arXiv:2302.00756v2 [physics.optics] 8 Feb 2023

光学孤子的量子衰变

Stuart Ward[1,2], Rouzbeh Allahverdi[1], 和 Arash Mafi[1,2,*]
[1] *Department of Physics & Astronomy, University of New Mexico, Albuquerque, NM 87106, USA.*
[2] *Center for High Technology Materials, University of New Mexico, Albuquerque, NM 87106, USA.*
（日期：2023年2月10日）

众所周知，光学孤子是经典上稳定且对微扰具有鲁棒性的对象。在这项工作中，我们表明，由于量子力学效应，最初处于经典孤子相干态的光学孤子会向连续谱中释放光子，因而发生衰变。量子化孤子的标准表述采用以经典孤子为背景的量子非线性薛定谔方程线性化形式，在这一近似下，量子化孤子仍保持稳定。我们表明，若考虑高阶相互作用项，孤子便不再稳定，其光子数会随孤子周期数的增加而呈二次递减。我们计算了连续谱辐射的功率谱，发现其中存在一个窄带，该频带集中在初始孤子动量附近，其截止值与初始孤子宽度成反比。

I. 引言

当足够强的光在介质波导中传播时，克尔效应会改变折射率，从而使传播光场满足一个非线性方程 [1–4]。在慢变包络近似下，所得波动方程称为非线性薛定谔方程（NLSE），它具有称为孤子 [5, 6]的局域解。光学孤子在光子学中有许多应用；例如，电信领域利用孤子的无色散特性进行长距离数据传输 [7, 8], ，而集成光子学领域近期也将孤子微梳应用于各种场景 [9–11]。此外，光学系统还被用作黑洞类比模型，光学孤子曾被用于模拟霍金辐射[12, 13] ——这种现象通常被称为量子蒸发。此前，研究人员通过计算一个初始处于基态孤子态的孤子的近似功率谱，对光学量子孤子蒸发进行了研究 [14]。类似地，几何方法也曾用于计算光孤子的温度[15, 16]。我们还想特别指出，Malomed及其合作者在分析受微扰作用、处于经典和准经典量子化框架下衰变的光学与非光学孤子方面开展了大量工作 [17–24]。

本文利用经典孤子背景下的量子非线性薛定谔方程，研究量子力学孤子的蒸发。我们采用的方法类似于粒子物理标准模型中的技术：在该模型中，希格斯场围绕一个恒定的经典期望值展开；不同之处在于，经典孤子同时依赖于时间和空间 [25]。在线性阶上，孤子背景下得到的理论具有形式为四个束缚态以及连续态的精确解 [26–30]。这些束缚态刻画了修正的孤子参数。在这一线性化理论中，束缚态解和连续态解随时间平凡演化。为了观察更有趣的动力学，我们纳入将束缚态与连续态耦合起来的高阶相互作用项。高阶贡献对线性化理论构成微扰，并促使孤子向连续谱释放光子，从而导致孤子蒸发。本文将对这一过程进行严格处理。

本文其余部分安排如下。第二节回顾量子孤子的线性化理论。第三节对线性化理论进行微扰处理，以表明量子效应确实会使孤子的光子数减少。第四节计算生成的连续谱辐射功率谱随孤子周期数变化的情况，并计算辐射谱的带宽。附录中更全面地回顾了线性化非线性薛定谔方程，并列出相关的真空态期望值及其他辅助数学表达式。

II. 量子孤子的线性化理论

本节概述应用于量子化非线性薛定谔方程的线性化场近似的要点 [26, 27, 31, 32] ——更完整的回顾见附录A。量子化非线性薛定谔方程的线性化理论，使我们能够将孤子参数的微扰以及生成的连续谱辐射视为量子算符。更确切地说，孤子微扰算子表示四个孤子参数的变化，即光子数（$\hat{\Delta}n_0$）、相位（$\Delta\theta_0$）、位置（$\hat{\Delta}x_0$）和动量（$\hat{\Delta}p_0$）。伴随产生的连续谱辐射记作 $\hat{\Delta}v_c$。

描述以下传播过程的运动方程：

* mafi@unm.edu

在单模光波导中量子孤子场包络的传播（在孤子的共动参考系中）由下式给出，该方程称为量子化非线性薛定谔方程 [33–39]:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\hat{\phi}(x,t) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\hat{\phi}(x,t) - 2|c|\hat{\phi}^\dagger(x,t)\hat{\phi}(x,t)\hat{\phi}(x,t). \quad (1)$$

$\hat{}$ 量子场算符 $\phi(x,\ t)$，满足通常的对易关系 [40]:

$$[\hat{\phi}(x,t), \hat{\phi}^\dagger(y,t)] = \delta(x-y), \quad (2a)$$
$$[\hat{\phi}(x,t), \hat{\phi}(y,t)] = [\hat{\phi}^\dagger(x,t), \hat{\phi}^\dagger(y,t)] = 0. \quad (2b)$$

数算符定义为

$$\hat{N} = \int dx \hat{\phi}^\dagger(x,t)\hat{\phi}(x,t), \quad (3)$$

并且是上述理论的一个守恒量。

我们关注经典孤子背景周围量子涨落的演化。从微扰的意义上看，这些涨落的偶数阶矩期望值相较于经典孤子解的偶数阶矩很小。量子场算符可以按照围绕经典孤子解的展开重新定义如下:

$$\hat{\phi}(x,t) = \phi_{cl}(x,t) + \hat{v}(x,t)\exp\left[i\frac{n_0^2|c|^2}{4}t\right], \quad (4)$$

其中

$$\phi_{cl}(x,t) = \frac{n_0|c|^{1/2}}{2}\,\mathrm{sech}\left(\frac{n_0|c|}{2}(x - x_0 - 2p_0 t)\right) \times \exp\left[i\frac{n_0^2|c|^2}{4}t - ip_0^2 t + ip_0(x-x_0) + i\theta_0\right]. \quad (5)$$

常数 n_0、p_0、x_0 和 θ_0 分别表示初始光子数、动量、位置和相位。在本文余下部分，我们取 $p_0 = x_0 = \theta_0 = 0$。注意，式（4）中 $t = 0$ 处量子涨落场算符 $\hat{v}(x,\ t)$ 的真空态是经典孤子相干态。

由式 (2) 和式 (4)，量子涨落算符的对易关系可写为

$$[\hat{v}(x,t), \hat{v}^\dagger(y,t)] = \delta(x-y), \quad (6a)$$
$$[\hat{v}(x,t), \hat{v}(y,t)] = [\hat{v}^\dagger(x,t), \hat{v}^\dagger(y,t)] = 0. \quad (6b)$$

将式 (4) 代入式 (1)，并保留 $\hat{v}(x,\ t)$ 的一阶项，得到以下运动方程:

$$\frac{4}{n_0^2|c|^2}\frac{\partial}{\partial t}\hat{v}(x',t) = i\Big(\Big[\frac{\partial^2}{\partial x'^2} - 1\Big]\hat{v}(x',t) + 2\,\mathrm{sech}^2(x')\big[2\hat{v}(x',t) + \hat{v}^\dagger(x',t)\big]\Big), \quad (7)$$

其中，为了方便起见，我们采用了以下重标度

$$x' = \frac{n_0|c|x}{2}. \quad (8)$$

除非另有明确说明，从这里开始，我们省略 x' 中的撇号记号；必要时会计入适当的缩放因子。

我们采用双分量记号 [41] 表示量子涨落算符及其伴随算子，从而可将式 (7) 写成以下紧凑形式:

$$\frac{4}{n_0^2|c|^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{v} = \hat{L}\vec{v}, \quad (9)$$

