arXiv:2302.00752v1 [math.NA] 1 Feb 2023

稀疏谱方　　法求解高维与多尺度椭圆型偏微分方程　　S

Craig Gross 和 Mark Iwen

摘要。在其专著切比雪夫与傅里叶谱方法中，John Boyd 指出，关于用于求解微分方程的傅里叶谱方法，“[t]随着向更大 [带宽] 不断迈进，快速傅里叶变换的优势也将持续提升” [2, 第 194]页。本文旨在进一步发挥快速傅里叶变换（FFT）的优势：不仅将带宽推至极限，也将问题维数推至极限。然而，我们并未采用传统的 FFT，而是做出一项关键替换：将高维稀疏傅里叶变换（SFT）与随机化秩一格点方法结合。由此得到的稀疏谱方法能够快速、自动地确定一组傅里叶基函数，其张成空间保证包含给定椭圆型偏微分方程之解的精确逼近。随后利用这组规模小得多、近乎最优的傅里叶基，高效求解给定的偏微分方程；其运行时间仅取决于偏微分方程数据的可压缩性与椭圆性，同时克服维数灾难，并消除对原问题中多尺度结构的线性依赖。本文通过对一大类非恒定扩散方程在索об列夫范数下进行收敛分析，确立了该方法的理论性能，并指出了将收敛分析技术扩展至更一般的对流-扩散-反应方程的途径。数值实验展示了该方法在若干多尺度和高维示例问题上的良好实证表现，进一步彰显了所提方法在实践中的潜力。

1. 引言

考虑一个具有周期边界条件的椭圆型偏微分方程作为模型问题

$$-\nabla \cdot (a \nabla u) = f \tag{1}$$

其中，令 $\mathbb{T} := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 为一维环面，a、$f : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$ 为偏微分方程数据，$u : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$ 为解。本文提出一种求解此类偏微分方程的两阶段方法。首先，我们采用近期开发的高维函数稀疏傅里叶变换方法 [23]，来逼近扩散系数 a 和强迫函数 f 的傅里叶数据。只要偏微分方程数据 a 和 f 能由稀疏傅里叶近似良好表示，我们便提供一种利用稀疏傅里叶变换输出的技术，以找到数量相对较少的傅里叶系数，并保证这些系数能够重构出解 u 的精确逼近。总之，这形成了一种次线性时间、能够克服维数灾难的谱方法，用于求解具有周期边界条件的非恒定扩散方程。此外，本文提出的技术在理论上是可靠的，并提供了 H^1 收敛保证。

这些收敛保证依赖于对非恒定扩散算子的傅里叶-伽辽金表示所作的一项新颖分析。借助该分析，我们能够完全根据偏微分方程数据的傅里叶可压缩性，刻画方程 (1) 解的傅里叶可压缩性。此外，我们还改进了 [23] 中提出的稀疏傅里叶变换算法，使该方法能够以完全次线性时间运行（相对于所关注的初始频率集合的大小）。同时，我们为该稀疏傅里叶变换提供了新的 L^∞ 误差保证；这些保证连同原有的 L^2 保证，使我们能够对谱方法进行最终的 H^1 收敛分析。我们还给出了这些方法的实现以及若干数值实验。特别值得一提的是，最后我们将方法从简单的扩散方程 (1) 进一步推广，使其也适用于多尺度高维对流-扩散-反应方程，例如水文建模中用于描述多孔介质内流动动力学的控制方程 [35]。

使用传统傅里叶谱方法求解 (1)，需要将数据和解替换为它们的傅里叶级数，将左端简化为一个傅里叶级数，匹配两边的傅里叶

日期：2023年2月3日。2010 数学主题分类。主要分类65N35、65T40、35J15；次要分类65D40、35J05。关键词和短语。谱方法、稀疏傅里叶变换、高维函数逼近、椭圆偏微分方程、压缩感知、秩1格。本研究部分由美国国家科学基金会资助，资助编号为DMS2106472和1912706。

系数，并求解所得方程组以得到 u 的傅里叶系数。关于这种 Galerkin 变分形式以及下文讨论的相关变分形式，详见第 5 节。

在计算实现这一技术时，近似误差主要有两个来源。第一，傅里叶级数被截断为有限项所致。第二，对偏微分方程数据的傅里叶系数进行数值近似所致。得益于传统谱方法的丰富理论，这两类误差来源可以直接用于量化所得 u 逼近的误差。

引理 1 (Strang 引理，[10])。设 $u^{\text{truncation}}$ 是与 u 具有相同傅里叶级数、但以某种方式截断后的函数，且 $a^{\text{approximate}}$ 和 $f^{\text{approximate}}$ 是通过对 a 和 f 的傅里叶级数进行近似并按与 $u^{\text{truncation}}$ 相同的方式截断后计算得到的。那么，上述过程得到的解 u^{spectral} 满足

$$\left\|u-u^{\text{spectral}}\right\|_{H^1} \lesssim_{a,f} \left\|u-u^{\text{truncation}}\right\|_{H^1} + \left\|a-a^{\text{approximate}}\right\|_{L^\infty} + \left\|f-f^{\text{approximate}}\right\|_{L^2}$$

周期 *Sobolev* 空间 H^1 的精确定义将在第 *3* 节进一步讨论，而 $\lesssim_{a,\,f}$表示一个上界，其常数取决于偏微分方程数据。

这是对*Strang* 引理 [10], 的一种粗略简化，而该引理本身是著名的*Céa* 引理 的推广（本文所用的该引理的具体版本将在下文的引理6中给出并证明）。实际上，它表明，谱方法所得的解在傅里叶级数截断以及偏微分方程数据 a 和 f的逼近误差范围内是最优的。因此，分析收敛性归结为估计这两种误差。

这一概述给出了本文的三个主要组成部分：

(1) 截断方法及其误差分析（第 6 节），(2)（稀疏）傅里叶级数逼近技术（第 7 节和第 8 节），以及 (3) 将所有内容联系起来的 Strang 引理的一个版本（第 9 节）。

最终方法见算法 1。推论 5中的收敛保证表明，对 u 的逼近误差以与 a和 f 的稀疏傅里叶变换近似误差的（近乎最优）收敛速率相同的速率收敛，此外还有一项与 a的椭圆性性质相关的指数衰减项。

上述主要理论分析之前的各节包括：关于稀疏谱方法的背景及我们所用技术的动机（第 2 节）、设定记号和偏微分方程问题（分别见第 3 节和第 4 节），以及前文提到的、作为谱方法途径基础的模型偏微分方程的 Galerkin 变分形式（第 5 节）。论文最后以数值实验一节（第 10 节）收尾，介绍我们技术的实现，并通过多种数值实验展示理论结果。

2. 背景与动机

现在，我们概述一些关于谱方法的既有文献，重点关注如何利用稀疏性。在此过程中，我们会发现各种不足，并在下文借此说明并阐释我们的方法。

2.1. 收敛与计算复杂度。使用 d 维快速傅里叶变换（例如，详见 [34, 第 5.3 节5] ）来计算 $a^{\text{approximate}}$ 和 $f^{\text{approximate}}$，并按照引理 1 中提出的步骤进行操作，会自然地实现傅里叶级数截断。使用张量化网格的 d 维快速傅里叶变换，在每个维度上取 K 个均匀间隔的点，将得到以整数格 $\mathbb{Z}^d$ 上边长为 K 的 d 维超立方体内的频率为索引的近似傅里叶系数（注意，在多维意义下使用“带宽”一词时，我们指的仍是包含这些整数频率的超立方体的边长 K ）。一般而言，每次 d 维快速傅里叶变换的计算成本都超过 K^d 次运算，线性系统求解也同样如此（若不利用稀疏性或其他技巧）。因此，传统傅里叶谱方法不仅会遭遇维数灾难，即使在中等维数下，多尺度问题（即需要极高带宽才能充分解析的偏微分方程数据）也可能导致计算难以进行。

请注意，正如上文讨论的那样，标准的快速傅里叶变换需要超过 K^d 次运算，正是因为我们隐含地选择用一个庞大到不切实际的集合来展开偏微分方程数据和解，其中包含

K^d 个傅里叶基函数。如果我们改为用这个更大集合中各自最佳的 $s \ll K^d$ 个傅里叶基函数的并集，来展开所有的 a、f 和 u，会怎么样？请注意，这样做会自动使引理 1 右侧的每一项都与相对于傅里叶基的非线性最佳 s 项逼近误差相关，例如 Cohen 等人 [11] 所述的情形。此外，只要这些误差在 s 中衰减得足够快，就意味着 a、f 和 u 各自在傅里叶基下实际上是稀疏的／可压缩的，从而可以借助压缩感知理论推知，对式 (1) 进行少量离散化就足够了。当然，除非能够通过压缩感知等方法，迅速找出上述每个函数各自最佳的 $s \ll K^d$ 个傅里叶基函数子集，否则这种做法在实践中并不十分有用。

然而，为了实现这一策略而直接套用标准压缩感知理论，至少会在两个方面遇到困难：第一，尽管标准压缩感知恢复算法（如基追踪）在减少重构给定函数所需的线性测量值数量方面极为成功，但在对函数进行数值逼近时，仍必须逐一表示所有 K^d 基函数（在这个简单情形下）。因此，如果不进行额外修改，就无法期待运行时间会有显著加速。第二，标准压缩感知理论通常还要求直接从所要进行稀疏近似的函数中获取线性测量值（例如点采样）。对于式（1），这对 a 和 f而言或许轻而易举，但对于先验未知、且需要计算的解 u，通常并不可行（至少在不作额外创新的情况下）。当然，即便采用标准压缩感知重构策略，这些困难也能在不同程度上得到克服；下文第 2.5 节将讨论至少一种这样的处理方法。

然而，在本文中，我们转而使用改进的稀疏傅里叶变换方法，规避上述两个困难。SFTs [16, 26, 25, 17, 1, 32]是压缩感知算法，经过高度专门化设计，能够尽可能充分地利用傅里叶基的数论结构和代数结构。因此，在重构过程中，SFTs 很少需要逐个处理傅里叶基函数，从而能够同时降低测量需求和计算复杂度，使其实际上仅取决于目标近似函数中重要傅里叶级数系数的数量。在当前情形下，这意味着 SFT 算法将以次线性$o(K^d)$时间运行，几乎自动避开困扰标准压缩感知恢复算法的重构运行时间问题；后者在运行时必须逐个表示每个 K^d基函数。为规避无法直接测量解 u 这一相关问题，我们随后又采用了另一种方法。我们不再尝试对 u 应用压缩感知方法，而是利用更容易发现的 a 和 f 中最重要的傅里叶基元素，通过分析（1）的结构，预先预测 u 中最重要的傅里叶基元素必然位于何处。当然，一旦我们以这种方式发现了表示 u 时哪些傅里叶基元素较为重要，便可以使用标准 Galerkin 方法，对（1）的一个小型截断离散化求解。

2.2. 通过 SFT 类方法缓解对带宽的依赖。Daubechies 等人 [13]的一项重要开创性工作，率先将稀疏傅里叶变换用于计算偏微分方程的解。该工作主要关注时变的一维问题，其中谱格式被构造为傅里叶投影与时间步交替进行的形式。因此，无需对解预先施加傅里叶基截断。相反，所提出的投影步骤会在每个时间步使用稀疏傅里叶变换，自适应地保留整个时间步进过程中最重要的频率。对于式 (1) 这类定常问题，则可以通过时间步进直至得到稳态解来求解。

该算法的一种简化形式已通过数值实验验证其有效性 [13], ，并且也对扩散系数由一个已知的细尺度模态叠加低频项构成的情形进行了理论分析。在这种情形下，傅里叶投影步骤可以视为固定不变。然而，去除已知细尺度假设会带来许多困难，包括稀疏性导致的遗漏可能在早期时间步发生，并在之后逐步累积，造成更大的误差。另一方面，本文聚焦于定常问题，因此只需在初始阶段使用一次稀疏傅里叶变换。这样便可避免稀疏傅里叶变换引起的误差在多个时间步中累积。于是，我们分析的主要难点在于确定如何利用偏微分方程数据的傅里叶稀疏表示

通过高维稀疏傅里叶变换发现的偏微分方程数据，快速求得解的合适傅里叶表示。这需要将 a 和 f 的傅里叶支撑集混合，构成印章集（详见第 6 节），并在这些集合上分析解的投影误差。事实上，这些印章集可以视为对 [13]中一维情形及已知细尺度分析所用技术的修改和推广。

2.3. 缓解维数灾难的尝试。许多试图克服偏微分方程傅里叶谱方法中维数灾难的研究，都集中于采用能够高效进行高维傅里叶变换的基截断。其中最流行的技术之一是稀疏网格谱方法，该方法在双曲十字 [28, 9, 19, 20, 36, 21, 12] 上计算傅里叶系数。一般而言，稀疏网格方法将逼近偏微分方程数据所需的采样点数量减少到 $\mathcal{O}(K\log^{d-1}(K))$，其中 K 充当一种带宽参数。使用这些稀疏采样网格计算谱表示的算法具有类似的复杂度。当与用于求解偏微分方程的谱方法结合使用时，这些稀疏网格傅里叶变换生成的解的近似，其误差估计与完整 d 维快速傅里叶变换版本的误差估计相似，只减少了约 $1/\log^{d-1}(K)$ 的因子。

在稀疏网格傅里叶变换的背景下，这些方法计算位于双曲十字上的傅里叶系数，其频率数量与采样点数量具有相近的基数。这些双曲十字与有界混合导数空间密切相关，因为对于这一类函数，它们是最优的傅里叶逼近空间。因此，稀疏网格傅里叶谱方法尤其适用于解具有有界混合导数的问题，因为这会在上述引理 1 中产生一个最优的 $u - u^{\text{truncation}}$ 项。

尽管稀疏网格谱方法能够高效求解各种高维问题，但对于本文关注的问题类型，这类方法显然存在缺点。许多问题符合有界混合导数假设，因此在双曲十字上具有精确的傅里叶表示；然而，我们感兴趣的多尺度、傅里叶稀疏问题尤其棘手。事实上，由于带宽为 K 的双曲十字仅包含满足 $\prod_{i=1}^{d} |k_i| = \mathcal{O}(K)$ 的频率 $k \in \mathbb{Z}^d$，在所有维度上都活跃的 d 维频率最多只能有 $\|k\|_\infty = \mathcal{O}(K^{1/d})$。因此，在一个至少包含一个与所有维度相互作用的频率的多尺度问题中，要恰当地解析数据，就需要带宽相对于 d 呈指数增长的双曲十字。这也使得稀疏网格方法中传统上用于缓解维数灾难的 $\log^{d-1}(K)$ 项至少达到 d^{d-1}的量级。

2.4. 关于高维傅里叶变换的更多内容。如上文第 2.2 节所述，本文使用稀疏傅里叶变换，针对偏微分方程数据创建适用的自适应基截断。这体现了高维傅里叶变换领域中从稀疏网格发展到更灵活技术的类似演变 [31, 14,33, 29, 21, 30, 34, 24]。具体而言，第 7 节讨论的高维稀疏傅里叶变换，源于早期高维求积技术与双曲十字上的傅里叶近似之间的联系 [29, 30]。这些方法并非在稀疏网格上对函数进行采样，而是沿秩-1格对高维函数进行采样。秩1格通过沿生成向量 $z \in \mathbb{N}^d$ 的方向采样 M 点 $\mathbb{T}^d$ 来描述，即使用采样集

$$\Lambda(z, M) := \left\{ \frac{j}{M} z \bmod 1 \mid j \in \{0, \dots, M-1\} \right\}.$$

只要秩-1格相对于感兴趣的频率空间 $I \in \mathbb{Z}^d$ 满足某些性质，这些采样点就足以通过长度为 M 的一元快速傅里叶变换，计算函数在 I 上的傅里叶系数。尽管许多文献为了利用稀疏网格文献中已有充分研究且同样具备的正则性性质和基数界，会将 I 取为双曲十字，但针对任意频率集的秩-1格结果也已有研究。通过 [23] 中的稀疏傅里叶变换对这些技术进行计算高效的扩展，以及第 8 节提出的随机化技巧，将频率集合的灵活性发挥到了极致，使得 I 可以是待逼近函数中先验未知的最重要傅里叶系数集合。这再次表明，在涉及极高维度中哪怕只有少量傅里叶系数的多尺度问题中，相较于稀疏网格（或其他不利用稀疏性的）傅里叶变换，这些方法具有适用性。

