1s_2 - 1)(c_1s_2 - s_1c_2)\big\{\rho(H^+), \rho(K^-)\big\}\big) f\Big)(A_{\theta_1,\theta_2}),\\
\rho\big(\mathrm{Ad}(A_{-\theta_1,-\theta_2})H^- - H^-\big)^2 f(A_{\theta_1,\theta_2}) = \Big(&\big((c_1c_2 - s_1s_2 - 1)^2 \rho(H^-)^2\\
&+(c_1s_2 + s_1c_2)^2 \rho(K^+)^2\\
&-(c_1c_2 - s_1s_2 - 1)(c_1s_2 + s_1c_2)\big\{\rho(H^-), \rho(K^+)\big\}\big) f\Big)(A_{\theta_1,\theta_2}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho\big(\mathrm{Ad}(A_{-\theta_1,-\theta_2})K^+ - K^+\big)^2 f(A_{\theta_1,\theta_2}) = \Big(&\big((c_1s_2 + s_1c_2)^2 \rho(H^-)^2\\
&+(c_1c_2 - s_1s_2 - 1)^2 \rho(K^+)^2\\
&+(c_1s_2 + s_1c_2)(c_1c_2 - s_1s_2 - 1)\big\{\rho(H^-), \rho(K^+)\big\}\big) f\Big)(A_{\theta_1,\theta_2}),\\
\rho\big(\mathrm{Ad}(A_{-\theta_1,-\theta_2})K^- - K^-\big)^2 f(A_{\theta_1,\theta_2}) = \Big(&\big((c_1s_2 - s_1c_2)^2 \rho(H^+)^2\\
&+(c_1c_2 + s_1s_2 - 1)^2 \rho(K^-)^2\\
&+(c_1s_2 - s_1c_2)(c_1c_2 + s_1s_2 - 1)\big\{\rho(H^+), \rho(K^-)\big\}\big) f\Big)(A_{\theta_1,\theta_2}).
\end{aligned}$$

此外，利用 (3.5)，我们得到

$$\begin{aligned}
[\mathrm{Ad}(A_{-\theta_1,-\theta_2})H^+, H^+] = [\mathrm{Ad}(A_{-\theta_1,-\theta_2})K^-, K^-] &= -(c_1s_2 - s_1c_2)[K^-, H^+]\\
&= (c_1s_2 - s_1c_2)(F_{12} - F_{34}),\\
[\mathrm{Ad}(A_{-\theta_1,-\theta_2})H^-, H^-] = [\mathrm{Ad}(A_{-\theta_1,-\theta_2})K^+, K^+] &= -(c_1s_2 + s_1c_2)[K^+, H^-]\\
&= -(c_1s_2 + s_1c_2)(F_{12} + F_{34}),
\end{aligned}$$

因此，将分别对应于 H^+ 和 K^- （以及 H^- 和 K^+）的方程 (3.3) 相加，得到

$$\begin{aligned}
\Big(\big(\rho(H^+)^2 + \rho(K^-)^2\big) f\Big)(A_{\theta_1,\theta_2}) &= \frac{\sin(\theta_2 - \theta_1)}{1 - \cos(\theta_2 - \theta_1)} \Big(\big(\rho(F_{12}) - \rho(F_{34})\big) f\Big)(A_{\theta_1,\theta_2}),\\
\Big(\big(\rho(H^-)^2 + \rho(K^+)^2\big) f\Big)(A_{\theta_1,\theta_2}) &= -\frac{\sin(\theta_1 + \theta_2)}{1 - \cos(\theta_1 + \theta_2)} \Big(\big(\rho(F_{12}) + \rho(F_{34})\big) f\Big)(A_{\theta_1,\theta_2}),
\end{aligned}$$

因此，结合 (3.11)，可得

$$(\Delta f)(A_{\theta_1,\theta_2}) = \Big(\Big(\rho(F_{12})^2 + \rho(F_{34})^2 + \frac{\sin(\theta_2-\theta_1)}{1-\cos(\theta_2-\theta_1)}\big(\rho(F_{12})-\rho(F_{34})\big) - \frac{\sin(\theta_1+\theta_2)}{1-\cos(\theta_1+\theta_2)}\big(\rho(F_{12})+\rho(F_{34})\big)\Big) f\Big)(A_{\theta_1,\theta_2}). \tag{3.12}$$

现在，类似于 (3.10)，我们有

$$\big(\rho(F_{12})f\big)(A_{\theta_1,\theta_2}) = -\frac{\partial\varphi_f}{\partial\theta_1}(\theta_1,\theta_2), \quad \big(\rho(F_{34})f\big)(A_{\theta_1,\theta_2}) = -\frac{\partial\varphi_f}{\partial\theta_2}(\theta_1,\theta_2).$$

将其代入 (3.12) 得到

$$\begin{aligned} L &= \frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial\theta_2^2} + \frac{\sin(\theta_1-\theta_2)}{1-\cos(\theta_1-\theta_2)}\big(\frac{\partial}{\partial\theta_1} - \frac{\partial}{\partial\theta_2}\big) \\ &\quad + \frac{\sin(\theta_1+\theta_2)}{1-\cos(\theta_1+\theta_2)}\big(\frac{\partial}{\partial\theta_1} + \frac{\partial}{\partial\theta_2}\big). \end{aligned}$$

这可以改写为

$$L = \frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial\theta_2^2} + \frac{2}{\cos\theta_2 - \cos\theta_1}\big(\sin\theta_1\,\frac{\partial}{\partial\theta_1} - \sin\theta_2\,\frac{\partial}{\partial\theta_2}\big),$$

这对应于 $p=1$ 情形下的 (3.1)。 ∎

3.4 定理 3.1 的证明：$\mathsf{SO}_{2p}\mathbb{R}$, $p \geq 1$ 情形

对于 $1 \leq j < k \leq p$，我们定义

$$H_{jk}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(F_{2j-1\,2k-1} + F_{2j\,2k}), \quad H_{jk}^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(F_{2j-1\,2k-1} - F_{2j\,2k}), \tag{3.13}$$

$$K_{jk}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(F_{2j-1\,2k} + F_{2j\,2k-1}), \quad K_{jk}^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(F_{2j-1\,2k} + F_{2j\,2k-1}). \tag{3.14}$$

那么，$\big((F_{2j-1\,2j})_{j=1,\dots,p},\ (H_{jk}^+, H_{jk}^-, K_{jk}^+, K_{jk}^-)_{1\leq j<k\leq p}\big)$ 仍然是 $\mathfrak{so}_{2p}\mathbb{R}$的标准正交基。我们选用这组基来表示 $\mathsf{SO}_{2p}\mathbb{R}$ 上 C^∞ 函数 f 的拉普拉斯算子：

$$\Delta f(A) = \Big(\Big(\sum_{j=1}^{p}\rho(F_{j\,j+1})^2 + \sum_{1\leq j<k\leq p}\big(\rho(H_{jk}^+)^2 + \rho(H_{jk}^-)^2 + \rho(K_{jk}^+)^2 + \rho(K_{jk}^-)^2\big)\Big) f\Big)(A). \tag{3.15}$$