使得

$$\vec{v} = \begin{bmatrix}\hat{v}(x,t)\\ \hat{v}^\dagger(x,t)\end{bmatrix} \quad (10)$$

and

$$\hat{L} = i\sigma_3\big[(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 1) + 2\,\mathrm{sech}^2(x)(2+\sigma_1)\big], \quad (11)$$

其中，σ_1 和 σ_3 是通常所说的泡利矩阵。

涨落算符可展开为以下形式:

$$\begin{aligned}&\vec{v}(x,t) = \\ &\frac{\partial\vec{\phi}_{cl}(x,t)}{\partial n_0}|_{t=0}\Delta\hat{n}_0(t) + \frac{\partial\vec{\phi}_{cl}(x,t)}{\partial\theta_0}|_{t=0}\Delta\hat{\theta}_0(t) \\ &+ \frac{\partial\vec{\phi}_{cl}(x,t)}{\partial p_0}|_{t=0}\Delta\hat{p}_0(t) + \frac{\partial\vec{\phi}_{cl}(x,t)}{\partial x_0}|_{t=0}\Delta\hat{x}_0(t) \\ &+ \Delta\vec{\hat{v}}_c(x,t).\end{aligned} \quad (12)$$

上述表达式中的前四个算符表示原始孤子解的微扰参数，而最后一项表示连续辐射场。上述展开的物理动机源于这样一种认识：经典孤子是稳定的物体，受到微扰后会恢复为孤子构型（此时光子数、相位、动量和位置均已改变），同时产生辐射并逸入连续谱。

经由式 (4) 中给出的场重定义，式 (3) 中给出的数算符现在可写为:

$$\hat{N} = n_0 + \Delta\hat{n}_0(t) + \frac{2}{n_0|c|}\int dx \hat{v}^\dagger(x,t)\hat{v}(x,t), \quad (13)$$

其中

$$\Delta\hat{n}_0(t) = \frac{1}{|c|^{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\mathrm{sech}\,(x)\big(\hat{v}(x,t) + \hat{v}^\dagger(x,t)\big), \quad (14)$$

and

$$\hat{v}^\dagger(x,t)\hat{v}(x,t) = \Delta\hat{v}_{sol}^\dagger\Delta\hat{v}_{sol} + \Delta\hat{v}_{sol}^\dagger\Delta\hat{v}_c + \Delta\hat{v}_c^\dagger\Delta\hat{v}_{sol} + \Delta\hat{v}_c^\dagger\Delta\hat{v}_c\,, \quad (15)$$

with

$$\Delta\hat{v}_{sol}(x,t) = \phi_{n_0}(x,0)\Delta\hat{n}_0(t) + \phi_{\theta_0}(x,0)\Delta\hat{\theta}_0(t) + \phi_{p_0}(x,0)\Delta\hat{p}_0(t) + \phi_{x_0}(x,0)\Delta\hat{x}_0(t), \tag{16}$$

以及在公式（18）中定义的 $\Delta\hat{v}_c$。

注意，式 (13) 分解为初始孤子光子数 (n_0)、孤子光子数的变化 ($\Delta\hat{n}_0(t)$)，以及涉及孤子参数变化 ($\Delta\hat{v}_{sol}$) 与连续谱辐射 ($\Delta\hat{v}_c$) 的四种不同耦合。

如附录 A 中式 (A9) 所示，在一阶近似下，光子数算符的变化独立于时间演化，其表达式为

$$\Delta\hat{n}_0(t) = \Delta\hat{n}_0(0). \tag{17}$$

类似地，式 (A9) 表明连续算符的演化为

$$\Delta\hat{v}_c(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{-ikx}\big[(k - i\tanh(x))^2\hat{a}(k,t) + \mathrm{sech}^2(x)\hat{b}(k,t)\big], \tag{18}$$

其中，$\hat{a}(k,\ t)$ 和 $b(k,\ t)$ 由式 (A11) 给出。

我们看到，在一阶近似下，连续谱像自由场一样演化——也就是说，所有时间依赖性都包含在相位中；这一点可由式 (A11) 看出。此外，我们看到，场的连续谱部分与四个孤子参数彼此独立地演化。为了观察连续谱与孤子参数之间的混合，进而研究更复杂的动力学，我们必须考察线性化过程中略去的高阶项。在下一节中，我们将通过计入二阶修正来进行分析。

III. 孤子衰变

本节采用迭代微扰方法，计算孤子光子数变化在 $\hat{v}$ [42] 的二阶项下的期望值和方差。光子数变化表示为孤子周期数的函数。我们证明光子数变化为负，因此孤子确实会衰变。

现在我们考虑推导公式（7）时忽略的二阶贡献。再次将公式（4）代入公式（1），但这次保留 $\hat{v}$ 的二阶项，并继续使用双分量记号，可得微扰算符的演化方程：

$$\frac{4}{n_0^2|c|^2}\frac{d}{dt}\vec{v} = \hat{L}\vec{v} + \widehat{NL}\vec{v}, \tag{19}$$

其中

$$\widehat{NL} = \frac{4i}{n_0|c|^{1/2}}\,\mathrm{sech}(x)\begin{bmatrix} 2\hat{v}^\dagger + \hat{v} & 0 \\ -2\hat{v}^\dagger & -\hat{v}^\dagger \end{bmatrix}. \tag{20}$$

利用附录 A 中给出的正交关系，光子数算符的变化随时间的演化现在表示为：

$$\frac{d}{dt}\Delta\hat{n}_0(t) = in_0|c|\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \mathrm{sech}^2(x)\big(\hat{v}^2 - \hat{v}^{\dagger\,2}\big). \tag{21}$$

我们通过迭代微扰法求解该方程。利用公式（A10）和公式（18），一阶线性解（$\hat{v}_{lin}(x,\ t)$）为：

$$\begin{aligned}\hat{v}_{lin}(x,t) = \big[&\big(\phi_{n_0}\Delta\hat{n}_0(0) + \phi_{\theta_0}\Delta\hat{\theta}_0(0) \\ &+ \phi_{p_0}\Delta\hat{p}_0(0) + \phi_{x_0}\Delta\hat{x}_0(0)\big) + \Delta\hat{v}_c(x,t) \\ &+ \big(\frac{n_0|c|^2}{2}\phi_{\theta_0}\Delta\hat{n}_0(0) + 2\phi_{x_0}\Delta\hat{p}_0(0)\big)t\big].\end{aligned} \tag{22}$$

将公式（22）代入公式（21）的右侧，并对两边取期望值，可得：

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\big\langle\Delta\hat{n}_0(t)\big\rangle = \\ &-2n_0\,|c|\,\mathrm{Im}\Big[\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \mathrm{sech}^2(x)\big\langle\hat{v}_{lin}^2(x,t)\big\rangle\Big].\end{aligned} \tag{23}$$

利用附录 B 中给出的期望值，并在 $t_m = (8\pi m)/(n_0^2|c|^2)$ 处求值，可得孤子相位经历 m 个周期后，孤子光子数变化量如下：

$$\big\langle\Delta\hat{n}_0(m)\big\rangle \approx -\frac{160\pi^2m^2}{9}. \tag{24}$$

需要指出的是，周期数 m 计数的是非线性相移模量 2π，其技术上的数值为孤子周期 [1] 的 8 倍。公式（23）的完整解是关于 m 的二次多项式，其中线性项的系数为负，量级为 10^{-1}。当 $m > 10^{-3}$ 时，可以忽略这一线性项——本文余下部分均假定如此。只要满足 $|\langle\Delta\hat{n}_0(t)\rangle| \ll n_0$.，这一微扰结果便有效。