2.5. 与压缩感知的更多联系。如上所述，稀疏傅里叶变换文献与压缩感知的术语和技术有很大重叠。正如下文第 7 节所详述，本文使用的高维稀疏傅里叶变换能够提供基于最佳 s 项逼近的误差界，以及压缩感知类型的误差保证 [11]。因此，对偏微分方程数据的傅里叶系数进行逼近时，其误差取决于这些系数的真实傅里叶级数的可压缩性；进而，可以直接且构造性地根据数据的傅里叶可压缩性推断偏微分方程解在傅里叶基中的可压缩性。

然而，另一项非常成功的研究方向旨在将标准压缩感知重构方法更直接地应用于求解偏微分方程的一般谱方法框架。这些技术称为 CORS-ING [4, 5, 8, 3, 7], ，利用压缩感知的概念，从偏微分方程的（Petrov-）Galerkin 变分形式所导出的方程组中恢复解的稀疏表示。这些方法进一步扩展到了伪谱方法的情形 [6], ：在这种方法中，对一个更易于计算的矩阵方程进行欠采样，并将其作为压缩感知算法的测量值（顺带一提，[6] 与作者的讨论是本文的主要灵感来源）。这种压缩谱配置方法通过对偏微分方程数据的一组样本应用正交匹配追踪（OMP），找出解中频率位于带宽为 K 的整数超立方体内的最大傅里叶正弦系数。通过使用 OMP，该方法仅需数量级为 $\mathcal{O}(d\exp(d)s\log^3(s)\log(K))$ 的测量值即可取得成功，其中 s 是解的傅里叶级数的给定稀疏度。因此，尽管避免了传统傅里叶（伪）谱方法对 $\mathcal{O}(K^d)$ 的依赖，且该方法能够很好地适应较大的带宽，但维数灾难仍然显而易见。

在准备本文的过程中，作者获悉了对 [6] 的一项改进，该改进解决了维数灾难，因此非常适用于本文讨论的类似问题。在[37], 中，原先在完整超立方体上逼近傅里叶正弦系数的方法，改为在双曲十字上逼近傅里叶系数。由于双曲十字的基数估计，这使采样复杂度对d 的线性依赖转化为对数(d) 。不过，指数(d) 项是通过另一种技术加以改进的。要将压缩感知应用于这些问题，关键的理论要素是界定应用微分算子 [7]后得到的基函数的 Riesz 常数。对双曲十字上的傅里叶基所对应的这些常数进行细致估计，能够完全消除对 d 的指数依赖，使采样复杂度达到 $\mathcal{O}(C_\alpha s\log(d)\log^3(s)\log(K))$的量级，其中 C_α 包含依赖于 α椭圆性与可压缩性性质的项。值得注意的是，这一估计过程与我们在第 6 节中介绍的印章集技术有关。

另一方面，尽管压缩谱配置聚焦于双曲十字，从而打破了采样复杂度中的维数灾难，但该方法仍无法推广到多尺度问题，或推广到第 2.3 节所述的、我们感兴趣的一般频率集合。此外，如第 2.5 节所述，用于恢复的压缩感知算法（本例中为正交匹配追踪）的计算复杂度与所关注截断集的基数同阶。对于双曲十字，这仍然随 $\log(d)$ 呈指数增长。最后，误差估计是根据解 u的傅里叶级数的可压缩性给出的，而这一性质可能无法事先从偏微分方程数据中获知。我们认为，或许可以将我们的印记理论和收敛估计与压缩感知理论联系起来，以改进并推广这两种方法。

3. 记号

将一维环面定义为 $\mathbb{T} := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$。除非另有说明，所有函数均为复值函数，定义在环面 $\mathbb{T}^d$ 上。例如，我们将 $u, v \in L^2 := L^2(\mathbb{T}^d;\mathbb{C})$ 的内积定义为

$$\langle u, v\rangle_{L^2} := \int_{\mathbb{T}^d} u(\boldsymbol{x})\overline{v}(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}.$$

此外，除非另有说明，所有多重指标无限序列均为复值序列，且以 $\mathbb{Z}^d$ 为指标。例如，我们将 $\hat{u},\hat{v} \in \ell^2 := \ell^2(\mathbb{Z}^d; \mathbb{C})$ 的内积定义为

$$\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle_{\ell^2} := \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \hat{u}_k \overline{\hat{v}_k}.$$

所有有限长度向量/张量均用粗体表示；必要时，如果它们在某些索引处原本未定义，则隐式地将其扩展到更大的索引集，并在这些位置取值为零。我们还将支撑在集合 $\mathcal{D}$ 上的复值有限长度向量或无限长度序列记为 $\mathbb{C}^{\mathcal{D}}$。由于稀疏近似将是我们最终算法中的重要工具，我们还定义序列 $\hat{u}$ 的最佳 s 项逼近，即将其限制为幅值最大的 s 个元素，并记为 $\hat{u}_s^{\text{opt}}$。

现在我们定义周期 Sobolev 空间（另见 [3,第 2.1] 节和 [28,附录 A.2.2]）。

定义 1. 对于 $u \in L^2$，若存在一个 $v \in L^2$，使得

$$\langle v, \phi \rangle_{L^2} = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \phi \rangle_{L^2} \qquad \text{for all } \phi \in C^\infty \subset L^2,$$

我们称 v 为 α 弱 导数，并记作 $\partial^\alpha u := v$。我们定义内积

$$\langle u, v \rangle_{H^1} := \langle u, v \rangle_{L^2} + \int_{\mathbb{T}^d} \nabla u(x) \cdot \overline{\nabla v}(x)\, dx,$$

（其中所有导数均按弱导数理解），并具有相应的范数 $\|u\|_{H^1} := \sqrt{\langle u, u \rangle_{H^1}}$。周期 *Sobolev* 空间 H^1 定义为 $H^1 := \{u \in L^2 \mid \|u\|_{H^1} < \infty\}$。

为了引入傅里叶系数和级数的记号，我们首先指出，三角单项式在 L^2 和 H^1中稠密。

定理 1. 所有无穷次可微的周期函数 C^∞ 在 L^2 和 H^1中稠密。特别地，三角单项式空间 $\{e_k(x) := e^{2\pi i k \cdot x} \in C^\infty \mid k \in \mathbb{Z}^d\}$ 是 C^∞的一组基，是 L^2的一组正交归一基，也是 H^1的一组正交基。

定义 2. 对任意 $u \in L^1$和任意 $k \in \mathbb{Z}^d$，我们定义其第 k个傅里叶系数

$$\hat{u}_k = \langle u, e_k \rangle_{L^2} = \int_{\mathbb{T}^d} u(x) e^{-2\pi i k \cdot x}\, dx.$$

若 $u \in L^2$，定理 1 中三角单项式的正交归一性允许我们将 u 的傅里叶级数写为，

$$u(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \hat{u}_k e_k(x).$$

我们还指出著名的帕ɪ́ʂɪʊ瓦尔恒等式，以备后用。

命题 1（帕ɪ́ʂɪʊ瓦尔恒等式）。若 $u \in L^2$，则$\hat{u} \in \ell^2$，其中 $\|u\|_{L^2} = \|\hat{u}\|_{\ell^2}$。若 $v \in L^2$，则 $\langle u, v \rangle_{L^2} = \langle \hat{u}, \hat{v} \rangle_{\ell^2}$。

定义 3。我们还定义零均值周期 *Sobolev* 空间 H 为 $H^1/\mathbb{R}$，其中代表元 u 的选取满足 $\hat{u}_0 = 0$，并赋予内积[1]

$$\langle u, v \rangle_H := \int_{\mathbb{T}^d} \nabla u(x) \cdot \overline{\nabla v}(x)\, dx.$$

在下文中，我们将经常考虑频率空间中的限制，例如记作 $\hat{u}|_{\mathcal{D}}$，其中 $\mathcal{D} \subset \mathbb{Z}^d$。我们同时将其视为 $\mathbb{C}^{\mathcal{D}}$ 的一个元素，以及定义在 $\mathbb{Z}^d$ 上的复值序列，且在 $\mathbb{Z}^d \setminus \mathcal{D}$处的项为零。当 $\hat{u}$ 表示函数 u的傅里叶系数时，我们定义相应的限制

$$u|_{\mathcal{D}} := \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} (\hat{u}|_{\mathcal{D}})_k\, e_k = \sum_{k \in \mathcal{D}} \hat{u}_k e_k,$$

其中，将 $\mathcal{D} \subset \mathbb{Z}^d$ 视为一组频率，表明我们是在频率上限制 u，而非在空间上限制。给定一个带帽序列 $\hat{v}$ 或向量 $\hat{\boldsymbol{v}}$，与傅里叶级数 $\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \hat{v}_k e_k$对应的函数总是默认用不带帽的罗马字体字母标记（本例中为 v）。

[1]注意，由命题 1，$\langle u, v \rangle_H \simeq \langle u, v \rangle_{H^1}$ 对于 $u, v \in H$。

4. 椭圆型偏微分方程设置

我们从一个模型椭圆型偏微分方程开始。

定义 4. 对于某个 $a : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$ 足够光滑的，定义如下散度形式的线性椭圆型偏微分算子 $\mathcal{L}[a] : C^2 \to C^0$：

$$\mathcal{L}[a]u = -\nabla \cdot (a\nabla u).$$

若对于某个 $f : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$ 足够光滑的， $u \in C^2$ 满足

$$\mathcal{L}[a]u = f, \tag{SF}$$

我们称 u 以强形式求解给定的、具有周期边界条件的椭圆型偏微分方程。

现在，将其乘以测试函数 $v \in H^1(\mathbb{T}^d)$ 的复共轭并分部积分后，我们定义与 $\mathcal{L}[a]$ 相关的双线性形式 $\mathfrak{L}[a] : H^1 \times H^1 \to \mathbb{C}$，其中

$$\mathfrak{L}[a](u, v) := \int_{\mathbb{T}^d} a(x)\nabla u(x) \cdot \overline{\nabla v}(x)\, dx,$$

并且我们称 $u \in H^1$ 在弱形式下满足给定的、带周期边界条件的椭圆型偏微分方程，如果

$$\mathfrak{L}[a](u, v) = \langle f, v\rangle_{L^2} \quad \text{for all } v \in H^1. \tag{WF}$$

对于我们的目的，我们取 $a \in L^\infty(\mathbb{T}^d;\ \mathbb{R})$，以及 $f \in L^2(\mathbb{T}^d;\ \mathbb{R})$。

根据 Lax-Milgram 定理所规定的条件（例如，参见 [15]），只要右端项和测试空间也都是零均值的，我们就可以保证 (WF) 存在唯一的零均值解。参见 [3,命题 2。1]，了解针对我们所讨论情形的更具体表述及其证明。

命题 2。 对于 $a \in L^\infty(\mathbb{T}^d;\ \mathbb{R})$， $\mathfrak{L}[a]$ 是连续的，其连续性常数为 $\beta \leqslant \|a\|_{L^\infty}$，即

$$|\mathfrak{L}[a](u, v)| \leqslant \beta\|u\|_H\|v\|_H \qquad \textit{for all } u, v \in H. \tag{2}$$

此外，若 $a(x) \geqslant a_{\min} > 0$ 在 $\mathbb{T}^d$ 上几乎处处成立，则 $\mathfrak{L}[a]$ 也是强制的，其强制性常数为 $\alpha \geqslant a_{\min}$，即

$$|\mathfrak{L}[a](u, u)| \geqslant \alpha\|u\|_H^2 \qquad \textit{for all } u \in H. \tag{3}$$

在条件 (2) 和 (3)下，若 $f \in L^2(\mathbb{T}^d;\mathbb{R})$ 为零均值，即 $\hat{}\ f_0 = 0$，则 (WF) 存在唯一的零均值解 $u \in H$，满足

$$\|u\|_H \leqslant \frac{\|f\|_{L^2}}{\alpha}. \tag{4}$$

5. 伽辽金谱方法

根据定理 1，将弱偏微分方程 (WF) 替换为以下形式是等价的：

$$\mathfrak{L}[a](u, e_k) = \langle f, e_k\rangle_{L^2} =: \hat{f}_k \quad \text{for all } k \in \mathbb{Z}^d.$$

重写左侧的双线性形式，并利用 a 和 u的傅里叶级数表示，可得

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}[a](u, e_k) &= \sum_{l_1, l_2 \in \mathbb{Z}^d} \hat{a}_{l_1}\hat{u}_{l_2} \int_{\mathbb{T}^d} e_{l_1}(x)\nabla e_{l_2}(x) \cdot \overline{\nabla e_k}(x)\, dx \\
&= \sum_{l_1, l_2 \in \mathbb{Z}^d} (2\pi)^2(l_2 \cdot k)\hat{a}_{l_1}\hat{u}_{l_2}\delta_{l_1, k-l_2} \\
&= \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} (2\pi)^2(l \cdot k)\hat{a}_{k-l}\hat{u}_l \\
&=: (L[\hat{a}]\hat{u})_k,
\end{aligned}$$

其中， $L[\hat{a}]$ 是 ℓ^2中的一个算子。这便得到了我们偏微分方程的 *Galerkin* 形式，

$$L[\hat{a}]\hat{u} = \hat{f}. \tag{GF}$$

伽辽金公式 (GF) 的计算优势显而易见。通过对 $\hat{a}$ 和 $\hat{f}$ 进行数值近似（从而也对 $L[\hat{a}]$ 进行截断），我们得到一个离散化的有限方程组，可用于求解解的傅里叶系数。

我们将使用适用于多维函数的快速稀疏傅里叶变换（SFT）来近似偏微分方程数据，从而得到一个稀疏方程组，并可快速求解该方程组以近似 $\hat{u}$。该 SFT 将利用随机秩一格上等距节点处的 a 和 f 的值，这些节点位于 $\mathbb{T}^d$ 中。因此，我们的方法实质上是一种伪谱方法，其解空间 $\{\hat{u} \mid u \in H\}$ 的离散化会根据偏微分方程数据进行调整。

在详细讨论这一 SFT 之前，我们将在第 6 节中更详细地分析伽辽金算子，以帮助分析由此得到的谱方法。不过首先要指出，$L[\hat{a}]$ 也能以双线性形式刻画 $\mathfrak{L}[a]$ 的行为。

命题 3。对于 $\hat{u}, \hat{v} \in \ell^2$ 其中 $u, v \in H$,

$$\mathfrak{L}[a](u,v) = \langle L[\hat{a}]\hat{u}, \hat{v}\rangle_{\ell^2}.$$

证明。 根据 v 的傅里叶级数表示，

$$\mathfrak{L}[a](u,v) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \mathfrak{L}[a](u,e_k)\bar{\hat{v}}_k = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} (L[\hat{a}]\hat{u})_k\, \bar{\hat{v}}_k = \langle L[\hat{a}]\hat{u}, \hat{v}\rangle_{\ell^2}.$$

□

6. 印章集与截断分析

值得注意的是，(伽辽金公式)使我们得以了解 $\hat{u}$ 的频率支撑集。下一个命题中概述的结构对于构造一种利用傅里叶稀疏性的快速谱方法至关重要。

命题 4。 对于任意集合 $F \subset \mathbb{Z}^d$ 和 $N \in \mathbb{N}_0$，递归定义集合

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^N[\hat{a}](F) &:= \begin{cases} F & \text{if } N = 0 \\ \mathcal{S}^{N-1}[\hat{a}](F) + \operatorname{supp}(\hat{a}) & \text{if } N > 0 \end{cases}, \\ \mathcal{S}^\infty[\hat{a}](F) &:= \bigcup_{N=0}^{\infty} \mathcal{S}^N[\hat{a}](F), \end{aligned} \tag{5}$$

其中，这里的加法是集合的闵可夫斯基和。在命题 *2* 的条件下，支撑集$(\hat{u}) \subset \mathcal{S}^\infty[\hat{a}]$(支撑集$(\hat{f})$)。

