arXiv:2302.00751v1 [math.OC] 1 Feb 2023

不确定性下非自治抛物型方程稳定化的滚动时域控制分析

Behzad Azmi* Lukas Herrmann† Karl Kunisch‡

2023年2月3日

摘要

研究了利用滚动时域控制（RHC）对一类输入数据不确定的时变抛物型方程进行稳定化。扩散系数和初始函数被设定为随机场。我们考虑扩散系数服从均匀分布和对数正态分布这两种情况。控制被选为有限维形式，并以有限个示性函数（执行器）的线性组合形式作用于系统，这些示性函数支撑于空间域的开子集上。在适当的正则性假设下，我们研究了滚动时域控制下受控系统的期望（平均）可稳定性与执行器数量之间的关系。此外，我们还得到了滚动时域控制失效概率的上界，该上界与执行器数量的选择及方程中的参数有关。

关键词— 滚动时域控制，随机演化偏微分方程，不确定性，平均可稳定性，随机场，非自治抛物型方程

数学主题分类 93C20 · 35R60 ·93D20 ·93E03

1 引言

源于现实应用的数学模型通常会受到不确定性的影响，这可能导致真实系统的响应与相应的确定性数学模型之间存在显著差异。因此，在模型中纳入不确定性并量化其对预测的目标量的影响，对于应用而言具有重要意义。这种不确定性可能反映了我们对数学模型的所有输入参数了解不足，或无法对其进行恰当表征；它也可能描述物理系统内在的变异性，参见例如 [5, 6]。概率论为描述和处理此类不确定性提供了一个自然框架，此类不确定性可表征为随机变量，或更一般地，表征为随机场。

我们研究利用滚动时域控制（RHC）策略，对以下线性抛物型方程所描述的受控系统进行稳定化

$$\begin{cases} \partial_t y - \nabla \cdot (\nu(\omega)\nabla y) + a(t)y + \nabla \cdot (b(t)y) = \sum_{i=1}^{N} u_i(t)\mathbf{1}_{O_i} & (t,x) \in (0,\infty) \times D, \\ y = 0 & (t,x) \in (0,\infty) \times \partial D, \\ y(0) = y_0(\omega) & x \in D, \end{cases} \tag{CS}$$

*康斯坦茨大学数学与统计系，德国康斯坦茨 D-78457。电子邮箱：behzad.azmi@uni-konstanz.de

†约翰·拉东计算与应用数学研究所（RICAM），奥地利科学院，Altenbergerstraße 69，奥地利林茨 A-4040。电子邮箱：lukas.herrmann@ricam.oeaw.ac.at

‡约翰·拉东计算与应用数学研究所（RICAM）、奥地利科学院和格拉茨大学数学系，Heinrichstraße 36, A-8010 格拉茨，奥地利。电子邮箱：karl.kunisch@uni-graz.at

其中， $D \subset \mathbb{R}^n$ 是一个有界矩形区域，其边界为 ∂D ； 函数 $\mathbf{1}_{O_i}$表示执行器。它们被建模为与开集 $O_i \subset D$ 相关的特征函数，其中 $i = 1$、.....、 N。反应项 $a(t) = a(t,x)$和对流项 $b(t) = b(t,x)$分别是关于$(t,x) \in (0,\infty) \times D$的实值函数和 $\mathbb{R}^n$值函数。此外，扩散系数（对流换热系数）$\nu(\omega) = \nu(\omega,x)$以及初始函数 $y_0(\omega) = y_0(x,\omega)$在实际中很难测量，因此会受到一定程度的不确定性影响，其中 $x \in D$ 且 $\omega \in \Omega$。这些不确定性输入被描述为定义在完备概率空间（Ω $\mathcal{F}$,$\mathbb{P}$）上的随机场，其中Ω表示样本结果集合，$\mathcal{F}$ 是与之相关的事件σ代数，而 $\mathbb{P}$： $\mathcal{F} \to [0,1]$ 是概率测度。

本文旨在推导一种稳定化控制，使其能够抵御随机参数 ω 的所有可能取值所导致的动力学扰动。为此，我们考虑平均稳定性的概念，并验证状态与稳态之间距离的期望值（相对于随机参数）渐近收敛于零。更具体地说，控制目标是寻找一个（空间上的）有限维控制 $\mathbf{u} \in L^2((0,\ \infty);\ U)$，使得

$$\mathbb{E}\left[\|y(t)\|^2_{L^2(D;\mathbb{R})}\right] := \int_\Omega \|y(t,\omega)\|^2_{L^2(D;\mathbb{R})} d\mathbb{P}(\omega) \to 0 \quad \text{as} \quad t \to \infty$$

该条件成立。这里我们将考虑确定性 $U = \mathbb{R}^N$ 和随机 $U = L^2_{\mathbb{P}}(\Omega;\mathbb{R}) \otimes \mathbb{R}^N$控制两种情形。稳定化控制 $\mathbf{u}$ 通过滚动时域框架计算。在该框架中，当前控制作用通过最小化定义在有限时间区间上的性能指标获得，该区间从当前时刻 t_0 延伸至某个未来时刻 $t_0 + T$，其中 $T \in (0,\ \infty]$ 且 $t_0 \in (0,\ \infty)$。这里我们设

$$J_T(\mathbf{u};t_0,y_0) := \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_0+T} \mathbb{E}\left[\ell(t,y(t))\right]\, dt + \frac{\beta}{2}\int_{t_0}^{t_0+T} \|\mathbf{u}(t)\|^2_U dt, \tag{1}$$

对于 $\beta \geq 0$, $\ell : \mathbb{R}_{\geq 0} \times H^1_0(D;\ \mathbb{R}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$满足 $\ell(t,\ y) \geq \alpha_\ell \|y\|^2_{L^2\ (D;\ \mathbb{R})}$，其中 $\alpha_\ell > 0$，且 $\ell(t,\ 0) = 0$。例如，可以考虑 $\ell(t,\ y) = \alpha_\ell \|y\|^2_{L^2\ (D;\ \mathbb{R})}$。那么，控制系统（CS）的稳定化可表述为以下无限时域最优控制问题

$$\min\{J_\infty(\mathbf{u};0,y_0) \mid (y,\mathbf{u}) \text{ satisfies (CS)}, \mathbf{u} \in L^2((0,\infty);U)\}. \qquad OP_\infty(y_0)$$

我们将证明，滚动时域方法能够给出 $OP_\infty(y_0)$ 的解的次优近似。该近似通过拼接一系列定义在相互重叠的区间上的有限时域最优控制构造而成，这些区间覆盖 $(0,\ \infty)$。这些有限时域问题具有如下形式。给定初始时刻 $\bar{t}_0$、初始函数 $\bar{y}_0 = \bar{y}_0(\omega,\ x)$ 以及预测时域 T，考虑

$$\min_{\mathbf{u} \in L^2((\bar{t}_0,\bar{t}_0+T);U)} J_T(\mathbf{u};\bar{t}_0,\bar{y}_0) \qquad OP_T(\bar{t}_0,\bar{y}_0)$$

$$\text{s.t} \begin{cases} \partial_t y - \nabla\cdot(\nu(\omega)\nabla y) + a(t)y + \nabla\cdot(b(t)y) = \sum_{i=1}^N u_i(t)\mathbf{1}_{O_i} & (t,x) \in (\bar{t}_0,\bar{t}_0+T)\times D, \\ y = 0 & (t,x) \in (\bar{t}_0,\bar{t}_0+T)\times \partial D, \\ y(\bar{t}_0) = \bar{y}_0(\omega) & x \in D. \end{cases} \tag{2}$$

在滚动时域框架中，我们定义采样时刻 $t_k := k\delta$，其中 $k = 0,\ 1,\ 2,\ .....$，并选定采样时间 $\delta > 0$。随后，在每个当前采样时刻 t_k 采样时间 $\delta > 0$。随后，在每个当前采样时刻 t_k，对于状态 $y_{rh}(t_k) \in L^2_{\mathbb{P}}(\Omega;\ \mathbb{R}) \otimes L^2(D;\mathbb{R})$，求解开环最优控制问题 $OP_T(t_k, y_{rh}(t_k))$，其预测时域有限，为 $[t_k, t_k+T]$，并选取适当的预测时域 $T > \delta$。然后，应用相应的最优控制，使系统从时刻 t_k（初始状态为 $y_{rh}(t_k) \in L^2_{\mathbb{P}}(\Omega;\mathbb{R}) \otimes L^2(D;\ \mathbb{R})$）运行至时刻 $t_{k+1} := t_k + \delta$； 此时假定可以获得状态 $y_{rh}(t_{k+1}) \in L^2_{\mathbb{P}}(\Omega;\ \mathbb{R}) \otimes L^2(D;\mathbb{R})$ 的新测量值。随后从这个新测得的状态开始重复该过程：通过将预测时域向前平移，得到新的最优控制和新的预测状态轨迹。采样时间 δ 是两个采样时刻之间的时间间隔。全文中，我们分别用 $y_{rh}(\cdot,\cdot)$ 和 $\mathbf{u}_{rh}(\cdot)$ 表示滚动时域状态变量和控制变量。此外，$(y^*_T(\cdot,\cdot;\ \bar{t}_0,\bar{y}_0),\ \mathbf{u}^*_T(\cdot;\ \bar{t}_0,\bar{y}_0))$ 表示最优状态和

算法 1 鲁棒滚动时域控制(δ, T)

要求：采样时间 δ、预测时域 $T \geq \delta$ 和初始状态 y_0。确保：滚动时域控制 u_{rh} 的稳定性。1：令 $(\bar{t}_0, \bar{y}_0) := (0, y_0)$，且 $y_{rh}(0) = y_0$；2：通过求解开环问题 $OP_T(\bar{t}_0, \bar{y}_0)$，在时间区间 $(\bar{t}_0, \bar{t}_0 + T)$ 上求解 $(y_T^*(\cdot;\, \bar{t}_0, \bar{y}_0)), \mathsf{u}_T^*(\cdot;\, \bar{t}_0, \bar{y}_0))$；3：对于所有 $\tau \in [\bar{t}_0, \bar{t}_0 + \delta)$，令 $y_{rh}(\tau) = y_T^*(\tau;\, \bar{t}_0, \bar{y}_0)$，且 $\mathsf{u}_{rh}(\tau) = \mathsf{u}_T^*(\tau;\, \bar{t}_0, \bar{y}_0)$；4：获取时刻 $\bar{t}_0 + \delta$ 的状态测量值 $y_{rh}(\bar{t}_0 + \delta; \bar{t}_0, \bar{y}_0)$；5：更新：$(\bar{t}_0, \bar{y}_0) \leftarrow (\bar{t}_0 + \delta, y_{rh}(\bar{t}_0 + \delta;\, \bar{t}_0, \bar{y}_0))$；6：转至步骤 2；

有限时间时域 T内最优控制问题的控制，以及初始时刻$\bar{t}_0$的初始函数 $\bar{y}_0$ 。这总结于算法 1 中。

关于相关文献，涉及不确定性的偏微分方程（PDEs）正日益受到关注。迄今为止，研究具有随机系数的抛物型偏微分方程的论文仍然寥寥无几。例如，我们可以引用 [9, 13, 14, 21, 27]。关于控制与稳定化，尽管它们在确定性无限维系统以及随机项以仿射形式出现的随机系统中已得到充分研究，但有关不确定性下无限维系统的研究仍然很少。其中，我们可以提及可控性结果方面的 [2, 7, 17] ，以及最优控制问题方面的 [11, 16, 18, 19]。据我们所知，尚无研究将滚动时域控制用于具有不确定性输入的控制系统。在本项目中，我们朝这一方向迈出一步，并基于 [1], 中的理论结果，研究方程（CS）在随机扩散一致有界和对数正态分布两种情况下滚动时域框架的性能与稳定性 ν。针对每种情况，我们分别研究状态的适定性、通过（空间）有限维控制实现受控系统可稳定性的可能性，并推导连续性型与可观测性型不等式。我们还给出滚动时域框架失效概率的上界，该上界取决于扩散参数 ν、反应项和对流项 a 和 b，以及执行器的数量 N 。

本文其余部分安排如下。下一节将介绍全文使用的记号。第 3 节中，我们研究具有一致有界随机扩散的时变抛物型方程。在适当假设下，我们探讨状态方程的适定性、受控系统的可稳定性以及滚动时域框架的稳定性。本节末尾，我们推导出滚动时域控制失效概率的上界。第 4 节中，我们讨论随机扩散服从对数正态分布时的类似问题。

2 记号与预备知识

设给定巴拿赫空间 X 和 Y。若包含映射 $X \subseteq Y$ 连续，则记为 $X \hookrightarrow Y$。从 X 到 Y 的连续线性映射空间记为 $\mathcal{L}(X,\ Y)$。我们也记 $\mathcal{L}(X) := \mathcal{L}(X,\ X)$。$X$ 的连续对偶记为 $X' := \mathcal{L}(X,\ \mathbb{R})$。算子 $L \in \mathcal{L}(X,\ Y)$ 的伴随记作 $L^* \in \mathcal{L}(Y',\ X')$。

设给定一个配备标量积 $(\cdot,\cdot)_H$ 的希尔伯特空间 H。给定子集 $B \subset H$ 的正交补记为 $B^\perp := \{h \in H : (h, s)_H = 0 \quad \forall s \in B\}$。