上述计算表明，光子数变化量是一个递减的单调函数，因此孤子会衰变。在计算公式（23）时，需要注意的是，不含 $\Delta\hat{v}_c(x,\ t)$ 依赖关系的项是解的主要贡献，并且是公式（24）中系数的唯一来源；而涉及 $\Delta\hat{v}_c(x,\ t)$ 的积分贡献可以忽略，正是这些积分产生了被忽略的线性项。此外，公式（23）中涉及 $\Delta\hat{v}_c(x,\ t)$ 的积分所产生的数值系数，比不涉及 $\Delta\hat{v}_c(x,\ t)$ 的项小四个数量级。因此，当考虑满足 $m > 10^{-3}$ 的孤子周期时，可以忽略涉及 $\Delta\hat{v}_c(x,\ t)$ 的源项——正如上一段所提到的。

利用公式（21）和附录 A 中求得的相关期望值，可以证明方差具有如下形式：

$$\sigma^2_{\Delta\hat{n}(t_m)} = n_0 + 58\pi^2m^2 + 513\pi^4m^4. \tag{25}$$

孤子周期与沿光纤的传播距离z有关， [34]:

$$m = \frac{1}{4\pi\zeta_0^2}\frac{k''}{|k'|^2}z, \tag{26}$$

其中， k'' 为群速度色散（GVD）参数， k' 为群速度倒数，而 ζ_0 与初始孤子宽度有关。

例如，考虑一个 1ps 脉冲，其群速度色散参数为 $k'' = 20\text{ps}^2/\text{km}$，群速度倒数为 $k' = 3/(2c)$，其中 c 为真空光速。结合式（24）和式（26），孤子必须传播约 47 米才会损失第一个光子。

根据式（13）的粒子数守恒可知，式（24）中损失的部分必须由式（15）中的各项补足。下一节将计算式（15）中连续谱部分的增量。

IV. 连续谱辐射功率谱

这里，与上一节的做法相同，我们考察 $\hat{v}$ 的二阶贡献的影响，但此处的目的是计算生成的连续谱辐射如何随孤子周期增长。我们发现，与式（15）中的其他三项相比，连续谱贡献仅占式（24）所计算的光子总损失的一小部分。此外，可以证明，孤子的光子损失主要由式（15）中的第一项所解释，即:

$$\Delta\hat{n}_{sol} = \frac{2}{n_0|c|}\int dx\Big\langle \Delta\hat{v}^\dagger_{sol}\Delta\hat{v}_{sol}\Big\rangle. \tag{27}$$

根据上一节的讨论，这是意料之中的：与孤子参数算符的变化所产生的贡献相比，式（24）中连续谱部分的贡献很小。我们发现，连续谱的谱形成一个带宽为 $k \in (-n_0|c|,\ n_0|c|)$ 的带状区域，其峰值位于初始孤子动量附近。

根据公式（13），仅由连续谱辐射产生的贡献为:

$$\Delta\hat{n}_{cont} = \frac{2}{n_0|c|}\int dx\Big\langle \Delta\hat{v}^\dagger_c(x,t)\Delta\hat{v}_c(x,t)\Big\rangle. \tag{28}$$

远离孤子时，连续辐射场算符（公式（18））具有如下形式:

$$\Delta\hat{v}_c(x > x_{sw}, t) \approx \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ikx}(k-i)^2\hat{a}(k,t), \tag{29}$$

其中， x_{sw} 是初始孤子脉冲的特征宽度。

因此，我们可以通过计算以下内容来求出发射的连续谱辐射的功率谱:

$$P(k) \approx \frac{4\pi}{n_0|c|}(1+k^2)^2\big\langle \hat{a}^\dagger(k,t)\hat{a}(k,t)\big\rangle. \tag{30}$$

与公式（21）中的情况类似，纳入非线性项并利用附录 A 中给出的正交关系，可得算符 $\hat{a}(k,\ t)$ 的运动方程如下:

$$\frac{d\hat{a}}{dt} = -i\frac{n_0^2|c|^2}{4}(1+k^2)\hat{a} + \frac{n_0^2|c|^2}{8}\int dx \bar{\vec{f}}^\dagger_k\widehat{NL}\vec{v}, \tag{31}$$

with

$$\begin{aligned}&\int dx \bar{\vec{f}}^\dagger_k\widehat{NL}\vec{v} = \\ &\frac{4i}{n_0|c|^{1/2}\pi}\int dx\frac{\text{sech}(x)e^{ikx}}{(1+k^2)^2}\Big[(2\hat{v}^\dagger\hat{v}+\hat{v}^2) \\ &\times(k+i\tanh(x))^2 + \text{sech}^2(x)(2\hat{v}^\dagger\hat{v}+\hat{v}^{\dagger\,2})\Big].\end{aligned} \tag{32}$$

再次采用迭代微扰方法求解该方程，将线性问题的解（公式（22））代入公式（31）的右端。为简化计算，我们注意到上一节中的讨论指出，驱动源中涉及 $\Delta\hat{v}_c(x,\ t)$ 的项，与仅涉及公式（16）中的项相比，并不会产生显著贡献。这同样适用于公式（32）；因此，根据这一观察，我们从 $\hat{v}_{lin}(x,\ t)$ 中去掉 $\Delta\hat{v}_c(x,\ t)$，仅使用修正的孤子参数算符作为驱动源。

方程（32）可写为以下形式:

$$\int dx \bar{\vec{f}}^\dagger_k\widehat{NL}\vec{v} = \hat{f}_1(k) + t\hat{f}_2(k) + t^2\hat{f}_3(k), \tag{33}$$

其中， $f_1(k)$、 $f_2(k)$ 和 $f_3(k)$ 在附录 C 中由式（C1、C5、C6）给出。

根据式（33）的形式，方程（31）的解为:

$$\begin{aligned}\hat{a}(k,t) = &\frac{\exp\{-i\alpha t\}}{\alpha^3}\Big[\alpha^3\hat{a}(k,0) \\ &+ \frac{n_0^2|c|^2}{8}\Big(1-\exp\{i\alpha t\}\Big) \\ &\times\Big(i\alpha^2\hat{f}_1(k) - 2i\hat{f}_3(k) - \alpha\hat{f}_2(k)\Big) \\ &+ \frac{n_0^2|c|^2}{8}t\exp\{i\alpha t\}\times\Big(2\alpha\hat{f}_3(k) - i\alpha^2\hat{f}_2(k)\Big) \\ &- i\frac{n_0^2|c|^2}{8}\alpha^2t^2\exp\{i\alpha t\}\hat{f}_3(k)\Big],\end{aligned} \tag{34}$$