证明。 a 严格为正这一事实意味着 $\hat{a}_0 \neq 0$，而 a 为实数这一事实意味着 支撑集$(\hat{a})$ =–支撑集$(\hat{a})$。现在，对于任意 $k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$，我们可以重新整理等式 $(L[\hat{a}]\hat{u})_k = \hat{f}_k$，得到

$$\begin{aligned} \hat{u}_k &= \frac{\hat{f}_k - \sum_{l\in(\{k\}+\operatorname{supp}(\hat{a}))\setminus\{k\}} (2\pi)^2 (l\cdot k)\hat{a}_{k-l}\hat{u}_l}{(2\pi)^2(k\cdot k)\hat{a}_0} \\ &= \frac{\hat{f}_k - \sum_{l\in\operatorname{supp}(\hat{a})\setminus\{0\}} (2\pi)^2 (k\cdot k - l\cdot k)\hat{a}_l\hat{u}_{k-l}}{(2\pi)^2(k\cdot k)\hat{a}_0}. \end{aligned}$$

因此，$\hat{u}_k$ 显式地仅取决于 $\mathcal{S}^1[\hat{a}](\{k\}) \setminus \{k\}$ 上 $\hat{u}$ 的取值，而这些取值又仅取决于 $\mathcal{S}^2[\hat{a}](\{k\})$ 上 $\hat{u}$ 的取值，以此类推。这就将方程组 $L[\hat{a}]\hat{u}$ 解耦为一组互不相交的方程组，每个方程组对应一类频率 $\mathcal{S}^\infty[\hat{a}](\{k\})$。由于命题 2 表明，$\hat{v} = 0$ 是 $L[\hat{a}]\hat{v} = 0$ 的唯一解，因此，对于任意 $k \notin \operatorname{supp}(\hat{f})$，$\mathcal{S}^\infty[\hat{a}](\{k\})$ 上 $\hat{u}$ 的方程组的唯一解为 $\hat{u}|_{\mathcal{S}^\infty[\hat{a}](\{k\})} = 0$。因此，$\operatorname{supp}\hat{u} \subset \mathcal{S}^\infty[\hat{a}](\operatorname{supp}(\hat{f}))$，如所需。□

在下文中，当集合 F 和傅里叶系数 $\hat{a}$ 可由上下文明确时，我们会在记号 (5) 中省略它们，从而得到 $\mathcal{S}^N := \mathcal{S}^N[\hat{a}](F)$。直观地说，我们可以设想先制作一个形状与 $\operatorname{supp}(\hat{a})$ 相同的“橡皮图章”，以此构造 $\mathcal{S}^N$。然后，将这个橡皮图章盖在 $F =: \mathcal{S}^0$ 中的每个频率上，从而构造 $\mathcal{S}^1$。接着，重复这一过程，将 $\mathcal{S}^1$ 中的每个元素逐一盖印，得到 $\mathcal{S}^2$，依此类推。因此，我们通常将这些集合称为“印章集”。图1展示了 $d = 2$ 的这一盖印过程示例。

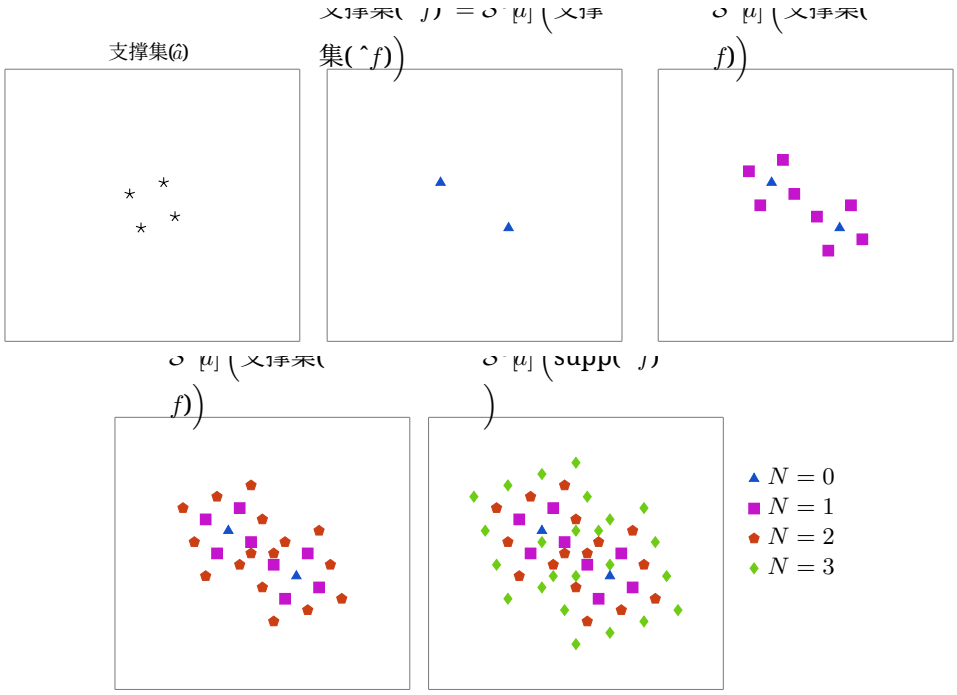


图1. 每个印章级别中新出现的频率，直到 $N = 3$，其中 $N = 0$ 是 $\operatorname{supp}(\hat{f})$。

我们后续分析的一个关键方法，是研究 $\hat{u}$ 在连续盖印级别上的衰减。与传统谱方法中的带宽不同，印章级别将成为谱方法中的驱动参数。不过，在进行这项分析之前，我们先给出印章集基数的一个上界。最终，这将用于给出我们方法计算复杂度的上界。该上界的证明见附录 A。

引理 2. *S* 假设 $0 \in$ 支撑集$(\hat{a})$、支撑集$(\hat{a}) = -$支撑集$(\hat{a})$，且 $|$支撑集$(\hat{f})| \leqslant |$支撑集$(\hat{a})| = s$。那么

$$\left|\mathcal{S}^N[\hat{a}](\operatorname{supp}(\hat{f}))\right| \leqslant 7\max(s, 2N+1)^{\min(s,2N+1)}.$$

命题 4 为我们提供了一种自然的方法来考虑解 u 在频率空间中的截断。我们将在下文第 9 节中使用这些截断，对 Galerkin 变分形式（伽辽金公式）进行离散化。为了分析由此得到的谱方法算法的误差，我们需要对解在频率集 $\mathcal{S}^N := \mathcal{S}^N[\hat{a}](\text{支撑集}(\hat{f}))$ 之外的衰减情况给出定量界。为了使 $\mathcal{S}^N$ 有限，我们在本节中假设 $\hat{a}$ 和 $\hat{f}$ 有限。稍后将通过引理 5 去掉这一假设。

我们先给出一个技术性结果，讨论 $L[\hat{a}]$ 与其作用对象的支撑集之间的相互关系。

命题 5. 对于任意 $\hat{v}$，若 支撑集$(\hat{v}) \subset \mathcal{S}^n \setminus \mathcal{S}^{n-1}$，则 支撑集$(L[\hat{a}]\hat{v}) \subset \mathcal{S}^{n+1} \setminus \mathcal{S}^{n-2}$。

证明。 对于任意 $k \in \mathbb{Z}^d$，考虑

$$\begin{aligned}
(L[\hat{a}]\hat{v})_k &= \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} (2\pi)^2 (l \cdot k)\hat{a}_{k-l}\hat{v}_l \\
&= \sum_{l \in (\{k\} - \operatorname{supp}(\hat{a})) \cap \operatorname{supp}(\hat{v})} (2\pi)^2 (l \cdot k)\hat{a}_{k-l}\hat{v}_l \\
&= \sum_{l \in (\{k\} - \operatorname{supp}(\hat{a})) \cap (\mathcal{S}^n \setminus \mathcal{S}^{n-1})} (2\pi)^2 (l \cdot k)\hat{a}_{k-l}\hat{v}_l.
\end{aligned}$$

仅当 k 满足存在 $l \in S^n \setminus S^{n-1}$ 和 $k_a^* \in$ 支撑集$(\hat{a})$，使得 $k = l + k_a^*$ 时，这个和才非空。根据 $l \in S^n \setminus S^{n-1}$的定义， n 是满足以下条件的最小数：

$$l = k_f + \sum_{m=1}^{n} k_a^m, \text{ where } k_f \in \operatorname{supp}(\hat{f}),\ k_a^m \in \operatorname{supp}(\hat{a}) \text{ for all } m = 1, \dots, n$$

成立。特别是，这意味着对于所有 $m = 1$, ..., n, $k_a^m \neq 0$。

现在分两种情况。首先，如果对于任意 m, $k_a^* = -k_a^m$ $k = l + k_a^* \in S^{n-1} \setminus S^{n-2}$，则命题成立。另一方面，我们考虑这样的情况： k_a^* 不会使求和结果为 l 时涉及的任何 k_a^m取反。如果 $k_a^* = 0$，那么显然 $k = l \in S^n \setminus S^{n-1}$。在其他情况下，我们表示

$$k = k_f + \sum_{m=1}^{n} k_a^m + k_a^* =: k_f + \sum_{m=1}^{n+1} k_a^m,$$

其中， $n+1$ 是满足这一条件的最小数。因此， $k \in S^{n+1} \setminus S^n$。总之，使该和非零的唯一可能的 k 值是 $S^{n+1} \setminus S^{n-2}$中的那些，证明完毕。□

注意到 $\operatorname{supp}(L\hat{a}\hat{u}) = \operatorname{supp}(\hat{f})$，我们观察到相邻盖印级别上的 $\hat{u}$ 值之间存在如下有趣关系。下文为简化记号，对所有 m、 $n \in \mathbb{N}_0$，令

$$b_{m,n} := \langle L[\hat{a}]\hat{u}_{S^m \setminus S^{m-1}}, \hat{u}_{S^n \setminus S^{n-1}} \rangle_{\ell^2},$$

约定 $S^{-1} = \emptyset$。

推论1。对所有 $n \in \mathbb{N}_0$,

$$b_{n+1,n} + b_{n,n} + b_{n-1,n} = \begin{cases} \langle \hat{f}, \hat{u}|_{S^0} \rangle_{\ell^2} & \text{if } n = 0 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

证明。 根据命题 5，对于所有 $m \notin \{n-1, n, n+1\}$， $\hat{u}|_{S^n \setminus S^{n-1}}$ 与 $L\hat{a}\hat{u}|_{S^m \setminus S^{m-1}}$ 是 ℓ^2-正交的。用简化记号表示， $b_{m,\,n} = 0$ 对所有 $m \notin \{n-1, n, n+1\}$ 均成立。因此

$$\langle \hat{f}, \hat{u}|_{S^n \setminus S^{n-1}} \rangle_{\ell^2} = \langle L[\hat{a}]\hat{u}, \hat{u}|_{S^n \setminus S^{n-1}} \rangle_{\ell^2} = \sum_{m=0}^{\infty} b_{m,n} = b_{n+1,n} + b_{n,n} + b_{n-1,n}.$$

注意到以下事实即可完成证明：

$$\langle \hat{f}, \hat{u}|_{S^n \setminus S^{n-1}} \rangle_{\ell^2} = \begin{cases} \langle \hat{f}, \hat{u}|_{S^0} \rangle & \text{if } n = 0 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

□

现在我们可以用相邻项 $\hat{u}|_{S^{n+1} \setminus S^n}$ 和 $\hat{u}|_{S^{n-1} \setminus S^{n-2}}$ 来估计 $\hat{u}|_{S^n \setminus S^{n-1}}$ 。标准方法是结合强制性和连续性（例如，参见引理6的证明或 [10, 第 6 节。4] 中的其他例子）： 对于 $n > 0$,

$$\alpha \left\| u|_{S^n \setminus S^{n-1}} \right\|_H^2 \leqslant |b_{n,n}| \leqslant |b_{n+1,n}| + |b_{n-1,n}| \leqslant \beta \left\| u|_{S^n \setminus S^{n-1}} \right\|_H \left(\left\| u|_{S^{n+1} \setminus S^n} \right\|_H + \left\| u|_{S^{n-1} \setminus S^{n-2}} \right\|_H \right),$$

于是我们得到

$$\left\| u|_{S^n \setminus S^{n-1}} \right\|_H \leqslant \frac{\beta}{\alpha} \left(\left\| u|_{S^{n+1} \setminus S^n} \right\|_H + \left\| u|_{S^{n-1} \setminus S^{n-2}} \right\|_H \right).$$

然而，我们希望对这个界进行迭代，而 $\beta \geqslant \alpha$ 这一事实并不能让我们证明当 $n \to \infty$时存在任何衰减。因此，我们需要一个比单纯利用连续性稍微精细一些的估计。

命题 6. 对于 $n > 0$， 我们有

$$|b_{n\pm1,n}| \leqslant \|a - \hat{a}_0\|_{L^\infty} \left\| u|_{S^n \setminus S^{n-1}} \right\|_H \left\| u|_{S^{n\pm1} \setminus S^{n\pm1-1}} \right\|_H.$$

证明。将所有求和限制在其所索引向量的支撑集上，我们有

$$b_{n\pm1,n} = \sum_{k\in S^n\setminus S^{n-1}} \sum_{l\in(k-\operatorname{supp}(\hat{a}))\cap(S^{n\pm1}\setminus S^{n\pm1-1})} (2\pi)^2 (l\cdot k)\hat{a}_{k-l}\hat{u}_l\overline{\hat{u}}_k.$$

显然，选择 $l = k \in S^n \setminus S^{n-1}$ 将无法实现 $l \in S^{n\pm1} \setminus S^{n\pm1-1}$。因此，该求和中不会出现乘以$\hat{a}_{k-k} = \hat{a}_0$ 的项。于是我们得到等价关系

$$b_{n\pm1,n} = \langle L[\hat{a}-\hat{a}_0]\hat{u}|_{S^{n\pm1}\setminus S^{n\pm1-1}}, \hat{u}|_{S^n\setminus S^{n-1}}\rangle_{\ell^2},$$

根据连续性的标准论证，这意味着

$$|b_{n\pm1,n}| \leqslant \|a-\hat{a}_0\|_{L^\infty}\left\|u|_{S^n\setminus S^{n-1}}\right\|_H\left\|u|_{S^{n\pm1}\setminus S^{n\pm1-1}}\right\|_H.$$

如所需。 □

随后沿用命题 6 之前的相同论证，即可得到所需的“邻域”估计。

推论 2。对于所有 $n > 1$,

$$\left\|u|_{S^n\setminus S^{n-1}}\right\|_H \leqslant \frac{\|a-\hat{a}_0\|_{L^\infty}}{a_{\min}}\left(\left\|u|_{S^{n+1}\setminus S^n}\right\|_H + \left\|u|_{S^{n-1}\setminus S^{n-2}}\right\|_H\right).$$

现在我们已经具备了陈述截断误差估计所需的条件。

引理 3. 设 a、 f和 u 如命题 *2* 中所述。假设

$$3\|a-\hat{a}_0\|_{L^\infty} < a_{\min} \tag{6}$$

Then

$$\|u-u|_{S^N}\|_H \leqslant \left(\frac{\|a-\hat{a}_0\|_{L^\infty}}{a_{\min}-2\|a-\hat{a}_0\|_{L^\infty}}\right)^{N+1}\frac{\|f\|_{L^2}}{a_{\min}}.$$

证明。 我们先将 $\operatorname{supp}(\hat{u})\setminus S^N$ 拆分为由新贡献$\bigcup_{n=N+1}^{\infty}\left(S^n\setminus S^{n-1}\right)$组成的集合（这由命题 4 保证）。因此

$$\|u-u|_{S^N}\|_H \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty}\left\|u|_{S^n\setminus S^{n-1}}\right\|_H =: T_N.$$

应用邻居界推论 2（其中我们定义 $A := \|a-\hat{a}_0\|_{L^\infty}/a_{\min}$），可得

$$\begin{aligned} T_N &\leqslant A\left(\sum_{n=N+1}^{\infty}\left\|u|_{S^{n+1}\setminus S^n}\right\|_H + \sum_{n=N+1}^{\infty}\left\|u|_{S^{n-1}\setminus S^{n-2}}\right\|_H\right)\\ &= A\left(T_{N+1}+T_{N-1}\right)\\ &= 2AT_N + A\left(\left\|u|_{S^N\setminus S^{N-1}}\right\|_H - \left\|u|_{S^{N+1}\setminus S^N}\right\|_H\right). \end{aligned}$$

重新整理并忽略负项后，我们得到

$$T_N \leqslant \frac{A}{1-2A}\left\|u|_{S^N\setminus S^{N-1}}\right\|_H. \tag{7}$$

