arXiv:2302.00757v2 [math.NT] 8 May 2024

由四项递推关系定义的类 Ap´ery 数列

Shaun Cooper

Dedicated to the memory of Richard Askey

Abstract. Ap´ery 数可由三次三项递推关系定义，也就是说，这是一种系数为指标的三次多项式的三项关系。

本文首先系统回顾满足二次或三次三项递推关系的 Ap´ery 数及其他相关数列，并展示它们之间的联系及其分类方法。这引出了由三次 k 项递推关系定义的数列。在这一框架下，对应于 $k = 2$ 的情形导向了 Ramanujan 关于椭圆函数替代基的理论，而对应于$k = 3$ 的情形则对应于 Ap´ery 数、Domb 数、Almkvist–Zudilin 数及其他研究充分的数列。

我们对 $k = 4$ 的情形进行了详细分析。由此得到的一些数列是新的。特别值得关注的是十个所谓的自启动数列：只需一个初始条件即可启动递推关系。另外，两个取值于 $\mathbb{Z}[i]$ 的数列以及另外两个取值于 $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ 的数列也颇具意义。我们研究了这十个自启动数列的同余性质和渐近展开，并提出了几个猜想。例如，我们猜想由以下递推关系定义的整数值数列

$$(n+1)^3T(n+1) = 2(2n+1)(5n^2+5n+2)T(n) - 8n(7n^2+1)T(n-1) + 22n(2n-1)(n-1)T(n-2)$$

以及初始条件 $T(0) = 1$ 定义的数列，对每个素数 p都满足卢卡斯同余。此外，我们猜想该数列还满足超同余

$$T(pn) \equiv T(n) \pmod{p^2} \quad \text{for all positive integers } n$$

若 $p = 2$ 为 59 或 5581，则对其他任何素数 $p < 10^4$ 均不成立。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：11F11，33-02；次要分类号：05A10，11A07，11B65，11F20，33C20。*Key words and phrases.* Almkvist–Zudilin 数，Ap´ery 数，渐近展开，Clausen 恒等式，对角系数，Domb 数，零亏格，卢卡斯同余，模形式，多变量泰勒展开，Ramanujan 的替代理论，自启动数列，零星数列，超同余，θ 函数恒等式。

状态：即将发表于《超几何函数及其推广》，《当代数学》，美国数学会。

1. 引言

Ap´ery 数可以由以下递推关系定义：

$$(n+1)^3A(n+1) = (2n+1)(17n^2+17n+5)A(n) - n^3A(n-1) \tag{1.1}$$

以及初始条件 $A(0) = 1$；单个初始条件便足以启动递推关系，如在 (1.1) 中取 $n = 0$ 即可看出。Ap´ery 数因 R. Ap´ery 曾引入并利用它们证明 $\zeta(3)$ 是无理数而闻名，例如参见 [**4**] 或 [**41**]。Ap´ery 数的另一种表达式是二项式和

$$A(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2. \tag{1.2}$$

这表明 $A(n)$ 始终是整数，这一点从递推关系 (1.1) 中并不显而易见。可以使用创造性望远镜求和方法证明，由二项式和 (1.2) 定义的$A(n)$ 满足递推关系 (1.1)。例如，使用计算机代数系统 Maple，并输入以下命令：

```
> with(sumtools):
> sumrecursion(binomial(n,k)^2*binomial(n+k,n)^2, k, A(n));
```

得到该递推关系

$$(n-1)^3 A(n-2) - (2n-1)\left(17n^2 - 17n + 5\right) A(n-1) + A(n) n^3$$

等于零。因此，我们由 (1.2) 推导出 (1.1)。反过来，除了搜索数据库之外，似乎没有算法可以从 (1.1) 确定 (1.2)。

F. Beukers 的一项卓越成果 [**7**] （另见 [**16**, 定理 6.38]）表明，Ap´éry 数可根据以下公式用模形式参数化：

$$\prod_{j=1}^{\infty} \frac{(1-q^{2j})^7(1-q^{3j})^7}{(1-q^j)^5(1-q^{6j})^5} = \sum_{n=0}^{\infty} A(n) \left(q \prod_{j=1}^{\infty} \frac{(1-q^j)^{12}(1-q^{6j})^{12}}{(1-q^{2j})^{12}(1-q^{3j})^{12}} \right)^n, \tag{1.3}$$

在 $q = 0$ 的某个邻域内成立。

我们简要提及 Ap´éry 数的另外四个性质。首先，I. Gessel [**23**] 已证明，Ap´éry 数 $A(n)$ 满足任意素数 p下的 Lucas 同余。这意味着，对于任意正整数 n 以及$T(n) = A(n)$，同余式

$$T(n) \equiv T(n_0)T(n_1)\cdots T(n_r) \pmod{p} \tag{1.4}$$

成立，其中 $n = n_0 + n_1p + \cdots + n_rp^r$ 是 n 在以 p 为底时的 p 进制展开式。

其次，Ap´ery 数具有一个渐近公式，该公式由 A. van der Poorten [**41**] 未加证明地陈述，并归功于 H. Cohen，具体如下：

$$A(n) \sim \frac{1}{2^{9/4}(\pi n)^{3/2}} (1+\sqrt{2})^{4n+2} \quad \text{as } n \to \infty. \tag{1.5}$$

证明可参见 M. Hirschhorn [**26**]的著作。

第三，许多作者都曾指出，例如， [**8**], [**12**], [**30**], [**38**] Ap´ery 数以多种方式作为多变量泰勒展开式的对角系数出现

例如，A. Straub [**38**] 证明了，如果

$$\frac{1}{(1-x_1-x_2)(1-x_3-x_4)-x_1x_2x_3x_4} = \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\sum_{n_3=0}^{\infty}\sum_{n_4=0}^{\infty} c(n_1,n_2,n_3,n_4)x_1^{n_1}x_2^{n_2}x_3^{n_3}x_4^{n_4}$$

then

$$c(n_1,n_2,n_3,n_4) = \sum_{k=0}^{\min\{n_1,n_3\}} \binom{n_1}{k}\binom{n_3}{k}\binom{n_1+n_2-k}{n_1}\binom{n_3+n_4-k}{n_3}.$$

对角系数为系数 $c(n,n,n,n)$，其表达式为

$$c(n,n,n,n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2\binom{2n-k}{n}^2.$$

将 k 替换为 $n-k$，得到

$$c(n,n,n,n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k}^2\binom{n+k}{n}^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2\binom{n+k}{n}^2.$$