注意，计算 $\mathsf{Ad}(A_{-\Theta})H_{jk}^\pm$ 和 $\mathsf{Ad}(A_{-\Theta})K_{jk}^\pm$ 时，只涉及与行索引和列索引分别属于 $\{2j-1, 2j\}\times\{2j-1,2j\}$, $\{2j-1,2j\}\times\{2k-1,2k\}$, $\{2k-1,2k\}\times\{2j-1,2j\}$ 和 $\{2k-1, 2k\}\times\{2k-1,2k\}$ 对应的四个 2×2 矩阵子块。因此，计算可简化为对 4×4 矩阵进行计算

这些计算与 $\mathrm{SO}_4\mathbb{R}$ 情形中的计算完全相同。因此，我们可以直接写出，对于任意 $1 \le j < k \le p$，有

$$\Big(\big(\rho(H^+_{jk})^2 + \rho(K^-_{jk})^2 + \rho(H^-_{jk})^2 + \rho(K^+_{jk})^2\big) f\Big)(A_\Theta) \tag{3.16}$$

$$= -\frac{2}{\cos\theta_k - \cos\theta_j}\Big(\big(\sin\theta_j\,\rho(F_{2j-1\,2j}) - \sin\theta_k\,\rho(F_{2k-1\,2k})\big) f\Big)(A_\Theta). \tag{3.17}$$

现在，与 (3.10) 类似，对于 $j \in \{1,\dots,p\}$，我们有

$$\big(\rho(F_{2j-1\,2j}) f\big)(A_\Theta) = -\frac{\partial \varphi_f}{\partial \theta_j}(\Theta).$$

将这些代入 (3.15)，得到 (3.1)。 ∎

3.5 定理 3.1 的证明：$\mathrm{SO}_{2p+1}\mathbb{R}$, $p \ge 1$ 的情形

对于 $1 \le j < k \le p$，我们以与 (3.13)、(3.14) 类似的方式定义 $H^\pm_{jk}$ 和 $K^\pm_{jk}$。对于 $j \in \{1,\dots,p\}$，我们定义

$$G^+_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(F_{2j-1\,2p+1} + F_{2j\,2p+1}), \quad G^-_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(F_{2j-1\,2p+1} - F_{2j\,2p+1}).$$

那么，$\big((F_{2j-1\,2j}, G^+_j, G^-_j)_{j=1,\dots,p}, (H^+_{jk}, H^-_{jk}, K^+_{jk}, K^-_{jk})_{1\le j<k\le p}\big)$ 仍然是 $\mathfrak{so}_{2p+1}\mathbb{R}$的一个标准正交基。我们选取这个基来表示 $\mathrm{SO}_{2p+1}\mathbb{R}$ 上的 C^∞ 函数 f 的拉普拉斯算子：

$$\begin{aligned}\Delta f(A) \;=\; &\Big(\Big(\sum_{j=1}^{p}\big(\rho(F_{j\,j+1})^2 + \rho(G^+_j)^2 + \rho(G^-_j)^2\big)\\ &+ \sum_{1\le j<k\le p}\big(\rho(H^+_{jk})^2 + \rho(H^-_{jk})^2 + \rho(K^+_{jk})^2 + \rho(K^-_{jk})^2\big)\Big) f\Big)(A).\end{aligned} \tag{3.18}$$

涉及 $H^\pm_{jk}$ 和 $K^\pm_{jk}$ 的计算与上一节相同。涉及 $G^\pm_j$ 的计算与第 3.2 节中对 $\mathrm{SO}_3\mathbb{R}$所做的计算相同。因此，对于所有 $j \in \{1,\dots,p\}$，我们可以汇总 $1 \le j < k \le p$ 的 (3.17)，以及将 $G^\pm$ 替换为 $G^\pm_j$ 、 θ 替换为 θ_j 、 F_{12} 替换为$F_{2j-1\,2j}$后的 (3.7)，从而得到 (3.2)。 ∎

4 径向拉普拉斯算子的一些性质

4.1 其他表达式

作为本节的预备内容，我们陈述 Weyl积分公式 [29, 定理 IX.9.4 和 IX.9.5]。我们引入以下函数：

$$\Pi_{2p}(\Theta) \;=\; \prod_{1\le j<k\le p}\big(\cos\theta_j - \cos\theta_k\big), \quad \text{for } p \ge 2, \tag{4.1}$$

$$\Pi_{2p+1}(\Theta) \;=\; \prod_{1\le j<k\le p}\big(\cos\theta_j - \cos\theta_k\big)\prod_{j=1}^{p}\sin\frac{\theta_j}{2}, \quad \text{for } p \ge 1. \tag{4.2}$$

我们定义

$$u_{2p} = \frac{2^{(p-1)^2}}{p!}\Pi_{2p}^2, \quad \text{for } p \geq 2; \qquad u_{2p+1} = \frac{2^{p(p-1)}}{p!}\Pi_{2p+1}^2, \quad \text{for } p \geq 1. \tag{4.3}$$

于是，我们有

命题 4.1（Weyl积分公式）。

设 $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$。令 $p \in \mathbb{N}$，使得 $n = 2p$ 或 $n = 2p+1$。对于 $\mathsf{SO}_n\mathbb{R}$ 上任意可积类函数 f，我们有

$$\int_{\mathrm{SO}_n\mathbb{R}} f(A)\, dA = \frac{1}{(2\pi)^p} \int_{[0,2\pi]^p} f(A_\Theta)\, u_n(\Theta)\, d\Theta, \tag{4.4}$$

其中 $d\Theta = d\theta_1 \dots d\theta_p$。

对于光滑函数 $\varphi\colon\ \mathcal{T} \to \mathbb{R}^p$，$\nabla_\Theta\varphi$ 表示坐标 $(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_i})_{i=1}^p$的向量场。类似地，对于坐标为 $(\mathcal{X}_i)_{i=1}^p$的光滑向量场 $\mathcal{X}\colon\ \mathcal{T} \to \mathbb{R}^p$，散度 $\nabla_\Theta \cdot \mathcal{X}$ 是标量 $\sum_{i=1}^p \frac{\partial \mathcal{X}_i}{\partial\theta_i}$。拉普拉斯算子 Δ_Θ 自然定义为$\Delta_\Theta = \nabla_\Theta \cdot \nabla_\Theta\varphi$。最后，我们引入常数

$$\gamma_{2p} = \sum_{j=1}^{p}(p-j)^2, \quad \gamma_{2p+1} = \sum_{j=1}^{p}(p-j+\frac{1}{2})^2. \tag{4.5}$$