对于希尔伯特空间 H 中满足 $H = \mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ 的任意两个闭子空间 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$，我们将 $P_{\mathcal{F}}^{\mathcal{G}} \in \mathcal{L}(H, \mathcal{F})$ 定义为 H 中沿 $\mathcal{G}$ 投影到 $\mathcal{F}$ 上的斜投影。也就是说，对于每个 $h \in H$，若考虑唯一分解 $h = h_{\mathcal{F}} + h_{\mathcal{G}}$，其中 $h_{\mathcal{F}} \in \mathcal{F}$ 且 $h_{\mathcal{G}} \in \mathcal{G}$，则有 $P_{\mathcal{F}}^{\mathcal{G}} h := h_{\mathcal{F}}$。显然，$P_{\mathcal{F}}^{\mathcal{F}^\perp}$ 是 H 中投影到 $\mathcal{F}$ 上的正交投影，记作 $P_{\mathcal{F}}$。

对于给定的希尔伯特空间 H_1 和 H_2，我们用记号 $H_1 \otimes H_2$ 表示 H_1 与 H_2 的张量积。

我们还考虑赋予其通常范数的空间 $V := H_0^1(D;\mathbb{R})$、$V' := H^{-1}(D;\mathbb{R})$ 和 $H := L^2(D;\mathbb{R})$。于是，对于任意开区间 $(s_1, s_2) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$，我们可以定义

$$W(s_1,s_2) := \{v \in L^2((s_1,s_2);V) : \partial_t v \in L^2((s_1,s_2);V')\},$$

赋予范数 $\|v\|_{W(s_1,s_2)} := \left(\|v\|^2_{L^2((s_1,s_2);V)} + \|\partial_t v\|^2_{L^2((s_1,s_2);V')}\right)^{\frac{1}{2}}$。

对于概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$、巴拿赫空间 X 以及 $p \in [1,\infty]$，我们用 $L^p_{\mathbb{P}}(\Omega;X)$ 表示勒贝格-博赫纳空间，它由所有强可测函数 $v : \Omega \to X$ 组成，其范数定义为

$$\|v\|_{L^p_{\mathbb{P}}(\Omega;X)} := \begin{cases} \left(\int_\Omega \|v(\cdot,\omega)\|_X^p d\mathbb{P}(\omega)\right)^{\frac{1}{p}} & p < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_{\omega\in\Omega} \|v(\cdot,\omega)\|_X & p = \infty. \end{cases}$$

我们还假设 $L^2_{\mathbb{P}}(\Omega;\mathbb{R})$ 是一个可分希尔伯特空间。要满足这一假设，只需假设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 是可分的，参见例如 [22, 定理 II.10]。那么，若 $p = 2$ 且 X 是一个可分希尔伯特空间，则博赫纳空间 $L^2_{\mathbb{P}}(\Omega;X)$ 同构于张量积空间 $L^2_{\mathbb{P}}(\Omega;\mathbb{R}) \otimes X$，即 $L^2_{\mathbb{P}}(\Omega;X) \cong L^2_{\mathbb{P}}(\Omega;\mathbb{R}) \otimes X$，参见例如 [3, 定理 4.13]。

为方便起见，我们简记 $V_{\mathbb{P}} := L^2_{\mathbb{P}}(\Omega; H_0^1(D;\mathbb{R}))$、$V'_{\mathbb{P}} := L^2_{\mathbb{P}}(\Omega; H^{-1}(D;\mathbb{R}))$、$H_{\mathbb{P}} := L^2_{\mathbb{P}}(\Omega; L^2(D;\mathbb{R}))$ 以及 $U^N_{\mathbb{P}} := L^2_{\mathbb{P}}(\Omega;\mathbb{R}^N)$。将 $H_{\mathbb{P}}$ 与其对偶空间等同后，我们得到由可分希尔伯特空间构成的盖尔范德三元组 $V_{\mathbb{P}} \hookrightarrow H_{\mathbb{P}} \hookrightarrow V'_{\mathbb{P}}$，其间具有稠密嵌入。最后，对于任意开区间 $(s_1, s_2) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$，我们考虑空间 $W_{\mathbb{P}}(s,t)$，其定义为

$$W_{\mathbb{P}}(s_1,s_2) := \{v \in L^2((s_1,s_2);V_{\mathbb{P}}) : \partial_t v \in L^2((s_1,s_2);V'_{\mathbb{P}})\},$$

并赋予范数 $\|v\|_{W_{\mathbb{P}}(s_1,s_2)} := \left(\|v\|^2_{L^2((s_1,s_2);V_{\mathbb{P}})} + \|\partial_t v\|^2_{L^2((s_1,s_2);V'_{\mathbb{P}})}\right)^{\frac{1}{2}}$。众所周知，$W_{\mathbb{P}}(s_1,s_2) \hookrightarrow C([s_1,s_2];H_{\mathbb{P}})$。此外，由于 $L^2_{\mathbb{P}}(\Omega;\mathbb{R})$ 是可分的，对于任意希尔伯特空间 X，我们可以写成

$$\begin{aligned} L^2_{\mathbb{P}}(\Omega;\mathbb{R}) \otimes L^2((s_1,s_2);X) &\cong L^2_{\mathbb{P}}(\Omega;L^2((s_1,s_2);X)) \cong L^2(\Omega\times(s_1,s_2);X) \\ &\cong L^2((s_1,s_2);L^2_{\mathbb{P}}(\Omega;X)) \cong L^2((s_1,s_2);\mathbb{R}) \otimes L^2_{\mathbb{P}}(\Omega;X). \end{aligned}$$

因此，我们可以得出

$$L^2_{\mathbb{P}}(\Omega;\mathbb{R}) \otimes W(s_1,s_2) \cong W_{\mathbb{P}}(s_1,s_2). \tag{3}$$

下面定义有限时域值函数和无限时域值函数。这些函数将在滚动时域控制的分析中频繁使用。

定义 2.1. 对于任意 $y_0 \in H_{\mathbb{P}}$，无限时域值函数 V_∞： $H_{\mathbb{P}} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 定义为

$$V_\infty(y_0) := \min_{\mathbf{u}\in L^2((0,\infty);U)} \{J_\infty(\mathbf{u};0,y_0) \text{ subject to } (\mathrm{CS})\}.$$

同样，对于每个 $(T,\bar{t}_0,\bar{y}_0) \in \mathbb{R}^2_{\geq 0} \times H_{\mathbb{P}}$，有限时域值函数 V_T： $\mathbb{R}_{\geq 0} \times H_{\mathbb{P}} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 定义为

$$V_T(\bar{t}_0,\bar{y}_0) := \min_{\mathbf{u}\in L^2((\bar{t}_0,\bar{t}_0+T);U)} \{J_T(\mathbf{u};\bar{t}_0,\bar{y}_0) \text{ subject to } (2)\}.$$

3 具有均匀随机扩散的抛物型偏微分方程

本节讨论扩散系数远离零且有一致上界的情形。这使我们能够直接使用弱形式。本节中，我们施加以下条件：

假设 3.1。我们假设：

A1：存在随机变量 $\nu_{\min}$、 $\nu_{\max}$以及常数 $\underline{\nu}$、 $\overline{\nu}$，使得

$$0 < \underline{\nu} \le \nu_{\min}(\omega) \le \nu(\omega, x) \le \nu_{\max}(\omega) \le \overline{\nu} < \infty \quad \text{for a.e. } x \in D \text{ and } \omega \in \Omega \text{ a.s..} \tag{4}$$

A2：对于反应参数 a 和对流向量 b，我们作如下假设

$$a \in L^\infty((0,\infty); L^r(D;\mathbb{R})) \text{ with } r \ge n := dim(D), \text{ and } b \in L^\infty((0,\infty) \times D; \mathbb{R}^n), \tag{RA}$$

并令 $\mathcal{N}(a, b) := \|a\|_{L^\infty((0,\infty);L^r(D;\mathbb{R}))} + \|b\|_{L^\infty((0,\infty)\times D;\mathbb{R}^n)}$。

下面列举满足 A1 的扩散 ν 的两个例子。

例 3.1。截断对数正态场的情形，即

$$\nu(\omega, x) = \nu_0(x) + \exp(\sum_{j=1}^{M} z_j(\omega)\psi_j(x)), \tag{5}$$

其中 $\psi_j \in L^\infty(D; \mathbb{R})$ 对于 $j = 0, \ldots\ldots, M$，而 $\nu_0 \in L^\infty(D; \mathbb{R})$ 的本质下确界 $\inf_{x\in D} \nu_0(x) = \underline{\nu} > 0$。随机变量 $z_j : \Omega \to \mathbb{R}$ 均为零均值，且两两不相关，并在足够大的上下界处截断；更多细节参见例如 [20, 第 25] 页。对于每个 $z = (z_1, \ldots\ldots, z_M)$，假设以下量均有定义。

$$\begin{aligned} \nu_{\max}(\omega) &= \operatorname*{ess\,sup}_{x\in D} \nu_0(x) + \exp(\sum_{j=1}^{M} |z_j(\omega)| \|\psi_j\|_{L^\infty(D;\mathbb{R})}), \\ \nu_{\min}(\omega) &= \operatorname*{ess\,inf}_{x\in D} \nu_0(x) + \exp(-\sum_{j=1}^{M} |z_j(\omega)| \|\psi_j\|_{L^\infty(D;\mathbb{R})}). \end{aligned} \tag{6}$$

Si由于 z_j 对于 $j = 1, \ldots, M$ 的取值范围有界，因此对于数值 $\infty > \nu \ge \underline{\nu} > 0$，有 (4)。

例 3.2. 我们也可以将系数 ν 视为由一列标量随机变量 $\{z_j\}_{j\ge1}$ 表征，其中

$$\nu(\omega, x) = \nu_0(x) + \sum_{j=1}^{\infty} z_j(\omega)\psi_j(x), \tag{7}$$

其中，对于 $j \ge 1$， $\psi_j \in L^\infty(D; \mathbb{R})$，且 $z_j : \Omega \to \mathbb{R}$ 对于 $j = 1, 2, \cdots$ 是相互独立且同分布的随机变量，在 $[-1, 1]$ 上均匀分布，使得 z_j 的取值范围包含于 $[-1, 1]$。那么，随机向量 $z = (z_1, z_2, \ldots)$ 的所有实现都支撑在立方体 $[-1, 1]^{\mathbb{N}}$ 中。此外，令 $\nu^* := \operatorname{ess\,inf}_{x\in D} \nu_0(x)$，并取某个 $\kappa > 0$，假定函数 ψ_j 满足

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|\psi_j\|_{L^\infty(D;\mathbb{R})} \le \frac{\kappa}{1+\kappa}\nu^*.$$

这一假设意味着，式 (7) 中随机系数$\nu(x, \omega)$相对于均值的波动（分别为偏差）由均值场主导，也就是说，它们相对于确定性均值场而言较小。因此，我们有

$$\begin{aligned} \nu_{\max}(\omega) &= \operatorname*{ess\,sup}_{x\in D} \nu_0(x) + \sum_{j=1}^{\infty} |z_j(\omega)| \|\psi_j\|_{L^\infty(D;\mathbb{R})}, \\ \nu_{\min}(\omega) &= \nu^* - \sum_{j=1}^{\infty} |z_j(\omega)| \|\psi_j\|_{L^\infty(D;\mathbb{R})}, \end{aligned} \tag{8}$$

且（4）右端的不等式在 $\nu := \nu^* - \frac{\kappa}{1+\kappa}\nu^* = \frac{1}{1+\kappa}\nu^*$ 时成立。

3.1 状态方程的适定性

我们首先讨论（CS）的适定性。为此，我们考虑对 $\omega \in \Omega$ 几乎处处成立的以下辅助随机线性抛物型方程

$$\begin{cases} \partial_t y - \nabla \cdot (\nu(\omega, x)\nabla y) + a(t,x)y + \nabla \cdot (b(t,x)y) = f(t,x,\omega) & (t,x) \in (t_0, t_0+T) \times D, \\ y = 0 & (t,x) \in (t_0, t_0+T) \times \partial D, \\ y(t_0) = y_0(\omega, x) & x \in D, \end{cases} \tag{9}$$

并定义以下弱解概念。

定义 3.1。 设 $(T, t_0, y_0, f) \in \mathbb{R}^2 \times H_{\mathbb{P}} \times L^2(t_0, t_0+T); V_{\mathbb{P}}')$ 已给定。若随机场$y \in W_{\mathbb{P}}(t_0, t_0+T)$ 满足以下条件，则称其为(9)的弱解，

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t_0+T} \langle \partial_t y(t), \varphi(t) \rangle_{V_{\mathbb{P}}', V_{\mathbb{P}}} \, dt + \int_{t_0}^{t_0+T} \int_{\omega} \int_{D} \nu \nabla y(t) \cdot \nabla \varphi(t) \, dx \, d\mathbb{P}(\omega) \, dt \\ &+ \int_{t_0}^{t_0+T} \langle a(t) y(t), \varphi(t) \rangle_{V_{\mathbb{P}}', V_{\mathbb{P}}} \, dt - \int_{t_0}^{t_0+T} \int_{\Omega} \int_{D} y(t) b(t) \cdot \nabla \varphi \, dx \, d\mathbb{P}(\omega) \, dt \\ &= \int_{t_0}^{t_0+T} \langle f(t), \varphi \rangle_{V_{\mathbb{P}}', V_{\mathbb{P}}} \, dt \quad \text{for all } \varphi \in L^2((t_0, t_0+T); V_{\mathbb{P}}), \end{aligned} \tag{10}$$