注意，我们始终有

$$\left\|u|_{S^N\setminus S^{N-1}}\right\|_H \leqslant T_{N-1}, \tag{8}$$

依次迭代（7）和（8），得到

$$\|u-u|_{S^N}\|_H \leqslant T_N \leqslant \left(\frac{A}{1-2A}\right)^{N+1}\|u|_{S^0}\|_H \leqslant \left(\frac{A}{1-2A}\right)^{N+1}\frac{\|f\|_{L^2}}{a_{\min}}.$$

□

7. 关于稀疏傅里叶变换的先前结果

在 [23]，中，我们介绍了两种高维稀疏傅里叶变换方法，每种方法都有确定性和蒙特卡洛变体。这里，我们采用两种算法中速度较快的一种（代价是误差保证略微次优）。我们只关注蒙特卡洛变体，因为下文第 8 节所述对这一技术的改进还使用了额外一层随机化。

该方法依赖于沿着称为重构型秩-*1* 格的特殊集合，对高维函数的采样应用一维稀疏傅里叶变换。

定义 5. 给定采样点数量 $M \in \mathbb{N}$和生成向量 $z \in \{1, \dots M-1\}^d$，我们将秩-*1*格 $\Lambda(z, M)$ 定义为集合

$$\Lambda(z, M) := \left\{ \frac{j}{M} z \bmod 1 \mid j \in \{0, \dots, M-1\} \right\} \subset \mathbb{T}^d.$$

此外，给定频率集合 $I \subset \mathbb{Z}^d$，如果满足以下条件，我们称 $\Lambda(z, M)$ 为针对该集合的重构型秩-*1* 格I

$$l \cdot z \neq k \cdot z \bmod M \quad \text{for all } l \neq k \in I.$$

重构秩-1格的基本思想是：给定一个多元函数 $g : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$，它提供单变量函数 $t \mapsto g(tz)$的 M 个等距采样点的位置。随后，可以将这些采样点的单变量傅里叶成分归属于原函数 g；重构性质则确保感兴趣的多维频率不会在一维分析中彼此混叠。对于以下定理，我们假设已知存在一个针对感兴趣频率集合 I的重构型秩-1格。下一节将解除这一假设。

下面的定理是对 [23, 推论 2] 的重新表述，并进行了少量简化和改进（最值得注意的是，L^∞ 误差界）。这些改进的证明见附录 B。

定理 2（[23], 推论 2）。设 $I \subset \mathbb{Z}^d$ 为感兴趣的频率集合，其展开范围定义为$K := \text{最大值}_{j \in \{1,\dots,d\}}(\text{最大值}_{k \in I} k_j - \text{最小值}_{l \in I} l_j)$（即包含 I的最小超立方体的边长），并设 $\Lambda(z, M)$ 为 I的一个重构型秩-*1* 格。

存在一种快速的随机化 *SFT*：给定 $\Lambda(z, M)$、对 $g \in L^2$的采样访问以及失败概率 $\sigma \in (0, 1]$，该算法将生成一个 $2s$-稀疏近似 $\hat{}g^s$，它逼近 $\hat{}g$，且函数 $g^s := \sum_{k \in \text{支撑集}(\hat{g}^s)} \hat{}g^s_k e_k$ 逼近 g，满足

$$\|g - g^s\|_{L^2} \leqslant \|\hat{g} - \hat{g}^s\|_{\ell^2} \leqslant (25 + 3K) \left[\frac{\left\| \hat{g}|_I - (\hat{g}|_I)^{\text{opt}}_s \right\|_1}{\sqrt{s}} + \sqrt{s} \|\hat{g} - \hat{g}|_I\|_1 \right]$$

概率超过 $1 - \sigma$。如果 $g \in L^\infty$，那么我们还可以得到

$$\|g - g^s\|_{L^\infty} \leqslant \|\hat{g} - \hat{g}^s\|_{\ell^1} \leqslant (33 + 4K) \left[\left\| \hat{g}|_I - (\hat{g}|_I)^{\text{opt}}_s \right\|_1 + \|\hat{g} - \hat{g}|_I\|_1 \right]$$

且具有相同的概率估计。g 的总采样数以及算法的计算复杂度可由以下上界限定

$$\mathcal{O}\left(ds \log^3(dKM) \log\left(\frac{dKM}{\sigma} \right) \right).$$

8. 随机化格带来的改进

要使用前述稀疏傅里叶变换算法，我们需要预先知道一个重构型秩-1 格。虽然对于任意频率集合 I，都有确定性算法可以构造重构型秩-1 格（例如逐分量构造 [34, 27]），但这些算法的复杂度关于 $|I|$ 是超线性的，因为它们在构造过程中实际上会在频率空间中搜索冲突。

本节介绍一种基于随机格选择的替代方法。对于充分大的 M，通过从 $\{1, \dots, M-1\}^d$ 上的均匀分布中抽取z 来选择该格。下文将给出概率估计，说明该格何时是频率集合 I 的重构型秩-1 格。

引理 4. 设频率集合 $\mathcal{I} \subset \mathbb{Z}^d$ 的展开范围为 $K := \max_{j\in\{1,\dots d\}}(\max_{k\in\mathcal{I}} k_j - \min_{l\in\mathcal{I}} l_j)$。令$\sigma \in (0,1]$，并固定 M 为大于 $\max(K, \frac{|\mathcal{I}|^2}{\sigma})$ 的最小素数。然后，从 $\{1,\dots M-1\}$ 中独立同分布地抽取 z 的每个分量，可得 $\Lambda(z,M)$ 以概率$1-\sigma$是 $\mathcal{I}$ 的重构型秩-*1* 格。

证明。为了证明 $\Lambda(z,M)$ 能够重构 $\mathcal{I}$，只需证明对于任意 $k \neq l \in \mathcal{I}$，$k\cdot z \not\equiv l\cdot z \mod M$。因此，我们希望证明满足 $(k-l)\cdot z \equiv 0 \mod M]$ 很小的 $\mathbb{P}[\exists k \neq l \in \mathcal{I}$。

若 k、$l \in \mathcal{I}$ 不同，则至少有一个分量 $k_j - l_j$ 非零。由于 $M > K$，因此我们有 $k_j - l_j \not\equiv 0 \mod M$；又由于 M 是素数，$k_j - l_j$ 在模 M 下有乘法逆元。于是，$\mathbb{P}[(k-l)\cdot z \equiv 0 \mod M] = \mathbb{P}\left[z_j = \left((k_j-l_j)^{-1}\sum_{i\in\{1,\dots d\}, i\neq j}(k_i-l_i)z_i \mod M\right)\right]$。由于 z_j 在 $\{1,\dots M-1\}$ 中均匀分布，该概率为 $\frac{1}{M-1}$。根据并集界，

$$\mathbb{P}[\exists k \neq l \in \mathcal{I} \text{ s.t. } (k-l)\cdot z \equiv 0 \bmod M] \leqslant \sum_{k\neq l\in\mathcal{I}} \mathbb{P}[(k-l)\cdot z \equiv 0 \bmod M] \leqslant \frac{|\mathcal{I}|^2}{M-1} \leqslant \sigma$$

正如所需。

□

引理 4 的一个重要推论是，我们不再需要在定理 2 中提供感兴趣的频率集合。选定 K展开范围和 s稀疏度后，我们总可以令 $\mathcal{I}$ 为函数 g 在超立方体 $[-K/2,K/2]^d$上的最大 s 个傅里叶系数所对应的频率。于是，引理 4 表明，随机生成的格点长度为 $\max(K, s^2/\sigma)$ 时，对于这些最优频率，它能够以 σ的概率完成重构。我们在以下推论中总结这一结果。

推论 3. 对于多元函数的傅里叶级数 $\hat{g}$，定义 $\hat{g}|_K := \hat{g}|_{[-K/2,K/2]^d}$。给定多元带宽 K、稀疏度 s、失败概率 $\sigma \in (0,1]$，以及对 $g \in L^2$ 的采样访问，存在一种快速的随机化 *SFT*，可生成一个 $2s$- 稀疏近似 $\hat{g}^s$，用于逼近 $\hat{g}$ 和函数$g^s := \sum_{k\in\text{支撑集}(\hat{g}^s)} \hat{g}^s_k e_k$，满足

$$\|g-g^s\|_{L^2} \leqslant \|\hat{g}-\hat{g}^s\|_{\ell^2} \leqslant (25+3K)\sqrt{s}\left\|\hat{g}-(\hat{g}|_K)^{\text{opt}}_s\right\|_{\ell^1}$$

概率为 $1-\sigma$。如果 $g \in L^\infty$，则 g^s 和$\hat{g}^s$ 满足以下上界

$$\|g-g^s\|_{L^\infty} \leqslant \|\hat{g}-\hat{g}^s\|_{\ell^1} \leqslant (33+4K)\left\|\hat{g}-(\hat{g}|_K)^{\text{opt}}_s\right\|_{\ell^1}$$

且概率估计相同。g 的样本总数以及算法的计算复杂度可由以下上界限定

$$\mathcal{O}\left(ds\log^3(dK\max(K,s/\sigma))\log\left(\frac{dK\max(K,s/\sigma)}{\sigma}\right)\right).$$

如果固定 σ （例如 $\sigma = 0.95$），则复杂度可简化为

$$\mathcal{O}\left(ds\log^4(dK\max(K,s))\right).$$

9. 基于稀疏傅里叶变换的稀疏谱方法

设 $\hat{a}^s$ 和 $\hat{f}^s$ 分别是 $\hat{a}$ 和 $\hat{f}$ 的 s-稀疏近似。我们将使用这些近似对偏微分方程的 Galerkin 变分形式（伽辽金公式）进行离散化。第一步是将问题化简为偏微分方程数据为傅里叶稀疏的情形，这一做法的动机来自以下引理。

引理 5. 设 $a' := a|_{\text{supp}\,\hat{a}^s}$ 和 $f' := f|_{\text{supp}\,\hat{f}^s}$。假设 a' 和 f' 满足命题 *2* 的条件，并设 u' 为由此得到的椭圆型偏微分方程的唯一解，我们将其写成 *Galerkin* 形式如下

$$L[\hat{a}']\hat{u}' = \hat{f}'. \tag{9}$$

Then

$$\|u-u'\|_H \leqslant \frac{\|f-f'\|_{L^2}}{a_{\min}} + \frac{\|a-a'\|_{L^\infty}\|f'\|_{L^2}}{a_{\min}a'_{\min}}.$$

证明。 我们首先注意到

$$L[\hat{a}](\hat{u}-\hat{u}') = L[\hat{a}]\hat{u} - L[\hat{a}']\hat{u}' - L[\hat{a}-\hat{a}']\hat{u}' = \hat{f} - \hat{f}' - L[\hat{a}-\hat{a}']\hat{u}',$$

因此

$$|\langle L[\hat{a}](\hat{u}-\hat{u}'), \hat{u}-\hat{u}'\rangle| \leqslant \left|\langle \hat{f}-\hat{f}', \hat{u}-\hat{u}'\rangle\right| + |\langle L[\hat{a}-\hat{a}']\hat{u}', \hat{u}-\hat{u}'\rangle|.$$

将 ℓ^2 内积转换为双线性形式后，应用命题 3，再利用强制性（3）、连续性（2）和柯西-施瓦茨不等式，即可得到 H 逼近

$$a_{\min}\|u-u'\|_H \leqslant \left\|\hat{f}-\hat{f}'\right\|_{\ell^2} + \|a-a'\|_{L^\infty}\|u'\|_H.$$

应用稳定性估计（4）即可得到所需的界

$$\|u-u'\|_H \leqslant \frac{\|f-f'\|_{L^2}}{a_{\min}} + \frac{\|a-a'\|_{L^\infty}\|f'\|_{L^2}}{a_{\min}a'_{\min}}.$$

□

现在，我们可以用有限维近似替换（WF）中的试探空间与检验空间，从而将（GF）转换为矩阵方程。受命题 4 和第 6 节中的截断误差分析启发，我们采用傅里叶系数的支撑集包含于 $S^N := S^N[\hat{a}]$(支撑集$\hat{f}$)的函数空间。由此，我们将问题（GF）的 Galerkin 变分形式离散化为以下有限方程组

$$(L_N\hat{u})_k := \sum_{l\in S^N} (2\pi)^2(l\cdot k)\hat{a}_{k-l}\hat{u}_l = \hat{f}_k \quad \text{for all } k\in S^N. \tag{10}$$

然而，在实际应用中，我们并不知道 $\hat{a}$ 和$\hat{f}$的精确值（事实上，它们也可能并非精确稀疏）。因此，我们用稀疏傅里叶变换近似 $\hat{a}^s$ $\hat{f}^s$ 和$\hat{L}_{N,s}: \mathbb{C}^{S^N} \to \mathbb{C}^{S^N}$ 代替，并定义新的有限维算子，如下

$$(L_{N,s}\hat{u})_k := \sum_{l\in S^N} (2\pi)^2(l\cdot k)\hat{a}^s_{k-l}\hat{u}_l \quad \text{for all } k\in S^N.$$

我们的新近似解为 $\hat{u}^{N,s}\in\mathbb{C}^{S^N}$ 它满足

$$L_{N,s}\hat{u}^{N,s} = \hat{f}^s. \tag{11}$$

我们在算法 1 中概述了我们的方法。

算法 1 稀疏谱方法

输入：偏微分方程数据 a 和 f、稀疏度参数 s、带宽参数 K以及印章级别 N输出：近似解的傅里叶系数 $\hat{u}^{s,N}$

1: $\hat{a}^s \leftarrow$ 稀疏傅里叶变换$[s,K](a)$ // 稀疏傅里叶变换是 [23] 中使用随机秩一格的算法（参见第 8 节）
2: $\hat{f}^s \leftarrow$ 稀疏傅里叶变换$[s,K](f)$
3: 计算 $S^N[\hat{a}^s]$(支撑集$(\hat{f}^s)$) // see, e.g., (5) or (21)
4: $(L_{N,s})_{k\in S^N, l\in S^N} \leftarrow (2\pi)^2(l\cdot k)\hat{a}^s_{k-l}$
5: $\hat{u}^{N,s} \leftarrow L_{N,s}\backslash\hat{f}^s$ // 使用 MATLAB 反斜杠表示法进行矩阵求解

证明 $u^{N,s}$ 收敛到 u，现在依赖于 Strang 引理的一个变体 [10, 式 (6.4.46)]。这里我们假设 $\mathrm{supp}(\hat{a}) = \mathrm{supp}(\hat{a}^s)$ 且 $\mathrm{supp}(\hat{f}) = \mathrm{supp}(\hat{f}^s)$，以确保我们对 S^N 的使用没有歧义。不过，下面的推论 4 中的引理 5 将解除这一假设。

引理6 (Strang 引理). 假设支撑集$(\hat{a}) =$ 支撑集$(\hat{a}^s)$ 且支撑集$(\hat{f}) =$ 支撑集$(\hat{f}^s)$。另假设$a^s \geqslant a^s_{\min} > 0$ 在 $\mathbb{T}^d$上。令 u 和 $u^{N,s}$ 如上所述。则

$$\left\|u-u^{N,s}\right\|_H \leqslant \left(1+\frac{\|a\|_{L^\infty}}{a^s_{\min}}\right)\left\|u|_{\mathbb{Z}^d\setminus S^N}\right\|_H + \frac{\|a-a^s\|_{L^\infty}}{a^s_{\min}}\|u|_{S^N}\|_H + \frac{\|f-f^s\|_{L^2}}{a^s_{\min}}.$$

证明。 令$\hat{\boldsymbol{e}} := \hat{\mathbf{u}}^{N,s} - \hat{u}|_{\mathcal{S}^N}$，并考虑

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{N,s}\hat{\boldsymbol{e}} &= \mathbf{L}_{N,s}\hat{\mathbf{u}}^{N,s} - (L[\hat{\mathbf{a}}^s]\hat{u}|_{\mathcal{S}^N})|_{\mathcal{S}^N}\\ &= \hat{\mathbf{f}}^s - \hat{f} + (L[\hat{a}]\hat{u})|_{\mathcal{S}^N} - (L[\hat{\mathbf{a}}^s]\hat{u}|_{\mathcal{S}^N})|_{\mathcal{S}^N}\\ &= \hat{\mathbf{f}}^s - \hat{f} + (L[\hat{a}]\hat{u}|_{\mathbb{Z}^d\setminus\mathcal{S}^N})|_{\mathcal{S}^N} + (L[\hat{a}]\hat{u}|_{\mathcal{S}^N} - L[\hat{\mathbf{a}}^s]\hat{u}|_{\mathcal{S}^N})|_{\mathcal{S}^N}\\ &= \hat{\mathbf{f}}^s - \hat{f} + (L[\hat{a}]\hat{u}|_{\mathbb{Z}^d\setminus\mathcal{S}^N})|_{\mathcal{S}^N} + (L[\hat{a}-\hat{\mathbf{a}}^s]\hat{u}|_{\mathcal{S}^N})|_{\mathcal{S}^N}.\end{aligned}$$