注意，γ_{2p}（对于 $p \geq 2$）和 γ_{2p+1}（对于 $p \geq 1$）是严格正的常数。我们有如下

引理 4.2. (i) 情形 $n = 2p$, $p \geq 2$：我们有

$$\nabla_\Theta u_{2p}(\Theta) = \Big(\big(\sum_{k\neq j} \frac{2}{\cos\theta_k - \cos\theta_j} \big) \sin\theta_j\, u_{2p}(\Theta) \Big)_{j=1}^p. \tag{4.6}$$

(ii) 情形 $n = 2p+1$, $p \geq 1$：我们有

$$\nabla_\Theta u_{2p+1}(\Theta) = \Big(\big(\sum_{k\neq j} \frac{2}{\cos\theta_k - \cos\theta_j} + \frac{1}{1-\cos\theta_j} \big) \sin\theta_j\, u_{2p+1}(\Theta) \Big)_{j=1}^p. \tag{4.7}$$

(iii) 在 $n = 2p\,(p \geq 2)$ 和 $n = 2p+1\,(p \geq 1)$ 两种情形下，我们有

$$\Delta_\Theta \Pi_n = -\gamma_n \Pi_n. \tag{4.8}$$

证明。（i）我们计算得

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\theta_j}\log u_{2p} &= 2\frac{\partial}{\partial\theta_j}\log\Pi_{2p} = 2\frac{\partial}{\partial\theta_j}\Big(\sum_{1\leq k<\ell\leq p} \log(\cos\theta_k - \cos\theta_\ell) \Big) \\ &= -\sum_{j<\ell\leq p} \frac{2\sin\theta_j}{\cos\theta_j - \cos\theta_\ell} + \sum_{1\leq k<j} \frac{2\sin\theta_j}{\cos\theta_k - \cos\theta_j} = \sum_{k\neq j} \frac{2\sin\theta_j}{\cos\theta_k - \cos\theta_j}, \end{aligned}$$

从而得到 (4.6)。
(ii) 我们指出，除去一个无关紧要的乘法常数，我们有

$$u_{2p+1}(\Theta) = \prod_{1\le k<\ell\le p} \big(\cos\theta_k - \cos\theta_\ell\big)^2 \prod_{k=1}^{p}(1-\cos\theta_k),$$

接下来我们按照上一点中的方法进行。
(iii) 情形 $n = 2p$：此证明改编自 [15, 引理 12.5.2]。除去一个无关紧要的乘法常数，我们有

$$\Pi_{2p}(\Theta) = \prod_{k<\ell}(e^{i\theta_k} + e^{-i\theta_k} - e^{i\theta_\ell} - e^{-i\theta_\ell}). \tag{4.9}$$

我们注意到，(4.9) 的右端是未知数 $(e^{i\theta_k} + e^{-i\theta_k})_{k=1}^{p}$ 的范德蒙行列式。回顾一下，若 $(X_1, \dots, X_p)$ 是 $\mathbb{C}$ 的元素，则范德蒙行列式为

$$V(X_1, \dots, X_n) = \det\big((X_k^{p-\ell})_{k\ell}\big) = \prod_{k<\ell}(X_k - X_\ell).$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}\Pi_{2p}(\Theta) &= V\big(e^{i\theta_1} + e^{-i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_p} + e^{-i\theta_p}\big)\\ &= \det\Big(\big((e^{i\theta_k} + e^{-i\theta_k})^{p-\ell}\big)_{k\ell}\Big).\end{aligned} \tag{4.10}$$

展开行列式各项中的幂，并对行和列作初等变换（见 [18, 式 (24.39)]），可得

$$\begin{aligned}\Pi_{2p}(\Theta) &= \det\big((e^{i(p-\ell)\theta_k} + e^{-i(p-\ell)\theta_k})_{k\ell}\big)\\ &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}(-1)^\sigma \prod_{k=1}^{p}\big(e^{i(p-\sigma(k))\theta_k} + e^{-i(p-\sigma(k))\theta_k}\big),\end{aligned}$$

其中，$\mathfrak{S}_p$ 是由 p 个元素组成的对称群；对于 $\sigma \in \mathfrak{S}_p$，$(-1)^\sigma$ 表示其符号。现在，对 θ_j求两次导数，得到

$$\frac{\partial^2\Pi_{2p}}{\partial\theta_j^2}(\Theta) = -\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}(-1)^\sigma(p-\sigma(j))^2\prod_{k=1}^{p}\big(e^{i(p-\sigma(k))\theta_k} + e^{-i(p-\sigma(k))\theta_k}\big).$$

对 j 求和，并注意到

$$\sum_{j=1}^{p}(p-\sigma(j))^2 = \sum_{j=1}^{p}(p-j)^2 = \gamma_{2p},$$

与 σ 无关，因此最终得到 $n = 2p$ 的式 (4.8)。

(iii) 情形 $n=2p+1$：证明类似。注意到，除一个无关紧要的乘法常数外，我们有

$$\begin{aligned}\Pi_{2p+1} &= \prod_{k<\ell}(e^{i\theta_k}+e^{-i\theta_k}-e^{i\theta_\ell}-e^{-i\theta_\ell})\prod_{k=1}^{p}(e^{i\theta_k/2}-e^{-i\theta_k/2}) \qquad (4.11)\\ &= \det\big((e^{i(p-\ell+\frac{1}{2})\theta_k}+e^{-i(p-\ell+\frac{1}{2})\theta_k})_{k\ell}\big),\end{aligned}$$

其中，第二个不等式同样需要对行列式进行初等变形（参见 [18,练习 24.27]）。其余证明类似。 ∎

现在我们给出径向拉普拉斯算子的另一种表达形式，如下

命题 4.3。(i) 在 $n=2p$的情形下，对任意 $\varphi\in C^\infty(\mathcal{T})$，有

$$L\varphi=\sum_{j=1}^{p}\Big[\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta_j^2}+\Big(\sum_{k\neq j}\frac{2}{\cos\theta_k-\cos\theta_j}\Big)\sin\theta_j\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_j}\Big]. \qquad (4.12)$$

(ii) 在 $n=2p+1$的情形下，对任意 $\varphi\in C^\infty(\mathcal{T})$，有

$$L\varphi=\sum_{j=1}^{p}\Big[\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta_j^2}+\Big(\sum_{k\neq j}\frac{2}{\cos\theta_k-\cos\theta_j}+\frac{1}{1-\cos\theta_j}\Big)\sin\theta_j\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_j}\Big]. \qquad (4.13)$$

(iii) 在两种情形下，$n=2p$（对于 $p\geq 2$）和 $n=2p+1$（对于 $p\geq 1$），均有

$$\begin{aligned}L\varphi &= \frac{1}{u_n}\nabla_\Theta\cdot\big(u_n\nabla_\Theta\varphi\big), \qquad (4.14)\\ &= \frac{1}{\Pi_n}\Big(\Delta_\Theta+\gamma_n\Big)(\Pi_n\varphi), \qquad (4.15)\end{aligned}$$