因此，根据（1.2），对角项即为阿佩里数。O. Gorodetsky [**24**] 给出了进一步的结果。

最后，T. Sato [**36**] 指出，Ap´éry 数可用于生成 $1/\pi$,的级数，例如

$$\frac{1}{\pi} = \left(72\sqrt{15}-160\sqrt{3}\right)\sum_{n=0}^{\infty} A(n)\left(\frac{1}{2}-\frac{3\sqrt{5}}{20}+n\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{12n}.$$

H. H. Chan 和 H. Verrill [**11**]对这类公式进行了详细研究，并在 [**16**]中进一步进行了探讨。

鉴于 Ap´éry 数具有丰富多样的性质，人们对确定并分类具有类似性质的其他数列产生了兴趣。本文旨在展示一些满足类似于（1.1）的递推关系的新数列。一个显著的区别是，其中一些新数列并不取整数值，而是取 $\mathbb{Z}[i]$ 或 $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$中的值。文中建立了模参数化，并提出了卢卡斯型性质的猜想。这又带来了另一个显著区别，即其中一些猜想的同余关系是针对某些素数提出的。

本文的组织结构如下。第 2、3 和 4 节主要是综述性的，旨在总结已知的 Ap´éry 型数列及其分类和相互关系。因此，在第 2 节中，我们回顾 Zagier 的六个孤立数列及其模参数化。这些数列取整数值，并由具有二次系数的三项递推关系定义。由于参数化这些数列的模形式具有权一，我们也将 Zagier 的数列称为权一例子。

在第 3 节中，我们回顾 Ap´ery 数，以及其他由具有三次系数的三项递推关系定义的整数值数列。这引出了 Almkvist、van Straten 和 Zudilin 的一个定理：借助一个克劳森型恒等式，这些数列与 Zagier 的数列一一对应；该恒等式涉及权一数列生成函数的平方。

由于用于参数化的模形式具有权二，我们将这些数列称为权二例子。理解权一例子与权二例子之间联系的关键，在于以下非线性微分方程

$$\mathrm{D}^2 Z - \frac{1}{2Z}\left(\mathrm{D}Z\right)^2 = HZ, \tag{1.6}$$

其中 D 是微分算子

$$\mathrm{D} = BX\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}$$

并且 B^2 和 H 是关于 X的多项式。定理 3.1 将证明，可以利用 (1.6) 写出展开式中系数 $T(n)$ 满足的单根 $(k+1)$项递推关系

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} T(n)X^n, \tag{1.7}$$

其中 k 是 B^2 和 H的次数的最大值。第 10 节还将进一步说明，如何利用多项式 B^2 和 H 求出 $T(n)$ 的渐近展开中的参数。

第 4 节将详细分析 Ramanujan 的一种模参数化，并结合 (1.6) 和 θ函数的标准性质，在不使用椭圆函数通常的反演公式或 Clausen公式的情况下给出完整的直接证明。Ramanujan 的例子十分重要，因为它提供了进一步模参数化的原型，并由此导出更多由涉及两个或更多项的递推关系定义的 Ap´ery 型数列。表 3 和表 4 汇总了大量类似于 Ramanujan 原型的例子。我们将说明，表 3 中的六个例子如何通过 Chan、Tanigawa、Yang 和 Zudilin 的另一条克劳森型定理与 Zagier 的权一数列相关联。

表3中满足四项递推关系的数列将在第 5–9 节中研究。第 5、6、7 和 8 节分别分析 11、13、14 和 15 级的数列，其余数列则在第 9 节中研究。11、14、15 和 24 级的数列尤为特别，因为它们是自启动数列，也就是说，只需一个初始条件 $T(0) = 1$ 就足以启动递推关系。猜想自启动数列满足卢卡斯同余。另一方面，非自启动数列似乎不满足卢卡斯同余。

第 13 级数列在第 6 节中得到了详细分析。它既不是自启动数列，也不取整数值，但证明了乘以 4^n 后会变为取整数值。尚未发现关于该数列的任何同余猜想。

在第 7 节中，得到了对应于 14 级的四个数列，其中两个是新的。这些新数列的取值属于 $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ ，并猜想它们对某些素数 p 满足卢卡斯同余。

第 8 节研究了 15级数列。其中出现了四个数列，三个是新的，两个的取值属于 $\mathbb{Z}[i]$ ，并猜想它们对某些素数 p 满足卢卡斯同余。

第 9 节讨论了层级 20、21 和 24 的数列。

在第 10 节中，我们概述如何根据 (1.6) 中的多项式 B^2 和 H 推导 (1.7) 中系数 $T(n)$ 的渐近展开参数。

最后，在第 11 节中，我们考察由四项递推关系定义的自启动数列所满足的超同余。我们发现这类同余确实存在，但较弱，也就是说，它们模 p^2 成立，而不是模 p^3成立。此外，这类同余似乎相当罕见，且只涉及某些素数。

本文中，我们将使用如下记号

$$\eta_N = q^{N/24}\prod_{j=1}^{\infty}(1-q^{jN})$$

其中 N 是任意正整数，且 $|q|<1$。我们偶尔会使用基本超几何级数理论中表示乘积的紧凑记号，例如

$$(a;q)_\infty = \prod_{j=0}^{\infty}(1-aq^j) \quad \text{and} \quad (a,b;q)_\infty = (a;q)_\infty(b;q)_\infty$$

因此，例如，

$$\eta_N = q^{N/24}(q^N;q^N)_\infty.$$

2. Zagier 的零星序列：六个权一例子

Franel [**22**] 的一个早期结果是，由下式定义的数列

$$t_c(n) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^3$$

满足三项递推关系

$$(n+1)^2 t_c(n+1) = (7n^2+7n+2)t_c(n) + 8n^2 t_c(n-1), \quad n \geqslant 0. \tag{2.1}$$

注意，(2.1) 中的系数是次数为 2 的 n 多项式，而 Ap´ery 数在 (1.1) 中的递推关系 (1.1) 的系数次数为 3。另一个系数为次数 2 的多项式的例子，同样由 Ap´ery [**4**], 给出，是由下式定义的数列

$$t_5(n) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k}.$$

它满足三项递推关系

$$(n+1)^2 t_5(n+1) = (11n^2+11n+3)t_5(n) + n^2 t_5(n-1), \quad n \geqslant 0. \tag{2.2}$$