其中

$$\alpha = \frac{n_0^2|c|^2(1+k^2)}{4}. \tag{35}$$

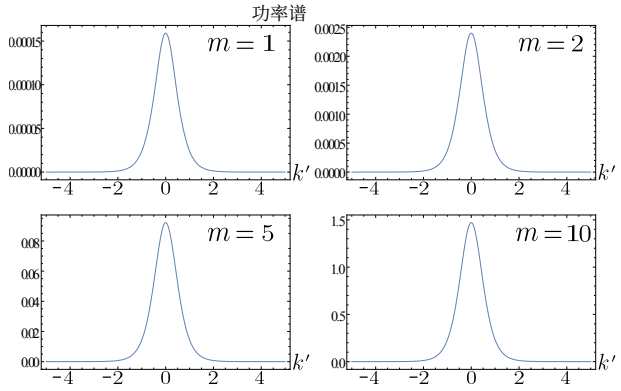

图 1. $m = 1,2,5,10$ 个孤子周期对应的连续谱辐射功率谱。该谱在原点处达到峰值，并局域于频带 $k' \in (-2,2)$ 附近。

利用公式（30），我们在图（1）中绘制了多个孤子周期下的功率谱。随着孤子传播，谱的振幅逐渐增大，而功率谱的宽度保持不变。谱在原点处达到峰值，并局域于频带 $k' \in (-2,\ 2)$ 附近。注意到公式（8）中定义的归一化单位，我们看到谱在该频带附近达到峰值：

$$k \in (-n_0|c|, n_0|c|). \tag{36}$$

量 $n_0|c|$ 出现在方程 (5) 中，并与孤子脉冲的初始宽度有关。

下面，我们在图 (2) 中通过对功率谱积分，绘出连续谱总贡献。可以看到，连续谱随 m^4. 增长。值得注意的是，

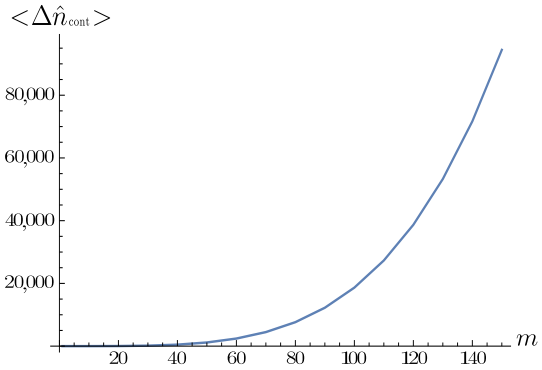

图 2. 初始孤子光子数取为 $n_0 = 10^8$ 时的连续谱总贡献。

功率谱按 m^4，的增长方式增长，而式 (24) 则按m^2增长。这并不矛盾——正如本节开头所指出的，我们忽略了式 (15) 中的$\Delta\hat{}v_{sol}$ 项。这些项提供了必要的反项，用于计入光子数的总变化；根据式 (13) 的守恒关系，它们理应如此。因此，仅作为连续谱辐射发现的光子数量微不足道。例如，对比图 (2) 与式 (24)，并考虑 100 个孤子周期，可以看出，连续谱仅占式 (24) 计算得出的光子总损失的 $\approx 1\%$。重申上文所述，强度的其余损失由式 (15) 中定义的 $\Delta\hat{}v_{sol}^{\dagger}\Delta\hat{}v_{sol}$、 $\Delta\hat{}v_c^{\dagger}\Delta\hat{}v_{sol}$ 和$\Delta\hat{}v_{sol}^{\dagger}\Delta\hat{}v_c$ 项计入。

V. 结论

通过对线性化的量子非线性薛定谔方程进行微扰分析，我们证明，最初处于经典孤子相干态的光孤子仅因量子力学效应而衰减。结果表明，经过 m 个孤子周期后，孤子光子数按比例减少至 m^2，而产生的连续谱辐射则按比例增长至 m^4。研究发现，连续谱辐射只对孤子强度的变化贡献了一小部分。连续谱辐射的带宽位于区间 $k \in (-n_0|c|, n_0|c|)$，其中心则位于初始孤子动量处。

这里我们简要讨论一下本文的分析与参考文献 [14] 中关于孤子蒸发的研究有何关联。我们的方法是围绕经典孤子背景展开量子孤子场，从而分析经典孤子的量子涨落。相比之下，参考文献 [14] 利用非线性薛定谔方程完整量子场论的精确解，构造出一个其期望值近似于经典孤子的场。其初态使得该场的期望值成为对基阶孤子解的平均，这些解的动量服从高斯分布，因此具有不同的相位速度和群速度；它们的色散也会促使孤子蒸发。

未来可利用上述微扰分析，进一步研究光孤子的量子蒸发如何改变其压缩行为；这可能对精密干涉测量具有实际意义 [43–46]。

VI. 致谢

本研究得到美国陆军研究办公室资助，资助编号为 W911NF- 19-1-0352。

附录 A：量子孤子线性化理论的更多细节

在此，我们对量子化非线性薛定谔方程 [41] 的线性化理论作更全面的概述。

式 (12) 中的向量表示如下：

$$\frac{\partial\vec{\phi}_{cl}(x,t)}{\partial n_0}|_{t=0}=\frac{1}{n_0}\big[1-x\tanh(x)\big]\phi_{cl}(x,0)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\quad\text{(A1a)}$$

$$\frac{\partial\vec{\phi}_{cl}(x,t)}{\partial p_0}|_{t=0}=\frac{2i}{n_0|c|}\,x\,\phi_{cl}(x,0)\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix},\quad\text{(A1b)}$$

$$\frac{\partial\vec{\phi}_{cl}(x,t)}{\partial x_0}|_{t=0}=\big[\frac{n_0|c|}{2}\tanh(x)\big]\phi_{cl}(x,0)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\quad\text{(A1c)}$$

$$\frac{\partial\vec{\phi}_{cl}(x,t)}{\partial\theta_0}|_{t=0}=i\phi_{cl}(x,0)\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}.\quad\text{(A1d)}$$

$\bar{\vec{}}$我们将上述向量方程简写为 ϕ_i，其中$i=n_0,\ p_0,\ x_0,\ \theta_0$.

算子的连续谱辐射部分可展开为：

$$\Delta\vec{v}_c(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}dk\big[\vec{f}_k\,\hat{a}(k,t)+\vec{g}_k\,\hat{b}(k,t)\big],\quad\text{(A2)}$$

其中

$$\vec{f}_k=e^{-ikx}\begin{bmatrix}(k-i\tanh(x))^2\\\operatorname{sech}^2(x)\end{bmatrix},\quad\text{(A3)}$$

and

$$\vec{g}_k=e^{-ikx}\begin{bmatrix}\operatorname{sech}^2(x)\\(k-i\tanh(x))^2\end{bmatrix}.\quad\text{(A4)}$$

式 (11) 中定义的线性算子作用于向量方程（式 (A1)、(A3)、(A4)）时，结果如下：

$$\vec{L}\vec{\phi}_{n_0}=\frac{2}{n_0}\vec{\phi}_{\theta_0},\quad\text{(A5a)}$$

$$\vec{L}\vec{\phi}_{p_0}=\frac{8}{n_0^2|c|^2}\vec{\phi}_{x_0},\quad\text{(A5b)}$$

$$\vec{L}\vec{\phi}_{x_0}=0,\quad\text{(A5c)}$$

$$\vec{L}\vec{\phi}_{\theta_0}=0,\quad\text{(A5d)}$$

$$\vec{L}\vec{f}_k=-i(1+k^2)\vec{f}_k,\quad\text{(A5e)}$$

$$\vec{L}\vec{g}_k=i(1+k^2)\vec{g}_k.\quad\text{(A5f)}$$

现在我们引入如下定义的内积：

$$\langle u|v\rangle=\frac{1}{2}\int dx u^{\dagger}v.\quad\text{(A6)}$$

根据这个内积的定义，可以找到一组函数，它们相对于方程（A1、A3、A4）满足有用的正交关系。这些函数通过方程（11）的伴随算子彼此关联。下面列出这些函数，并用上划线表示：

$$\bar{\vec{\phi}}_{n_0}=\frac{4}{n_0|c|}\phi_{cl}(x,0)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\quad\text{(A7a)}$$

$$\bar{\vec{\phi}}_{p_0}=\frac{2i}{n_0}\tanh(x)\phi_{cl}(x,0)\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix},\quad\text{(A7b)}$$

$$\bar{\vec{\phi}}_{x_0}=\frac{8}{n_0^3|c|^2}\,x\,\phi_{cl}(x,0)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\quad\text{(A7c)}$$

$$\bar{\vec{\phi}}_{\theta_0}=\frac{4i}{n_0^2|c|}(1-x\tanh(x))\phi_{cl}(x,0)\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix},\quad\text{(A7d)}$$

$$\bar{\vec{f}}_k=\frac{e^{-ikx}}{\pi(1+k^2)^2}\begin{bmatrix}(k-i\tanh(x))^2\\-\operatorname{sech}^2(x)\end{bmatrix},\quad\text{(A7e)}$$

$$\bar{\vec{g}}_k=\frac{e^{-ikx}}{\pi(1+k^2)^2}\begin{bmatrix}\operatorname{sech}^2(x)\\-(k-i\tanh(x))^2\end{bmatrix}.\quad\text{(A7f)}$$