证明。(i) 和 (ii)：公式 (4.12) 和 (4.13) 分别由 (3.1) 和 (3.2) 得到，方法是在对 $i<j$求和的各项中，将第二项里的 i 与 j 互换。(iii)

分别将 (4.6) 和 (4.7) 代入 (4.12) 和 (4.13)，可得

$$L\varphi=\Delta_\Theta\varphi+\frac{1}{u_n}\nabla_\Theta u_n\cdot\nabla_\Theta\varphi=\frac{1}{u_n}\nabla_\Theta\cdot(u_n\nabla_\Theta\varphi),$$

这就是 (4.14)。等价地，我们可以写成

$$\begin{aligned}L\varphi &= \frac{1}{\Pi_n^2}\nabla_\Theta\cdot(\Pi_n^2\nabla_\Theta\varphi)=\frac{1}{\Pi_n}\Big(\nabla_\Theta\Pi_n\cdot\nabla_\Theta\varphi+\nabla_\Theta\cdot(\Pi_n\cdot\nabla_\Theta\varphi)\Big)\\ &= \frac{1}{\Pi_n}\Big(\nabla_\Theta\Pi_n\cdot\nabla_\Theta\varphi+\nabla_\Theta\cdot\big(\nabla_\Theta(\Pi_n\varphi)-\varphi\nabla_\Theta\Pi_n\big)\Big)\\ &= \frac{1}{\Pi_n}\Big(\Delta_\Theta(\Pi_n\varphi)-\varphi\Delta_\Theta(\Pi_n)\Big),\end{aligned}$$

结合（4.8），即可得到（4.15）。 ∎

4.2 径向拉普拉斯算子的谱理论与反演

在本节及后续各节中，我们用 G 表示群 $\mathrm{SO}_{2p}\mathbb{R}$ 或 $\mathrm{SO}_{2p+1}\mathbb{R}$。下面陈述一些关于拉普拉斯算子 $-\Delta$ 和径向拉普拉斯算子 $-L$的事实。

我们首先从拉普拉斯算子 $-\Delta$ 开始。我们知道 [19]，黎曼流形上的 $-\Delta$ 的谱由一列递增的离散特征值 $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots \lambda_n \dots$ 构成，它们趋于 $+\infty$；相应的特征空间是有限维的，且它们的直和在 $L^2(G)$ 中稠密。此外，$\lambda_1 = 0$，其特征空间是一维的，由常值函数构成。然而，对于 G 上的拉普拉斯算子，我们可以更具体地描述其特征空间。首先需要介绍表示论中的几个概念。

这里我们指的是 [15, 第 6] 章。G 的一个表示 (V, π) 是一个二元组，其中 V 是 $\mathbb{C}$ 上的向量空间，π 是群同态 $G \to \mathrm{Aut}(V)$，其中 $\mathrm{Aut}(V)$ 是 V 的线性自同构群。若 W 是 V 的一个子空间，且 $\pi(g)W = W, \forall g \in G$，那么 $(W, \tilde{\pi})$，其中 $\tilde{\pi}(g) = \pi(g)|_W$，是 V 的一个称为子表示的表示。不可约表示是指没有真子表示的表示。当 G 是紧群时，任何不可约表示都是有限维的，且任何有限维表示都可以分解为不可约表示的直和。表示 (V, π) 和 (V', π') 等价，当且仅当存在一个线性同构 $A\colon V \to V'$，使两个表示相互交织，即 $A\pi(g) = \pi'(g)A, \forall g \in G$。我们用 $\hat{G}$ 表示 G 的不可约表示等价类集合。对于任意 $\lambda \in \hat{G}$，选取一个代表元 (V_λ, π_λ) 属于 λ。我们用 $\mathcal{M}_\lambda$ 表示函数空间，其中函数 $f\colon G \to \mathbb{C}$ 满足存在 $A \in \mathrm{Aut}(V_\lambda)$，使得 $f(g) = \mathrm{Tr}\{A\pi_\lambda(g)\}$。于是，Peter-Weyl 定理断言

$$L^2(G) = \overline{\bigoplus_{\lambda \in \hat{G}} \mathcal{M}_\lambda}, \tag{4.16}$$

其中 $L^2(G)$ 是 G 上的平方可积函数空间。此外，[15, 命题 8.2.1], 所有函数 $f \in \mathcal{M}_\lambda$ 都是与同一特征值对应的拉普拉斯算子的特征函数。因此，分解式（4.16）是 G 上拉普拉斯算子的特征空间分解。

因此，我们可以轻松求解以下问题：给定 $h \in L^2(G)$，求 f，使得

$$-\Delta f = h, \tag{4.17}$$

显然，h 必须满足相容性方程

$$\int_G h(x)\, dx = 0, \tag{4.18}$$

其中，我们现在用 dx 表示 G 上的归一化哈 Haar 测度。通常的方法是采用变分形式。假设 $f \in H^2(G)$（其中 $H^k(G)$ 由 $H^k(G) = \{f \in H^{k-1}(G) \mid \nabla f \in H^{k-1}(G)\}$ 以及 $H^0(G) = L^2(G)$ 递归定义），并取测试函数 $v \in H^1(G)$，将 (4.17) 乘以 v 并使用斯托克斯公式，我们得到

$$\int_G \nabla f \cdot \nabla v\, dx = \int_G h\, v\, dx, \quad \forall v \in H^1(G). \tag{4.19}$$

由 (4.18) 可知，方程 (4.19) 等价于同一变分形式，只是其中 v 取自 $H_0^1(G)$，其中 $H_0^1(G) = \{v \in H^1(G) \mid \int_G v(x)\, dx = 0\}$。现在，由于显然，方程 (4.17) 的解 f 只确定到一个常数，因此在空间 $H_0^1(G)$ 中寻找唯一的 f 是合理的。事实上，我们有如下结论

定理 4.4. 给定满足相容条件 (4.18) 的 $h \in L^2(G)$，变分表述

$$f \in H_0^1(G), \tag{4.20}$$

$$\int_G \nabla f \cdot \nabla v \, dx = \int_G h\, v \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(G), \tag{4.21}$$

存在唯一解，称为问题 $-\Delta f = h$ 的变分解。此外，f 的 H^1 范数受 h 的 L^2 范数控制。

证明. 根据 Lax-Milgram 定理，只需证明庞加莱不等式。但由于存在谱隙，即 $\lambda_2 > 0$，我们有

$$\int_G |\nabla f|^2 \, dx \geq \lambda_2 \int_G |f|^2 \, dx, \quad \forall f \in H_0^1(G).$$

这就证明了结论。 ∎

注 4.1. 根据 Peter-Weyl 定理和 Plancherel 定理 *[15,* Thm 6.4.*2],* ，我们可以用 h 的傅里叶系数和 Δ 的特征值表示 f 的傅里叶系数 $\hat{}$，其中傅里叶系数 $f(\lambda)$ 定义为 V_λ 上的一个自同态，给定为 $\hat{}\ f(\lambda) = \int_G f(x)\ \pi_\lambda(x^{-1})\ dx$。