注意到 $\mathbf{L}_{N,\ s}\hat{\boldsymbol{e}} = (L[\hat{\mathbf{a}}^s]\hat{e})|_{\mathcal{S}^N}$，并且由于 $L[\hat{\mathbf{a}}^s]$ 的强制性，我们有

$$\begin{aligned}a^s_{\min}\|e\|_H^2 &\leqslant |\langle \mathbf{L}_{N,s}\hat{\boldsymbol{e}}, \hat{\boldsymbol{e}}\rangle|\\ &\leqslant \|f^s - f\|_{L^2}\|e\|_H + \|a\|_{L^\infty}\left\|u|_{\mathbb{Z}^d\setminus\mathcal{S}^N}\right\|_H\|e\|_H + \|a-a^s\|_{L^\infty}\|u|_{\mathcal{S}^N}\|_H\|e\|_H.\end{aligned}$$

然后，通过重新排列来估计 $\|e\|_H$，并利用三角不等式估计$\left\|u - u^{N,\ s}\right\|_H \leqslant \|u - u|_{\mathcal{S}^N}\|_H + \|e\|_H$，即可得到该结果。□

现在，我们可以将所有结果串联起来，进行最终的收敛分析。下面的第一个推论是对 Strang 引理更直接的应用，随后给出的另一个推论则利用了 SFT 恢复结果。我们还将回到 a 和 f 不一定是傅里叶稀疏的情形。因此，对于 a 和 f的傅里叶稀疏近似 a^s 和 f^s，我们再次令 $a' = a|_{\operatorname{supp}\hat{a}^s}$和 $f' = f|_{\operatorname{supp}\hat{f}^s}$ 如引理 5 中所述。

推论 4. 假设 a, f 和 a^s, f^s 分别满足命题 *2* 的条件。此外，假设

$$3\sum_{k\in\operatorname{supp}(\hat{a}^s)\setminus\{0\}}|\hat{a}_k| \leqslant \hat{a}_0. \tag{12}$$

*Th*其中 u 是 (WF) 的精确解，且 $u^{N,s}$ 是算法 *1* 的输出，我们有 *e*

$$\begin{aligned}\left\|u - u^{N,s}\right\|_H \leqslant{}& \frac{\|f-f'\|_{L^2}}{a_{\min}} + \frac{\|a-a'\|_{L^\infty}\|f'\|_{L^2}}{a_{\min}a'_{\min}} + \left(1 + \frac{\|a'\|_{L^\infty}}{a^s_{\min}}\right)\left(\frac{\|a'-\hat{a}'_0\|_{L^\infty}}{a'_{\min} - 2\left\|a'-\hat{a}'_0\right\|_{L^\infty}}\right)^{N+1}\frac{\|f'\|_{L^2}}{a'_{\min}}\\ &+ \frac{\|a'-a^s\|_{L^\infty}\|f'\|_{L^2}}{a^s_{\min}a_{\min}} + \frac{\|f'-f^s\|_{L^2}}{a^s_{\min}}\end{aligned}$$

证明。 条件 (12) 确保 a' 是强制的，因此 a' 和 f' 也满足命题 2。此外，这使得我们可以使用引理 3，它给出了引理 6 中截断误差的上界。将引理 5 与引理 6 给出的这一界结合起来，并应用命题 2 中的稳定性估计，即可完成证明。□

注 1. 为了使该界成立，两个弱形式都必须

$$\mathcal{L}[a]u = f \text{ and } \mathcal{L}[a^s]u^s = f^s$$

适定，也就是说，满足命题 2 的连续性和强制性条件。实际上，只要扩散系数是傅里叶可压缩的，且稀疏度 s 足够大以确保 a^s 严格为正，这一条件并不比仅假设原方程适定严格多少。事实上，(12) 允许我们在计算出 $\hat{\mathbf{a}}^s$ 后，通过一个简单（尽管保守）的检验来确保 a^s 的正性：$\|\hat{\mathbf{a}}^s - \hat{a}^s_0\|_{\ell^1} < |\hat{a}^s_0|$。

稍作修改后，我们可以重写这个上界，使其对稀疏性的所有依赖都通过使用稀疏傅里叶变换近似 a 和 f 时产生的误差体现出来。

推论 5. 在与上述推论 *4* 相同的条件下，将(12) 替换为

$$3\|\hat{a} - \hat{a}_0\|_{\ell^1} + \|\hat{a} - \hat{\mathbf{a}}^s\|_{\ell^1} < \hat{a}_0,$$

我们有

$$\left\|u-u^{N,s}\right\|_H \leqslant \left(1+\frac{\|\hat{a}\|_{\ell^1}}{a_{\min}-\|\hat{a}-\hat{\mathbf{a}}^s\|_{\ell^1}}\right)\frac{\|f\|_{L^2}}{a_{\min}-\|\hat{a}-\hat{\mathbf{a}}^s\|_{\ell^1}} \times\left(\frac{\|f-f^s\|_{L^2}}{\|f\|_{L^2}}+\|a-a^s\|_{L^\infty}+\left(\frac{\|\hat{a}-\hat{a}_0\|_{\ell^1}}{a_{\min}-2\|\hat{a}-\hat{a}_0\|_{\ell^1}-\|\hat{a}-\hat{\mathbf{a}}^s\|_{\ell^1}}\right)^{N+1}\right).$$

证明。 由于$\hat{a}'=\hat{a}|_{\operatorname{supp}\hat{\mathbf{a}}^s}$,

$$\|a-a'\|_{L^\infty}\leqslant\|\hat{a}-\hat{a}'\|_{\ell^1}\leqslant\|\hat{a}-\hat{\mathbf{a}}^s\|_{\ell^1},$$
$$\|a'-a^s\|_{L^\infty}\leqslant\|\hat{a}'-\hat{\mathbf{a}}^s\|_{\ell^1}\leqslant\|\hat{a}-\hat{\mathbf{a}}^s\|_{\ell^1},$$

并以类似方式证明$\|f-f'\|_{L^2}$ 和$\|f'-f^s\|_{L^2}$ 由$\|f-f^s\|_{L^2}$上界控制。此外,

$$a^s\geqslant a-\|a-a^s\|_{L^\infty}\geqslant a-\|\hat{a}-\hat{\mathbf{a}}^s\|_{\ell^1}\text{ and}$$
$$a'\geqslant a-\|a-a'\|_{L^\infty}\geqslant a-\|\hat{a}-\hat{\mathbf{a}}^s\|_{\ell^1}$$

从而得到$\min(a^s_{\min},a'_{\min})\geqslant a_{\min}-\|\hat{a}-\hat{\mathbf{a}}^s\|_{\ell^1}$。 其余部分可通过应用 (4) 并重新排列得到。 □

注记 2。 尽管这个最终界限难以解析，我们可以将注意力集中在最后一个因子上

$$\frac{\|f-f^s\|_{L^2}}{\|f\|_{L^2}}+\|a-a^s\|_{L^\infty}+\left(\frac{\|\hat{a}-\hat{a}_0\|_{\ell^1}}{a_{\min}-2\|\hat{a}-\hat{a}_0\|_{\ell^1}-\|\hat{a}-\hat{\mathbf{a}}^s\|_{\ell^1}}\right)^{N+1}, \tag{13}$$

因为其他因子或多或少是固定的。前两项分别可通过在 L^2 范数下对 f 以及在 L^∞ 范数下对 a 取得良好的 SFT 近似来控制。在我们的算法中，可以通过增大带宽 K 和稀疏性 s来减小这两项。提醒一下，定理 2 中给出的这些近似误差接近最优，因为

$$\|f-f^s\|_{L^2}\leqslant(25+3K)\sqrt{s}\left\|\hat{f}-\left(\hat{f}|_K\right)^{\text{opt}}_s\right\|_{\ell^1}\text{ and }\|a-a^s\|_{L^\infty}\leqslant(33+4K)\left\|\hat{a}-(\hat{a}|_K)^{\text{opt}}_s\right\|_{\ell^1}$$

以高概率成立。

最后一项由 a 的性质以及所用的最终印章级别控制。总体而言，收敛关于 N（即印章级别）呈指数级。随着指数底数减小，这种收敛会加快；实际上，当扩散系数趋近于一个较大的常数时，就会出现这种情况。确实，分子可以看作 a 相对于其均值的绝对偏差上界，而分母则随 a的最小值增大。

注 3. 算法 1 的计算复杂度为

$$\mathcal{O}\left(ds\log^4(dK\max(K,s))+\max(s,2N+1)^{3\min(s,2N+1)}\right).$$

这是因为需要执行两次稀疏傅里叶变换以及一次 $\left|\mathcal{S}^N\right|\times\left|\mathcal{S}^N\right|$ 系统的矩阵求解。请注意，可以利用引理 8 中的技术枚举频率来计算印章集，因此其复杂度上界与引理 2 给出的印章集基数上界相同。还要注意，可以调整稀疏傅里叶变换复杂度，使其以更高概率得到满足上述界的 SFT 近似。

我们不深入分析矩阵求解的复杂度，而是采用对稠密矩阵进行高斯消元所得的上界， $\mathcal{O}\left(\max(s,2N+1)^{3\min(s,2N+1)}\right)$。然而，对于较大的盖印级别，$\mathbf{L}_{N,\,s}$相对稀疏。由于稀疏求解器的性能很大程度上取决于对连接$\mathbf{L}_{N,\,s}$中相互作用行的图进行分析（参见 [18, 第 11] 章），我们预计，可以利用第 6 节中对印章集所做的大部分分析来构建高效稀疏求解器的分析。

注 4。 本文探讨求解简单扩散方程 (1) 的理论。不过，这些技术也可推广至更复杂的对流-扩散-反应（ADR）方程。此时，测试问题为

$$-\nabla\cdot(a(\mathbf{x})\nabla u(\mathbf{x}))+\mathbf{b}(\mathbf{x})\cdot\nabla u(\mathbf{x})+c(\mathbf{x})u(\mathbf{x})=f(\mathbf{x})\text{ for all }\mathbf{x}\in\mathbb{T}^3. \tag{14}$$

与前文相同， a、 f、 $u:\mathbb{T}^d\to\mathbb{R}$ 分别表示扩散系数、强迫函数和解。现在还引入了对流场 $\mathbf{b}:\mathbb{T}^d\to\mathbb{R}^d$ 和一个额外的反应系数 $c:\mathbb{T}^d\to\mathbb{R}$。关于该周期性 ADR 方程的性质和适定性，详见 [3]。

调整算法 1 以求解 ADR 方程需要进行两项修改：

(1) 使用 SFT 计算逼近 $\hat{a}^s$、$\hat{f}^s$ 时，还需计算 $\hat{b}^s := (\hat{b}^s_j)_{j=1}^d$，即对 b 的每个分量的傅里叶系数进行逼近，并计算 $\hat{c}^s$，即对 $\hat{c}$ 的逼近。(2) 重新定义用于定义 $\mathcal{S}^N[\hat{a}^s](\mathrm{supp}(\hat{f}^s))$ 的“印章”，将 $\hat{b}^s$ 和 $\hat{c}^s$ 的支撑集纳入其中。数学上，我们定义

$$\mathcal{S}^N[\hat{a}^s,\hat{b}^s,\hat{c}^s](\mathrm{supp}(\hat{f}^s)) := \begin{cases} \mathrm{supp}(\hat{f}^s) & \text{if } N=0 \\ \mathcal{S}^{N-1} + \mathrm{supp}(\hat{a}^s) + \sum_{j=1}^d \mathrm{supp}(\hat{b}^s_j) + \mathrm{supp}(\hat{c}^s) & \text{if } N>0 \end{cases}$$

在上下文含义明确时，我们通常会省略傅里叶系数。

此方法的收敛分析与推导推论 5 的分析大致相同，其中，像$\|a-a^s\|_{L^\infty}$这样的项会替换为 $\max\left\{\|a-a^s\|_{L^\infty}, \|\|b-b^s\|_{\ell^2}\|_{L^\infty}, \|c-c^s\|_{L^\infty}\right\}$；对于指数衰减项中所用的 a 的零均值版本，处理方式也类似。完整细节见 [22]。

10. 数值实验

本节将举例说明上述算法在各种问题中的应用。我们首先概述实现方法，并介绍一些用于评估逼近精度的技术。随后，我们给出单变量问题以及超高维多尺度问题的解，其中数据既包括精确稀疏数据，也包括傅里叶可压缩数据。最后，我们将方法推广至三维对流-扩散-反应方程。

10.1. 代码与测试概述。

我们采用面向对象的方法，在 MATLAB 中实现了上述算法 1，所有代码均已公开。[2] 所有稀疏傅里叶变换均使用来自 [23] 的秩1格点稀疏傅里叶代码计算。[3]

为了评估逼近的质量，我们需要选择合适的度量。设$u^{s,N}$ 为算法返回的逼近，理想情况下应选择 $\left\|u-u^{s,N}\right\|_H$。然而，对于我们将要研究的问题，真实解 u 无法获得。因此，我们将使用一种利用命题 2 中稳定性结果的代理。

引理7. 设 u 为(伽辽金公式) 的真实解，$u^{s,N}$ 为求解(11)所得的逼近。定义$\hat{f}^{s,N} := L[\hat{a}]\hat{u}^{s,N}$ 其中 $f^{s,N} = \mathcal{L}[a]u^{s,N}$。那么

$$\left\|u-u^{s,N}\right\|_H \leqslant \frac{\left\|f-f^{s,N}\right\|_{L^2}}{a_{\min}} = \frac{\left\|\hat{f}-\hat{f}^{s,N}\right\|_{\ell^2}}{a_{\min}}.$$

证明。 结果由以下事实得出：$\hat{u}-\hat{u}^{s,N}$ 满足 $L[\hat{a}]\left(\hat{u}-\hat{u}^{s,N}\right) = \hat{f}-L[\hat{a}]\hat{u}^{s,N} = \hat{f}-\hat{f}^{s,N}$ 并应用命题 2。 □

接下来，我们将忽略 $a_{\min}$，因为我们主要关注 s 和 N中的收敛性质，并将计算相对误差

$$\frac{\left\|f-f^{s,N}\right\|_{L^2}}{\|f\|_{L^2}} \text{ or } \frac{\left\|\hat{f}-\hat{f}^{s,N}\right\|_{\ell^2}}{\left\|\hat{f}\right\|_{\ell^2}}$$

$\hat{}$ 作为我们的代理。每当 f 和 $\hat{a}$ 都是精确稀疏的，第二项的分子便可精确计算，因为已知 $\mathrm{supp}(\hat{f}^{s,N})$ 包含于 $\mathcal{S}^{N+1}$ 中（参见命题 5）。然而，在非稀疏情形下，尽管 $f-f^{s,N}$ 可以逐点求值，但对于较大的 d，要精确逼近其在 $\mathbb{T}^d$ 上的范数颇具挑战。为此，我们通过蒙特卡洛抽样来逼近该范数。我们还提供了可以精确计算 $\left\|\hat{f}-\hat{f}^{s,N}\right\|_{\ell^2}$ 的情形，并将其与逐点蒙特卡洛估计进行比较，以说明在实践中，蒙特卡洛抽样的表现不逊于精确计算。

[2]https://gitlab.com/grosscra/SparseADR[3]此代码可在 https://gitlab.com/grosscra/Rank1LatticeSparseFourier 公开获取

10.2. 单变量可压缩。我们首先重现了第 5.1] 节中求解椭圆型问题的唯一数值示例。在这种情况下，我们求解单变量问题

$$-(a(x)u'(x))' = f(x) \text{ for all } x \in \mathbb{T}, \text{ where}$$

$$a(x) = \frac{1}{10}\exp\left(\frac{0.6 + 0.2\cos(2\pi x)}{1 + 0.7\sin(256\pi x)}\right), \quad f(x) = \exp(-\cos(2\pi x)) - \int_{\mathbb{T}} \exp(-\cos(2\pi x))\,dx \tag{15}$$