利用上述定义的向量和内积，可以证明以下正交关系成立：

$$\Big\langle\bar{\vec{\phi}}_i\Big|\vec{\phi}_j\Big\rangle=\delta_{ij},\quad\text{(A8a)}$$

$$\Big\langle\bar{\vec{\phi}}_i\Big|\vec{f}_k\Big\rangle=\Big\langle\bar{\vec{\phi}}_i\Big|\vec{g}_k\Big\rangle=0,\quad\text{(A8b)}$$

$$\Big\langle\bar{\vec{f}}_k\Big|\vec{f}_{k'}\Big\rangle=\langle\bar{\vec{g}}_k|\vec{g}_{k'}\rangle=\delta(k-k').\quad\text{(A8c)}$$

现在我们可以求解扰动算符的时间演化。将式（12）代入式（9），并用适当的伴随算子方程乘等式两边，同时利用内积式（A6）中的正交关系，即可分离出式（12）中各算符的时间演化。

由此得到以下运动方程：

$$\frac{4}{n_0^2|c|^2}\frac{d}{dt}\Delta\hat{n}_0(t)=0,\quad\text{(A9a)}$$

$$\frac{4}{n_0^2|c|^2}\frac{d}{dt}\Delta\hat{\theta}_0(t)=\frac{2}{n_0}\Delta\hat{n}_0(0),\quad\text{(A9b)}$$

$$\frac{4}{n_0^2|c|^2}\frac{d}{dt}\Delta\hat{p}_0(t)=0,\quad\text{(A9c)}$$

$$\frac{4}{n_0^2|c|^2}\frac{d}{dt}\Delta\hat{x}_0(t)=\frac{8}{n_0^2|c|^2}\Delta\hat{p}_0(0),\quad\text{(A9d)}$$

$$\frac{4}{n_0^2|c|^2}\frac{d\hat{a}}{dt}=-i(1+k^2)\hat{a},\quad\text{(A9e)}$$

$$\frac{4}{n_0^2|c|^2}\frac{d\hat{b}}{dt}=i(1+k^2)\hat{b}.\quad\text{(A9f)}$$

因此，由上述方程可知，光子数的变化和动量的变化独立于时间演化。孤子位置中心和相位的演化遵循：

$$\Delta\hat{\theta}_0(t)=\Delta\hat{\theta}_0(0)+\frac{n_0|c|^2t}{2}\Delta\hat{n}_0(0),\quad\text{(A10a)}$$

$$\Delta\hat{x}_0(t)=\Delta\hat{x}_0(0)+2\Delta\hat{p}_0(0)t,\quad\text{(A10b)}$$

而连续谱算符按如下方式演化

$$\begin{aligned}\hat{a}(k,t) &= \hat{a}(k,0)\exp\left[-i\frac{n_0^2|c|^2}{4}(1+k^2)t\right],\\ \hat{b}(k,t) &= \hat{b}(k,0)\exp\left[i\frac{n_0^2|c|^2}{4}(1+k^2)t\right].\end{aligned} \tag{A11}$$

附录 B：期望值

在本附录中，我们列出计算公式（23）和公式（30）时所用的相关期望值。需要指出的是，在计算四个算符乘积的期望值时，该期望值可分解为所有二点期望值乘积排列的线性组合——因此，计算公式（24）、公式（25）和公式（30）时只需用到下列期望值。

根据第二节中介绍的量子孤子的线性化理论，可以使用公式 (A6) 中定义的内积，以及公式 (12) 中给出的展开式，分离出受扰孤子参数算符和连续算符。它们如下所示：

$$\begin{aligned}\Delta\hat{n}_0(0) &= \frac{1}{|c|^{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty}dx\,\mathrm{sech}\,(x)\\ &\times\left(\hat{v}(x,0)+\hat{v}^{\dagger}(x,0)\right),\end{aligned} \tag{B1}$$

$$\begin{aligned}\Delta\hat{\theta}_0(0) &= \frac{-i}{n_0|c|^{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty}dx(1-x\tanh(x))\\ &\mathrm{sech}\,(x)\times\left(\hat{v}(x,0)-\hat{v}^{\dagger}(x,0)\right),\end{aligned} \tag{B2}$$

$$\begin{aligned}\Delta\hat{p}_0(0) &= \frac{-i|c|^{1/2}}{2}\int_{-\infty}^{\infty}dx\tanh(x)\,\mathrm{sech}\,(x)\times\\ &\left(\hat{v}(x,0)-\hat{v}^{\dagger}(x,0)\right),\end{aligned} \tag{B3}$$

$$\begin{aligned}\Delta\hat{x}_0(0) &= \frac{2}{n_0^2|c|^{3/2}}\int_{-\infty}^{\infty}dx x\,\mathrm{sech}\,(x)\\ &\times\left(\hat{v}(x,0)+\hat{v}^{\dagger}(x,0)\right),\end{aligned} \tag{B4}$$

and

$$\begin{aligned}\hat{a}(k,0) &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}dx\frac{\exp\{ikx\}}{\pi(1+k^2)^2}\times\\ &\left[(k+i\tanh(x))^2\hat{v}(x,0)-\mathrm{sech}\,(x)^2\hat{v}^{\dagger}(x,0)\right],\end{aligned} \tag{B5}$$

$$\begin{aligned}\hat{b}(k,0) &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}dx\frac{\exp\{ikx\}}{\pi(1+k^2)^2}\times\\ &\left[\mathrm{sech}\,(x)^2\hat{v}(x,0)-(k+i\tanh(x))^2\hat{v}^{\dagger}(x,0)\right].\end{aligned} \tag{B6}$$