受关系 (2.1) 和 (2.2) 形式相似的启发，D. Zagier [**45**] wa s 于是考虑如下形式的数列

$$(n+1)^2 t(n+1) = (\alpha n^2+\alpha n+\beta)t(n) + \gamma n^2 t(n-1), \quad n \geqslant 0, \tag{2.3}$$

其中 α、 β 和 γ 均为整数。他通过计算机搜索其他满足三项递推关系的整数数列。搜索得到了六个数列，它们既不是终止数列（两个连续项为零）、多项式，也不是多项式与多项式系数的乘积；它们对应的参数值为 $(\alpha、\ \beta、\ \gamma) \in S$，其中

$$S = \{(11,3,1),(-17,-6,-72),(10,3,-9),(7,2,8),(12,4,-32),(-9,-3,-27)\}. \tag{2.4}$$

它们如今被称为 Zagier 的零星序列。令人惊叹的是，这六个数列都可以表示为二项式系数之和，并且可以用模形式加以参数化。详情汇总于表1中。模形式的层级

TABLE 1. Zagier 的零星序列、其模参数化以及 Sloane 的在线整数数列百科全书中的条目 [**37**]。

$$\text{The notation is } z=\sum_{n=0}^{\infty}t(n)x^n, \text{ where } t(0)=1 \text{ and}$$
$$(n+1)^2t(n+1)=(\alpha n^2+\alpha n+\beta)t(n)+\gamma\, n^2t(n-1) \text{ for } n\geqslant 0.$$

层级	(α,β,γ)	x	z	$t(n)$	OEIS
5	$(11,3,1)$	$q\,\frac{(q,\ q^4\ q^5)_\infty^5}{(q^2\ q^3\ q^5)_\infty^5};;$	$\frac{(q;\ q)_\infty^2}{(q,\ q^4;\ q^5)_\infty^5}$	$\sum_j\binom{n}{j}^2\binom{n+j}{j}$	A005258
6 (A)	$(-17,\ -6,\ -72)$	$\frac{\eta_2\eta_6^5}{\eta_1^5\eta_3}$	$\frac{\eta_1^6\eta_6}{\eta_2^3\eta_3^2}$	$\sum_{j,\ell}(-8)^{n-j}\binom{n}{j}\binom{j}{\ell}^3$	A093388
6 (B)	$(10,\ 3,\ -9)$	$\frac{\eta_1^4\eta_6^8}{\eta_2^8\eta_3^4}$	$\frac{\eta_2^6\eta_3}{\eta_1^3\eta_6^2}$	$\sum_j\binom{n}{j}^2\binom{2j}{j}$	A002893
6 (C)	$(7,\ 2,\ 8)$	$\frac{\eta_1^3\eta_6^9}{\eta_2^3\eta_3^9}$	$\frac{\eta_2\eta_3^6}{\eta_1^2\eta_6^3}$	$\sum_j\binom{n}{j}^3$	A000172
8	$(-12,-4,-32)$	$\frac{\eta_2^2\eta_8^4}{\eta_1^4\eta_4^2}$	$\frac{\eta_1^4}{\eta_2^2}$	$(-1)^n\sum_j\binom{n}{j}\binom{2j}{j}\binom{2n-2j}{n-j}$	A081085
9	$(-9,-3,-27)$	$\frac{\eta_9^3}{\eta_1^3}$	$\frac{\eta_1^3}{\eta_3}$	$\sum_j(-3)^{n-3j}\binom{n}{j}\binom{n-j}{j}\binom{n-2j}{j}$	A291898

列于第一栏，而该栏中的字母 (A)、(B) 和 (C) 除了区分层级 6 时出现的三个不同例子外，并无其他特殊含义。表1中的函数 z 是权一模形式，因此我们将这些数列称为权一例子。

表1中的每个函数 x 都满足求导公式

$$q\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}q}=z^2x(1-\alpha x-\gamma x^2) \tag{2.5}$$

并且每个 z 都满足关于 x的二阶线性微分方程，该方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x(1-\alpha x-\gamma x^2)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)=(\beta+\gamma x)z. \tag{2.6}$$

(2.5) 的证明针对表1中每一对函数 x 和 z 分别进行。例如，层级 5 的情形见 [**16**, 第 315] 页；三个层级 6 的情形使用 [**16**, (6.29) 和定理 6.22]；层级 8 的结果由 [**16**, 定理 8.23 和 (8.64)] 得出；层级 9 的情形则使用 [**16**, 定理 9.7 和 (9.16)] 。

微分方程 (2.6) 等价于递推关系 (2.3)。关于表1中每一对 x 和 z 都满足微分方程 (2.6) 的证明，参见 [**16**]中的定理 5.29、6.34、8.28、9.10。

3. 阿佩里数与六个权二例子

此前已指出，Ap´ery 数的递推关系 (1.1) 中的系数是三次多项式，而 Zagier 的例子所对应的递推关系 (2.3) 中的系数是二次多项式。因此，

Ap´ery 数并非 Zagier 某个例子的实例。然而，Zagier 的例子与另一组数列一一对应，而 Ap´ery 数也是这组数列中的一个例子，这是一个引人注目的事实。现在我们来描述这种对应关系。

假设

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} t(n)x^n \tag{3.1}$$

其中数列 $\{t(n)\}$ 满足三项递推关系

$$(n+1)^2 t(n+1) = (\alpha n^2 + \alpha n + \beta)t(n) + \gamma\, n^2 t(n-1) \tag{3.2}$$

且初始条件为 $t(0) = 1$。等价地，z 满足二阶线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x(1-\alpha x-\gamma x^2)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right) = (\beta+\gamma x)z$$

且初始条件为 $z(0) = 1$。现在进行变量替换

$$w = \frac{x}{1-\alpha x-\gamma x^2} \quad \text{and} \quad y = (1-\alpha x-\gamma x^2)z^2. \tag{3.3}$$

根据链式法则，新变量下的求导公式 (2.5) 变为

$$q\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}q} = y\, w\, A \tag{3.4}$$