现在，我们聚焦于类函数。表示 (V, π) 的特征标是由 $\chi_\pi(g) = \mathrm{Tr}\{\pi(g)\}, \forall g \in G$ 定义的映射$\hat{}G \to \mathbb{C}$。它是一个类函数。现在，设 $\lambda \in G$，并用 χ_λ 表示 λ 中任意代表元 (V_λ, π_λ) 的特征标。那么，由类函数构成的 $\mathcal{M}_\lambda$ 子空间是一维的，由 χ_λ 张成。系统$\{\chi_\lambda\}_{\lambda \in \hat{G}}$ 是 $L^2(G)_{\text{class}}$ 的希尔伯特基；该空间是 $L^2(G)$ 中由类函数构成的子空间 [15, 命题 6.5。3] （ $\{\chi_\lambda\}_{\lambda \in \hat{G}}$ 是正交系统这一事实称为舒尔正交关系）。现在，由于 χ_λ 是 Δ 的特征函数且是类函数，$\varphi_\lambda =: \varphi_{\chi_\lambda}$ 是径向拉普拉斯算子 L 的特征函数（回顾一下，对于类函数f，φ_f 由 (2.11) 定义）。

我们引入

$L^2\ \mathcal{T}$ $\varphi\ \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ $\int_{\mathcal{T}} |\varphi\ \Theta\ |^2\, u_n\ \Theta\ d\Theta < (\ )$，即满 ∞ $H^k\ \mathcal{T}$ $\varphi \in H^k\ \mathcal{T} \iff \varphi \in H^{k-1}\ \mathcal{T}$ $\nabla_\Theta \varphi \in$ 足 $(\ )$ $(\ )$ 和 $(\ )$ 的函数集合 :，其递归定义为 $(\ )$ $(\ )$ 和 $H^{k-1}(\mathcal{T})$)，且 $H^0(\mathcal{T}) = L^2(\mathcal{T})$。采用这些记号，$(\varphi_\lambda)_{\lambda \in \hat{G}}$ 是$L^2(\mathcal{T})$的希尔伯特基，由 L 的特征函数组成。由此可知，L 与 Δ具有相同的特征值。因此，类似于拉普拉斯算子的情形，我们可以定义问题 $-L\varphi = \eta$ 的变分解。令 $H_0^1(\mathcal{T}) = \{v \in H^1(\mathcal{T}) \mid \int_{\mathcal{T}} v(\Theta)\ u_n(\Theta)\ d\Theta = 0\}$。于是，我们有

定理 4.5. 给定满足相容条件的 $\eta \in L^2(\mathcal{T})$

$$\int_{\mathcal{T}} \eta(\Theta)\, u_n(\Theta)\, d\Theta = 0, \tag{4.22}$$

变分形式

$$\varphi \in H_0^1(\mathcal{T}), \tag{4.23}$$

$$\int_{\mathcal{T}} \nabla_\Theta \varphi \cdot \nabla_\Theta v \, u_n \, d\Theta = \int_{\mathcal{T}} \eta \, v \, u_n \, d\Theta, \quad \forall v \in H_0^1(\mathcal{T}), \tag{4.24}$$

存在唯一解，称为问题 $-L\varphi = \eta$ 的变分解。此外， φ 的 H^1 范数受 η 的 L^2 范数控制。

与 $-\Delta$ 的反演情形类似，我们也可以根据 η 的傅里叶系数以及拉普拉斯算子的特征值，求出 φ 的傅里叶系数（在希尔伯特基 $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda\in\hat{G}}$ 下）。下一节将专门计算 Δ 和 L 的特征值。

4.3 拉普拉斯算子的特征标与特征值

如上一节所示，特征标同时也是拉普拉斯算子的特征函数和类函数。借助 Weyl 特征标公式，可以得到极大环面 $\mathbb{T}$ 上特征标的表达式。对这些表达式应用径向拉普拉斯算子，即可推导出拉普拉斯算子特征值的表达式。以上内容可由下述定理概括：

定理4.6。（i） $p \geq 2$ 的 $n = 2p$ 情形。$\mathrm{SO}_{2p}\mathbb{R}$ 的不可约表示由一个 p 元整数元组 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{Z}^p$ 编号，其中满足

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_{p-1} \geq |\lambda_p| \geq 0. \tag{4.25}$$

令 χ_λ 为其特征标，并定义 $\varphi_\lambda =: \varphi_{\chi_\lambda}$，其中 φ_f 由式 (2.11) 定义。则 φ_λ 由 Weyl 特征标公式 *[18,* 式 (24.40)*]* 给出：

$$\varphi_\lambda(\Theta) = \frac{det\left((e^{i\theta_k(\lambda_\ell+\delta_\ell)} + e^{-i\theta_k(\lambda_\ell+\delta_\ell)})_{k\ell}\right)}{\Pi_{2p}(\Theta)} + \frac{det\left((e^{i\theta_k(\lambda_\ell+\delta_\ell)} - e^{-i\theta_k(\lambda_\ell+\delta_\ell)})_{k\ell}\right)}{\Pi_{2p}(\Theta)}, \tag{4.26}$$

其中 $\delta_\ell = p - \ell, \quad \forall \ell \in \{1, \ldots, p\}$。我们将 δ 记为 p 元组 $\delta = (\delta_\ell)_{\ell=1}^p$。

(ii) $p \geq 1$ 的情形 $n = 2p + 1$。$\mathrm{SO}_{2p+1}\mathbb{R}$ 的不可约表示由一个整数 p 元组 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{Z}^p$ 标记，使得

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_{p-1} \geq \lambda_p \geq 0. \tag{4.27}$$

此时，Weyl 特征标公式 *[18,* 式 (24.28)*]* 写作：

$$\varphi_\lambda(\Theta) = \frac{det\left((e^{i\theta_k(\lambda_\ell+\delta_\ell)} - e^{-i\theta_k(\lambda_\ell+\delta_\ell)})_{k\ell}\right)}{\Pi_{2p+1}(\Theta)}, \tag{4.28}$$

其中 $\delta_\ell = p - \ell + \frac{1}{2}, \quad \forall \ell \in \{1, \ldots, p\}$。我们将 δ 记为 p 元组 $\delta = (\delta_\ell)_{\ell=1}^p$。

（iii）在这两种情况下， $n = 2p$ 对应于 $p \geq 2$，而 $n = 2p + 1$ 对应于 $p \geq 1$， φ_λ 和 χ_λ 分别是 $-L$ 和 $-\Delta$ 的特征函数，其对应的特征值 κ_λ 为

$$\kappa_\lambda = \|\lambda + \delta\|^2 - \|\delta\|^2, \tag{4.29}$$

其中 $\|\cdot\|$ 是 $\mathbb{R}^p$ 中的欧几里得范数。注意，根据所考虑的情形， $\|\delta\|^2 = \gamma_{2p}$ 或 γ_{2p+1}（参见公式 (4.5)）。