根据上述六个算符方程，并利用对易关系 $[\hat{v}(x,\ t),\ \hat{v}^{\dagger}(y,\ t)]=\frac{n_0|c|}{2}\delta(x-y)$（δ 函数前的缩放因子源于公式 (8) 中引入的重标度），可以计算真空态下的以下期望值线性化理论：

$$\left\langle\Delta\hat{n}_0^2(0)\right\rangle = n_0, \tag{B7}$$

$$\left\langle\Delta\hat{\theta}_0^2(0)\right\rangle = \frac{0.6075}{n_0}, \tag{B8}$$

$$\left\langle\Delta\hat{p}_0^2(0)\right\rangle = \frac{n_0|c|^2}{12}, \tag{B9}$$

$$\left\langle\Delta\hat{x}_0^2(0)\right\rangle = \frac{\pi^2}{3n_0^3|c|^2}, \tag{B10}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\left\langle\hat{a}(k,0)\hat{a}(k',0)\right\rangle}{n_0|c|} =\\ &\frac{(k'+k)\left(2-6k^2+6k\,(k'+k)-(k'+k)^2\right)}{48\pi\left(k^2+1\right)^2\left(k'^2+1\right)^2}\\ &\times\,\mathrm{csch}\left(\frac{1}{2}\pi\,(k'+k)\right),\end{aligned} \tag{B11}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\left\langle\hat{a}(k,0)\hat{b}(k',0)\right\rangle}{n_0|c|} =\\ &\delta\,(k+k')\left(\frac{-k^2k'^2}{4\pi(1+k^2)^2(1+k'^2)^2}\right.\\ &\left.+\,2\pi\big(1-k^2-k'^2-4kk'\big)\right)\\ &+\,\mathrm{csch}\left(\frac{1}{2}\pi\,(k'+k)\right)\\ &\times\Big(\frac{-kk'(k+k')}{4\pi(1+k^2)^2(1+k'^2)^{\ 2}}+\pi(k+k')(-\frac{10}{3}\\ &+\frac{1}{6}\,(13k^2+13k'^2+38kk'))\\ &+\Big),\end{aligned} \tag{B12}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\left\langle\hat{b}(k,0)\hat{a}(k',0)\right\rangle}{n_0|c|} =\\ &-\frac{(k'+k)\left((k'+k)^2+4\right)\mathrm{csch}\left(\frac{1}{2}\pi\,(k'+k)\right)}{48\pi\left(k^2+1\right)^2\left(k'^2+1\right)^2},\end{aligned} \tag{B13}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\left\langle\hat{b}(k,0)\hat{b}(k',0)\right\rangle}{n_0|c|} =\\ &-\frac{(k'+k)\left(6k^2-6k\,(k'+k)+(k'+k)^2-2\right)}{48\pi\left(k^2+1\right)^2\left(k'^2+1\right)^2}\\ &\times\,\mathrm{csch}\left(\frac{1}{2}\pi\,(k'+k)\right),\end{aligned} \tag{B14}$$

$$\left\langle\Delta\hat{n}_0(0)\Delta\hat{\theta}_0(0)\right\rangle = -\left\langle\Delta\hat{\theta}_0(0)\Delta\hat{n}_0(0)\right\rangle = \frac{i}{2}, \tag{B15}$$

$$\left\langle\Delta\hat{x}_0(0)\Delta\hat{p}_0(0)\right\rangle = -\left\langle\Delta\hat{p}_0(0)\Delta\hat{x}_0(0)\right\rangle = \frac{i}{2n_0}, \tag{B16}$$

$$\Big\langle \Delta\hat{n}_0(0)\hat{a}(k,0)\Big\rangle = \Big\langle \hat{a}(k,0)\Delta\hat{n}_0(0)\Big\rangle = -\Big\langle \Delta\hat{n}_0(0)\hat{b}(k,0)\Big\rangle = -\Big\langle \hat{b}(k,0)\Delta\hat{n}_0(0)\Big\rangle = -\frac{n_0|c|^{1/2}}{8}\Big[\frac{\mathrm{sech}\,(\frac{k\pi}{2})}{(1+k^2)}\Big], \tag{B17}$$

$$\Big\langle \Delta\hat{\theta}_0(0)\hat{a}(k,0)\Big\rangle = \Big\langle \hat{a}(k,0)\Delta\hat{\theta}_0(0)\Big\rangle = \Big\langle \Delta\hat{\theta}_0(0)\hat{b}(k,0)\Big\rangle = \Big\langle \hat{b}(k,0)\Delta\hat{\theta}_0(0)\Big\rangle = \frac{i|c|^{1/2}}{48}\Big[\frac{\mathrm{sech}\,(\frac{k\pi}{2})\Big(4+(k+k^3)\pi\tanh(\frac{k\pi}{2})\Big)}{(1+k^2)^2}\Big], \tag{B18}$$

$$\Big\langle \Delta\hat{n}_0(0)\hat{a}(k,0)\Big\rangle = \Big\langle \hat{a}(k,0)\Delta\hat{n}_0(0)\Big\rangle = -\Big\langle \Delta\hat{n}_0(0)\hat{b}(k,0)\Big\rangle = -\Big\langle \hat{b}(k,0)\Delta\hat{n}_0(0)\Big\rangle = -\frac{n_0|c|^{1/2}}{8}\Big[\frac{\mathrm{sech}\,(\frac{k\pi}{2})}{(1+k^2)}\Big], \tag{B19}$$

$$\Big\langle \Delta\hat{\theta}_0(0)\hat{a}(k,0)\Big\rangle = \Big\langle \hat{a}(k,0)\Delta\hat{\theta}_0(0)\Big\rangle = \Big\langle \Delta\hat{\theta}_0(0)\hat{b}(k,0)\Big\rangle = \Big\langle \hat{b}(k,0)\Delta\hat{\theta}_0(0)\Big\rangle = \frac{i|c|^{1/2}}{48}\Big[\frac{\mathrm{sech}\,(\frac{k\pi}{2})\Big(4+(k+k^3)\pi\tanh(\frac{k\pi}{2})\Big)}{(1+k^2)^2}\Big], \tag{B20}$$

$$\Big\langle \Delta\hat{p}_0(0)\hat{a}(k,0)\Big\rangle = \Big\langle \hat{a}(k,0)\Delta\hat{p}_0(0)\Big\rangle = \Big\langle \Delta\hat{p}_0(0)\hat{b}(k,0)\Big\rangle = \Big\langle \hat{b}(k,0)\Delta\hat{p}_0(0)\Big\rangle = -\frac{n_0|c|^{3/2}}{48}\Big(\frac{k\,\mathrm{sech}\,(\frac{k\pi}{2})}{(1+k^2)}\Big), \tag{B21}$$

$$\Big\langle \Delta\hat{x}_0(0)\hat{a}(k,0)\Big\rangle = \Big\langle \hat{a}(k,0)\Delta\hat{x}_0(0)\Big\rangle = -\Big\langle \Delta\hat{x}_0(0)\hat{b}(k,0)\Big\rangle = -\Big\langle \hat{b}(k,0)\Delta\hat{x}_0(0)\Big\rangle = \frac{-i}{8n_0|c|^{1/2}}\Big(\frac{\big(-4k+(1+k^2)\pi\tanh(\frac{k\pi}{2})\big)}{(1+k^2)^2}\Big) \times \mathrm{sech}\,(\frac{k\pi}{2}), \tag{B22}$$

and

$$\Big\langle \Delta\hat{n}_0(0)\Delta\hat{p}_0(0)\Big\rangle = \Big\langle \Delta\hat{p}_0(0)\Delta\hat{n}_0(0)\Big\rangle = 0, \tag{B23}$$

$$\Big\langle \Delta\hat{n}_0(0)\Delta\hat{x}_0(0)\Big\rangle = \Big\langle \Delta\hat{x}_0(0)\Delta\hat{n}_0(0)\Big\rangle = 0, \tag{B24}$$

$$\Big\langle \Delta\hat{p}_0(0)\Delta\hat{\theta}_0(0)\Big\rangle = \Big\langle \Delta\hat{\theta}_0(0)\Delta\hat{p}_0(0)\Big\rangle = 0, \tag{B25}$$

$$\Big\langle \Delta\hat{x}_0(0)\Delta\hat{\theta}_0(0)\Big\rangle = \Big\langle \Delta\hat{\theta}_0(0)\Delta\hat{x}_0(0)\Big\rangle = 0. \tag{B26}$$