且 $y(t_0) = y_0$ 在 $H_{\mathbb{P}}$中成立。这里我们使用 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V_{\mathbb{P}}', V_{\mathbb{P}}} := \mathbb{E}\left[\langle \cdot, \cdot \rangle_{V', V}\right]$。

下面我们给出方程 (9) 弱解的存在性结果及若干先验估计。这些估计将在后文中频繁用到。

定理 3.1。 对于每个倍数$(T, t_0, y_0, f) \in \mathbb{R}^2_{\geq 0} \times H_{\mathbb{P}} \times L^2(t_0, t_0+T); V_{\mathbb{P}}')$ 方程(9) 都存在唯一的弱随机场 $y \in W_{\mathbb{P}}(t_0, t_0+T)$，并满足以下估计

$$\|y\|^2_{C([t_0, t_0+T]; H_{\mathbb{P}})} + \|y\|^2_{W_{\mathbb{P}}(t_0, t_0+T)} \leq c_1 \left(\|y_0\|^2_{H_{\mathbb{P}}} + \|f\|^2_{L^2((t_0, t_0+T); V_{\mathbb{P}}')} \right), \tag{11}$$

其中 c_1 取决于（$T, \nu, \nu, \bar{a}, \bar{b}, D$）。此外，我们有以下可观测性不等式

$$\|y_0\|^2_{H_{\mathbb{P}}} \leq c_2 \left(1 + T^{-1} + \mathcal{N}(a,b)\right) \|y\|^2_{L^2((t_0, t_0+T); V_{\mathbb{P}})} + \|f\|^2_{L^2((t_0, t_0+T); V_{\mathbb{P}}')}, \tag{12}$$

其中 c_2 仅取决于（T, ν, ν, D）。

证明。 由 (4) 和假设 A2 可知，半双线性型

$$\begin{aligned} b(t, \psi, \varphi) = &\int_{\Omega} \int_{D} \nu \nabla \psi \cdot \nabla \varphi \, dx \, d\mathbb{P}(\omega) \, dt + \langle a(t) y(t), \varphi(t) \rangle_{V_{\mathbb{P}}', V_{\mathbb{P}}} \\ &- \int_{\Omega} \int_{D} y(t) b(t) \cdot \nabla \varphi \, dx \, d\mathbb{P}(\omega) \qquad \forall \psi, \varphi \in V_{\mathbb{P}}, \end{aligned} \tag{13}$$

是强制的且连续的。因此，存在正常数 $c_{\min}$、 $c_{\max}$ 和 c_0，使得对每个ψ， $\varphi \in V_{\mathbb{P}}$ 以及几乎处处的 $t \in (t_0, t_0+T)$，都有

$$|b(t, \psi, \varphi)| \leq c_{\max} \|\psi\|_{V_{\mathbb{P}}} \|\varphi\|_{V_{\mathbb{P}}}, \quad \text{and} \quad b(t, \psi, \psi) \geq c_{\min} \|\psi\|^2_{V_{\mathbb{P}}} - c_0 \|\psi\|^2_{H_{\mathbb{P}}}. \tag{14}$$

证明的其余部分通过使用由标准正交基函数 $\{\psi_i \otimes \phi_j\}_{i,j \geq 1} \subset L^2_{\mathbb{P}}(\Omega; \mathbb{R}) \otimes V \cong V_{\mathbb{P}}$ 构成的 Galerkin 逼近，并在弱形式 (10) 中取极限即可，其中 $\{\psi_i\}_{i, \geq 1}$ 和$\{\phi_j\}_{j \geq 1}$ 分别是空间 $L^2_{\mathbb{P}}(\Omega; \mathbb{R})$ 和 V 的标准正交基。能量估计 (11) 和 (12) 可通过与 [1, 命题 3.2.] 相同的论证得到。

□

3.2 受控系统的可稳定性

本节中，我们研究 (CS) 关于执行器数量的可稳定性。这里我们仅考虑矩形区域，即 $D = [0, L_d]^d \subset \mathbb{R}^d$，并沿用 [25, 定理 4.1]和 [24] 中给出的论证。

众所周知，拉普拉斯算子 $-\Delta : H^2(D;\mathbb{R}) \cap V \subset H \to H$ 具有紧逆算子，因此存在一个非递减的系统，其中特征值$\{\alpha_i\}_{i\geq 1}$ 按照其重数重复，并且存在与之对应的完备基，满足

$$0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_i \to \infty \text{ with } -\Delta e_i = \alpha_i e_i.$$

对于任意 $d \geq 1$，我们通过归纳法构造一族对 $(\mathcal{O}_N, \mathcal{E}_N)$，使得 $H = \mathcal{O}_N \oplus \mathcal{E}_N^{\perp}forN_\sigma = \sigma(N) := N^d$。

我们从一维情形开始，即 $d = 1$。对于此情形， $D = (0, L_1)$，其中 $L_1 > 0$，且已有文献 [23,引理 4.3 和 5.1] 证明，当取 $L^2(D;\mathbb{R}) = \mathcal{O}_N \oplus \mathcal{E}_N^{\perp}$时，如果令 $N_\sigma = \sigma(N) := N$，并对固定的 $r \in (0,1)$ 定义以下集合

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}_N = \mathcal{E}_N^{[1]} := \operatorname{span}\left\{e_{i,N}^{[1]} : i \in \mathbf{N}\right\} \subset H_0^1((0, L_1);\mathbb{R})\\
&\mathcal{O}_N = \mathcal{O}_N^{[1]} := \operatorname{span}\left\{\mathbf{1}_{O_{i,N}^{[1]}} : i \in \mathbf{N}\right\} \subset L^2((0, L_1);\mathbb{R})\\
&O_{i,N}^{[1]} := (c_{i,N}^{[1]} - \frac{rL_1}{2N}, c_{i,N}^{[1]} + \frac{rL_1}{2N}), \quad c_{i,N}^{[1]} := \frac{(2i-1)L_1}{2N}, \quad i \in \mathbf{N},
\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{N} := \{1, 2, 3, \ldots, N\}$。此外，对于 $i \in \mathbf{N}$，$\mathbf{1}_{O_i^{[1]},N}$表示支集为$O_i^{[1]},N$和 $e_i^{[1]},N$的示性函数，它们是满足齐次狄利克雷边界条件时，拉普拉斯算子在 $L^2((0, L_1);\mathbb{R})$ 上的第一特征函数。

现在，我们处理高维矩形区域 $D = \bigtimes_{n=1}^d (0, L_n)$。根据 [15, 第 4.8 节的结果，1], 可以证明，直和 $L^2(D;\mathbb{R}) = \mathcal{E}_N \oplus \mathcal{O}_N^{\perp}$ 性质（注意$\mathcal{E}_N \oplus \mathcal{O}_N^{\perp} = \mathcal{O}_N \oplus \mathcal{E}_N^{\perp}$）在选择 $N_\sigma = \sigma(N) := N^d$及以下设定时也成立

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}_N := \operatorname{span}\left\{e_{\mathbf{i},N}^{\times}(x) = \bigtimes_{n=1}^d e_{i_n,S}^{[n]}(x_n) : \mathbf{i} := (i_1, \ldots, i_d) \in \mathbf{N}^d\right\} \subset V\\
&\mathcal{O}_N := \operatorname{span}\left\{\mathbf{1}_{o_{\mathbf{i},N}^{\times}}(x) = \bigtimes_{n=1}^d \mathbf{1}_{O_{i_n,N}^{[n]}}(x_n) : \mathbf{i} \in \mathbf{N}^d\right\} \subset H\\
&O_{i,N}^{[n]} = (c_{i,N}^{[n]} - \frac{rL_n}{2N}, c_{i,N}^{[n]} + \frac{rL_n}{2N}), \quad c_{i,N}^{[n]} = \frac{(2i-1)L_n}{2N}, \quad i \in \mathbf{N},\\
&O_{\mathbf{i},N}^{\times}(x) = \bigtimes_{n=1}^d O_{\mathbf{i}_n,N}^{[n]}(x_n), \quad \mathbf{i} \in \mathbf{N}^d,
\end{aligned}$$

其中 $e_i^{[n]},N$， $i \in \mathbf{N}$是满足齐次狄利克雷边界条件时，拉普拉斯算子在 $L^2((0, L_n);\mathbb{R})$ 上的第一特征函数，$\mathbf{i} := (i_1, \ldots, i_d) \in \mathbf{N}^d$，且 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \bigtimes_{n=1}^d (0, L_n)$。此外，对于这一对 $(\mathcal{O}_N, \mathcal{E}_N)$ 的选择，可以用与 [24, 第 5], 节相同的论证证明，对于每个 $N \in \mathbb{N}_0$，都有 $H = \mathcal{E}_N \oplus \mathcal{O}_N^{\perp}$，并且

$$\beta_N \geq c_\beta N^2 \quad \text{with} \quad \beta_N := \inf_{Q \in (V \cap \mathcal{O}_N^{\perp}) \setminus \{0\}} \frac{\|Q\|_V^2}{\|Q\|_H^2}, \tag{15}$$

其中，常数 c_β 与 N 和 Q 无关。图1展示了在 $d = 2$ 情况下， N 取不同值时执行器的支集。

我们根据 [23, 引理3.8] 得到了斜投影的伴随的如下刻画。

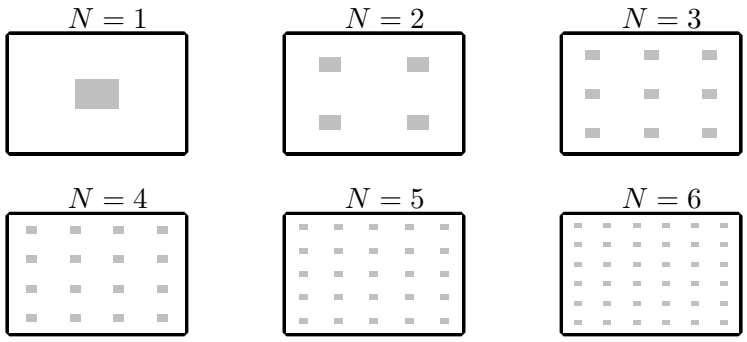


图1： $d = 2$的执行器支集。

引理3.1。假设 F 和 G 是 H的闭子空间，且满足 $H = F \oplus G$ 。那么，对于 $P_F^{G^\perp} \in \mathcal{L}(H)$的伴随算子，有$(P_F^{G^\perp})^* = P_G^{F^\perp}$ 。

在下一个定理中，我们研究以下控制系统的可稳定性

$$\begin{cases} \partial_t y - \nabla \cdot (\nu(\omega)\nabla y) + a(t,x)y + \nabla \cdot (b(t)y) = \sum_{i=1}^N u_i(t)\mathbf{1}_{O_i} & (t,x) \in (t_0,\infty) \times D, \\ y = 0 & (t,x) \in (t_0,\infty) \times \partial D, \\ y(t_0) = y_0(\omega) & x \in D, \end{cases} \tag{16}$$

对于几乎处处的 $\omega \in \Omega$。

定理 3.2 (（16）的均匀可稳定性)。对于每个 $\mu > 0$，存在一个整数 $N^* \in \mathbb{N}_0$ ，使得对于每个 $N \geq N^*$，都存在一个反馈控制向量 $\bar{\mathbf{u}}(y) = (\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_N) \in L^2((t_0,\infty); U_{\mathbb{P}}^N) \cong L^2_{\mathbb{P}}(\Omega;\ \mathbb{R}) \otimes L^2((t_0,\infty); \mathbb{R}^N)$，用于系统(16)，其关联状态满足

$$\|y(t)\|_{H_{\mathbb{P}}}^2 \leq e^{-\mu(t-t_0)}\|y_0\|_{H_{\mathbb{P}}}^2 \quad \textit{for all } t > 0, \tag{17}$$

对于任意给定的$(t_0, y_0) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times H_{\mathbb{P}}$。

证明。我们将反馈控制律设为

$$\sum_{i=1}^N \bar{u}_i(t,\omega)\mathbf{1}_{O_i} := -\lambda P_{\mathcal{O}_N}^{\mathcal{E}_N^\perp} \Delta P_{\mathcal{E}_N}^{\mathcal{O}_N^\perp} y(t,\omega) \quad \text{for a.e. } t > 0 \text{ a.s. } \omega \in \Omega, \tag{18}$$

with

$$\bar{\mathbf{u}}(y) = (\bar{u}_1(y), \ldots, \bar{u}_N(y))^t := -\lambda \mathcal{I} P_{\mathcal{O}_N}^{\mathcal{E}_N^\perp} \Delta P_{\mathcal{E}_N}^{\mathcal{O}_N^\perp} y(t,\omega), \tag{19}$$