证明。(i) 和 (ii) 是李群表示论的核心内容，读者可参阅例如 [18]。这里，我们只需确认公式 (4.26) 和 (4.28) 有意义，即它们定义了 $\mathcal{T}$ 中的函数 φ_λ，换言之，φ_λ 关于每个变量 θ_j 都是 2π 周期的，并且在 Weyl 群作用下不变。

从假设 $\lambda \in \mathbb{Z}^p$ 可立即推出 2π-周期性。事实上，在 $n = 2p$ 的情况下，将一个 θ_j 改为 $\theta_j + 2\pi$，不会改变 (4.26) 的分子和分母。在 $n = 2p+1$ 的情况下，分子和分母都会变号，因此它们的商 (4.28) 保持不变。实际上，可以证明 $\lambda \in \mathbb{Z}^p$ 也是 φ_λ 为 2π-周期性的必要条件。

通过证明以下更强的性质，可以说明它在 Weyl 群作用下不变；这一性质本身也颇值得注意：

- 情形 $n = 2p+1$：存在一个对称多项式 $P(X_1, \dots, X_p)$，使得

$$\varphi_\lambda(\Theta) = P(e^{i\theta_1} + e^{-i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_p} + e^{-i\theta_p}), \tag{4.30}$$

- 情形 $n = 2p$：存在两个对称多项式 $P(X_1, \dots, X_p)$ 和 $Q(X_1, \dots, X_p)$，使得

$$\varphi_\lambda(\Theta) = P(e^{i\theta_1} + e^{-i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_p} + e^{-i\theta_p}) + \prod_{k=1}^{n} (e^{i\theta_k} - e^{-i\theta_j}) Q(e^{i\theta_1} + e^{-i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_p} + e^{-i\theta_p}). \tag{4.31}$$

显然，（4.31）和（4.30）蕴含了 Weyl 群不变性（关于偶正交群和奇正交群的 Weyl 群描述，参见（2.11）之后的讨论）。

在 $n = 2p+1$ 的情况下，我们首先关注（4.28）的分子。我们有

$$\begin{aligned} e^{i\theta_k(\lambda_\ell + \delta_\ell)} - e^{-i\theta_k(\lambda_\ell + \delta_\ell)} &= e^{i\theta_k(\lambda_\ell + p - \ell + \frac{1}{2})} - e^{-i\theta_k(\lambda_\ell + p - \ell + \frac{1}{2})} \\ &= (e^{i\frac{\theta_k}{2}} - e^{-i\frac{\theta_k}{2}}) \Big(1 + \sum_{m=1}^{\lambda_\ell + p - \ell} (e^{im\theta_k} + e^{-im\theta_k}) \Big). \end{aligned}$$

通过归纳法容易证明，存在一个次数为 m 的多项式 p_m，使得

$$e^{im\theta_k} + e^{-im\theta_k} = p_m(e^{i\theta_k} + e^{-i\theta_k}).$$

因此，存在一个次数为 m 的多项式 q_m，使得

$$e^{i\theta_k(\lambda_\ell + \delta_\ell)} - e^{-i\theta_k(\lambda_\ell + \delta_\ell)} = (e^{i\frac{\theta_k}{2}} - e^{-i\frac{\theta_k}{2}})\, q_{\lambda_\ell + p - \ell}(e^{i\theta_k} + e^{-i\theta_k}).$$

由此可得

$$\begin{aligned} &\det\left((e^{i\theta_k(\lambda_\ell + \delta_\ell)} - e^{-i\theta_k(\lambda_\ell + \delta_\ell)})_{k\ell} \right) \\ &\qquad = \Big(\prod_{k=1}^{p} (e^{i\frac{\theta_k}{2}} - e^{-i\frac{\theta_k}{2}}) \Big) \det\Big(\big(q_{\lambda_\ell + p - \ell}(e^{i\theta_k} + e^{-i\theta_k}) \big)_{k\ell} \Big) \qquad (4.32) \\ &\qquad = \Big(\prod_{k=1}^{p} (e^{i\frac{\theta_k}{2}} - e^{-i\frac{\theta_k}{2}}) \Big) R(e^{i\theta_1} + e^{-i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_p} + e^{-i\theta_p}), \end{aligned}$$

其中， $R(X_1,\dots,X_p)$ 是一个交错多项式（即，对于任意一对 $j\neq k$，交换 X_j 和 X_k 时，其值会变号）。由（4.11）可得

$$\varphi_\lambda(\Theta)=\frac{R(e^{i\theta_1}+e^{-i\theta_1},\dots,e^{i\theta_p}+e^{-i\theta_p})}{\prod_{k<\ell}(e^{i\theta_k}+e^{-i\theta_k}-e^{i\theta_\ell}-e^{-i\theta_\ell})}. \tag{4.33}$$

由 (4.32) 可知，对于 $j<k$，任何因子 (X_j-X_k) 都整除 R。由于这些因子都是两两互素的多项式，因此分母整除分子。于是，(4.33) 右侧是一个多项式。由于 (4.33) 的分子和分母都是交错多项式，它们的商是对称多项式，这就完成了在 $n=2p+1$ 情形下的证明。

$n=2p$ 的情形类似。(4.26) 右侧的第一项产生了 (4.31) 中的第一项。事实上，分子显然是关于 $(e^{i\theta_k}+e^{-i\theta_k})_{k=1}^p$ 的交错多项式；根据 (4.10)，分母也如此。此外，分母的每个因子都整除分子，且这些因子两两互素，因此所得商是一个对称多项式。根据在 $n=2p+1$ 情形下所作的类似计算，(4.26) 右侧的第二项产生了 (4.31) 中的第二项。

(iii) 一般方法概述见 [21, §5。7] 不过证明相当抽象。另一方面，利用 (4.15) 证明 (4.29) 相当简单。以 $n=2p$ 为例。由 (4.26)，我们有

$$\Pi_{2p}\varphi_\lambda(\Theta)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}(-1)^\sigma\prod_{j=1}^p\Big(e^{i\ell_{\sigma(j)}\theta_j}+e^{-i\ell_{\sigma(j)}\theta_j}\Big)+\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}(-1)^\sigma\prod_{j=1}^p\Big(e^{i\ell_{\sigma(j)}\theta_j}-e^{-i\ell_{\sigma(j)}\theta_j}\Big).$$

现在，与引理 4.2 (iii) 的证明类似，我们有

$$-\Delta_\Theta(\Pi_{2p}\varphi_\lambda)=\Big(\sum_{k=1}^p\ell_k^2\Big)\Pi_{2p}\varphi_\lambda.$$