（注意，与 [13] 相比，唯一的区别是我们使用区域 $\mathbb{T} = [0,1]$，而不是 $[0,2\pi)$。这些数据并非傅里叶稀疏，但具有可压缩性。原论文考虑了带宽为 $K = 1536$ 的情形，并使用了含有 9 个和 17 个傅里叶系数的近似。

我们首先通过在包含 10000 个点的极精细网格上进行数值积分，构造方程 (15) 的解的高精度近似。这样便无需使用引理7中描述的代理误差。与 [13], 一样，我们将所用稀疏傅里叶变换的带宽设为 $K = 1536$。由于我们的稀疏傅里叶变换返回的是稀疏近似，因此我们使用 $s = 4$ 和 $s = 8$，分别与原论文中考虑的 9 项和 17 项进行比较，并另外给出一个使用 $s = 12$的示例。我们将印章级别始终设为 $N = 1$；正如引言中所述，这与 [13]中使用的技术相似。

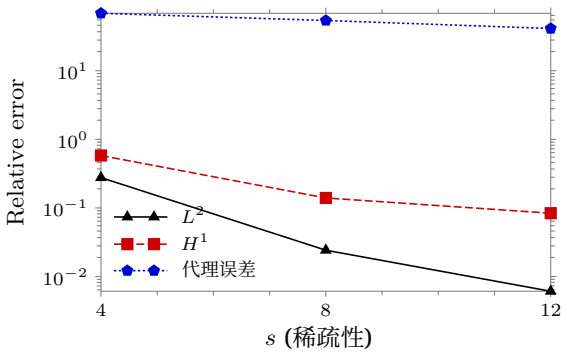
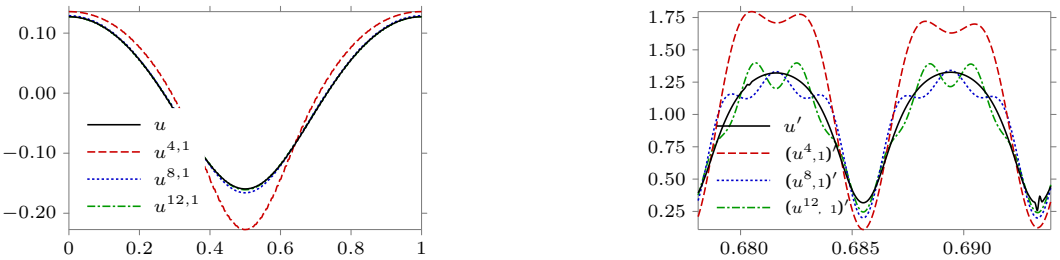


图2. 对方程 (15) 的解进行近似时产生的误差。



(a) 方程 (15) 的近似解。 (b) 方程 (15) 的近似导数细节。

图3. 定性结果。

L^2 和 H^1 中的近似相对误差见图2。原论文没有给出数值结果，而是给出了定性结果，将近似解及其导数与真实解及其导数进行比较。我们在图3中复现了这一项定性分析，结果相似。

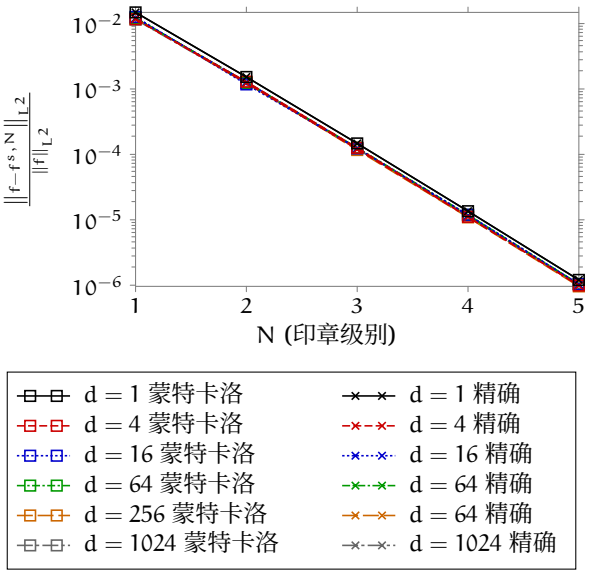
图2还展示了通过引理7所述代理计算出的误差，尤其说明了代理误差可能有多么悲观。在这个例子中，导数中的微小误差（见图3b）会在近似解经过算子时累积放大，因为相较于 a，a' 通常较大。在后续示例中，我们将看到代理误差的收敛情况会好得多。

10.3. 多变量精确稀疏。

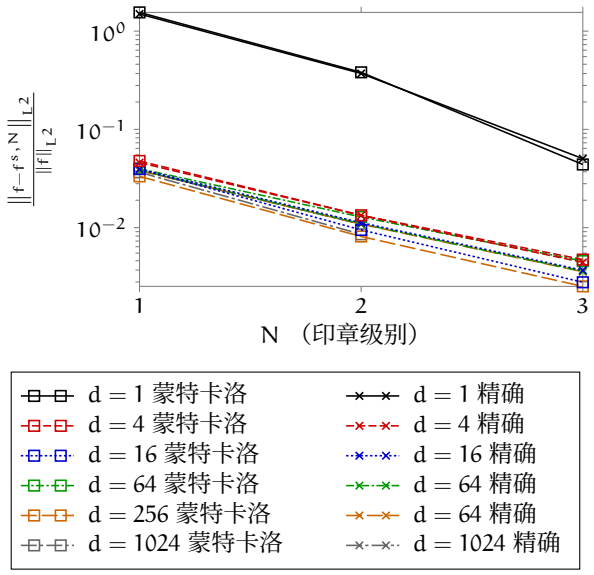
10.3.1. 低稀疏度。转到多变量情形，我们从一个精确稀疏数据的简单例子开始。我们的目标是求解

$$-\nabla\cdot(a(\boldsymbol{x})\nabla u(\boldsymbol{x}))=f(\boldsymbol{x})\ \text{for all}\ \boldsymbol{x}\in\mathbb{T}^d,\ \text{where}$$
$$a(\boldsymbol{x})=\hat{a}_0+c_a\cos(2\pi\boldsymbol{k}_a\cdot\boldsymbol{x}),\quad f(x)=\sin(2\pi\boldsymbol{k}_f\cdot\boldsymbol{x}). \tag{16}$$

我们抽取 $c_a\sim\mathrm{Unif}\left([-1,1]\right)$，并让其在每个维数下保持不变，然后设置 $\hat{a}_0=4$，使问题保持椭圆型（在下面的具体示例中，$c_a\approx-0.6$）。对于从 $d=1$ 到 $d=1\,024$变化的维数，我们接着抽取 $\boldsymbol{k}_a,\boldsymbol{k}_f\sim\mathrm{Unif}\left([-499,500]^d\cap\mathbb{Z}^d\right)$。随后，针对盖印级别 $N=1,\dots,5$ 求解偏微分方程 (16)。将 SFT 的带宽设为 1000，稀疏度设为 2。然后，从 $\mathbb{T}^d$ 中均匀抽取 200 个点，计算代理误差的蒙特卡罗近似；此外，利用 a 和 f的稀疏性精确计算代理误差。结果见图4a。



(a) 使用 $d=1$、4、16、64、256 求解 (16) 的代理误差，1024 和 $N=1$、……、5。



(b) 使用扩散系数求解 (16) 的代理误差 (17)，维数为 $d=4$、64、1 024，盖印级别为 $N=1,\dots,3$.

图4. 使用精确稀疏数据求解扩散方程。

我们可以看到，结果与问题的维数无关。由于关于 d 的所有依赖都体现在稀疏傅里叶变换的运行时间中，我们还观察到，在实践中，计算完数据的稀疏傅里叶变换后，针对不同盖印级别重新求解问题时，每个 d 所需的时间大致相同。误差也如理论误差保证所示，随着盖印级别的增加呈指数收敛。值得注意的是，我们还发现，使用 200 个点的蒙特卡罗近似得到的代理误差与精确计算所得相同。

10.3.2. 高稀疏度。 我们通过测试一个稀疏度高得多的扩散系数，进一步研究精确稀疏情形。在这里，我们求解 (16)，其中

$$a(\boldsymbol{x})=\hat{a}_0+\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathcal{I}_a}c_{\boldsymbol{k}}\cos(2\pi\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}). \tag{17}$$

系数向量抽取自 $\boldsymbol{c}\sim\mathrm{Unif}\left([-1,1]^{25}\right)$ 一次，并在每项测试中重复使用。对于每个 d，频率 $\boldsymbol{k}\in\mathcal{I}_a$ 均按照之前的方法从 $[-499,500]^d\cap\mathbb{Z}^d$ 中均匀抽取，其中 $|\mathcal{I}_a|=25$。这里令 $\hat{a}_0=4\lceil\|\boldsymbol{c}\|_2\rceil$，以确保椭圆性。同样，稀疏傅里叶变换算法的带宽设为 1 000，但现在稀疏度固定为 26。结果见图4b

再次可以看到，除了$d=1$这一显著例子外，结果并不取决于空间维度。 $d=1$ 情形中的代理误差较为悲观，存在与图2中类似的问题。具体而言，

该示例的右端项由频率 $k_f = -10$ 生成，因此频率相对较低。因此，在计算 $f^{s_{\text{时}},\,N}$中导致近似解出现误差的高频模态会被 a 中的高频成分放大。事实上，在进一步的实验中（此处未展示），提高 f 的频率或降低 a 的频率都会使代理误差降低。

对于其他维数，精确代理误差中的微小偏差可归因于随机化频率以及随机化 SFT 代码中的轻微变化。不过，我们确实发现，使用蒙特卡洛抽样计算的代理误差具有略高的方差。对于频率内容变化更大的数据而言，这是意料之中的，因此在未来的实验中，我们会增加采样点的数量。

请注意，由于我们考虑的稀疏性远大于印章级别，印章和解步骤的计算复杂度与内存复杂度要高得多。正如引理 2 所示，在最大规模的情况下，所得印章集的大小（以及因此所需的矩阵求解）最多为 $7 \cdot 52^7 \approx 7 \times 10^{12}$，这使我们的计算资源面临内存极限。

10.4. 多变量可压缩。为了测试并非完全稀疏的傅里叶可压缩数据，我们使用了一系列张量化周期高斯函数。这里，我们仅介绍证明算法对傅里叶可压缩数据有效性所必需的细节；若要更完整地了解周期高斯函数的傅里叶性质，请参见例如 [32, 第 2 节1]。

这里，我们将周期高斯函数 $G_r : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ 定义为

$$G_r(x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{r} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(2\pi)^2 (x-m)}{2r^2}}$$

ˆ 其中，膨胀型参数 r 使我们能够控制 G_r的有效支撑集。实际应用中，我们将无穷和截断为 $m \in \{-10, \ldots, 10\}$，因为增加项不会使输出超出机器精度范围。请注意，这里的非标准乘法因子有助于控制函数在频率域而非空间域中的行为。给定多变量调制频率 $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$，我们将调制张量化周期高斯函数定义为

$$G_{r,\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^{d} e^{2\pi i k_i x_i} G_r(x_i).$$

最后，给定一组频率 $\mathcal{I} \subset \mathbb{Z}^d$、膨胀参数 $\mathbf{r} \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{I}}$和系数 $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{\mathcal{I}}$，我们可以定义高斯级数

$$G_{\mathbf{c},\mathbf{r}}^{\mathcal{I}}(\mathbf{x}) := \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{I}} c_{\mathbf{k}} G_{r_{\mathbf{k}},\mathbf{k}}(\mathbf{x}).$$

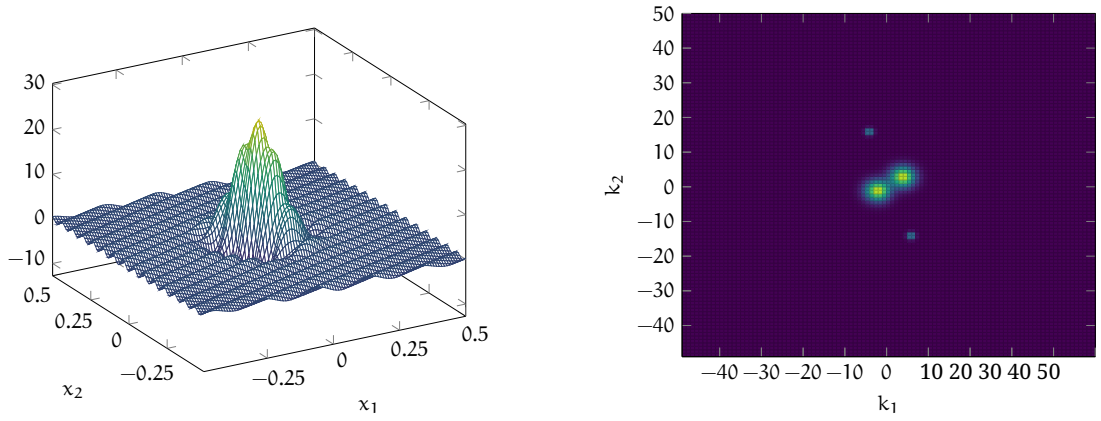
根据所选膨胀因子的强弱（即 $r_{\mathbf{k}} \gg 1$），该级数可以很好地近似频率位于 $\mathcal{I}$中的傅里叶级数。另一方面，较弱的膨胀会使傅里叶系数的幅值形成较分散的高斯函数，并以“频率” $\mathbf{k} \in \mathcal{I}$ 和 $-\mathbf{k}$为中心。图 5 展示了一个级数及其对应的傅里叶变换示例。

在我们的第一个实验中，我们固定 $d = 2$，并改变印章级别和稀疏度，再次求解 (16)。(16) 中的扩散系数替换为双项高斯级数 $a = c_0 + G_{\mathbf{c},\,\mathbf{r}}^{\mathcal{I}}$，其中

$$\mathcal{I} \sim \text{Unif}\left(\left([-24, 25]^2 \cap \mathbb{Z}^2\right)^2\right), \quad \mathbf{c} \sim \text{Unif}\left([-1, 1]^2\right), \quad \mathbf{r} = 1.1^2\mathbf{1}, \quad c_0 = 10\left\lceil \|\mathbf{c}\|_2 \right\rceil.$$

请注意，为了降低 a 的稀疏近似不满足椭圆性这一可能性，我们将常数因子设得比之前的示例更大。下图 6a 展示了后续测试所用的 a 的傅里叶变换。随后，在不断提高印章级别的同时，针对不同稀疏度求解扩散方程。为适应 ˆa 更宽的有效支撑集，SFT 的带宽参数设为 $K = 100$。蒙特卡罗代理误差通过 1 000 个样本计算得出，并展示于图 6b。

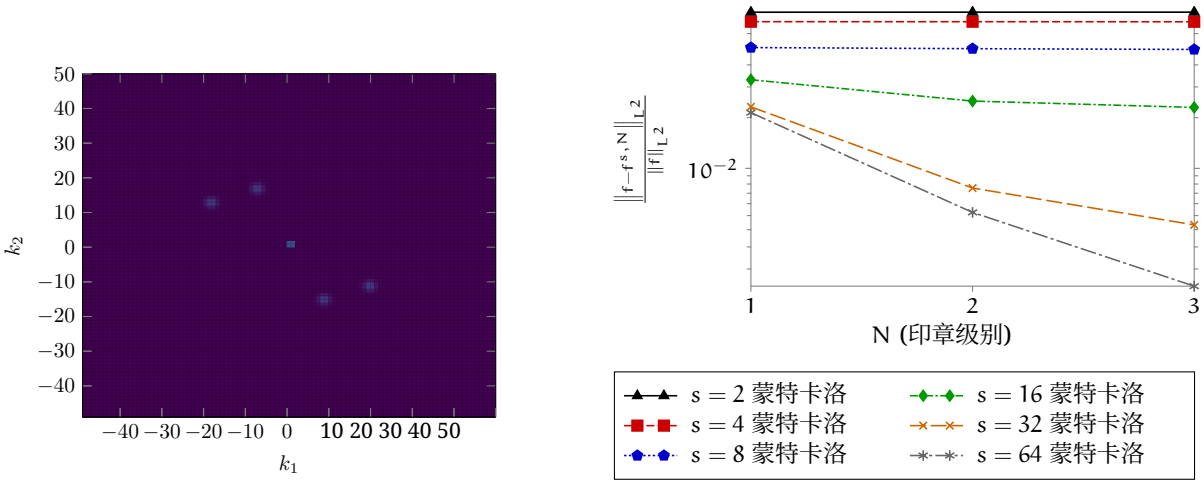
在这里，稀疏性超过 $s \geqslant 16$ 之前，印章级别不会影响收敛。这体现了误差界 (13) 中稀疏性与印章级别之间的权衡。在稀疏傅里叶变换能够从 ˆa 中捕获足够有用的信息之前，误差界中的 $\|a - a^s\|_{L^\infty}$ 占主导地位。最终，这一因素会降低到足够小，使印记项显现出来。