其中

$$A = \sqrt{(1+\alpha w)^2 + 4\gamma w^2}. \tag{3.5}$$

此外，对微分方程 (2.6) 应用相同的变量替换（例如，详情参见 [**16**, 定理 5.41] ）可知，y 满足关于 w 的二阶非线性微分方程，其形式为

$$\mathrm{D}^2 y - \frac{1}{2y}\left(\mathrm{D}y\right)^2 = Hy \tag{3.6}$$

其中 D 是由下式定义的微分算子

$$\mathrm{D} = A\, w\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}$$

而 A 与 (3.5) 中相同，且 H 由下式给出

$$H = (2\beta-\alpha)w - \frac{(\alpha^2+4\gamma)w^2}{2}. \tag{3.7}$$

为求解 (3.6)，证明下面这个稍微一般化的结果会很有用。

THEOREM 3.1. 设 $Z = Z(X)$ 在 $X = 0$的邻域内解析，且满足 $Z(0) = Z_0 \neq 0$，并满足二阶非线性微分方程

$$\mathrm{D}^2 Z - \frac{1}{2Z}\left(\mathrm{D}Z\right)^2 = HZ, \tag{3.8}$$

其中，D 是微分算子

$$\mathrm{D} = BX\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X},$$

其中

$$B = \sqrt{G} \quad and \quad G = 1 + \sum_{j=1}^{k} g_j X^j, \tag{3.9}$$

and

$$H = \sum_{j=1}^{k} h_j X^j. \tag{3.10}$$

那么，幂级数展开式中的系数 $T(n)$

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} T(n) X^n$$

满足 $(k+1)$ 项递推关系

$$(n+1)^3 T(n+1) + (n+1) \sum_{j=1}^{k} g_j (n+1-\tfrac{j}{2})(n+1-j) T(n+1-j) \tag{3.11}$$

$$= 2 \sum_{j=1}^{k} h_j (n+1-\tfrac{j}{2}) T(n+1-j)$$

其中， g_j 和 h_j 分别是 (3.9) 和 (3.10) 中多项式 G 和 H 的系数。

Proof. 对 (3.8) 两边作用算子 D，得到

$$\begin{aligned} \mathrm{D}^3 Z &= \frac{1}{Z}(\mathrm{D}Z)(\mathrm{D}^2 Z) - \frac{1}{2Z^2}(\mathrm{D}Z)^3 + \mathrm{D}(HZ) \\ &= \frac{(\mathrm{D}Z)}{Z}\left\{ \mathrm{D}^2 Z - \frac{1}{2Z}(\mathrm{D}Z)^2 \right\} + H(\mathrm{D}Z) + (\mathrm{D}H)Z. \end{aligned}$$

微分方程 (3.8) 可用于化简大括号中的项，结果为

$$\mathrm{D}^3 Z = \frac{(\mathrm{D}Z)}{Z} HZ + H(\mathrm{D}Z) + (\mathrm{D}H)Z = 2H(\mathrm{D}Z) + (\mathrm{D}H)Z.$$

由此可得， Z 满足关于 X 的三阶线性微分方程，其表达式为

$$\mathrm{D}^3 Z - 2H(\mathrm{D}Z) - (\mathrm{D}H)Z = 0,$$

或者，等价地，两边除以 B后，

$$X \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}\left(D^2 Z\right) - 2HX \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}X} - X \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}X} Z = 0. \tag{3.12}$$

直接计算，并回顾式 (3.9) 中的 $G = B^2$，容易验证

$$X \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}\big(D^2 Z\big) = G\big(\Delta^3 Z\big) + \frac{3}{2}\big(\Delta G\big)\big(\Delta^2 Z\big) + \frac{1}{2}\big(\Delta^2 G\big)\big(\Delta Z\big)$$

其中

$$\Delta = X \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}.$$

因此，微分方程 (3.12) 的形式为

$$G\big(\Delta^3 Z\big) + \frac{3}{2}\big(\Delta G\big)\big(\Delta^2 Z\big) + \frac{1}{2}\big(\Delta^2 G\big)\big(\Delta Z\big) = 2H\big(\Delta Z\big) + \big(\Delta H\big)Z.$$

现在代入展开式

$$Z=\sum_{j=0}^{\infty}T(j)X^{j+r},\quad G=1+\sum_{j=1}^{k}g_jX^j\quad\text{and}\quad H=\sum_{j=1}^{k}h_jX^j$$

以获得

(3.13)

$$\begin{aligned}&\left(1+\sum_{j=1}^{k}g_jX^j\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}(j+r)^3T(j)X^{j+r}\right)\\&+\frac{3}{2}\left(\sum_{j=1}^{k}jg_jX^j\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}(j+r)^2T(j)X^{j+r}\right)+\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{k}j^2g_jX^j\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}(j+r)T(j)X^{j+r}\right)\\&\quad=2\left(\sum_{j=1}^{k}h_jX^j\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}(j+r)T(j)X^{j+r}\right)+\left(\sum_{j=1}^{k}jh_jX^j\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}T(j)X^{j+r}\right).\end{aligned}$$

提取 X^r 的系数，得到指标方程 $r^3=0$。由此可知，存在唯一一个在 $X=0$ 处解析且满足初始条件 $Z(0)=Z_0$ 的解。最后，在 (3.13) 中令 $r=0$，并提取 x^{n+1} 的系数，得到

$$\begin{aligned}&(n+1)^3T(n+1)+\sum_{j=1}^{k}g_j(n+1-j)^3T(n+1-j)\\&+\frac{3}{2}\sum_{j=1}^{k}jg_j(n+1-j)^2T(n+1-j)+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}j^2g_j(n+1-j)T(n+1-j)\\&=2\sum_{j=1}^{k}h_j(n+1-j)T(n+1-j)+\sum_{j=1}^{k}jh_jT(n+1-j),\end{aligned}$$

其中，若 $j>n+1$，则定义 $T(n+1-j)$ 为零。化简后得到 (3.11)。□

现在我们可以回过头来，利用 (3.5) 和 (3.7) 给出的数据求解 (3.6)。将定理 3.1 应用于

$$Z=y,\quad X=w,\quad B^2=1+2\alpha w+(\alpha^2+4\gamma)w^2\text{和}\quad H=(2\beta-\alpha)w-\frac{(\alpha^2+4\gamma)w^2}{2}$$

可得

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}s(n)w^n,\tag{3.14}$$

其中系数 $s(n)$ 满足递推关系

$$\begin{aligned}&(n+1)^3s(n+1)+2\alpha(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)ns(n)+(\alpha^2+4\gamma)(n+1)(n)(n-1)s(n-1)\\&\qquad=2(2\beta-\alpha)\left(n+\frac{1}{2}\right)s(n)-(\alpha^2+4\gamma)ns(n-1),\end{aligned}$$

这可简化为

$$(n+1)^3s(n+1)=-(2n+1)(\alpha n^2+\alpha n+\alpha-2\beta)s(n)-(\alpha^2+4\gamma)n^3s(n-1).\tag{3.15}$$