附录 C：连续辐射功率谱的函数

这里我们明确给出式（33）中引入的函数 $f_1(k)$、$f_2(k)$ 和 $f_3(k)$。它们的表达式如下：

$$\hat{f}_1(k) = \hat{g}_1(k) + \hat{h}_1(k) + \hat{j}_1(k), \tag{C1}$$

其中

$$\begin{aligned}
&\hat{g}_1(k) = \\
&\frac{4i}{n_0|c|^{1/2}\pi}\Big[\frac{3|c|\Delta\hat{n}^2(0)}{1152\,(k^2+1)^2}\Big(\pi\,\mathrm{sech}^3\,(\frac{k\pi}{2})\\
&\Big(32-3k^2\pi^2-6k^4\pi^2-3k^6\pi^2\\
&+(32+k^2\pi^2+2k^4\pi^2+k^6\pi^2)\cosh(k\pi)\\
&+16k(1+k^2)\pi\sinh(k\pi)\Big)\Big)\\
&+\frac{n_0^2|c|\Delta\hat{\theta}^2(0)}{16}\pi\,\mathrm{sech}\,(\frac{k\pi}{2})-\\
&\frac{\Delta\hat{p}^2(0)}{96|c|(1+k^2)^2}\pi\,\mathrm{sech}^3\,(\frac{k\pi}{2})\Big(32-9\pi^2-18k^2\pi^2\\
&-9k^4\pi^2+(32+3(1+k^2)^2\pi^2)\cosh(k\pi)\\
&-16k(1+k^2)\pi\sinh(k\pi)\Big)\\
&-\frac{3n_0^4|c|^3\Delta\hat{x}^2(0)}{576}k^2\pi\,\mathrm{sech}\,(\frac{k\pi}{2})\\
&+\frac{n_0|c|\Delta\hat{n}(0)\Delta\hat{\theta}(0)}{480(1+k^2)^2}\times\\
&i\pi\,\mathrm{sech}\,(\frac{k\pi}{2})(24-40k^2+k(33+50k^2+17k^4)\\
&\times\pi\tanh(\frac{\pi k}{2}))\\
&-\frac{n_0|c|\Delta\hat{\theta}(0)\Delta\hat{n}(0)}{480(1+k^2)^2}i\pi\,\mathrm{sech}\,(\frac{k\pi}{2})(8(13+5k^2)\\
&+k(23+30k^2+7k^4)\pi\tanh(\frac{\pi k}{2}))+\\
&\frac{n_0^2|c|^2\{\Delta\hat{n}(0),\Delta\hat{x}(0)\}}{192(1+k^2)}i\pi k\,\mathrm{sech}\,(\frac{k\pi}{2})(8+\\
&k(1+k^2)\pi\tanh(\frac{k\pi}{2}))\Big],
\end{aligned} \tag{C2}$$

$$\hat{h}_1(k) = \frac{4i}{n_0|c|^{1/2}\pi}\Big[\frac{\Delta\hat{n}(0)\Delta\hat{p}(0)}{960(1+k^2)^2}\Big(\pi\,\mathrm{sech}^3\,(\frac{k\pi}{2})\Big(k(-160 + 3(33+50k^2+17k^4)\pi^2) - k(160+(33+50k^2+17k^4)\pi^2)\cosh(k\pi) + 16(-3+10k^2+5k^4)\pi\sinh(k\pi)\Big) - \frac{\Delta\hat{p}(0)\Delta\hat{n}(0)}{960(1+k^2)^2}\Big(\pi\,\mathrm{sech}^3\,(\frac{k\pi}{2})\Big(k(160+ 3(23+30k^2+7k^4)\pi^2) - k(-160+(23+30k^2+7k^4)\pi^2)\cosh(k\pi) + 8(-11+10k^2+5k^{40})\pi\sinh(k\pi)\Big) - \frac{n_0^3|c|^2\Delta\hat{x}(0)\Delta\hat{\theta}(0)}{480(1+k^2)}k(33+17k^2)\pi\,\mathrm{sech}\,(\frac{k\pi}{2})\Big] \tag{C3}$$

and

$$\hat{j}_1(k) = \frac{4i}{n_0|c|^{1/2}\pi}\Big[\frac{n_0^3|c|^2\Delta\hat{\theta}(0)\Delta\hat{x}(0)}{480(1+k^2)}k(23+7k^2) \times\pi\,\mathrm{sech}\,(\frac{k\pi}{2}) + \frac{n_0\Big\{\Delta\hat{\theta}(0),\Delta\hat{p}(0)\Big\}}{48(1+k^2)} \times i\pi\,\mathrm{sech}\,(\frac{k\pi}{2})(-8k+3(1+k^2)\pi\tanh(\frac{k\pi}{2})) - \frac{n_0^2|c|\Delta\hat{x}(0)\Delta\hat{p}(0)}{480(1+k^2)}i\pi\,\mathrm{sech}\,(\frac{k\pi}{2})(-8(-3+ 15k^2+10k^4)+k(33+50k^2+17k^4)\pi\tanh(\frac{k\pi}{2})) + \frac{n_0^2|c|\Delta\hat{p}(0)\Delta\hat{x}(0)}{480(1+k^2)}\times i\pi\,\mathrm{sech}\,(\frac{k\pi}{2})(-8(2+15k^2+5k^4) + k(23+30k^2+7k^4)\pi\tanh(\frac{k\pi}{2}))\Big]. \tag{C4}$$

$$\hat{f}_2(k) = \frac{4i}{n_0|c|^{1/2}\pi}\Big[\frac{n_0^2|c|^3\Delta\hat{n}^2(0)}{96(1+k^2)}i\pi\,\mathrm{sech}\,(\frac{k\pi}{2})(-8 + k(1+k^2)\pi\tanh(\frac{k\pi}{2})) - \frac{n_0^2|c|\Delta\hat{p}^2(0)}{24(1+k^2)}i\pi\,\mathrm{sech}\,(\frac{k\pi}{2})(4-4k^2 + k(1+k^2)\pi\tanh(\frac{k\pi}{2})) + \frac{n_0^2|c|^2\{\Delta\hat{n}(0),\Delta\hat{p}(0)\}}{1920(1+k^2)^2}\times i\pi\,\mathrm{sech}\,(\frac{k\pi}{2})(-512k+(135+161k^2+45k^4 + 19k^6)\pi\tanh(\frac{k\pi}{2})) + \frac{n_0^3|c|^3\Big\{\Delta\hat{n}(0),\Delta\hat{\theta}(0)\Big\}}{32}\pi\,\mathrm{sech}\,(\frac{k\pi}{2}) - \frac{n_0^3|c|^2\Delta\hat{p}(0)\Delta\hat{\theta}(0)}{240(1+k^2)}\times\pi\,\mathrm{sech}\,(\frac{k\pi}{2})k(33+17k^2) + \frac{n_0^3|c|^2\Delta\hat{\theta}(0)\Delta\hat{p}(0)}{240(1+k^2)}\pi\,\mathrm{sech}\,(\frac{k\pi}{2})k(23+7k^2) - \frac{n_0^4|c|^4\Delta\hat{x}(0)\Delta\hat{n}(0)}{960(1+k^2)}\pi\,\mathrm{sech}\,(\frac{k\pi}{2})k(33+17k^2) + \frac{n_0^4|c|^4\Delta\hat{n}(0)\Delta\hat{x}(0)}{960(1+k^2)}\times\pi\,\mathrm{sech}\,(\frac{k\pi}{2})k(23+7k^2) - \frac{n_0^4|c|^3\{\Delta\hat{p}(0),\Delta\hat{x}(0)\}}{96}\pi k^2\,\mathrm{sech}\,(\frac{k\pi}{2})\Big] \tag{C5}$$

and

$$\hat{f}_3(k) = \frac{4i}{n_0|c|^{1/2}\pi}\Big[\frac{n_0^4|c|^5\Delta\hat{n}^2(0)}{64}\pi\,\mathrm{sech}\,(\frac{k\pi}{2}) - \frac{n_0^4|c|^3\Delta\hat{p}^2(0)}{48}\pi k^2\,\mathrm{sech}\,(\frac{k\pi}{2}) - \frac{n_0^4|c|^4\Delta\hat{p}(0)\Delta\hat{n}(0)}{480(1+k^2)}\times k(33+17k^2)\pi\,\mathrm{sech}\,(\frac{k\pi}{2}) + \frac{n_0^4|c|^4\Delta\hat{n}(0)\Delta\hat{p}(0)}{480(1+k^2)}\times k(23+7k^2)\pi\,\mathrm{sech}\,(\frac{k\pi}{2})\Big]. \tag{C6}$$