其中 $\mathcal{I}:\ \mathcal{O}_N \to \mathbb{R}^N$ 表示典范同构，数值 $\lambda > 0$ 和 $N \in \mathbb{N}_0$ 将在下文给出。将（18）代入方程（16），乘以 y，并在 D上积分，对于几乎处处的 $t > 0$，且几乎必然在 $\omega \in \Omega$ 上，我们得到

$$\begin{aligned} &\frac{d}{2dt}\|y(t,\omega)\|_H^2 + (\nu(t,\omega)\nabla y(t,\omega), \nabla y(t,\omega))_H + \langle a(t)y(t,\omega), y(t,\omega)\rangle_{V',V} \\ &- \langle y(t,\omega), b(t)\cdot\nabla y(t,\omega)\rangle_{V',V} + \lambda\langle P_{\mathcal{O}_N}^{\mathcal{E}_N^\perp} \Delta P_{\mathcal{E}_N}^{\mathcal{O}_N^\perp} y(t,\omega), y(t,\omega)\rangle_{V,V'} = 0 \end{aligned} \tag{20}$$

Fro从现在起，为简洁起见，我们省略 ω，即 $y(t,\omega) = y(t)$。由式（20）并利用 A1，可得 at

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|y(t)\|_H^2 &\leq -2\nu_{\min}(\omega)\|y(t)\|_V^2 + 2|\langle a(t)y(t), y(t)\rangle_{V',V}| \\ &+ 2|(b(t)y(t), \nabla y(t))_H| + 2\lambda\langle P_{\mathcal{O}_N}^{\mathcal{E}_N^\perp} \Delta P_{\mathcal{E}_N}^{\mathcal{O}_N^\perp} y(t,\omega), y(t,\omega)\rangle_{V',V}. \end{aligned}$$

我们采用以下分解

$$y = \theta + \varphi \quad \text{with } \theta := P_{\mathcal{E}_N}^{\mathcal{O}_N^\perp} y \quad \text{and} \quad \varphi := P_{\mathcal{O}_N^\perp}^{\mathcal{E}_N} y,$$

根据斜投影的定义，这一点是合理的。此外，由于 $\theta \in \mathcal{E}_N \subset V$，因此$\Delta\theta \in V'$。于是，算子 $P_{\mathcal{O}_N}^{\mathcal{E}_N^\perp}$ 可视为其到 V'的唯一线性延拓。也就是说，$P_{\mathcal{O}_N}^{\mathcal{E}_N^\perp}\Delta\theta \in \mathcal{O}_N \subset H \subset V'$，并且我们有

$$\langle P_{\mathcal{O}_N}^{\mathcal{E}_N^\perp}\Delta\theta, w\rangle_{V',V} = \langle \Delta\theta, P_{\mathcal{E}_N}^{\mathcal{O}_N^\perp} w\rangle_{V',V} \quad \text{for all } w \in V,$$

由于 $P_{\mathcal{E}_N}^{\mathcal{O}_N^\perp} w \in \mathcal{E}_N \subset V$，因此这是良定义的。于是，我们可以写成

$$-\langle P_{\mathcal{O}_N}^{\mathcal{E}_N^\perp}\Delta\theta, y\rangle_{V',V} = -\langle \Delta\theta, \theta\rangle_{V',V} = \|\theta\|_V^2. \tag{21}$$

由式 (20) 和 (21)，反复使用 Young 不等式可得

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\|y(t)\|_H^2 \\
&\le -2\nu_{\min}(\omega)\|y(t)\|_V^2 + 2|\langle a(t)y(t), y(t)\rangle_{V',V}| + 2|(b(t)y(t), \nabla y(t))_H| - 2\lambda\|\theta(t)\|_V^2 \\
&\le -2\nu_{\min}(\omega)\|y(t)\|_V^2 + 2c\mathcal{N}(a,b)\|y(t)\|_H\|y(t)\|_V - 2\lambda\|\theta(t)\|_V^2 \\
&\le -\nu_{\min}(\omega)\|\theta(t)+\varphi(t)\|_V^2 + \frac{c^2\mathcal{N}^2(a,b)}{\nu_{\min}(\omega)}\|\theta(t)+\varphi(t)\|_H^2 - 2\lambda\|\theta(t)\|_V^2, \qquad (22)\\
&\le -\nu_{\min}(\omega)\left(\|\theta(t)\|_V^2 + \|\varphi(t)\|_V^2\right) + \nu_{\min}(\omega)\left(\kappa_1\|\theta(t)\|_V^2 + \frac{1}{\kappa_1}\|\varphi(t)\|_V^2\right) \\
&+ \frac{c^2\mathcal{N}^2(a,b)}{\nu_{\min}(\omega)}\left(\|\theta(t)\|_H^2 + \|\varphi(t)\|_H^2\right) + \frac{c^2\mathcal{N}^2(a,b)}{\nu_{\min}(\omega)}\left(\kappa_2\|\theta(t)\|_H^2 + \frac{1}{\kappa_2}\|\varphi(t)\|_H^2\right) - 2\lambda\|\theta(t)\|_V^2,
\end{aligned}$$

其中，c 是一个仅依赖于 D的一般常数，且数值 $\kappa_1 > 0$ 和 $\kappa_2 > 0$ 可以任意选取。在上述不等式中令 $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$，可得

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\|y(t)\|_H^2 \le -\left(2\lambda - \nu_{\min}(\omega)\right)\|\theta(t)\|_V^2 + \frac{3c^2\mathcal{N}^2(a,b)}{\nu_{\min}(\omega)}\|\theta(t)\|_H^2 \\
&- \frac{\nu_{\min}(\omega)}{2}\|\varphi(t)\|_V^2 + \frac{3c^2\mathcal{N}^2(a,b)}{2\nu_{\min}(\omega)}\|\varphi(t)\|_H^2 \le -\Theta_\theta(N,\lambda)\|\theta(t)\|_H^2 - \Theta_\varphi(N,\lambda)\|\varphi(t)\|_H^2,
\end{aligned} \tag{23}$$

其中，常数 Θ_θ 和 Θ_φ 定义为

$$\Theta_\theta(\omega, N, \lambda) := \left(2\lambda - \nu_{\min}(\omega)\right)\alpha_1 - \frac{3c^2\mathcal{N}^2(a,b)}{\nu_{\min}(\omega)}, \tag{24}$$

$$\Theta_\varphi(\omega, N, \lambda) := \frac{\nu_{\min}(\omega)}{2}\beta_N - \frac{3c^2\mathcal{N}^2(a,b)}{2\nu_{\min}(\omega)}, \tag{25}$$

其中，β_N 由式 (15) 给出，α_1 是具有齐次狄利克雷边界条件的拉普拉斯算子的最小特征值。

选择 N^* 和 λ^*，使得

$$\beta_{N^*} \ge \frac{2}{\underline{\nu}}\left(4\mu + \frac{3c^2\mathcal{N}^2(a,b)}{2\underline{\nu}}\right) \quad \text{and} \quad \lambda^* \ge \frac{1}{2\alpha_1}\left(4\mu + \frac{3c^2\mathcal{N}^2(a,b)}{\underline{\nu}}\right) + \frac{\overline{\nu}}{2}. \tag{26}$$

我们可以推知，对每个 $N \ge N^*$、$\lambda \ge \lambda^*$，$\Theta_\theta(N,\lambda) \ge 4\mu$ 且 $\Theta_\varphi(N,\lambda) \ge 4\mu$。因此，结合 (23) 可得

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\|y(t)\|_H^2 \le -\Theta_\theta(N,\lambda)\|\theta(t)\|_H^2 - \Theta_\varphi(N,\lambda)\|\varphi(t)\|_H^2 \le -4\mu\|\theta(t)\|_H^2 - 4\mu\|\varphi(t)\|_H^2 \\
&\le -2\mu\left(\|\theta(t)\|_H^2 + \|\varphi(t)\|_H^2 + 2(\theta(t),\varphi(t))_H\right) \le -2\mu\|\theta(t)+\varphi(t)\|_H^2 \le -2\mu\|y(t)\|_H^2,
\end{aligned} \tag{27}$$

对几乎处处的 $t > t_0$，且几乎必然对 $\omega \in \Omega$ 成立。在区间 (t_0, t) 上对 (27) 积分，可得

$$\|y(t,\omega)\|_H^2 \le e^{-2\mu(t-t_0)}\|y(t_0,\omega)\|_H^2 = e^{-2\mu(t-t_0)}\|y_0(\omega)\|_H^2 \quad \omega \in \Omega \text{ for a.s. .} \tag{28}$$

最后，对 Ω 上的式 (28) 积分，得到

$$\|y(t)\|_{H_{\mathbb{P}}}^2 = \mathbb{E}\left[|y(t)\|_H^2\right] \le e^{-2\mu(t-t_0)}\mathbb{E}\left[\|y(t_0)\|_H^2\right] = e^{-2\mu(t-t_0)}\|y_0\|_{H_{\mathbb{P}}}^2.$$

结合 $\bar{\mathbf{u}} \in L^2((t_0, \infty); U_{\mathbb{P}}^N)$ 这一事实（见式 (19)），证明即告完成。 □

注*3.1.* 假设 $b = 0$ *and* $a \in L^\infty((0,\infty)\times D; \mathbb{R})$。那么，在式 *(22)* 的第三行中，将项 $c\mathcal{N}(a,b)\|y(t)\|_H\|y(t)\|_V$ 替换为 $\|a\|_{L^\infty((0,\infty)\times D;\mathbb{R})}\|y(t)\|_H^2$，并按照上文相同的计算步骤，可将式 *(24)* 和 *(25)* 表示为

$$\begin{aligned}\Theta_\theta(\omega, N, \lambda) &:= 2\left(\lambda - \nu_{\min}(\omega)\right)\alpha_1 - 6\|a\|_{L^\infty((0,\infty)\times D;\mathbb{R})},\\ \Theta_\varphi(\omega, N, \lambda) &:= \nu_{\min}(\omega)\beta_N - 3\|a\|_{L^\infty((0,\infty)\times D;\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

因此，对于任意给定的速率 $\mu > 0$，当 N^* *and* λ^* 满足以下条件时，可稳定性结果 (17) 成立

$$\beta_{N^*} \ge \frac{1}{\underline{\nu}}\left(4\mu + 3\|a\|_{L^\infty((0,\infty)\times D;\mathbb{R})}\right) \quad \textit{and} \quad \lambda^* \ge \frac{1}{\alpha_1}\left(2\mu + 3\|a\|_{L^\infty((0,\infty)\times D;\mathbb{R})}\right) + \overline{\nu}. \tag{29}$$

3.3 随机滚动时域控制的稳定性

本节中，我们研究滚动时域算法 1 的稳定性。我们的理论结果以有限时域和无限时域值函数表示，并基于上一节给出的稳定性结果。

对于几乎所有 $t \in (0, \infty)$，由算法 1 获得的随机滚动时域控制 $\mathbf{u}_{rh}$ 及其对应的选择 $\ell(t, y) = \|y\|_V^2$ 和 $\ell(t, y) = \|y\|_H^2$，具有如下稳定性结果。

定理*3.3*。设 $D \subset \mathbb{R}^d$ 满足 $d \ge 1$ 为一个矩形区域。那么，对于 $\ell(t,\cdot) = \|\cdot\|_V^2$ 或 $\ell(t,\cdot) = \|\cdot\|_H^2$ 的任意选择，都存在一个 $N^* = N^*(a,b,\nu) \in \mathbb{N}$，使得由算法 *1* 使用 $U := U_{\mathbb{P}}^N$ 计算得到的滚动时域控制，对于每个 $N \ge N^*$ 和满足 $i = 1$ 的执行器集合 $\mathbf{1}_{O_i}$（其取值为上一节给出的 $\ldots, N$），都是次优且稳定化的。也就是说，对于任意给定的 $\delta > 0$，都存在数值 $T^* > \delta$ 和 $\alpha \in (0,1)$，使得对于任意固定的预测时域 $T \ge T^*$ 以及任意 $y_0 \in H_{\mathbb{P}}$，算法 *1* 提供的控制 $\mathbf{u}_{rh} \in L^2((0,\infty); U_{\mathbb{P}}^N)$ 满足次优性不等式

$$\alpha V_\infty(y_0) \le \alpha J_\infty(\mathbf{u}_{rh}; 0, y_0) \le V_T(0, y_0) \le V_\infty(y_0). \tag{30}$$

此外，我们有

$$\|y(t)\|_{H_{\mathbb{P}}}^2 \to 0 \quad \textit{as } t \to \infty, \tag{31}$$

对于 $\ell(t,\cdot) = \|\cdot\|_H^2$ 的取值，以及

$$\|y(t)\|_{H_{\mathbb{P}}}^2 \le e^{-\zeta t}c_e\|y_0\|_{H_{\mathbb{P}}}^2 \quad \textit{for } t \ge 0, \tag{32}$$

对于 $\ell(t,\cdot) = \|\cdot\|_V^2$ 的取值，其中 ζ 和 c_e 均与 y_0 无关。

证明。 算法 1 对应于 [1]中针对适配于空间 $V_{\mathbb{P}} \hookrightarrow H_{\mathbb{P}} \hookrightarrow V_{\mathbb{P}}'$ 的时变线性演化方程所引入的滚动时域框架。该框架的稳定性基于三个关键条件，我们将在此验证这些条件。证明的其余部分沿用 [1,定理 2.6] 中的相同论证。

P1: 对于任意正数 T，V_T 关于 $H_{\mathbb{P}}$ 范数全局递减。也就是说，存在一个连续、非递减且有界的函数 $\gamma_2 : \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$，使得

$$V_T(\bar{t}_0, \bar{y}_0) \le \gamma_2(T)\|\bar{y}_0\|_{H_{\mathbb{P}}}^2 \quad \text{for all } (\bar{t}_0, \bar{y}_0) \in \mathbb{R}_{\ge 0} \times H_{\mathbb{P}}. \tag{33}$$