结合 (3.1)、(3.2)、(3.3)、(3.14) 和 (3.15)，我们推导出 G. Almkvist、D. van Straten 和 W. Zudilin 的以下定理（参见 [1] or [16, 第 342] 页）：

THEOREM 3.2. 设 $\{t(n)\}$ 为满足以下初始条件的数列

$$t(0) = 1$$

以及二次三项递推关系

$$(n+1)^2 t(n+1) = (\alpha n^2 + \alpha n + \beta)t(n) + \gamma n^2 t(n-1)$$

对于 $n \geqslant 0$。那么在 $x = 0$ 的一个邻域内，以下恒等式成立：

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} t(n) x^{n+\frac{1}{2}}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} s(n) \left(\frac{x}{1-\alpha x - \gamma x^2}\right)^{n+1}, \tag{3.16}$$

其中 $\{s(n)\}$ 满足三次三项关系

$$(n+1)^3 s(n+1) = -(2n+1)(\alpha n^2 + \alpha n + \alpha - 2\beta)s(n) - (\alpha^2 + 4\gamma)n^3 s(n-1), \tag{3.17}$$

且初始条件为 $s(0) = 1$。

特别地，在递推关系 (3.17) 中取 $(\alpha、\ \beta、\ \gamma) = (-17、\ -6、\ -72)$，即可得到 Apéry 数的递推关系 (1.1)。由于初始条件相同，我们有 $s(n) = A(n)$。因此，这个定理实例给出

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} t(n) x^{n+\frac{1}{2}}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} s(n) \left(\frac{x}{(1+8x)(1+9x)}\right)^{n+1}$$

其中 $s(n)$ 是阿佩里数， $t(n)$ 是表1中标记为 6(A) 的数列。

与参数值 $(\alpha、\ \beta、\ \gamma) \in S$对应的六个数列 $\{s(n)\}$（其中 S 由 (2.4) 给出）均为整数值，并且可表示为含有二项式系数的若干项之和，具体内容汇总于表 2。表 2 还给出了相应模形式 w 和 y 的显式公式。同样，证明需逐个情形进行，例如可参见 [**16**]的第 5、6、8 和 9 章。

表 1 中的函数 z 是权一模形式，而表 2 中的函数 y 是权二模形式。因此，我们将数列 $t(n)$ 和 $s(n)$ 分别称为权一例子和权二例子。

4. 雅可比参数化、Ramanujan 的替代理论及其他层级

或许最古老的模参数化出自 Jacobi，并涉及第一类完全椭圆积分。Ramanujan 将 Jacobi 结果的平方取为 [**34**, (25)]

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 (2kk')^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^3 (2kk')^4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}^3 \left(\frac{kk'}{4}\right)^{2n}. \tag{4.1}$$

随后，他利用了 Jacobi 最初提出的 q-展开式，涉及 K、 k 和 k'。要完整证明 (4.1) 的模参数化（例如，参见 [**16**, 第 4.30], 定理），通常篇幅很长，且需要先确立 Jacobi 的结果，再对 ${}_2F_1$ 超几何函数的平方应用 Clausen 恒等式。鉴于 (4.1) 在 Ramanujan 的工作中具有根本重要性，尤其是在推导 $1/\pi$, 的级数时，给出一个直接证明既有启发性又很有用。我们将给出这样一个证明，它只用到 θ函数的一些众所周知的性质，这些性质可以在

TABLE 2. 类似 Ap´éry 的数列、它们的模参数化，以及 Sloane 的在线整数数列百科全书 [**37**]中的条目。Ap´éry 数对应于标记为 6(A) 的数列。

∞记号为 $y = \sum_{n=0} s(n)\, w^n$，其中 $s(0) = 1$ 和 $(n+1)^3 s(n+1) = -(2n+1)(\alpha n^2 + \alpha n + \alpha - 2\beta)s(n) - (\alpha^2 + 4\gamma)n^3 s(n-1)$。

层级	(α, β, γ)	w	y	$s(n)$	OEIS
5	$(11, 3, 1)$	$\frac{\eta_5^6}{\eta_1^6}$	$\frac{\eta_1^5}{\eta_5}$	$\sum_j (-1)^{j+n}\binom{n}{j}^3\binom{4n-5j}{3n}$	A229111
6（A）	$(-17, -6, -72)$	$\frac{\eta_1^{12}\eta_6^{12}}{\eta_2^{12}\eta_3^{12}}$	$\frac{\eta_2^7\eta_3^7}{\eta_1^5\eta_6^5}$	$\sum_j \binom{n}{j}^2\binom{n+j}{j}^2$	A005259
6（B）	$(10, 3, -9)$	$\frac{\eta_2^6\eta_6^6}{\eta_1^6\eta_3^6}$	$\frac{\eta_1^4\eta_3^4}{\eta_2^2\eta_6^2}$	$(-1)^n\sum_j \binom{n}{j}^2\binom{2j}{j}\binom{2n-2j}{n-j}$	A002895
6（C）	$(7, 2, 8)$	$\frac{\eta_3^4\eta_6^4}{\eta_1^4\eta_2^4}$	$\frac{\eta_1^3\eta_2^3}{\eta_3\eta_6}$	$\sum_j (-3)^{n-3j}\binom{n+j}{j}\binom{n}{j}\binom{n-j}{j}\binom{n-2j}{j}$	A125143
8	$(12, 4, -32)$	$\frac{\eta_1^8\eta_8^8}{\eta_2^8\eta_4^8}$	$\frac{\eta_2^6\eta_4^6}{\eta_1^4\eta_8^4}$	$\sum_j \binom{n}{j}^2\binom{2j}{n}^2$	A290575
9	$(-9, -3, -27)$	$\frac{\eta_1^6\eta_9^6}{\eta_3^{12}}$	$\frac{\eta_3^{10}}{\eta_1^3\eta_9^3}$	$\sum_{j,\ell} \binom{n}{j}^2\binom{n}{\ell}\binom{j}{\ell}\binom{j+\ell}{n}$	A290576

见 [**5**, 第 16 章以及 17] 或 [**16**, 第 3] 章。我们将用 Z 表示 $(2K/\pi)^2$，用 X 表示$(kk'/4)^2$。以下是 Ramanujan 结果 (4.1) 的详细表述。

THEOREM 4.1. 令 w、X 和 Z 定义如下:

$$w = \frac{\eta_4^8}{\eta_1^8}, \quad \frac{1}{X} = \frac{1}{w} + 32 + 256w \quad and \quad Z = \frac{\eta_1^2\eta_4^2}{X^{5/12}}.$$