然后，由 (4.15) 和 (4.8)，得到 (4.29)。 $n=2p+1$ 的情形类似 ar. ∎

我们以介绍一些术语来结束本节。 p-元组 λ 位于格 $\mathbb{Z}^p$上，该格称为权格。任意 $\lambda\in\mathbb{Z}^p$ 都称为权。满足限制条件（4.25）或（4.27）的权称为支配权，而由不等式（4.25）或（4.27）定义的 $\mathbb{R}^p$ 区域称为闭韦伊尔室。$\mathrm{SO}_n\mathbb{R}$ 的所有不可约表示都会诱导出李代数 $\mathfrak{so}_n\mathbb{R}$的不可约表示。反之则不成立。 $\mathfrak{so}_n\mathbb{R}$ 的权格等于 $\mathbb{Z}^p\cup(\frac{1}{2}+\mathbb{Z})^p$。另一方面， $\mathfrak{so}_n\mathbb{R}$ 和 $\mathrm{SO}_n\mathbb{R}$ 的韦伊尔室相同。$\mathfrak{so}_n\mathbb{R}$ 的所有表示都可以提升为自旋群 $\mathrm{Spin}_n\mathbb{R}$ 的表示。$\mathrm{Spin}_n\mathbb{R}$ 是 $\mathrm{SO}_n\mathbb{R}$ 的一个单连通双重覆盖，并且满足 $\mathrm{SO}_n\mathbb{R}=\mathrm{Spin}_n\mathbb{R}/\{\pm1\}$。半整数权对应于在 $\{\pm1\}$ 上不平凡的 $\mathrm{Spin}_n\mathbb{R}$ 表示，因此无法诱导出 $\mathrm{SO}_n\mathbb{R}$ 的表示（不过有些作者将这些表示称为 $\mathrm{SO}_n\mathbb{R}$的双值表示）。

5 结论

在本文中，我们回顾了旋转群上拉普拉斯算子谱理论的一些要素。关键要素之一是求出径向拉普拉斯算子的表达式，它是拉普拉斯算子在极大环面上的限制。径向拉普拉斯算子的恰当表达式，结合韦伊尔特征公式的使用，可以得出拉普拉斯算子特征值的显式表达式。虽然这些笔记所介绍的内容对李群领域的专家来说并不陌生，但在文献中很难找到简明易懂的相关论述。我们希望这些笔记能对研究旋转群、但并非李群理论专家的人有所帮助。

引理2.1的证明

根据哈尔测度的唯一性，要证明存在正数常量 C 使得 $d\omega = C d\mu$，只需证明黎曼体积形式是左不变的。首先，我们根据标准正交基 $(F_{ij})_{1\le i<j\le n}$的字典序，为 $\mathfrak{so}_n\mathbb{R}$ 定义一个定向。对于 $A \in \mathsf{SO}_n\mathbb{R}$，切空间 T_A 按照基 $(AF_{ij})_{i<j}$的相同字典序定向，由此得到 $\mathsf{SO}_n\mathbb{R}$的全局定向。注意，$(AF_{ij})_{i<j}$ 是 T_A 的标准正交基，正是因为 A 是正交矩阵。接着，我们按照第4节10]中的构造，构造与该定向相对应的 $\mathsf{SO}_n\mathbb{R}$ 的黎曼体积形式。我们将 $(\omega_{ij}(A))_{i<j}$记为 $(AF_{ij})_{i<j}$的对偶基。 T_A上的内积在 T_A 及其对偶 T_A^*之间诱导出一个配对。该配对满足：元素 $X \in T_A$ 的像 $\omega_X \in T_A^*$ 满足 $\langle \omega_X, Y\rangle = X \cdot Y$，对所有 $Y \in T_A$均成立，其中括号表示 T_A^*与 T_A之间的对偶。反过来，这一配对在 T_A^*上诱导出一个内积，使得 $\omega_X \cdot \omega_Y = X \cdot Y$。因此，由于 $(AF_{ij})_{i<j}$ 是 T_A的标准正交基，$(\omega_{ij}(A))_{i<j}$ 是 T_A^*的标准正交基，所以 $\omega(A) = \bigwedge_{i<j} \omega_{ij}(A)$ 是体积形式，其中 $\bigwedge_{i<j}$ 表示按字典序排列的形式 ω_{ij} 的外积。

现在，我们证明这个体积形式是左不变的。设 $\sigma \in \mathsf{SO}_n\mathbb{R}$，且 ℓ_σ 是 $\mathsf{SO}_n\mathbb{R}$ 的态射，使得 $\ell_\sigma(A) = \sigma A$。当且仅当对所有 $\sigma \in \mathsf{SO}_n\mathbb{R}$，$\delta\ell_\sigma(\omega) = \omega$ 时，形式 ω 是左不变的，其中 $\delta\ell_\sigma(\omega)$ 是 ω 经 ℓ_σ的拉回。设 $(AX_{ij})_{i<j}$，其中对所有 $i<j$ 都有 $X_{ij} \in \mathfrak{so}_n\mathbb{R}$，它们是 T_A的元素。那么， $\delta\ell_\sigma(\omega)$定义为

$$\begin{aligned}\delta\ell_\sigma(\omega)(A)\big(AX_{12}, AX_{13}, \dots, AX_{n-1\,n}\big)\\ = \omega(\sigma A)\big(d\ell_\sigma(A)(AX_{12}), d\ell_\sigma(A)(AX_{13}), \dots, d\ell_\sigma(A)(AX_{n-1\,n})\big),\end{aligned}$$

其中 $d\ell_\sigma(A)$是 ℓ_σ 在 A处的微分。容易验证，对任意 $X \in \mathfrak{so}_n\mathbb{R}$，都有 $d\ell_\sigma(A)(AX) = \sigma AX$。因此，

$$\begin{aligned}\delta\ell_\sigma(\omega)(A)\big(AX_{12}, AX_{13}, \dots, AX_{n-1\,n}\big) &= \omega(\sigma A)(\sigma AX_{12}, \sigma AX_{13}, \dots, \sigma AX_{n-1\,n})\\ &= \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_N} \varepsilon(\tau) \prod_{i<j} \omega_{ij}(\sigma A)\big(\sigma AX_{\tau(i,j)}\big),\end{aligned}$$

其中 $N = \frac{n}{(n-1)\cdot 2}$是 T_A 的维数， $\mathfrak{S}_N$是由 N 个元素构成的置换群， $\varepsilon(\tau)$ 是置换 τ 的符号，并且 $\{1, \dots, N\}$ 的元素标记为

由满足 $1 \le i < j \le n$ 的数对 (i,j) 标记。因此，$\tau(i,j)$ 表示置换 τ 作用于 $\{1,\dots,N\}$ 中元素 (i,j) 所得的像。

现在，如果我们证明

$$\omega_{ij}(\sigma A)\big(\sigma AX\big) = \omega_{ij}(A)\big(AX\big),\ \forall A,\ \sigma \in \mathrm{SO}_n\mathbb{R},\ \forall X \in \mathfrak{so}_n\mathbb{R},\ \forall (i,j)\,|\,1 \le i < j \le n, \tag{A.1}$$