[1] H. Haus, *Electromagnetic Noise and Quantum Optical Measurements* 2000 （施普林格，柏林，）。[2] R. Boyd, *Nonlinear Optics*（学术出版社，加利福尼亚，2003）。[3] G. P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics*（学术出版社，圣迭戈，2001）。[4] P. E. Powers 和 J. W. Haus, *Fundamentals of Nonlinear Optics* 2019 （CRC出版社，佛罗里达，）。[5] A. C. Newell, *Solitons in Mathematics and Physics*（工业与应用数学学会，美国，1985）。[6] P. G. Drazin、R. S. Johnson, *Solitons: An Introduction*（剑桥大学出版社，美国，1989）。[7] A. Hasegawa, *Solitons in optical communications*（克拉伦登出版社，美国，1995）。[8] M. Nakazawa，“电信网络中的孤子传输”，IEEE通信杂志 32，34–41（1994）。[9] B. Shen、L. Chang、J. Liu 等，“集成式交钥匙孤子微梳”，《自然》582，365–369（2020）。[10] M. A . Guidry、D .M . Lukin、K. Y . Yang 等，“孤子微梳的量子光学”，《自然·光子学》16，52 58 2022–（）。[11] Y. K. Chembo，“阈值以下和阈值以上克尔光学频率梳的量子动力学：自发四波混频、纠缠与光的压缩态”，《物理评论A》93，033820（2016）。[12] R. Aguero-Santacruz 和 D. Bermudez，“光学及其他领域中的霍金辐射”，《英国皇家学会哲学汇刊》378，（2020）。[13] M. F. Linder、R. Sch¨utzhold 和 W. G. Unruh，“色散介电介质中的霍金辐射推导”，《物理评论D》93，104010（2016）。[14] L. D. M. Villari、D. Faccio、F. Biancalana 和 C. Conti，“量子孤子蒸发”，《物理评论A》98，454–466 043859（2018）。[15] C. W. Robson、L. D. M. Villari 和 F. Biancalana，“可积二维孤子的普适量子霍金蒸发”，《新物理学杂志》21，053042（2019）。[16] L. D. M. Villari、G. Marcucci、M. C. Braidotti 和 C. Conti，“正弦-戈登孤子作为运动黑洞霍金辐射和量子孤子蒸发的模型”，《物理学通讯》2，055016（2018）。[17] B. A. Malomed，“外场中正弦-戈登孤子的辐射、WKB量子化与随机衰变”，《物理快报A》120，28–38（1987）。[18] B. A. Malomed，“微扰诱导的孤子辐射衰变”，《物理快报A》124，459–468（1987）。[19] B. A. Malomed，“外场中正弦-戈登孤子的辐射、准经典量子化与随机衰变”，《物理学D辑》27，113–157（1987）。[20] B. A. Malomed，“微扰诱导的包络孤子衰变”，《物理学D辑》38，66–74（1988）。[21] B. A. Malomed、D. F. Parker 和 N. F. Smyth，“周期非均匀非线性光纤中孤子的共振形状振荡与衰变”，《物理评论E》48，1418–1425（1993）。[22] D. J. Kaup 和 B. A. Malomed，“非线性光纤中拉曼驱动脉冲的尾部与衰变”，《美国光学学会杂志B辑》12，1656（1995）。[23] R. Grimshaw、J. He 和 B. A. Malomed，“周期调制非线性波导中的孤子衰变”，《物理学文摘》53，385–393（1996）。[24] Yu. S. Kivshar 和 B. A. Malomed，“近可积系统中孤子的动力学”，现代物理评论 61，763– 915（1989）。[25] P. Higgs，“对称性破缺与规范玻色子的质量”，物理评论快报 13，508–509（1964）。[26] H. A. Haus 和 Y. Lai，“孤子压缩的量子理论：一种线性化方法”，《美国光学学会杂志B辑》7，386–392（1990）。[27] Y. Lai，“孤子传播的量子理论：基于线性化近似的统一方法”，《美国光学学会杂志B辑》10，475–484（1993）。[28] H. A. Haus、W. S. Wong 和 F. I. Katri，“微扰引起的孤子连续谱产生”，《美国光学学会杂志B辑》14，304–313（1997）。[29] M Margalit 和 H. A. Haus，“在孤子压缩分析中考虑连续谱”，《美国光学学会杂志B辑》15，1387–1391（1998）。[30] H. A. Haus 和 C. X. Yu，“孤子压缩与连续谱”，《美国光学学会杂志B辑》17，618–628（2000）。[31] D. J. Kaup，“光纤中孤子的微扰理论”，《物理评论A》42，5689–5694（1990）。[32] J. P. Gordon，“非线性薛定谔方程孤子的色散微扰”，《美国光学学会杂志B辑》– （）。[33] B. Huttner 和 S. M. Barnett，“电介质中电磁场的量子化”，《物理评论A》46，4306–4322（1992）。[34] Y. Lai 和 H. A. Haus，“光纤中孤子的量子理论。I. 含时哈特里近似”，《物理评论A》40，844–853（1989）。[35] Y. Lai 和 H. A. Haus，“光纤中孤子的量子理论。II. 精确解”，《物理评论A》40，854–866（1989）。[36] E. M. Wright，“使用哈特里近似的光纤中孤子传播量子理论”，《物理评论A》43，3836–3844（1989）。[37] D. Yao，“光纤中光学孤子的量子涨落”，《物理评论A》52，4871–4881（1995）。[38] F. X. Kartner 和 L. Boivin，“基本孤子的量子噪声”，《物理评论A》53，454–466（1996）。[39] G. Dvali、C. Gomez、L. Gruending 和 T. Rug，“迈向孤子的量子理论”，核物理B辑 901，338–353（2015）。[40] A. B. Matsko 和 V. V. Kozlov，“非线性光纤中光学孤子的二次量子化模型：等时与等空间对易关系”，《物理评论A》62，033811-1–033811-12（2000）。[41] F. X. Kartner, *Ultra fast Optics*,（LibreTexts，加利福尼亚，2017）。[42] D. J. Kaup，“光纤中孤子的二阶微扰”，《物理评论A》44，4582–4590（1991）。[43] M. Rosenbluh 和 R. M. Shelby，“压缩光孤子”，物理评论快报 66，153（1991）。[44] P. Drummond、R. Shelby、S. Friberg 等，“光纤中的量子孤子”，《自然》365，307–313（1993）。[45] Y. Mazhirina 和 L. A. Melnikov，“色散可变光纤中通过孤子裂变产生的压缩与纠缠孤子”，激光物理快报 17 015204（2020）。[46] S. R. Friberg、S. Machida、M. J. Werner、A. Levanon 和 T. Mukai，“光孤子光子数压缩的观测”，物理评论快报 77，3775（1996）。