则:

(a) X 的另一个公式为

$$X = \frac{\eta_1^{24}\eta_4^{24}}{\eta_2^{48}}.$$

因此,

$$Z = \frac{\eta_2^{20}}{\eta_1^8\eta_4^8} \quad and \quad Z^2 X = \frac{\eta_1^8\eta_4^8}{\eta_2^8}.$$

(b) 求导公式

$$q\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}q} = Z\,X\,B$$

成立，其中 $B = \sqrt{1 - 64X}$。

(c) 微分方程

$$\mathrm{D}^2 Z - \frac{1}{2Z}\,(\mathrm{D}Z)^2 = HZ$$

成立，其中

$$\mathrm{D} = B\,X\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X} \quad and \quad H = 8X,$$

且 B 如上所述。

(d) 在 $q = 0$ 的邻域内，成立以下幂级数展开：

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}^3 X^n.$$

Proof of theorem. (a) 根据 X 的定义，我们有

$$\frac{1}{X} = \left(\frac{1}{w^{1/2}} + 16w^{1/2}\right)^2 = \left(\frac{\eta_1^4}{\eta_4^4} + 16\frac{\eta_4^4}{\eta_1^4}\right)^2 = \frac{\eta_2^8}{\eta_1^8\eta_4^8}\left(\frac{\eta_1^8}{\eta_2^4} + 16\frac{\eta_4^8}{\eta_2^4}\right)^2.$$

括号中的各项可用 θ函数表示，例如参见 [**16**,定理 3.5]„ 可得

$$\frac{1}{X} = \frac{\eta_2^8}{\eta_1^8\eta_4^8}\left(\varphi^4(-q) + 16q\psi^4(q)\right)^2,$$

其中

$$\varphi(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{j^2} \quad \text{and} \quad \psi(q) = \sum_{j=0}^{\infty} q^{j(j+1)/2}.$$

根据 Jacobi恒等式，例如 [**16**, 定理 3.7]，这可化简为

$$\frac{1}{X} = \frac{\eta_2^8}{\eta_1^8\eta_4^8} \times \varphi^8(q),$$

再次应用 [**16**, 定理 3.5] ，将 theta 函数转换为 eta商后，我们得到

$$\frac{1}{X} = \frac{\eta_2^8}{\eta_1^8\eta_4^8} \times \left(\frac{\eta_2^5}{\eta_1^2\eta_4^2}\right)^8 = \frac{\eta_2^{48}}{\eta_1^{24}\eta_4^{24}}.$$

X 的结果通过取倒数即可得到，而 Z 和 Z^2X的表达式则可直接利用 X 的结果以及 Z的定义得到。这就完成了 (a) 的证明。

现在证明 (b)。我们的策略是先计算 w的导数，然后使用链式法则计算 X的导数。我们有

$$\begin{aligned} q\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\log w &= q\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\log\left(q\prod_{j=1}^{\infty}\frac{(1-q^{4j})^8}{(1-q^j)^8}\right) \\ &= 1 - 32\sum_{j=1}^{\infty}\frac{jq^{4j}}{1-q^{4j}} + 8\sum_{j=1}^{\infty}\frac{jq^j}{1-q^j} \\ &= \frac{4P(q^4) - P(q)}{3}, \end{aligned} \tag{4.2}$$

其中

$$P(q) = 1 - 24\sum_{j=1}^{\infty}\frac{jq^j}{1-q^j}.$$

现在，我们应用四平方和公式 [**16**, 定理 3.26] ，接着应用 [**16**,定理 3.5] ，将所得的 theta 函数转换为乘积，从而得到

$$q\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\log w = \varphi^4(q) = \frac{\eta_2^{20}}{\eta_1^8\eta_4^8}.$$

根据第 (a) 部分，这可以进一步简化为

$$q\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\log w = Z. \tag{4.3}$$

为便于后续参考，我们指出 (4.2) 和 (4.3) 推出

$$Z = \frac{4P(q^4) - P(q)}{3}. \tag{4.4}$$

接下来，对关系应用算子$q\ \mathrm{d}\ \mathrm{d}q$，

$$\frac{1}{X} = \frac{1}{w} + 32 + 256w$$

我们得到

$$-\frac{1}{X^2}\,q\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}q} = \left(\frac{-1}{w^2} + 256\right) q\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}q},$$

因此

$$q\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}q} = X^2\left(\frac{1}{w} - 256w\right) q\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\log w.$$

由 (4.3) 并经进一步计算可得

$$\begin{aligned}
q\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}q} &= X^2 \times \sqrt{\left(\frac{1}{w} - 256w\right)^2} \times Z \\
&= ZX^2 \times \sqrt{\left(\frac{1}{w} + 256w\right)^2 - 1024} \\
&= ZX^2 \times \sqrt{\left(\frac{1}{X} - 32\right)^2 - 1024} \qquad \text{根据 } X\text{的定义} \\
&= ZX^2 \times \sqrt{\frac{1}{X^2} - \frac{64}{X}} \\
&= ZXB.
\end{aligned}$$

现在证明 (c)。首先，由链式法则和定理的第 (b) 部分，微分算子 D 与关于 q 的求导之间的关系为

$$\mathrm{D} = BX\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X} = BX\,q\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\Big/\left(q\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}q}\right) = \frac{1}{Z}\,q\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}. \tag{4.5}$$

接下来，根据 Z 的定义，我们有

$$Z^{12} = \frac{\eta_1^{24}\eta_4^{24}}{X^5}.$$

取对数并应用 $q\ \mathrm{d}\ \mathrm{d}q$，得到

$$\frac{12}{Z}\,q\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}q} = P(q) + 4P(q^4) - 5q\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\log X.$$

现在利用第 (b) 部分的结果和 (4.5) 推导出

$$12DZ + 5BZ = 4P(q^4) + P(q). \tag{4.6}$$

接下来，对 (4.6) 应用微分算子 D，并利用 (4.5) 得到

$$12\mathrm{D}^2Z + 5\mathrm{D}(BZ) = \frac{1}{Z}\,q\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\left(4P(q^4) + P(q)\right).$$

还需计算右侧的导数。利用公式 [**16**, 第 29] 页

$$q\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}P(q)=\frac{P^2(q)-Q(q)}{12}\quad\text{where}\quad Q(q)=1+240\sum_{j=1}^{\infty}\frac{j^3q^j}{1-q^j}$$