只需选择 $N^* \in \mathbb{N}$ 作为满足条件的最小数。

$$\beta_{N^*} > \frac{3c^2\mathcal{N}^2(a,b)}{\underline{\nu}^2}$$

成立。在这种情况下，对于几乎所有的 $\omega \in \Omega$，我们有

$$\beta_{N^*} > \frac{3c^2\mathcal{N}^2(a,b)}{\nu_{\min}^2(\omega)}, \tag{34}$$

并且我们可以利用定理 3.2 验证可稳定性。事实上，对于任意满足以下条件的 $N \geq N^*$ 和 $\lambda \geq \lambda^*$，令 $\bar{u} \in L^2((0,\infty); U_{\mathbb{P}}^N)$ 如式 (18) 所示，

$$\lambda^* := \frac{1}{2\alpha_1}\left(4\mu + \frac{3c^2\mathcal{N}^2(a,b)}{\underline{\nu}}\right) + \frac{\overline{\nu}}{2}, \tag{35}$$

我们得到速率为.....的式 (17)

$$\mu := \frac{\underline{\nu}}{8}\left(\beta_{N^*} - \frac{3c^2\mathcal{N}^2(a,b)}{\underline{\nu}^2}\right).$$

此外，对于该控制，我们可以写成

$$\bar{\mathbf{u}}(\bar{y}(t,\omega)) = (\bar{u}_1(\bar{y}(t,\omega)), \ldots, \bar{u}_N(\bar{y}(t,\omega)))^T := -\lambda \mathcal{I} P_{\mathcal{O}_N}^{\mathcal{E}_N^\perp} \Delta P_{\mathcal{E}_N}^{\mathcal{O}_N^\perp} \bar{y}(t,\omega), \tag{36}$$

其中，$\mathcal{I}: \mathcal{O}_N \to \mathbb{R}^N$ 表示典范同构。对于控制 $\bar{\mathbf{u}}$ 及其关联状态 $\bar{y} = y(\bar{\mathbf{u}})$，有

$$V_T(\bar{t}_0, \bar{y}_0) \leq \frac{1}{2}\int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_0+T} \mathbb{E}\left[\ell(t, \bar{y}(t))\right] dt + \frac{\beta}{2}\int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_0+T} \mathbb{E}\left[|\bar{\mathbf{u}}(t)|_{\ell_2}^2\right] dt,$$

并且根据 ℓ 的取值，我们有以下几种情况：

第一种情况 $\ell(t, \cdot) = \|\cdot\|_H^2$：利用以下事实

$$\|P_{\mathcal{O}_N}^{\mathcal{E}_N^\perp} \Delta P_{\mathcal{E}_N}^{\mathcal{O}_N^\perp}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq c_P \text{ and } \|\mathcal{I}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{O}_N, \mathbb{R}^N)} \leq \hat{c},$$

对于正数常数 c_P 和 $\hat{c}$，由 (36) 可得

$$\begin{aligned} V_T(\bar{t}_0, \bar{y}_0) &\leq \frac{1}{2}\int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_0+T} \left(\|\bar{y}(t)\|_{H_{\mathbb{P}}}^2 dt + \lambda\beta\hat{c}^2 c_P^2 \|\bar{y}(t)\|_{H_{\mathbb{P}}}^2\right) dt \\ &\leq \frac{1 + \lambda\beta\hat{c}^2 c_P^2}{2\mu}\left(1 - e^{-\mu T}\right)\|\bar{y}_0\|_{H_{\mathbb{P}}}^2 =: \gamma_2(T)\|\bar{y}_0\|_{H_{\mathbb{P}}}^2. \end{aligned} \tag{37}$$

第二种情况 $\ell(t, \cdot) = \|\cdot\|_V^2$：在这种情况下，利用标准能量估计，对于几乎所有的$t \in (\bar{t}_0, \bar{t}_0 + T)$ 以及几乎必然成立的 $\omega \in \Omega$，我们有

$$\begin{aligned} \frac{d}{2dt}\|\bar{y}(t)\|_H^2 + \underline{\nu}\|\bar{y}(t)\|_V^2 &\leq c\mathcal{N}(a,b)\|\bar{y}(t)\|_H\|\bar{y}(t)\|_V + \|\sum_{i=1}^N \bar{u}(t,\omega)\mathbf{1}_{O_i}\|_H\|\bar{y}(t)\|_H \\ &\leq \frac{1}{2}c_5\|\bar{y}(t)\|_H^2 + \frac{\nu}{2}\|\bar{y}(t)\|_V^2 + \frac{1}{2}|\bar{\mathbf{u}}(t)|_{\ell_2}^2, \end{aligned}$$

其中 $c_5 := \left(\frac{c^2}{\nu}\mathcal{N}^2(a,b) + N\text{最大值}_{1\leq i\leq N}\|\mathbf{1}_{O_i}\|_H^2\right)$. 对 Ω 积分，并结合 $(\bar{t}_0, \bar{t}_0+T)$ 和 (37)，可得

$$\begin{aligned} \int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_0+T} \|\bar{y}(t)\|_{V_{\mathbb{P}}}^2 dt &\leq \frac{1}{\underline{\nu}}\left(\|\bar{y}(\bar{t}_0)\|_{H_{\mathbb{P}}}^2 + c_5\int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_0+T} \|\bar{y}(t)\|_{H_{\mathbb{P}}}^2 dt + \int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_0+T} \mathbb{E}\left[|\bar{\mathbf{u}}(t)|_{\ell_2}^2\right] dt\right) \\ &\leq \frac{1}{\underline{\nu}}\left(1 + \frac{c_5 + \lambda\hat{c}^2 c_P^2}{\mu}(1 - e^{-\mu T})\right)\|\bar{y}_0\|_{H_{\mathbb{P}}}^2. \end{aligned} \tag{38}$$

最后，利用 (38)，得到

$$V_T(\bar{t}_0,\bar{y}_0) \le \frac{1}{2}\int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_0+T} \left(\|\bar{y}(t)\|_{V_{\mathbb{P}}}^2\,dt + \lambda\beta\hat{c}^2c_P^2\|\bar{y}(t)\|_{H_{\mathbb{P}}}^2\right)\,dt$$
$$\le \frac{1}{2\underline{\nu}}\left(1+\frac{c_5+\lambda(1+\beta\underline{\nu})\hat{c}^2c_P^2}{\mu}(1-e^{-\mu T})\right)\|\bar{y}_0\|_{H_{\mathbb{P}}}^2 =: \gamma_2(T)\|\bar{y}_0\|_{H_{\mathbb{P}}}^2.$$

P2： 对于每个 $(\bar{t}_0,\ \bar{y}_0) \in \mathbb{R}_0\times H_{\mathbb{P}}$，每个形如 $OP_T(\bar{t}_0,\ \bar{y}_0)$ 的有限时域最优控制问题都有解：

目标函数 $J_T(\mathbf{u};\ \bar{t}_0,\ y_0)$ 严格凸、强制且非负。因此，它是弱下半连续的，并且根据变分法直接方法，$OP_T(\bar{t}_0,\ \bar{y}_0)$ 存在唯一极小值点，参见例如 [12, 定理 1.43]。

由于 P1 和 P2 成立，我们可以应用 [1, 定理 6.2]，从而 (30) 成立。现在只需证明 (31) 和 (32) 得到满足。

首先，我们处理 (32)。这可通过使用 [1, 定理 6.2] 以及性质 P3，具体如下：

P3: 对于每个 $T>0,\ V_T$ 相对于 $H_{\mathbb{P}}$-范数一致正。换言之，对于每个 $T>0$，都存在一个常数 $\gamma_1(T)>0$，使得

$$V_T(\bar{t}_0,\bar{y}_0) \ge \gamma_1(T)\|\bar{y}_0\|_{H_{\mathbb{P}}}^2 \quad \text{for every } (\bar{t}_0,\bar{y}_0)\in\mathbb{R}_{\ge 0}\times H_{\mathbb{P}}. \tag{39}$$

接下来验证这一性质。对于任意给定的 $(\bar{t}_0,\bar{y}_0)\in\mathbb{R}_{\ge 0}\times H_{\mathbb{P}}$ 和控制 $\mathbf{u}\in L^2((\bar{t}_0,\bar{t}_0+T);\ U_{\mathbb{P}}^N)$，由 (12) 可得

$$\|\bar{y}_0\|_{H_{\mathbb{P}}}^2 \le c_2(1+T^{-1}+\mathcal{N}(a,b))\int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_0+T}\|\bar{y}(t)\|_{V_{\mathbb{P}}}^2dt + \int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_0+T}\|\sum_{i=1}^N \bar{u}_i\mathbf{1}_{O_i}\|_{V_{\mathbb{P}}'}^2dt.$$

结合估计式

$$\int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_0+T}\|\sum_{i=1}^N \bar{u}_i\mathbf{1}_{O_i}\|_{V_{\mathbb{P}}'}^2dt \le i_{H_{\mathbb{P}},V_{\mathbb{P}}'}\int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_0+T}\|\sum_{i=1}^N \bar{u}_i\mathbf{1}_{O_i}\|_{H_{\mathbb{P}}}^2dt$$
$$\le i_{H_{\mathbb{P}},V_{\mathbb{P}}'}N\max_{1\le i\le N}\|\mathbf{1}_{O_i}\|_H^2\int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_0+T}\mathbb{E}\left[|\bar{\mathbf{u}}(t)|_{\ell_2}^2\right]\,dt,$$

我们得到 (39)，其中 $\gamma_1(T) := \left(\max\left\{2c_2(1+T^{-1}+\mathcal{N}(a,b)),\ \beta(i_{H_{\mathbb{P}},V_{\mathbb{P}}'}N\max_{1\le i\le N}\|\mathbf{1}_{O_i}\|_H^2)\right\}\right)^{-1}$，其中 $i_{H_{\mathbb{P}},V_{\mathbb{P}}'}$ 是从 $H_{\mathbb{P}}$ 到 $V_{\mathbb{P}}'$ 的嵌入常数。因此，P3 成立，这就完成了对 (32) 的验证。

接下来证明（31）成立。利用（30）和（33），可得

$$\int_0^\infty \|y_{rh}(t)\|_{H_{\mathbb{P}}}^2\,dt \le \frac{2\gamma_2(T)}{\alpha}\|y_0\|_{H_{\mathbb{P}}}^2 \quad \text{and} \quad \int_0^\infty \mathbb{E}\left[|\mathbf{u}_{rh}(t)|_{\ell_2}^2\right]\,dt \le \frac{2\gamma_2(T)}{\alpha\beta}\|y_0\|_{H_{\mathbb{P}}}^2. \tag{40}$$

此外，根据标准能量估计，对于每个 $t\ge t_0$，我们有

$$\|y_{rh}(t)\|_{H_{\mathbb{P}}}^2 + \underline{\nu}\int_0^t\|y_{rh}(t)\|_{V_{\mathbb{P}}}^2\,dt \le \|y_0\|_{H_{\mathbb{P}}}^2 + \left(\frac{c^2}{\underline{\nu}}\mathcal{N}^2(a,b)+N\max_{1\le i\le N}\|\mathbf{1}_{O_i}\|_H^2\right)\int_0^\infty\|y_{rh}(t)\|_{H_{\mathbb{P}}}^2\,dt$$
$$+\int_0^\infty\mathbb{E}\left[|\mathbf{u}_{rh}(t)|_{\ell_2}^2\right]\,dt \le c_6\|y_0\|_{H_{\mathbb{P}}}^2,$$

其中 $c_6 := \left(1+\frac{(1+\beta c_5)\ \gamma_2\ T}{\alpha\beta}\right)()$，且 $c_5 := \left(\frac{c^2}{\nu}\mathcal{N}^2(a,b)\ +N\text{最大值}_{1\le i\le N}\|\mathbf{1}_{O_i}\|_H^2\right)$. 因此，我们可以得出结论：

$$\|y_{rh}\|_{L^\infty((0,\infty);H_{\mathbb{P}})}^2 \le c_6\|y_0\|_{H_{\mathbb{P}}}^2 \quad \text{and} \quad \int_0^\infty\|y_{rh}(t)\|_{V_{\mathbb{P}}}^2 \le \frac{c_6}{\underline{\nu}}\|y_0\|_{H_{\mathbb{P}}}^2. \tag{41}$$