(a) $c_1 G_{r_1,\ k_1} + c_2 G_{r_2,k_2}$

(b) $c_1 \hat{G}_{r_1,k_1} + c_2 \hat{G}_{r_2,k_2}$

图 5. 一个高斯级数示例，其中 $c_1 = c_2 = 1$, $r_1 = 0.5$, $r_2 = 2$, $k_1 = (3,2)$ 和 $k_2 = (-5,15)$。第一项对应较宽的高斯形状，以及傅里叶变换中分布较广的部分。第二项则产生傅里叶变换中高度振荡的部分和孤立的尖峰。



(a) 图 6b 中示例所用的具体 $\hat{a}$ 。

(b) 使用高斯级数求解 (16) 时的代理误差，扩散方程系数的稀疏度级别为 $s = 2, 4, 8, 16, 32, 64$，盖印级别为 $N = 1, \ldots, 3$。

图 6. 使用高斯级数数据求解扩散方程。

我们再给出一个例子，其中稀疏性固定为 $s = 16$，同时增加维数和印章级别。同样，我们求解 (16)，将扩散系数替换为双项高斯级数 $a = c_0 + G^{\mathcal{J}}_{c,\ r}$，其中

$$\mathcal{J} \sim \mathrm{Unif}\left(\left([-249, 250]^d \cap \mathbb{Z}^d\right)^2\right), \quad \mathbf{c} \sim \mathrm{Unif}\left([-1,1]^2\right), \quad \mathbf{r} = 1.1^d \mathbf{1}, \quad c_0 = 10\left\lceil \|\mathbf{c}\|_2 \right\rceil,$$

并且 $\mathbf{c}$ 和 c_0 不会在不同测试用例之间重新绘制。SFT 的带宽设为 1 000，以再次考虑 a 的傅里叶变换可能扩大的情况。使用 1 000 点蒙特卡罗近似计算代理误差，结果见图 7。

这里观察到的行为与前一个测试案例大致相同。这是因为维数还会根据膨胀因子的选择 $\mathbf{r} = 1.1^d \mathbf{1}$ 进一步影响高斯傅里叶变换的稀疏性。在更高维数下进行的额外实验（此处未展示）中，这一因素会导致数值不稳定性，且近似误差急剧增大。我们还发现，$d = 2$ 和 $d = 4$

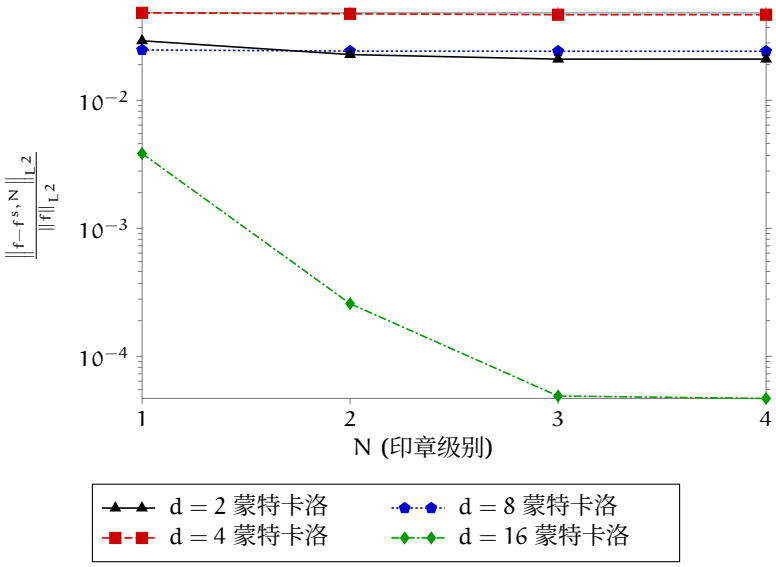


图 7. 使用高斯级数扩散系数求解 (16) 时的近似代理误差，其中 $d = 2$、4、8、16 和 $N = 1$、……、5。

示例的位置与预期相反（而且 $d = 2$ 案例甚至会因印章级别提高而略有受益）。这归因于频率位置的随机抽取会影响代理误差，同时在所有参数固定时，稀疏傅里叶变换算法在较低维数下表现更好。

10.5. 三维精确稀疏对流-扩散-反应方程。现在，我们将数值实验扩展到三维对流-扩散-反应方程的情形。有关偏微分方程的设置及必要的算法修改，请参见注 4。

数值计算中，我们使用以下精确稀疏数据：

$$
\begin{aligned}
a(\mathbf{x}) &= \hat{a}_0 + \sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{I}_a^{\text{sine}}} c_{a,\mathbf{k}}^{\text{sine}} \sin(2\pi\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) + \sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{I}_a^{\text{cosine}}} c_{a,\mathbf{k}}^{\text{cosine}} \cos(2\pi\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) \\
b_j(\mathbf{x}) &= \sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{I}_{b_j}^{\text{sine}}} c_{b_j,\mathbf{k}}^{\text{sine}} \sin(2\pi\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) + \sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{I}_{b_j}^{\text{cosine}}} c_{b_j,\mathbf{k}}^{\text{cosine}} \cos(2\pi\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) \text{ for all } j = 1,2,3 \\
c(\mathbf{x}) &= \hat{c}_0 + \sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{I}_c^{\text{sine}}} c_{c,\mathbf{k}}^{\text{sine}} \sin(2\pi\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) + \sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{I}_c^{\text{cosine}}} c_{c,\mathbf{k}}^{\text{cosine}} \cos(2\pi\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) \\
f(\mathbf{x}) &= \sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{I}_f^{\text{sine}}} c_{f,\mathbf{k}}^{\text{sine}} \sin(2\pi\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) + \sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{I}_f^{\text{cosine}}} c_{f,\mathbf{k}}^{\text{cosine}} \cos(2\pi\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}),
\end{aligned}
\tag{18}
$$

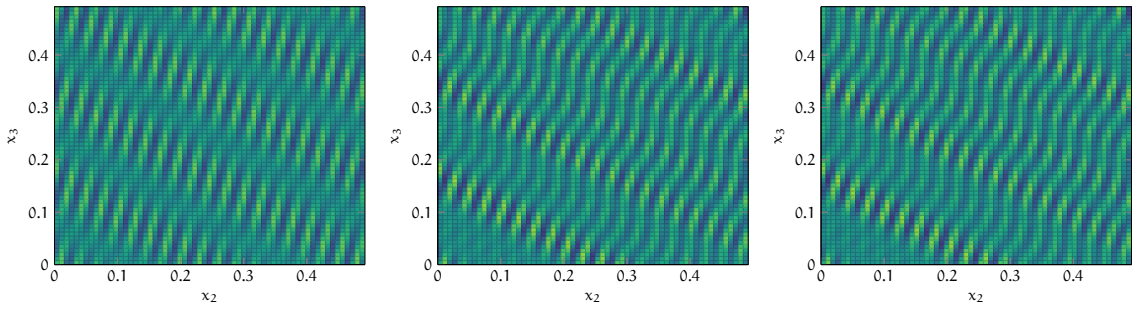
其中

$$
\begin{gathered}
\left|\mathcal{I}_a^{\text{sine}}\right| = \left|\mathcal{I}_a^{\text{cosine}}\right| = 2 \\
\left|\mathcal{I}_{b_j}^{\text{sine}}\right| = \left|\mathcal{I}_{b_j}^{\text{cosine}}\right| = \left|\mathcal{I}_c^{\text{sine}}\right| = \left|\mathcal{I}_c^{\text{cosine}}\right| = 5 \text{ for all } j = 1,2,3 \\
\left|\mathcal{I}_f^{\text{sine}}\right| = 2, \text{ and } \left|\mathcal{I}_f^{\text{cosine}}\right| = 3.
\end{gathered}
$$

微分算子总共由 45 项组成，强迫函数由 5 项组成。每个频率均从 $\text{Unif}([-49,50]^3 \cap \mathbb{Z}^3)$ 中随机抽取，a 和 f的系数均从 $\text{Unif}([-1,1])$中抽取。b 和 c 的系数则从 $\text{Unif}([0,1])$中抽取。为确保适定性，$\hat{a}_0 = 4\left|\sqrt{\|c_a^{\text{sine}}\|_2^2 + \|c_a^{\text{cosine}}\|_2^2}\right|$，且$\hat{c}_0 = 4\left|\sqrt{\|c_c^{\text{sine}}\|_2^2 + \|c_c^{\text{cosine}}\|_2^2}\right|$。SFT 的带宽设为$K = 100$，并考虑稀疏度级别 $s = 2$ 和 $s = 5$。由于印章尺寸较大，我们只考虑印章级别 $N = 1$、2。

s	N	$\|f - f^{s,N}\|_{L^2}/\|f\|_{L^2}$ 精确	蒙特卡洛
2	1	0.518	0.518
	2	0.518	0.518
5	1	0.054	0.054
	2	0.031	0.031

表 1. ADR 方程 (14) 的解近似误差。



(a) 穿过 $f^{2,1}$的切片。 (b) 穿过 $f^{10,2}$的切片。 (c) 穿过 f 的切片。

图 8。 $f^{10,2}$ 和 f 在 $x_1 = 63/128$ 平面上的样本。

所得真实误差和蒙特卡洛代理误差（在 1 000 个点上采样）见表 1。此外，图 8 展示了穿过 f 的一个截面片段，以及 $f^{2,1}$ 和 $f^{10,2}$；这些结果是将$u^{2,1}$ 和 $u^{10,2}$代入微分算子计算得到的。

我们注意到，$f^{10,2}$ 和 f 在定性上难以区分。然而，由于用于计算 $u^{2,1}$ 的稀疏度 $s = 2$低于式（18）中任一项的稀疏度，$f^{2,1}$ 失去了原始源项的一些特征。尽管它捕捉到了较大尺度上的一些真实行为（例如，向东北方向移动的振荡）以及更细尺度上的一些真实行为（例如，向东南方向移动的振荡），但产生“波浪状”效果的一些干扰模态被遗漏了。表 1 中报告的相对误差支持了这一点。还需注意的是，印章级别会影响 $s = 5$ 情况下的收敛，但不会影响 $s = 2$ 情况下的收敛。这是因为式（13）中的稀疏性相关误差会一直压过印记项，直到数据的 SFT 近似足够准确为止。

附录 A. 印章集基数界

我们先 证明以下关于印章集基数的组合上界 t.

引理 8. 假设 $0 \in$ 支撑集$(\hat{a})$, 支撑集$(\hat{a}) = -$支撑集$(\hat{a})$, |支撑集$(\hat{a})| = s$. 那么

$$|S^N[\hat{a}](\mathrm{supp}(\hat{f}))| \leqslant |\mathrm{supp}(\hat{f})| \sum_{n=0}^{N} \sum_{t=0}^{\min(n,(s-1)/2)} 2^t \binom{(s-1)/2}{t} \binom{n-1}{t-1}. \tag{19}$$

证明。 我们先将 S^N 分解为互不相交的部分

$$S^N = \bigsqcup_{n=0}^{N} \left(S^n \setminus \left(\bigcup_{i=0}^{n-1} S^i \right) \right)$$

并计算这些集合各自的基数（其中我们取 $S^{-1} = \emptyset$）。如果 $k \in S^n \setminus \left(\cup_{i=0}^{n-1} S^i\right)$，那么我们可以将 k 写成

$$k = k_f + \sum_{m=1}^{n} k_a^m \tag{20}$$

其中，对于所有 $m = 1, \dots, n$， $\mathbf{k}_f \in \operatorname{supp}(\hat{f})$，且 $\mathbf{k}_a^m \in \operatorname{supp}(\hat{a}) \setminus \{0\}$。此外，由于 $\mathbf{k}$ 不属于任何较早的印章集，因此这是能够实现这一点的最小 n。特别是，求和中的任意两个频率都不可能互为相反数而导致成对的项相消。

考虑到这个求和，将 $\operatorname{supp}(\hat{a}) \setminus \{0\}$ 任意拆分为 $A \sqcup -A$（即将所有互不为相反数的频率放入 A，并将它们的负数放入 $-A$）。将 (20) 中作为 $a\mathbf{k}_a^m$ 项出现的相同频率合并后，可将此和重写为

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_f + \sum_{\mathbf{k}_a \in A} s(\mathbf{k}, \mathbf{k}_a) m(\mathbf{k}, \mathbf{k}_a) \mathbf{k}_a, \tag{21}$$

其中，符号函数 $s(\mathbf{k}, \mathbf{k}_a)$ 定义为

$$s(\mathbf{k}, \mathbf{k}_a) := \begin{cases} 1 & \text{if } \mathbf{k}_a \text{ is a term in the summation (20)} \\ -1 & \text{if } -\mathbf{k}_a \text{ is a term in the summation (20)} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

重数函数 $m(\mathbf{k}, \mathbf{k}_a)$ 定义为 $\mathbf{k}_a$ 或 $-\mathbf{k}_a$ 作为 $a\mathbf{k}_a^m$ 项在 (20) 中出现的次数。令 $\mathbf{s}(\mathbf{k}) := (s(\mathbf{k}, \mathbf{k}_a))_{\mathbf{k}_a \in A}$ 和 $\mathbf{m}(\mathbf{k}) := (m(\mathbf{k}, \mathbf{k}_a))_{\mathbf{k}_a \in A}$，则可将任意 $\mathbf{k} \in \mathcal{S}^n \setminus \left(\cup_{i=0}^{n-1} \mathcal{S}^i\right)$ 与元组对应

$$(\mathbf{k}_f, \mathbf{s}(\mathbf{k}), \mathbf{m}(\mathbf{k})) \in \operatorname{supp}(\mathbf{f}) \times \{-1, 0, 1\}^A \times \{0, \dots, n\}^A.$$

对可能对应于 $\mathbf{k} \in \mathcal{S}^n \setminus \left(\cup_{i=0}^{n-1} \mathcal{S}^i\right)$ 某个取值的这些元组数量求上界，即可得到该集合基数的上界。

由于任意 $\mathbf{k}_f \in$支撑集$(\hat{f})$ 都可能得到一个有效的 $\mathbf{k}$ 值，我们将重点讨论符号向量与重数向量组成的配对。用 $T_n \subset \{-1, 0, 1\}^A \times \{0, \dots, n\}^A$ 定义可对应于一个 $\mathbf{k} \in \mathcal{S}^n \setminus \left(\cup_{i=0}^{n-1} \mathcal{S}^i\right)$的有效符号向量与重数向量配对的集合。特别地，对于 $(\mathbf{s}, \mathbf{m}) \in T_n$， $\|\mathbf{m}\|_1 = n$ 且支撑集$(\mathbf{s})$ = 支撑集$(\mathbf{m})$。因此，我们可以写成

$$T_n \subset \bigsqcup_{t=0}^{\min(n, |A|)} \left\{(\mathbf{s}, \mathbf{m}) \in \{-1, 0, 1\}^A \times \{0, \dots, n\}^A \mid \|\mathbf{m}\|_1 = n \text{ and } |\operatorname{supp}(\mathbf{s})| = |\operatorname{supp}(\mathbf{m})| = t\right\}.$$

于是，这个内部集合对应于将整数 n拆分为 $|A|$ 个部分的 t-分拆，其中每个非零项都赋予符号 -1 或 1。基数因此为 $2^t \binom{|A|}{t} \binom{n-1}{t-1}$：第一项因子来自符号的可能选项，第二项是从 $\mathbf{m}$ 中选取非零项的方式数，最后一项是填入 $\mathbf{m}$非零项的 n的 t-分拆数。注意到$|A| = \frac{s-1}{2}$，我们最终得到的基数估计为

$$\begin{aligned} \left|\mathcal{S}^N\right| &= \sum_{n=0}^{N} \left| \mathcal{S}^n \setminus \left(\bigcup_{i=0}^{n-1} \mathcal{S}^i \right) \right| \\ &\leqslant \sum_{n=0}^{N} \left|\operatorname{supp}(\hat{f})\right| |T_n| \\ &\leqslant \left|\operatorname{supp}(\hat{f})\right| \sum_{n=0}^{N} \sum_{t=0}^{\min(n, (s-1)/2)} 2^t \binom{(s-1)/2}{t} \binom{n-1}{t-1} \end{aligned}$$