我们得到

$$12\mathrm{D}^2Z+5\mathrm{D}(BZ)=\frac{1}{12Z}\left(16P^2(q^4)-16Q(q^4)+P^2(q)-Q(q)\right). \tag{4.7}$$

为处理 $16Q(q^4)$ 和 $Q(q)$ 项，使用八平方和与八个三角数之和公式，例如参见 [**16**, 定理 3.39]„ 可推出

$$16Q(q^4)+Q(q)=16\varphi^8(q)+\varphi^8(-q)+256q^2\psi^8(q^2),$$

将其改写为

$$16Q(q^4)+Q(q)=16\varphi^8(q)+\left(\varphi^4(-q)+16q\psi^4(q^2)\right)^2-32q\varphi^4(-q)\psi^4(q^2).$$

根据雅可比恒等式 [**16**, 定理 3.7] ，可将其简化为

$$16Q(q^4)+Q(q)=17\varphi^8(q)-32q\varphi^4(-q)\psi^4(q^2).$$

现在使用 [**16**, 定理 3.5] 将 θ 函数转化为乘积，再使用定理的 (a) 部分可推出

$$16Q(q^4)+Q(q)=17\frac{\eta_2^{40}}{\eta_1^{16}\eta_4^{16}}-32\frac{\eta_1^8\eta_4^8}{\eta_2^8}=17Z^2-32Z^2X.$$

因此，(4.7) 可简化为

$$12\mathrm{D}^2Z+5\mathrm{D}(BZ)=\frac{1}{12Z}\left(16P^2(q^4)+P^2(q)+Z^2(32X-17)\right). \tag{4.8}$$

为了处理 $16P^2(q^4)$ 和 $P^2(q)$ 项，注意到公式 (4.4) 和 (4.6) 可以合并得到

$$4P(q^4)=\frac{1}{2}\left(12\mathrm{D}Z+5BZ+3Z\right)\quad\text{and}\quad P(q)=\frac{1}{2}\left(12\mathrm{D}Z+5BZ-3Z\right).$$

平方后相加，得到

$$\begin{aligned}16P^2(q^4)+P^2(q)&=\frac{1}{2}(12\mathrm{D}Z+5BZ)^2+\frac{9}{2}Z^2\\&=72(\mathrm{D}Z)^2+60BZ(\mathrm{D}Z)+\frac{25}{2}B^2Z^2+\frac{9}{2}Z^2,\end{aligned}$$

代回 (4.8)，得到

$$12\mathrm{D}^2Z+4\mathrm{D}(BZ)=\frac{1}{12Z}\left(72(\mathrm{D}Z)^2+48BZ(\mathrm{D}Z)+8B^2Z^2-8Z^2\right). \tag{4.9}$$

现在除以 12 并重新整理各项，得到

$$\begin{aligned}\mathrm{D}^2Z&=\frac{1}{2Z}(\mathrm{D}Z)^2+\frac{5}{12}B(\mathrm{D}Z)-\frac{5}{12}\mathrm{D}(BZ)+\frac{Z}{288}(25B^2-25+64X)\\&=\frac{1}{2Z}(\mathrm{D}Z)^2+8XZ\end{aligned}$$

最后一步是根据 B 和 D 的定义，通过简单计算得出的。至此，(c) 的证明完成。

最后我们证明 (d)。根据 (c) 的结果，并将定理 3.1 应用于 $B^2 = 1 - 64X$ 和 $H = 8X$，可知展开式 $Z = \sum_{n=0}^{\infty} T(n)X^n$ 中的系数 $T(n)$ 满足二项递推关系

$$(n+1)^3T(n+1) + (n+1)(-64)\left(n+\tfrac{1}{2}\right)nT(n) = 16\left(n+\tfrac{1}{2}\right)T(n)$$

化简得

$$(n+1)^3T(n+1) = 8(2n+1)^3T(n).$$

解出递推关系，并注意到 $T(0) = 1$，因为 $Z = 1$，且当 $q = 0$ 时 $X = 0$，我们推得

$$T(n) = \binom{2n}{n}^3.$$

由此完成定理4.1的证明，并确立了 Ramanujan 在公式（4.1）中使用的模参数化。□

下面给出另一个具体例子，即10级的结果。

THEOREM 4.2. 设 w、 X 和 Z 由下式定义

$$w = \frac{\eta_2^4\eta_{10}^4}{\eta_1^4\eta_5^4}, \quad \frac{1}{X} = \frac{1}{w} + 8 + 16w \quad and \quad Z = \frac{\eta_1\eta_2\eta_5\eta_{10}}{X^{3/4}}.$$

然后：

（a）求导公式

$$q\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}q} = Z\,X\,B$$

成立，其中 $B = \sqrt{(1+4X)(1-16X)}$。

（b）微分方程

$$\mathrm{D}^2Z - \frac{1}{2Z}\left(\mathrm{D}Z\right)^2 = HZ$$

成立，其中

$$\mathrm{D} = B\,X\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X} \quad and \quad H = 2X(1+15X),$$

且 B 如上所述。

(c) 展开式 $Z = \sum_{n=0}^{\infty} T(n)X^n$ 中的系数 $T(n)$ 满足三项递推关系

$$(n+1)^3T(n+1) = 2(2n+1)(3n^2+3n+1)T(n) + 4n(16n^2-1)T(n-1)$$

以及初始条件 $T(0) = 1$；单个初始条件足以启动递推。因此，在 $q = 0$ 的某个邻域内，成立以下幂级数展开：

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}^4\right\}X^n.$$

PROOF. 第 (a) 部分和第 (c) 部分可由 [16] 中的定理 10.15、10.17、10.19 和 10.24 得出。第 (b) 部分可通过变量替换，由 [16] 中的定理 10.20 得出。[10] 中给出了 (c) 的另一种证明。□