此外，对于每个 $t'' \geq t' \geq 0$ ，都有

$$
\begin{aligned}
&\|y_{rh}(t'')\|_{H_{\mathbb{P}}}^2 - \|y_{rh}(t')\|_{H_{\mathbb{P}}}^2 = \int_{t'}^{t''} \frac{d}{dt}\|y_{rh}(t)\|_{H_{\mathbb{P}}}^2 dt, \\
&= 2\int_{t'}^{t''} \mathbb{E}\left[\langle y_{rh}(t), \nu\Delta y_{rh}(t) - a(t)y_{rh}(t) - \nabla\cdot(b(t)y_{rh}(t)) + \sum_{i=1}^{N}(u_{rh})_i(t)\mathbf{1}_{O_i}\rangle_{V,V'}\right] dt, \\
&\leq -2\underline{\nu}\int_{t'}^{t''} \|y_{rh}(t)\|_{V_{\mathbb{P}}}^2 dt \\
&+ 2\int_{t'}^{t''} \mathbb{E}\left[\langle -a(t)y_{rh}(t) - \nabla\cdot(b(t)y_{rh}(t)) + \sum_{i=1}^{N}(u_{rh})_i(t)\mathbf{1}_{O_i}, y_{rh}(t)\rangle_{V,V'}\right] dt, \\
&\leq 2\mathcal{N}(a,b)\int_{t'}^{t''} \|y_{rh}(t)\|_{V_{\mathbb{P}}}\|y_{rh}(t)\|_{H_{\mathbb{P}}} dt \\
&+ 2(N\max_{1\leq i\leq N}\|\mathbf{1}_{O_i}\|_H^2)^{\frac{1}{2}}\int_{t'}^{t''} \|\mathbf{u}_{rh}(t)\|_{L^2_{\mathbb{P}}(\Omega;\mathbb{R}^N)}\|y_{rh}(t)\|_{H_{\mathbb{P}}} dt \\
&\leq 2\mathcal{N}(a,b)\Big(\int_{t'}^{t''} \|y_{rh}(t)\|_{V_{\mathbb{P}}}^2 dt\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_{t'}^{t''} \|y_{rh}(t)\|_{H_{\mathbb{P}}}^2 dt\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&+ 2(N\max_{1\leq i\leq N}\|\mathbf{1}_{O_i}\|_H^2)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_{t'}^{t''} \mathbb{E}\left[|\mathbf{u}_{rh}(t)|_{\ell_2}^2\right] dt\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_{t'}^{t''} \|y_{rh}(t)\|_{H_{\mathbb{P}}}^2 dt\Big)^{\frac{1}{2}} \leq c_7\|y_0\|_{H_{\mathbb{P}}}^2 (t''-t')^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}
\tag{42}
$$

其中，最后一个不等式用到了 $c_7 := 2\left(\mathcal{N}(a,b)\nu^{-\frac{1}{2}}c_6 + (N\max_{1\leq i\leq N}\|\mathbf{1}_{O_i}\|_H^2)^{\frac{1}{2}}c_6^{\frac{1}{2}}\left(\begin{smallmatrix} 2\gamma_2 & T \\ & \alpha\beta \end{smallmatrix}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$ 以及 (40) 和 (41)。

The 证明的其余部分与基于 (42) 和 (40) 的 [1, 定理 6.4] 证明过程相同 . □

3.4 失效概率

本节关注滚动时域框架下的失效概率。对于给定数量的执行器 N，我们计算一种情形发生概率的上界：采用算法 1 计算的随机滚动时域控制的可稳定性（其中$(U := U_{\mathbb{P}}^N)$ 以及采用算法 1 的确定性变体（[1, 算法 1.1]）并使用控制 $U := \mathbb{R}^N$ 均无法得到保证。

具体而言，设执行器的数量为给定的 $N \in \mathbb{N}_0$ 。回顾定理3.3的证明可知，条件P1，尤其是不等式 (34)，至关重要。因此，若满足以下条件，P1和受控系统的可稳定性可能会失效

$$
\nu_{\min}^2(\omega)\beta_{\bar{N}} \leq 3c^2\mathcal{N}^2(a,b). \tag{43}
$$

在此情况下，对于给定的 $y_0 \in H$，存在一个稳定化确定性控制$\mathbf{u}_{rh}(\omega) \in L^2((0,\infty);\mathbb{R}^N)$，使其相对于 H-范数而言，在式(30)的意义下是次优的

$$
\min_{\mathbf{u}\in L^2((0,\infty);\mathbb{R}^{\bar{N}})} J_\infty^\omega(\mathbf{u};0,y_0) := \frac{1}{2}\int_0^\infty \ell(t,y(t))dt + \frac{\beta}{2}\int_0^\infty |\mathbf{u}(t)|_{\ell_2}^2 dt, \tag{44}
$$

此外，对于任意给定的 $y_0 \in H_{\mathbb{P}}$，存在一个稳定化随机控制$\mathbf{u}_{rh} \in L^2((0,\infty);U_{\mathbb{P}}^{\bar{N}})$，使其相对于 $H_{\mathbb{P}}$-范数而言是次优的

$$
\min_{\mathbf{u}\in L^2((0,\infty);U_{\mathbb{P}}^{\bar{N}})} J_\infty(\mathbf{u};0,y_0) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \mathbb{E}\left[\ell(t,y(t))\right] dt + \frac{\beta}{2}\int_0^\infty \mathbb{E}\left[|\mathbf{u}(t)|_{\ell_2}^2\right] dt, \tag{45}
$$

对于 $\ell(t,\ y) = \|y\|_V^2$和 $\ell(t,\ y) = \|y\|_H^2$这两种选择，均无法保证这一点。因此，对于上述两种问题表述，失效概率可表示为

$$
\mathbb{P}\left[\nu_{\min}^2(\omega)\beta_{\bar{N}} \leq 3c^2\mathcal{N}^2(a,b)\right] = \mathbb{P}\left[\nu_{\min}(\omega) \leq 3^{\frac{1}{2}}c\mathcal{N}(a,b)\beta_{\bar{N}}^{-\frac{1}{2}}\right]. \tag{46}
$$

现在我们同时考虑例3.1和例3.2。

例 3.1： 令 $\Gamma(\omega) := \sum_{j=1}^{M} |z_j(\omega)| \|\psi_j\|_{L^\infty(D)}$，我们有

$$\mathbb{P}\left[\nu_{\min}(\omega) \le 3^{\frac{1}{2}} c\mathcal{N}(a,b)\beta_{\bar{N}}^{-\frac{1}{2}}\right] = \mathbb{P}\left[\exp(-\Gamma(\omega)) \le 3^{\frac{1}{2}} c\mathcal{N}(a,b)\beta_{\bar{N}}^{-\frac{1}{2}} - \underline{\nu}\right]. \tag{47}$$

其中 $3^{\frac{1}{2}} c\mathcal{N}(a,\ b)\beta_{\bar{N}}^{-1} - \underline{\nu} \ge 0$，否则 (43) 将不成立。利用 (15)、(46)、(47) 和马尔可夫不等式，可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left[\nu_{\min}(\omega) \le 3^{\frac{1}{2}} c\mathcal{N}(a,b)\beta_{\bar{N}}^{-\frac{1}{2}}\right] = \mathbb{P}\left[-\Gamma(\omega) \le \log\left(3^{\frac{1}{2}} c\mathcal{N}(a,b)\beta_{\bar{N}}^{-\frac{1}{2}} - \underline{\nu}\right)\right] \\
&= \mathbb{P}\left[\Gamma(\omega) \ge \log\left(\frac{1}{3^{\frac{1}{2}} c\mathcal{N}(a,b)\beta_{\bar{N}}^{-\frac{1}{2}} - \underline{\nu}}\right)\right] \le \mathbb{E}\left[e^{\Gamma}\right] e^{\log\left(3^{\frac{1}{2}} c\mathcal{N}(a,b)\beta_{\bar{N}}^{-\frac{1}{2}} - \underline{\nu}\right)} \\
&= \mathbb{E}\left[e^{\Gamma}\right]\left(3^{\frac{1}{2}} c\mathcal{N}(a,b)\beta_{\bar{N}}^{-\frac{1}{2}} - \underline{\nu}\right) \le \mathbb{E}\left[e^{\Gamma}\right]\left(\left(\frac{3}{c_\beta}\right)^{\frac{1}{2}} c\mathcal{N}(a,b)\bar{N}^{-1} - \underline{\nu}\right).
\end{aligned}$$

其中 $\mathbb{E}\left[e^{\Gamma}\right]$ 有界，且不失一般性，我们假设 $\beta_{\bar{N}}^{\frac{1}{2}}(1+\nu) \ge 3^{\frac{1}{2}} c\mathcal{N}(a,\ b)$。这里回顾一下，当 $N \to \infty$ 时，$\beta_N \to \infty$。

例 3.2： 令 $\Gamma(\omega) := \sum_{j=1}^{\infty} |z_j(\omega)| \|\psi_j\|_{L^\infty(D)}$，可得

$$\mathbb{P}\left[\nu_{\min}(\omega) \le 3^{\frac{1}{2}} c\mathcal{N}(a,b)\beta_{\bar{N}}^{-\frac{1}{2}}\right] = \mathbb{P}\left[\Gamma(\omega) \ge \nu^* - 3^{\frac{1}{2}} c\mathcal{N}(a,b)\beta_{\bar{N}}^{-\frac{1}{2}}\right], \tag{48}$$

其中，回想一下，当 $N \to \infty$ 时 $\beta_N \to \infty$，我们假设 $\nu^* - 3^{\frac{1}{2}} c\mathcal{N}(a,\ b)\beta_{\bar{N}}^{-\frac{1}{2}} > 0$。利用 (15)、(46)、(48) 和马尔可夫不等式，我们得到

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left[\nu_{\min}(\omega) \le 3^{\frac{1}{2}} c\mathcal{N}(a,b)\beta_{\bar{N}}^{-\frac{1}{2}}\right] = \mathbb{P}\left[\Gamma(\omega) \ge \nu^* - 3^{\frac{1}{2}} c\mathcal{N}(a,b)\beta_{\bar{N}}^{-\frac{1}{2}}\right] \\
&\le \frac{\mathbb{E}[\Gamma]}{\nu^* - 3^{\frac{1}{2}} c\mathcal{N}(a,b)\beta_{\bar{N}}^{-\frac{1}{2}}} \le \frac{\sum_{j\ge 1}\mathbb{E}[|z_j|]\,\|\psi_j\|_{L^\infty(D)}}{\nu^* - (\frac{3}{c_\beta})^{\frac{1}{2}} c\mathcal{N}(a,b)\bar{N}^{-1}}.
\end{aligned}$$

4 具有对数正态扩散的抛物型偏微分方程

本节研究由以下定义的对数正态扩散情形

$$\nu(\omega, x) = \exp(g(\omega, x)) \tag{49}$$

其中 g 是零均值高斯随机场。这类扩散广泛应用于许多领域，包括地下流动建模和水文学。更具体地，对于每个 $x \in D$，$g(x,\ \cdot)$ 是一个高斯随机变量，因此对于每个 $\omega \in \Omega$，$0 < \nu(\omega,\ x) < \infty$。然而，对于任意 $\epsilon > 0$，我们有 $\mathbb{P}[\nu(\cdot,\ x) > \epsilon^{-1}] > 0$，因此，其对应的椭圆算子在所有可能的 ω 实现上并非从上方一致有界。我们还有 $\mathbb{P}[\nu(\cdot,\ x) < \epsilon] > 0$，因此相应的椭圆算子也不是一致椭圆的。

假设 4.1。本节中，我们施加以下条件：

A1：存在随机变量 $\nu_{\min}$ 和 $\nu_{\max}$，使得

$$0 < \nu_{\min}(\omega) \le \nu(\omega, x) \le \nu_{\max}(\omega) < \infty \quad \text{for a.e. } x \in D \text{ and a.s. } \omega \in \Omega, \tag{50}$$

其中 $\nu_{\max}(\omega)\ \frac{1}{\nu_{\min}(\omega)} \in L^p_{\mathbb{P}}(\Omega;\mathbb{R})$ 对于 $p \in [1,\infty)$。

A2：我们还假设对于 a 和 b，

$$a \in L^{\infty}((0,\infty)\times D;\mathbb{R}) \text{ and } b = 0. \tag{51}$$

作为满足假设 4.1 的对数正态分布扩散系数的一个示例，我们参见 [10, 13, 26]。

例 4.1。令 (49) 中的 $g(\omega,x) := \sum_{j=1}^{\infty} z_j(\omega)\psi_j(x)$，其中函数 $\psi_j \in L^{\infty}(D;\mathbb{R})$（$j = 1, 2, \ldots$）满足 $\sum_{j=1}^{\infty} \|\psi_j(x)\|_{L^{\infty}(D;\mathbb{R})}$ 有限，且随机变量 z_j 是独立同分布的标准正态随机变量，即在 $\mathbb{R}$ 中服从 $z_j \sim \mathcal{N}(0,1)$。为描述所得到的随机场，令$\mathcal{F} := \bigotimes_{j=1}^{\infty} \mathcal{B}(\mathbb{R})$，其中 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 是 $\mathbb{R}$ 上的博雷尔 σ-代数。在这种情况下，概率测度可表示为高斯乘积概率测度，即 $\mathbb{P} := \bigotimes_{j=1}^{\infty} \mathcal{N}(0,1)$。为保证 (49) 中 ν 的适定性，我们将 z 限定在集合 $\Omega := \{z \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{j=1}^{\infty} |z_j| \|\psi_j\|_{L^{\infty}(D)} < \infty\}$ 中。在这种情况下，Ω 是 $\mathcal{F}$-可测的，且满足 $\mathbb{P}(\Omega) = 1$。此外，对于每个 $\omega \in \Omega$，下列量均有定义

$$\nu_{\max}(\omega) = \exp(\sum_{j=1}^{\infty} |z_j(\omega)| \|\psi_j\|_{L^{\infty}(D)}), \qquad \nu_{\min}(\omega) = \exp(-\sum_{j=1}^{\infty} |z_j(\omega)| \|\psi_j\|_{L^{\infty}(D)}), \tag{52}$$