如所需。 □

尽管这个上界比正文中给出的上界紧得多，但更难理解。因此，我们将其简化为引理 2 中给出的界，为方便起见，在此重述。

引理 2. 假设 $0 \in$ 支撑集$(\hat{a})$、支撑集$(\hat{a})$ = −支撑集$(\hat{a})$，以及 $\left|\text{支撑集}(\hat{f})\right| \leqslant |\text{支撑集}(\hat{a})| = s$ 则

$$\left|\mathcal{S}^N[\hat{a}](\operatorname{supp}(\hat{f}))\right| \leqslant 7 \max(s, 2N+1)^{\min(s, 2N+1)}.$$

证明。 令 $r = (s-1)/2$。我们考虑两种情况：

情况 1： $r \geqslant N$: 我们估计式 (19) 中最内层的求和。由于 $r \geqslant N \geqslant n$，$\min(n,(s-1)/2) = n$。将二项式系数以上界 r的幂进行估计，可得

$$\begin{aligned}\sum_{t=0}^{n} 2^t \binom{r}{t}\binom{n-1}{t-1} &\leqslant \sum_{t=0}^{n} 2^t (r^t)^2 \\ &\leqslant 2(2r^2)^n\end{aligned}$$

其中第二个估计是通过近似几何和得到的。同样，将下一个几何和界定为其最大项的两倍，可得

$$\left|\mathcal{S}^N\right| \leqslant \left|\operatorname{supp}(\hat{f})\right| \sum_{n=0}^{N} 2(2s^2)^n \leqslant (2r+1)4(2r^2)^N \leqslant 2(2r+1)^{2N+1} = s^{2N+1}.$$

情形 2： $r < N$: 对（19）中最内层求和的界定与情形 1 大致相同，但我们必须先将最外层求和拆分为前 $r+1$ 项和后 $N-r$ 项。考虑前面的项，可得

$$\sum_{n=0}^{r}\sum_{t=0}^{n} 2^t \binom{r}{t}\binom{n-1}{t-1} \leqslant 4(2r^2)^r$$

利用情形 1 中的论证。现在，我们界定

$$\begin{aligned}\sum_{n=r+1}^{N}\sum_{t=0}^{r} 2^t \binom{r}{t}\binom{n-1}{t-1} &\leqslant \sum_{n=r+1}^{N} 2(2(n-1)^2)^r \\ &\leqslant 2^{r+1}\int_{r}^{N} n^{2r}\,dn \\ &\leqslant \sqrt{2}\frac{(\sqrt{2}N)^{2r+1}}{2r+1}.\end{aligned}$$

因此，

$$\left|\mathcal{S}^N\right| \leqslant \left|\operatorname{supp}(\hat{f})\right| \left[4(2r^2)^r + \sqrt{2}\frac{(\sqrt{2}N)^{2r+1}}{2r+1}\right] \leqslant 5\sqrt{2}\left(\sqrt{2}N\right)^s \leqslant 7(2N+1)^s.$$

结合这两种情形，即得到所需的上界。

□

附录 B. SFT 恢复保证的证明

为方便起见，我们重述该定理。

定理 2([23], 推论 2)。 设 $\mathcal{I} \subset \mathbb{Z}^d$ 是我们关注的频率集合，其展开范围定义为 $K := \text{最大值}_{j\in\{1,\dots,d\}}(\text{最大值}_{k\in\mathcal{I}} k_j - \text{最小值}_{l\in\mathcal{I}} l_j)$（即包含 $\mathcal{I}$ 的最小超立方体的边长），且 $\Lambda(z,M)$ 是适用于 $\mathcal{I}$ 的重构型秩-*1* 格。

存在一种快速的随机化 *SFT*，在给定 $\Lambda(z,M)$、对 $g \in L^2$ 的采样访问以及失败概率 $\sigma \in (0,1]$ 后，将生成一个 $2s$-稀疏近似 $\hat{}g^s$，用于逼近 $\hat{}g$，并得到函数 $g^s := \sum_{k\in\text{支撑集}(\hat{g}^s)} \hat{}g^s_k e_k$，逼近 g，且满足

$$\|g-g^s\|_{L^2} \leqslant \|\hat{g}-\hat{g}^s\|_{\ell^2} \leqslant (25+3K)\left[\frac{\left\|\hat{g}|_{\mathcal{I}} - (\hat{g}|_{\mathcal{I}})^{\text{opt}}_s\right\|_1}{\sqrt{s}} + \sqrt{s}\|\hat{g}-\hat{g}|_{\mathcal{I}}\|_1\right]$$

其概率超过 $1-\sigma$。若 $g \in L^\infty$，则我们还可得到

$$\|g-g^s\|_{L^\infty} \leqslant \|\hat{g}-\hat{g}^s\|_{\ell^1} \leqslant (33+4K)\left[\left\|\hat{g}|_{\mathcal{I}} - (\hat{g}|_{\mathcal{I}})^{\text{opt}}_s\right\|_1 + \|\hat{g}-\hat{g}|_{\mathcal{I}}\|_1\right]$$

具有相同的概率估计。 g 的样本总数以及算法的计算复杂度可由以下式子给出上界

$$\mathcal{O}\left(ds\log^3(dKM)\log\left(\frac{dKM}{\sigma}\right)\right).$$

证明。 L^2 上界与原始结果基本相同。这里我们不考虑含噪测量，因此去掉了该结果中的 $\sqrt{s}e_\infty$ 项（不过，如有需要，也可以将其加回）。此外，我们将 $\|\hat{g} - \hat{g}|_J\|_2$ 的上界放宽为 $\sqrt{s}\|\hat{g} - \hat{g}|_J\|_1$，即在常数上加一。

L^∞ / ℓ^1 上界在原论文中并未给出，但可以使用相同的技巧证明。具体而言，在 [23, 引理 4] 中用 ℓ^1 范数替换 ℓ^2 范数，会将所有 ℓ^2 范数替换为 ℓ^1 范数，并将 $\sqrt{2s}$ 替换为 $2s$。这一小改动会贯穿 [23,定理 2] 中性质 3 的证明（同样，将 ℓ^2 范数替换为 ℓ^1 范数），从而得到单变量 ℓ^1 上界（用原论文的术语来说）

$$\|\hat{a} - \nu\|_1 \leqslant \left\|\hat{a} - \hat{a}_{2s}^{\mathrm{opt}}\right\|_1 + (16 + 6\sqrt{2})\left(\left\|\hat{a} - \hat{a}_s^{\mathrm{opt}}\right\|_1 + s(\|\hat{a} - \hat{a}\|_1 + \|\mu\|_\infty)\right) =: \eta_1.$$

修订 [23, 引理 1]的证明时，也可以采用类似的思路。将所有 ℓ^2 范数替换为ℓ^1 范数后，方程 (4)可用相同的方法推导；第一项的上界为向量的最大元素乘以元素个数，无需开平方。证明的其余部分无需改动，最终误差估计为

$$\|b - c\|_{\ell^2} \leqslant (\beta + \eta_\infty)\max(s - |S_\beta|, 0) + \eta_1 + \left\||c|_J - c|_{S_\beta}\right\|_1 + \|c - c|_J\|_1.$$

最后， [23, 推论 2] 的证明可沿用原有思路，只需代入这些修订后的上界。□

致谢

本研究部分得到美国国家科学基金会资助，项目编号为 DMS 2106472 和 1912706。本研究还部分使用了密歇根州立大学网络赋能研究所提供的计算资源与服务。感谢 Lutz Kämmerer 就随机秩一格点构造提供的宝贵讨论，也感谢 Ben Adcock 和 Simone Brugiapaglia 围绕压缩感知与高维偏微分方程所进行的启发性讨论。

参考文献

1. Sina Bittens、Ruochuan Zhang 和 Mark A Iwen，面向具有结构化傅里叶稀疏性的函数的确定性稀疏快速傅里叶变换，《计算数学进展》45 (2019)，第 2 期，519–561。2. John P. Boyd，切比雪夫与傅里叶谱方法，第 2 版，修订版，多佛出版社，美国纽约州米尼奥拉，2001。3. S Brugiapaglia、S Micheletti、F Nobile 和 S Perotto，用于多维对流–扩散–反应方程的小波–傅里叶 *CORSING* 技术，《IMA 数值分析杂志》(2020)，编号 draa036。4. S. Brugiapaglia、S. Micheletti 和 S. Perotto，压缩求解：一种基于压缩感知的椭圆型偏微分方程数值近似技术，《计算机与应用数学》70 (2015)，第 6 期，1306–1335（英文）。5. Simone Brugiapaglia，*COmpRessed SolvING*：基于压缩感知的偏微分方程稀疏逼近，博士论文，米兰理工大学，意大利米兰，2016年1月。6. ，受限等距性质下扩散方程的压缩谱配置方法，《不确定性量化：提升效率与技术：QUIET精选论文集》（Marta D'Elia、Max Gun-zburger 和 Gianluigi Rozza 编），计算科学与工程讲义，施普林格国际出版，查姆，2020，页码 15–40（英文）。7. Si mone Brugiapaglia、Sjoerd Dirksen、Hans Christian Jung 和 Holger Rauhut，有界黎斯系统中的稀疏恢复及其在偏微分方程数值方法中的应用，《应用与计算调和分析》53 (2021)，231–269（英文）。8. Simone Brugiapaglia、Fabio Nobile、Stefano Micheletti 和 Simona Perotto，对流–扩散–反应问题中 *COmpRessed SolvING* 的理论研究，《计算数学》87 (2018)，第 309 期，1–38（英文）。9. Hans-Joachim Bungartz 和 Michael Griebel，稀疏网格，《数值学报》13 (2004)，147–269（英文），出版商：剑桥大学出版社。10. Claudio Canuto、M. Yousuff Hussaini、Alfio Quarteroni 和 Thomas A. Zang，谱方法：单区域基础，科学计算，施普林格出版社，柏林海德堡，2006（英文）。11. Albert Cohen、Wolfgang Dahmen 和 Ronald DeVore，压缩感知与最佳 k 项逼近，《美国数学会杂志》22 (2009)，第 1 期，211–231（英文）。12. Dinh D˜ung、Vladimir Temlyakov 和 Tino Ullrich，双曲交叉逼近，数学高级课程——巴塞罗那 CRM，施普林格国际出版，查姆，2018（英文）。13. Ingrid Daubechies、Olof Runborg 和 Jing Zou，用于均匀化多尺度问题的稀疏谱方法，《多尺度建模与仿真》6 (2007)，第 3 期，711–740，出版商：工业与应用数学学会。14. Michael Döhler、Stefan Kunis 和 Daniel Potts，非等距双曲交叉快速傅里叶变换，《SIAM 数值分析杂志》47 (2010)，第 6 期，4415–4428，出版商：工业与应用数学学会。15. Lawrence C. Evans，偏微分方程，第二版，数学研究生教材，第 19 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2010。

16. Anna C Gilbert、Sudipto Guha、Piotr Indyk、Shanmugavelayutham Muthukrishnan 和 Martin Strauss，通过采样获得近乎最优的稀疏傅里叶表示，第三十四届 ACM 计算理论年度研讨会论文集，2002，页码 152–161。17. Anna C Gilbert、Piotr Indyk、Mark Iwen 和 Ludwig Schmidt，稀疏傅里叶变换的最新进展：面向大数据的压缩傅里叶变换，《IEEE信号处理杂志》31 (2014)，第 5 期，91–100。18. Gene H. Golub 和 Charles F. Van Loan，矩阵计算，第 4 版，约翰斯·霍普金斯数学科学研究丛书，约翰斯·霍普金斯大学出版社，美国马里兰州巴尔的摩，2013。19. V Gradinaru，稀疏网格上的傅里叶变换：代码设计与含时薛定谔方程，《计算》（维也纳版）80 (2007)，第 1 期，1–22，地点：维也纳，出版商：施普林格。20. Michael Griebel 和 Jan Hamaekers，薛定谔方程的稀疏网格，分子建模专题刊 41 (2007)，第 2 期，215–247，地点：莱叙利，出版商：EDP Sciences。21.，广义稀疏网格上的快速离散傅里叶变换，《稀疏网格及其应用——慕尼黑2012》（Jochen Garcke 和 Dirk Pflüger 编），第 97 卷，施普林格国际出版，查姆，2014，丛书：计算科学与工程讲义，页码 75–107（英文）。22. Craig Gross，谱稀疏性：多维函数的稀疏傅里叶变换与谱方法，博士论文，密歇根州立大学，美国密歇根州东兰辛，2023年5月（编写中）。23. Craig Gross、Mark Iwen、Lutz Kämmerer 和 Toni Volkmer，基于秩*1*格的稀疏傅里叶变换：快速、低内存地逼近多变量函数，《采样理论、信号处理与数据分析》20 (2021)，第 1 期，1。24. Craig Gross、Mark A Iwen、Lutz Kämmerer 和 Toni Volkmer，构造近乎最优规模的多个秩*1*格的确定性算法，《计算数学进展》47 (2021)，第 6 期，1–24。25. Haitham Hassanieh、Piotr Indyk、Dina Katabi 和 Eric Price，用于稀疏傅里叶变换的简单实用算法，第二十三届 ACM-SIAM 离散算法年度研讨会论文集，工业与应用数学学会，2012，页码 1183–1194。26. Mark A Iwen，组合次线性时间傅里叶算法，《计算数学基础》10 (2010)，第 3 期，303–338。27. Frances Kuo、Giovanni Migliorati、Fabio Nobile 和 Dirk Nuyens，利用秩*1*格进行函数积分、重构与逼近，《计算数学》90 (2021)，第 330 期，1861–1897（英文）。28. Friedrich Kupka，具有周期边界条件的偏微分方程数值解的稀疏网格谱方法，博士论文，维也纳大学，奥地利维也纳，1997年11月。29. Lutz Kämmerer、Stefan Kunis 和 Daniel Potts，双曲交叉三角多项式的插值格，《复杂性杂志》28 (2012)，第 1 期，76–92（英文）。30. Lutz Kämmerer、Daniel Potts 和 Toni Volkmer，基于秩*1*格采样的三角多项式多元周期函数逼近，《复杂性杂志》31 (2015)，第 4 期，543–576（英文）。31. Dong Li 和 Fred J. Hickernell，格点网格上的三角谱配置方法，《科学计算与偏微分方程近期进展》（香港，2002），《当代数学》，第 330 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2003，页码 121–132。MR 2011715。32. Sami Merhi、Ruochuan Zhang、Mark A. Iwen 和 Andrew Christlieb，新型全离散稀疏傅里叶变换：更快速、稳定且有保证的实现，《傅里叶分析与应用杂志》25 3，751 2019 784 ( )，第 – 期（英文）。33. Hans Munthe-Kaas 和 Tor Sørevik，格点网格上的多维伪谱方法，《应用数值数学》62 (2012)，第 3 期，155–165（英文）。34. Gerlind Plonka、Daniel Potts、Gabriele Steidl 和 Manfred Tasche，数值傅里叶分析，应用与数值调和分析，施普林格国际出版，查姆，2018（英文）。35. A.D. Rubio、A. Zalts 和 C.D. El Hasi，不同尺度下对流-反应-扩散方程的数值解，《环境建模与软件》23 (2008)，第 1 期，90–95（英文）。36. Jie Shen 和 Li-Lian Wang，基于双曲交叉的高维问题稀疏谱逼近，《SIAM 数值分析杂志》48 (2010)，第 3 期，1087–1109，出版商：工业与应用数学学会。37. Weiqi Wang 和 Simone Brugiapaglia，具有周期边界条件的高维扩散方程的压缩傅里叶配置方法，2022。

数学系，密歇根州立大学，红雪松路619号，东兰辛，密歇根州48824
电子邮件地址：grosscra@msu.edu

数学系，密歇根州立大学，红雪松路619号，东兰辛，密歇根州48824

计算数学、科学与工程系，密歇根州立大学，肖巷南段428号，东兰辛，密歇根州48824电子邮件地址：iwenmark@msu.edu