那么显然可以推出 $\delta\ell_\sigma(\omega) = \omega$，从而完成证明。要证明 (A.1)，只需对 $\mathfrak{so}_n\mathbb{R}$ 的一组基中的所有基向量证明即可。取基 $(F_{k\ell})_{k<\ell}$。由于 $(\omega_{ij}(\sigma A))^{i<j}$ 是 $(\sigma AF_{k\ell})_{k<\ell}$ 的对偶基，我们有 $\omega_{ij}(\sigma A)\big(\sigma AF_{k\ell}\big) = \delta_{ij}\delta_{k\ell}$。但这对所有 σ 都成立，因此对 $\sigma = \mathrm{I}$ 也成立，从而得到 $\omega_{ij}(A)\big(AF_{k\ell}\big) = \delta_{ij}\delta_{k\ell}$。因此，$\omega_{ij}(\sigma A)\big(\sigma AF_{k\ell}\big) = \omega_{ij}(A)\big(AF_{k\ell}\big)$，这就证明了 (A.1)。 ∎

B 引理 2.2 的证明

由 (2.　由 (2.4) 和 (2.6)，对于 $\mathrm{So}_n\mathbb{R}$ 上的任意 C^∞ 函数 f 以及任意 $A \in \mathrm{So}_n\mathbb{R}$:

$$(P_{T_A}E_{ij})(f)(A) = \Big(\rho\big(\frac{A^TE_{ij} - E_{ij}^TA}{2}\big)f\Big)(A).$$

直接计算可得

$$A^TE_{ij} - E_{ij}^TA = \sum_{k=1}^n A_{ik}F_{jk},$$

其中 A_{ik} 表示矩阵 A 的各项。由于 $\rho(X)$ 关于 X 是线性的，因此有

$$\rho(A^TE_{ij} - E_{ij}^TA) = \sum_{k=1}^n A_{ik}\rho\big(F_{jk}\big),$$

and

$$\big(\rho(A^TE_{ij} - E_{ij}^TA)\big)^2 = \sum_{k,\ell} A_{ik}A_{im}\,\rho\big(F_{jk}\big)\,\rho\big(F_{jm}\big).$$

现在，由 (2.5) 可得

$$\Delta_M f = \frac{1}{2}\sum_{i,j,k,\ell} A_{ik}A_{im}\,\rho\big(F_{jk}\big)\,\rho\big(F_{jm}\big) = \frac{1}{2}\sum_{j,k}\rho\big(F_{jk}\big)^2 = \sum_{1\le j<k\le n}\rho\big(F_{jk}\big)^2 = \Delta_G f,$$

其中，在第二个等号中，我们用到了 A 是正交的；在第三个等号中，用到了 $F_{ji} = -F_{ih}$；在第四个等号中，用到了式 (2.7)。证明至此完成。 ∎

参考文献

[1] J. F. Adams。《李群讲义》。芝加哥大学出版社，1982。

[2] H. Ahn、S.-Y. Ha 和 W. Shim。完备黎曼流形上热力学 Cucker-Smale 系综的涌现动力学。Kinet. Relat. Models，14(2):323，2021。[3] T. Br¨ocker 和 T. Tom Dieck。《紧李群的表示》，第 98 卷。Springer Science & Business Media，2013。[4] D. Bump。《李群》，第 8 卷。Springer，2004。[5] C. Chevalley。《李群理论》。Courier Dover Publications，2018。[6] P. Degond、A. Diez 和 A. Frouvelle。任意维数下的身体姿态协调。arXiv 预印本 arXiv:2111.05614，2021。[7] P. Degond、A. Diez、A. Frouvelle 和 S. Merino-Aceituno。身体姿态协调 BGK 模型中的相变与宏观极限。J. Nonlinear Sci.，30:2671–2736，2020。[8] P. Degond、A. Diez 和 A. Walczak。无力互易性的群游振子的拓扑态与连续介质模型。Analysis and applications，20:1215–1270，2022。[9] P. Degond、A. Frouvelle 和 S. Merino-Aceituno。通过身体姿态协调构建的一种新型集群模型。Math. Models Methods Appl. Sci.，27(06):1005–1049，2017。[10] P. Degond、A. Frouvelle、S. Merino-Aceituno 和 A. Trescases。自驱动刚体的对齐：从粒子系统到宏观方程。载于《非平衡随机动力学国际研讨会》，第 28–66 页。Springer，2017。[11] P. Degond、A. Frouvelle、S. Merino-Aceituno 和 A. Trescases。集体动力学中的四元数。Multiscale Model. Simul.，16(1):28–77，2018。[12] P. Degond 和 S. Motsch。利用曲率控制的群集智能体系统宏观模型。Journal of Statistical Physics，143:685–714，2011。[13] M. Do Carmo。《黎曼几何》。Springer，1992。[14] J. J. Duistermaat 和 J. A. Kolk。《李群》。Springer Science & Business Media，2012。[15] J. Faraut。《李群上的分析：导论》。Cambridge University Press，2008。[16] R. C. Fetecau、S.-Y. Ha 和 H. Park。旋转矩阵集群的涌现行为。arXiv 预印本 arXiv:2103.06458，2021。[17] R. C. Fetecau 和 B. Zhang。黎曼流形上的自组织。J. Geom. Mech.，11(3):397–426，2019。

[18] W. Fulton 和 J. Harris。《表示论：入门课程》。Springer，2013。[19] S. Gallot、D. Hulin 和 J. Lafontaine。《黎曼几何》。Springer，1990。[20] F. Golse 和 S.-Y. Ha。Lohe 矩阵模型的平均场极限与涌现动力学。《Arch. Ration. Mech. Anal.》，234(3):1445–1491，2019。[21] D. Gurarie。《对称性与拉普拉斯算子：调和分析、群表示及其应用导论》。Courier Corporation，2007。[22] S.-Y. Ha、D. Ko 和 S. W. Ryoo。某类李群上的广义 Lohe 模型的涌现动力学。《J. Stat. Phys.》，168(1):171–207，2017。[23] B. C. Hall。《李群、李代数与表示》。Springer，2013。[24] S. Helgason。《群与几何分析：积分几何、不变微分算子与球函数》，第83卷。美国数学会，2022。[25] E. P. Hsu。《流形上的随机分析》。第38号。美国数学会，2002。[26] J. E. Humphreys。《李代数与表示论导论》，第9卷。Springer Science & Business Media，2012。[27] A. W. Knapp。《李群：进阶导论》，第140卷。Springer，1996。[28] M. R. Sepanski。《紧李群》。Springer，2007。[29] B. Simon。《有限群与紧群的表示》。第10号，《Graduate Studies in Mathematics》。美国数学会，1996。[30] T. Vicsek、A. Czir´ok、E. Ben-Jacob、I. Cohen 和 O. Shochet。自驱动粒子系统中的一种新型相变。《Phys. Rev. Lett.》，75(6):1226，1995。[31] F. W. Warner。《可微流形与李群基础》。Springer，1983。[32] H. Weyl。《经典群：其不变量与表示》。第1号。普林斯顿大学出版社，1946。