并满足假设 4.1 中的 A1。更多详情请参见 [4, 26]。

4.1 状态方程的适定性

对于对数正态分布扩散系数，解的存在性问题更加微妙。事实上，由于缺乏可积性，我们无法直接使用弱形式 (10)。在这种情况下，首先，我们证明对于 $\omega \in \Omega$ 几乎处处，解$y(\omega) \in W(0,T)$存在；然后，我们证明映射$y: \Omega \to W(0,T)$关于 $\omega \mapsto y(\omega)$的可测性和可积性。后者依赖于对估计中所有常数的可积性的控制。

定理 4.1. 假设假设 *4.1* 成立。则对于任意给定的$(t_0, T, y_0, f) \in \mathbb{R}^2_{>0} \times H \times L^2((t_0, t_0+T); H)$ 方程(9) 存在唯一解 $y \in W_{\mathbb{P}}(t_0, t_0+T)$，且满足以下估计

$$\|y\|^2_{C([t_0,t_0+T];H_{\mathbb{P}})} + \|y\|^2_{W_{\mathbb{P}}(t_0,t_0+T)} \le c_3 \left(\|y_0\|^2_H + \|f\|^2_{L^2((t_0,t_0+T);H)} \right), \tag{53}$$

其中 c_3 取决于(T, a, b, D, Ω)。此外，我们有以下可观测性不等式

$$\|y_0\|^2_H \le c_4 \|y\|^2_{L^2((t_0,t_0+T);V_{\mathbb{P}})} + \|f\|^2_{L^2((t_0,t_0+T);H)}, \tag{54}$$

其中 c_4 仅取决于(T, a, b, D, Ω)。

证明。证明主要借鉴了 [10]中关于对数正态扩散下椭圆型偏微分方程适定性的论证，分以下步骤进行：首先，对每个 $\omega \in$，几乎必然地在 Ω 上，我们考虑唯一解 $y(\omega) \in W(0,T)$，并推导所得解族的估计。接下来，我们证明 $y(\omega)$关于 ω可测。最后，我们证明该解的可积性。全文中，c 表示一个与 ω无关的一般常数。

利用确定性抛物型偏微分方程的标准论证可以证明，对于 $\omega \in$，几乎必然地在 Ω 上，(CS) 存在唯一弱解 $y(\omega)$，且满足

$$\begin{aligned} \frac{d}{2dt}\|y(\omega,t)\|^2_H + \nu_{\min}(\omega)\|y(\omega,t)\|^2_V &\le \|a\|_{L^{\infty}((0,\infty)\times D;\mathbb{R})} \|y(\omega,t)\|^2_H + (f(t), y(\omega,t))_H \\ &\le \frac{\left(1 + 2\|a\|_{L^{\infty}((0,\infty)\times D;\mathbb{R})}\right)}{2} \|y(\omega,t)\|^2_H + \frac{1}{2}\|f(t)\|^2_H. \end{aligned} \tag{55}$$

利用格朗沃尔不等式，我们得到对每个 $t \in [t_0, t_0+T]$，

$$\begin{aligned} &\|y(\omega,t)\|^2_H + 2\nu_{\min}(\omega)\|y(\omega)\|^2_{L^2((t_0,t);V)} \\ &\qquad \le c\exp(T(1 + 2\|a\|_{L^{\infty}((0,\infty)\times D;\mathbb{R})})) \left(\|y_0\|^2_H + \|f\|^2_{L^2((t_0,t_0+T);H)} \right). \end{aligned}$$

因此，我们可以推断

$$\|y(\omega)\|^2_{L^2((t_0,t_0+T);V)} \leq \frac{c}{\nu_{\min}(\omega)} \left(\|y_0\|^2_H + \|f\|^2_{L^2((t_0,t_0+T);H)} \right). \tag{56}$$

同样，我们可以写成

$$\begin{aligned} \|\partial_t y(\omega)\|^2_{L^2((t_0,t_0+T);V')} &\leq c \left(\nu^2_{\max}(\omega) + \|a\|^2_{L^\infty((0,\infty)\times D;\mathbb{R})} \right) \|y(\omega)\|^2_{L^2((t_0,t_0+T);V)} + c\|f\|^2_{L^2((t_0,t_0+T);H)} \\ &\leq \frac{c(1+\nu^2_{\max}(\omega))}{\nu_{\min}(\omega)} \left(\|y_0\|^2_H + \|f\|^2_{L^2((t_0,t_0+T);H)} \right) \end{aligned}$$

因此，结合 (56)，我们有

$$\|y(\omega)\|^2_{W(0,T)} \leq c_c(\omega) \left(\|y_0\|^2_H + \|f\|^2_{L^2(t_0,t_0+T;H)} \right), \tag{57}$$

其中 $c_c(\omega) := \frac{c\ (1+\nu^2\ \text{最大值}\ (\omega)\ )}{\nu_{\min}\ (\omega)}$。

接下来，我们证明解算子的可测性。为此，我们证明 y 几乎处处是一个可测函数序列的极限。可以参照 [10, 定理 3.4]中的证明。因此，我们在此仅概述其主要思路。首先，对每个 $n \in \mathbb{N}$，我们定义序列 $\Omega_n \subset \Omega$，使得扩散系数一致有界

$$\Omega_n := \{\omega \in \Omega : \nu_{\max}(\omega) < n \text{ and } \nu_{\min}(\omega) > \frac{1}{n}\} \subset \Omega. \tag{58}$$

于是，$\{\Omega_n\}_n$ 随 $\Omega = \cup_{n\in\mathbb{N}}\Omega_n$递增。此外，由定理 3.1 可知，(CS) 存在唯一解 $y_n \in L^2_{\mathbb{P}|_{\Omega_n}}(\Omega; W(t_0, t_0+T))$，其中 $\mathbb{P}|_{\Omega_n}$表示将 $\mathbb{P}$限制在 Ω_n上。将此解在 Ω 的其余部分延拓为零，便得到定义在整个 Ω 上的解，我们仍记为y_n。根据定义， y_n 是可测的。此外，由于 $\Omega = \cup_{n\in\mathbb{N}}\Omega_n$，且 y_n 几乎处处在$\omega \in \Omega_n$ 上满足 (CS)，再由解的唯一性可知，函数 y 是可测函数$\{y_n\}_n$几乎处处的极限，因此它也是可测的。

现在，我们可以证明解的可积性。利用假设 4.1 中的 A1，对 (57) 两边在 Ω 上积分，可得

$$\|y\|^2_{L^p(\Omega;W(0,T))} \leq \tilde{c}(p) \left(\|y_0\|^2_H + \|f\|^2_{L^2((t_0,t_0+T);H)} \right),$$

对每个 $p \in [1,\infty)$，存在一个依赖于 p 的常数 $\tilde{c}(p) > 0$，这是因为 $c_c(\omega)$ 是 p-可积的。特别地，由于 (3)，不等式 (53) 对 $p = 2$ 成立，其中常数为 $c_3 := \tilde{c}(2) > 0$。

接下来，我们验证可观测性估计 (54)。将 (9) 乘以 $\frac{T+t_0-t}{T} y(t)$，在 (t_0, t_0+T) 上积分，并利用 Young 不等式，可得对 $\omega \in$，Ω-几乎处处成立。

$$\begin{aligned} \|y_0\|^2_H &= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \|y(\omega,t)\|^2_H \, dt \\ &+ 2\int_{t_0}^{t_0+T} \frac{t_0+T-t}{T} \Big(\nu_{\max}(\omega)\|y(\omega,t)\|^2_V + \langle a(t)y(\omega,t), y(\omega,t)\rangle_{V',V} - \langle f(t), y(\omega,t)\rangle_{V',V} \Big) dt \\ &\leq c\left(T^{-1} + \nu_{\max}(\omega) + 1 + \|a\|_{L^\infty((0,\infty)\times D;\mathbb{R})}\right) \int_{t_0}^{t_0+T} \|y(\omega,t)\|^2_V \, dt + \int_{t_0}^{t_0+T} \|f(t)\|^2_H \, dt, \end{aligned} \tag{59}$$

其中 $c > 0$ 仅取决于 D。令 $c_o(\omega) := c\left(T^{-1} + \nu_{\max}(\omega) + 1 + \|a\|_{L^\infty((0,\infty)\times D;\mathbb{R})}\right)$，将 (59) 除以 $c_o(\omega)$，并在 Ω 上积分，即得 (54)，证明完毕。 □

4.2 确定性滚动时域控制的稳定性

根据定理 4.1，对于对数正态扩散，只有在初始条件和强迫函数均为确定性的情况下，才能证明 $W_{\mathbb{P}}(0, T)$ 中状态的适定性。由于缺乏可积性（见 (57)），目前尚不清楚如何将其推广到以随机场作为初始条件和强迫函数的情形。因此，首先，在滚动时域框架的任意时刻 t_i，我们将随机场 $y_{rh}(t_j, \cdot, \cdot)$ 转化为通过计算关于 ω 的函数平方的平均值，得到确定性初始函数 $\bar{y}_0(\cdot) = \left(\mathbb{E}\left[y_{rh}(t_j, \cdot)^2\right]\right)^{\frac{1}{2}}$。然后，我们将这个确定性初始函数代入在线开环问题。为此，我们修改并调整了算法 1，以制定算法 2。此外，此处我们需要将自身限制在确定性控制上，因此，对于每个 $\bar{y}_0 \in H$，我们考虑以下性能指标

$$J_T(\mathbf{u}; \bar{t}_0, \bar{y}_0) := \frac{1}{2} \int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_0+T} \mathbb{E}\left[\|y(t)\|_V^2\right] dt + \frac{\beta}{2} \int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_0+T} |\mathbf{u}(t)|_{\ell_2}^2 dt. \tag{60}$$

在下一个定理中，我们研究算法 2 得到的控制在 $U := \mathbb{R}^N$ 和 $\ell(t, y) := \|y\|_V^2$ 下的稳定性。

算法 2 针对对数正态扩散的鲁棒滚动时域控制(δ, T)

要求： 采样时间 δ、预测时域 $T \geq \delta$ 和初始状态 y_0**确保：** 滚动时域控制 $\mathbf{u}_{rh}$ 的稳定性。

我们按照算法 1 的步骤进行，但将步骤 1、4 和 5 替换为:

1. Compute $\mathbb{E}\left[y_0^2(x)\right]$ for $x \in D$ and set $(\bar{t}_0, \bar{y}_0) := \left(0, \left(\mathbb{E}\left[y_0^2\right]\right)^{\frac{1}{2}}\right)$ and $y_{rh}(0) = y_0$;
4. Compute $\mathbb{E}\left[y_{rh}(\bar{t}_0 + \delta, x)^2\right]$ of the state for any $x \in D$ at time $\bar{t}_0 + \delta$;
5. Update: $(\bar{t}_0, \bar{y}_0) \leftarrow \left(\bar{t}_0 + \delta, \left(\mathbb{E}\left[y_{rh}(\bar{t}_0 + \delta)^2\right]\right)^{\frac{1}{2}}\right)$;

定理 4.2。 假设假设 *4.1* 成立，且

$$\nu_{\min}(\omega) + \operatorname{ess\,inf}\{a(t, x) : (t, x) \in (0, \infty) \times D\} > 0, \ \textit{for } \omega \in \Omega \ \textit{a.s.}. \tag{61}$$

那么，对于 $N \geq 1$，采用第 *3.2* 节给出的执行器集合 $\{\mathbf{1}_{O_i}\}_{i=1}^N$，用于 $\ell(t, \cdot) := \|\cdot\|_V^2$ 的算法 *2* 是次优且具有稳定化作用的。也就是说，对于任意给定的 $\delta > 0$，均存在数值 $T^* > \delta$ 和 $\alpha \in (0, 1)$，使得对于任意固定的预测时域 $T \geq T^*$ 以及任意 $y_0 \in H_{\mathbb{P}}$，滚动时域控制 $\mathbf{u}_{rh} \in L^2((0, \infty); \mathbb{R}^N)$满足次优性不等式 (30) 以及指数稳定性结果 (32)。

证明。 证明与定理 3.1 的证明类似，并基于定理 2.6] 中给出的论证。更准确地说，我们需要再次验证定理 3.1 的证明中给出的性质 P1-P3，只是将 H-范数替换为 $H_{\mathbb{P}}$-范数。验证 P1-P3 后，根据算法 2 的构造（见步骤 1、4 和 5），容易证明，对于每个时刻 $t_i = i\delta$， $y_{rh}(t_i)$ 关于 $H_{\mathbb{P}}$-范数均满足式 (33) 和 (39)，即，对于每个 $i = 0, 1, 2, \ldots$， $V_T(t_i, y_{rh}(t_i)) \leq \gamma_2(T)\|y_{rh}(t_i)\|_{H_{\mathbb{P}}}^2$ 以及 $V_T(t_i, y_{rh}(t_i)) \geq \gamma_1(T)\|y_{rh}(t_i)\|_{H_{\mathbb{P}}}^2$ 均成立。证明的其余部分可按照定理 2.6] 的证明常规完成。因此，我们在此仅论证性质 P1-P3。

为验证 P1，我们取 $\bar{\mathbf{u}} := 0$ 属于 (CS)，并定义 $\hat{\nu}(\omega) := \nu_{\min}(\omega) +$ 本质下确界$\{a(t, x) : (t, x) \in (0, \infty) \times D\}$。然后利用标准能量估计，对于任意 $(\bar{t}_0, T) \in \mathbb{R}^2_{\geq 0}$ 和 $\bar{y}_0 \in H$，我们得到

$$\frac{d}{2dt}\|\bar{y}(\omega, t)\|_H^2 + \hat{\nu}(\omega)\|\bar{y}(\omega, t)\|_H^2 \leq 0 \quad \text{for almost every } t \geq \bar{t}_0,$$

因此，对于 $\omega \in \Omega$，几乎处处有

$$\|\bar{y}(\omega,t)\|_H^2 \le e^{-2\hat{\nu}(\omega)(t-\bar{t}_0)}\|\bar{y}_0\|_H^2. \tag{62}$$

在 $(\bar{t}_0, \bar{t}_0+T)$ 上积分，得到

$$\|\bar{y}(\omega)\|^2_{L^2((\bar{t}_0,\bar{t}_0+T);H)} \le \left(\frac{1-e^{-2\hat{\nu}(\omega)T}}{2\hat{\nu}(\omega)}\right)\|\bar{y}_0\|_H^2 \le \frac{1}{2\hat{\nu}(\omega)}\|\bar{y}_0\|_H^2.$$

因此，与 (55) 类似，我们可以写出

$$\begin{aligned}\|\bar{y}(\omega)\|^2_{L^2((\bar{t}_0,\bar{t}_0+T);V)} &\le \frac{1}{2\nu_{\min}(\omega)}\|\bar{y}_0\|_H^2 + \frac{\|a\|_{L^\infty((0,\infty)\times D;\mathbb{R})}}{\nu_{\min}(\omega)}\|\bar{y}(\omega)\|^2_{L^2((\bar{t}_0,\bar{t}_0+T);H)} \\ &\le \left(\frac{1}{2\nu_{\min}(\omega)} + \frac{\|a\|_{L^\infty((0,\infty)\times D;\mathbb{R})}}{2\hat{\nu}(\omega)\nu_{\min}(\omega)}\right)\|\bar{y}_0\|_H^2.\end{aligned}$$

在 $\omega \in \Omega$ 上积分，得到

$$\|\bar{y}\|^2_{L^2((\bar{t}_0,\bar{t}_0+T);V_{\mathbb{P}}))} = \|\bar{y}\|^2_{L^2_{\mathbb{P}}(\Omega;L^2((\bar{t}_0,\bar{t}_0+T);V))} \le c_s\|\bar{y}_0\|_H^2, \tag{63}$$

其中，根据 (61) 和假设 4.1 中的 A1，可知 $\frac{1}{\nu_{\min}}(\omega)$ 和 $\frac{1}{\hat{\nu}(\omega)\nu_{\min}(\omega)}$ 均可积。在 (60) 中令 $\bar{\mathbf{u}}:=0$，并利用 (63)，可得

$$V_T(\bar{t}_0,\bar{y}_0) \le \frac{1}{2}\int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_0+T}\mathbb{E}\left[\|\bar{y}(t)\|_V^2\right]\,dt + \frac{\beta}{2}\int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_0+T}|\bar{\mathbf{u}}(t)|^2_{\ell_2}dt \le \frac{c_s}{2}\|\bar{y}_0\|_H^2,$$

其中 $c_s > 0$ 为正常数。利用与定理 3.1 证明中类似的论证，分别由不等式 (53) 和 (54) 可得 P2 和 P3。□

注 4.1。从可稳定性的角度来看，条件 (61) 可能显得较为严格。然而，尽管无控制系统是稳定的，由于缺乏可积性（见 (62)），其指数稳定性并不明确，因为 $\hat{\nu}$ 并非与 0 保持正距离的一致有界量。此外，由于对于 $\omega \in \Omega$ 的某些实现，$\nu_{\min}(\omega)$ 可能非常小且任意接近于零，因此稳定过程可能相当缓慢。然而，利用算法 2，我们能够实现系统的指数稳定性，且不受随机变量 ν 的所有可能实现所导致的动力学扰动的影响。

4.3 失效概率

与第 3.4 节类似，在假设 4.1 下，我们推导一个概率上界，即问题 (44) 和 (45) 的滚动时域框架的可稳定性无法得到保证的概率。根据注3.1中的 (29)，若满足以下条件，可稳定性可能失效:

$$\nu_{\min}(\omega)\beta_{\bar{N}} \le 3\|a\|_{L^\infty((0,\infty)\times D;\mathbb{R})},$$

成立。因此，令 $\Gamma(\omega) := \sum_{j=1}^{\infty}|z_j(\omega)|\|\psi_j\|_{L^\infty(D)}$，对于例 4.1 中定义的扩散，可写为

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left[\nu_{\min}(\omega)\beta_{\bar{N}} \le 3\|a\|_{L^\infty((0,\infty)\times D;\mathbb{R})}\right] = \mathbb{P}\left[\nu_{\min}(\omega) \le 3\|a\|_{L^\infty((0,\infty)\times D;\mathbb{R})}\beta_{\bar{N}}^{-1}\right] \\ &= \mathbb{P}\left[-\Gamma(\omega) \le \log\left(3\|a\|_{L^\infty((0,\infty)\times D;\mathbb{R})}\beta_{\bar{N}}^{-1}\right)\right] = \mathbb{P}\left[\Gamma(\omega) \ge \log\left(\frac{\beta_{\bar{N}}}{3\|a\|_{L^\infty((0,\infty)\times D;\mathbb{R})}}\right)\right].\end{aligned}$$

此外，对于每个 $\kappa_0 > 0$，我们可以写成

$$\mathbb{P}\left[\Gamma(\omega) \ge \log\left(\frac{\beta_{\bar{N}}}{3\|a\|_{L^\infty((0,\infty)\times D;\mathbb{R})}}\right)\right] \le \mathbb{E}\left[e^{\kappa_0\Gamma^2}\right]e^{-\kappa_0\log\left(\frac{\beta_{\bar{N}}}{3\|a\|_{L^\infty((0,\infty)\times D;\mathbb{R})}}\right)^2}. \tag{64}$$

其中最后一步用到了马尔可夫不等式，并假设 $\beta_{\bar{N}} \geq 3\|a\|_{L^\infty((0,\infty)\times D;\mathbb{R})}$。注意，由于 Fernique定理 [8, 定理 2.7], ，存在 $\kappa_0 > 0$ ，使得 (64) 左侧的双重指数的期望有界。于是，我们可以得出

$$e^{-\kappa_0 \log\left(\frac{\beta_{\bar{N}}}{3\|a\|_{L^\infty((0,\infty)\times D;\mathbb{R})}}\right)^2} = \mathcal{O}(\beta_{\bar{N}}^{-p}(3\|a\|_{L^\infty((0,\infty)\times D;\mathbb{R})})^p) \tag{65}$$

对每个 $p \in [1,\infty)$。这是由以下观察得出的：对于每个 $\kappa > 0$和 $p, x \in [1,\infty)$，我们都可以写成

$$e^{\kappa \log(x)^2} \geq C_p x^p \Leftrightarrow \kappa \log(x)^2 \geq \log(C_p) + p\log(x) \quad \Leftrightarrow \kappa \log(x)^2 - p\log(x) \geq \log(C_p)$$

其中常数 $C_p > 0$ 仅取决于 p。此外，函数 $f(y) = \kappa y^2 - py$ 有下界$-p/(4\kappa)$，即 $\min_{y\in\mathbb{R}} \kappa y^2 - py = -p^2/(4\kappa)$。于是，对于每个 $p, x \in [1,\infty)$，我们有$e^{\kappa \log(x)^2} \geq e^{-\frac{p^2}{4\kappa}} x^p$. 因此，令 $C_p := e^{-\frac{p^2}{4\kappa}}$，即可证明 C_p的存在。最后，利用（15）和（65），我们得出

$$\mathbb{P}\left[\nu_{\min}(\omega)\beta_{\bar{N}} \leq 3\|a\|_{L^\infty((0,\infty)\times D;\mathbb{R})}\right] = \mathcal{O}(\bar{N}^{-2p}(c_\beta^{-1}3\|a\|_{L^\infty((0,\infty)\times D;\mathbb{R})})^p)$$

对每个 $p \in [1,\infty)$。

参考文献

[1] B. Azmi 和 K. Kunisch. 用于时变抛物型方程稳定化的混合有限维RHC. *SIAM*控制与优化杂志, 57(5):3496–3526, 2019年.[2] J. A. B´arcena-Petisco 和 E. Zuazua. 随机扩散热方程的平均动力学与控制. 系统与控制通讯, 158:论文编号 105055, 15, 2021年.[3] H. Brezis. 泛函分析、*Sobolev*空间与偏微分方程. Universitext. Springer, 纽约, 2011年.[4] J. Charrier. 随机系数椭圆偏微分方程的强误差与弱误差估计. *SIAM*数值分析杂志, 50(1):216–246, 2012年.[5] R. Chiba. 空间随机传热系数功能梯度环形圆盘的随机热传导分析. 应用数学建模, 33(1):507–523, 2009年1月.[6] R. Chiba 和 Y. Sugano. 不确定材料属性功能梯度板热弹性问题的随机分析. 应用力学档案, 78(10):749–764, 2008年10月.[7] J. Coulson、B. Gharesifard 和 A.-R. Mansouri. 关于扩散率服从任意分布的随机热方程的平均可控性. *IFAC*自动化杂志, 103:46–52, 2019年.[8] G. Da Prato 和 J. Zabczyk. 无限维随机方程，数学及其应用百科全书第152卷. 剑桥大学出版社 , 剑桥 , 第二版 , 2014.[9] A. Djurdjevac. 随机运动区域中的线性抛物型问题 . *SIAM/ASA* 不确定性量化杂志, 9(2):848–879, 2021年.[10] C. J. Gittelson. 对数正态各向同性扩散问题的随机Galerkin离散.数学模型、方法与应用科学, 20(2):237–263, 2010年.[11] P. A. Guth、V. Kaarnioja、F. Y. Kuo、C. Schillings 和 I. H. Sloan. 采用准蒙特卡洛积分、基于熵风险度量的不确定性下抛物型偏微分方程约束最优控制, 2022年.[12] M. Hinze、R. Pinnau、M. Ulbrich 和 S. Ulbrich. 偏微分方程约束优化，数学建模：理论与应用第23卷. Springer, 纽约, 2009年.

[13] V. H. Hoang、J. H. Quek 和 C. Schwab. 高斯先验下抛物型偏微分方程贝叶斯反演的多层马尔可夫链蒙特卡罗方法. *SIAM/ASA* 不确定性量化杂志, 9(2):384–419, 2021年.[14] V. H. Hoang 和 C. Schwab. 参数化与随机抛物型偏微分方程的稀疏张量伽辽金离散——解析正则性与广义多项式混沌近似. *SIAM* 数学分析杂志 , 45(5):3050–3083, 2013 年 .[15]K. Kunisch 和 S. S. Rodrigues. 通过有限个内部执行器对非自治线性抛物型系统进行显式指数稳定化. *ESAIM*控制、优化与变分法, 25:{67}, 2019年.[16] A. Kunoth 和 C. Schwab. 线性参数化椭圆型与抛物型偏微分方程约束控制问题的解析正则性与广义多项式混沌近似. *SIAM*控制与优化杂志, 51(3):2442–2471, 2013年.[17] Q. L¨u 和 E. Zuazua. 随机演化偏微分方程的平均可控性.纯粹与应用数学杂志（第*9*辑）, 105(3):367–414, 2016年.[18] F. J. Mar´ín、J. Mart´ınez-Frutos 和 F. Periago. 随机偏微分方程控制：综述. 载于偏微分方程新进展：分析、数值方法与控制，SEMA SIMAI Springer丛书第17卷, 第193–210页. Springer, 尚, 2018年.[19] J. Mart´ınez-Frutos、M. Kessler、A. M¨unch 和 F. Periago. 随机输入数据下瞬态热方程的鲁棒最优罗宾边界控制. 国际数值方法工程杂志, 108(2):116–135, 2016年.[20] J. Mart´ınez-Frutos 和 F. Periago Esparza. 不确定性下偏微分方程的最优控制：结构最优形状设计应用导论. 数学专题丛书. 施普林格国际出版公司, 尚, 2018年.[21] F. Nobile 和 R. Tempone. 随机系数抛物型方程数值近似的分析与实现问题. 国际数值方法工程杂志, 80(6-7):979–1006, 2009年.[22] M. Reed 和 B. Simon. 现代数理物理方法：第一卷. 学术出版社有限公司 [Harcourt Brace Jovanovich出版社],纽约, 第二版, 1980年. 泛函分析.[23] S. Rodrigues 和 K. Sturm. 通过斜投影对一维线性非自治抛物型方程进行显式反馈稳定化. *IMA*数学控制与信息学杂志, 37(1):175–207, 2020年.[24] S. S. Rodrigues. 非自治线性抛物型方程的斜投影指数动态观测器. *SIAM*控制与优化杂志, 59(1):464–488, 2021年.[25] S. S. Rodrigues. 非自治抛物型方程基于斜投影输出反馈的指数稳定化. *IFAC*自动化杂志, 129:论文编号 109621, 11, 2021年.[26] C. Schwab 和 C. J. Gittelson. 高维参数化与随机偏微分方程的稀疏张量离散. 数值学报, 20:291–467, 2011年.[27] G. Zhang 和 M. Gunzburger. 随机输入数据抛物型偏微分方程随机配置方法的误差分析. *SIAM*数值分析杂志, 50(4):1922–1940, 2012年.