值得一提的是，定理 4.2 第 (c) 部分中的三项递推关系，可直接由第 (b) 部分的结果应用定理 3.1 得出。此外，按照 (1.2) 后的注释，可以使用计算机代数系统证明，由下式定义的数列

$$T(n) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^4$$

是该递推关系的一个解。

定理 4.1 和 4.2 中的例子有一些共同的关键特征：

（i）它们以一个模函数 X 和一个权二模形式 Z为起点。

权二模形式通常定义为

$$Z = \left(\prod_{d|\ell} \eta_d^{e_d} \right) \times \frac{1}{X^m}$$

其中 d 遍历层级 ℓ的因子，指数 e_d 为整数，且 $\sum_{d|\ell} e_d = 4$，并且

$$m = \frac{1}{24} \sum_{d|\ell} d e_d.$$

(ii) 存在一个多项式 $G = G(X)$，满足 $G(0) = 1$，使得微分公式

$$q \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}q} = BXZ \tag{4.10}$$

在 $B = \sqrt{G}$ 下成立。

(iii) 存在一个多项式 $H = H(X)$，满足 $H(0) = 0$，使得微分方程

$$\mathrm{D}^2 Z - \frac{1}{2Z} (\mathrm{D}Z)^2 = HZ \tag{4.11}$$

成立，其中 D 是微分算子

$$\mathrm{D} = BX \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}$$

且 B 与 (ii) 中相同。

(iv) 若 k 是多项式 G 和 H 的次数的最大值，则展开式 $Z = \sum_{n=0}^{\infty} T(n) X^n$ 中的系数 $T(n)$ 满足由 (3.11) 给出的 $(k+1)$ 项递推关系。

下面的表 3 和表 4 给出了更多满足 (i)–(iv) 的函数 X 和 Z 的示例。定理 4.1 和 4.2 的结果分别对应表中层级 4 和 10 的条目。表 3 和表 4 扩展了 [**16**,表 14.1 和表 14.2]。表 3 列出了已知情况下以二项式系数之和表示的 $T(n)$ 的显式公式。否则，根据定理 3.1，递推关系中的项数比 B^2 和 H 的次数中的最大值多一，这一点记录在表格的最后一列。

原则上，可以根据以下结果将表 3 和表 4 进一步扩展到 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 的其他亏格 0 子群；以下内容是从 Zagier 的综述 [**44**, 命题 21]中原文引用的。

THEOREM 4.3. 设 $f(z)$ 是某个群 Γ 上的正权 k （全纯或亚纯）模形式，$t(z)$是关于 Γ的模函数。将 $f(z)$ （局部）表示为 $\varphi(t(z))$。那么，函数 $\varphi(t)$ 满足一个阶数为 $k+1$ 、系数为代数数的线性微分方程；若 $\Gamma\backslash\mathfrak{H}$亏格为 0，且 $t(z)$ 生成 Γ上的模函数域，则该方程的系数为多项式。

定理 4.1 和 4.2 的结果，实际上表 3 和表 4 中的所有条目，都对应于 Zagier 定理 4.3 在 $k=2$ 情况下的特定且明确的实例。表 1 和表 2 中的条目分别是 Zagier 定理 4.3 在 $k=1$ 和 $k=2$ 情况下的特定实例。

表 2 和表 3 中 w 的条目在标记为 5、6(A)、6(B)、6(C)、8 和 9 的层级上完全相同。仔细查看表 2 和表 3 可见，对于这些层级，X 与 w 通过以下变量替换相关联

$$X=\frac{w}{(1+\alpha w)^2+4\gamma w^2}, \tag{4.12}$$

其中 $(\alpha、\beta、\gamma)$ 是 (2.4) 中集合 S 里的相应三元组。此外，表 3 中相应的模形式 Z 与表 2 中相应的模形式 y 之间满足

$$X^{1/2}Z=w^{1/2}y. \tag{4.13}$$

将此变量替换应用于公式 (3.4) 和 (3.5)，可得求导公式

$$q\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}q}=ZXB$$

以及微分方程

$$\tilde{\mathrm{D}}^2Z-\frac{1}{2Z}\left(\tilde{\mathrm{D}}Z\right)^2=\tilde{H}Z, \tag{4.14}$$

其中

$$B^2=1-4\alpha X-16\gamma X^2,\quad \tilde{H}=2X(\beta+3\gamma X)\quad\text{and}\quad \tilde{\mathrm{D}}=BX\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}. \tag{4.15}$$

应用定理 3.1，其中 B^2 和 $\tilde{H}$ 如上所述，可知展开式 $Z=\sum_{n=0}^{\infty}T(n)X^n$ 中的系数$T(n)$ 满足三项递推关系

$$(n+1)^3T(n+1)=2(2n+1)(\alpha n^2+\alpha n+\beta)T(n)+4\gamma n(4n^2-1)T(n-1). \tag{4.16}$$

但很容易验证，若系数 $t(n)$ 满足二次三项递推关系 (2.3)，则系数 $\binom{2n}{n}t(n)$ 将满足三次三项递推关系 (4.16)。因此，对于六组参数组$(\alpha、\beta、\gamma)\in S$中的每一组，我们都有

$$T(n)=\binom{2n}{n}t(n)$$

如表3中标记为5、6(A)、6(B)、6(C)、8和9的层级所示。上述讨论证明了 H. H. Chan、Y. Tanigawa、Y. Yang 和 W. Zudilin 的以下结果（参见 [**10**] 或 [**16**, 第 342]页）：

TABLE 3. 数据 $Z = \sum_{n=0} T(n)X^n$. 记号如下：

$$Q = 1 + 240\sum_{j=1}^{\infty}\frac{j^3q^j}{1-q^j}, \qquad R = 1 - 504\sum_{j=1}^{\infty}\frac{j^5q^j}{1-q^j},$$

$$\eta_N = q^{N/24}\prod_{j=1}(1-q^{jN}), \qquad \theta_{a,b,c} = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{aj^2+bjk+ck^2}$$

层级	w	X	Z	$T(n)$
1	$\frac{1}{432}\left(\frac{Q^{3/2}-R}{Q^{3/2}+R}\right)$	$\frac{w}{(1+432w)^2}$	$\frac{\eta_1^4}{X^{1/6}}$	$\binom{6n}{3n}\binom{3n}{n}\binom{2n}{n}$
2	$\frac{\eta_2^{24}}{\eta_1^{24}}$	$\frac{w}{(1+64w)^2}$	$\frac{\eta_1^2\eta_2^2}{X^{1/4}}$	$\binom{4n}{2n}\binom{2n}{n}^2$
3	$\frac{\eta_3^{12}}{\eta_1^{12}}$	$\frac{w}{(1+27w)^2}$	$\frac{\eta_1^2\eta_3^2}{X^{1/3}}$	$\binom{3n}{n}\binom{2n}{n}^2$
4	$\frac{\eta_4^8}{\eta_1^8}$	$\frac{w}{(1+16w)^2}$	$\frac{\eta_1^2\eta_4^2}{X^{5/12}}$	$\binom{2n}{n}^3$
5	$\frac{\eta_5^6}{\eta_1^6}$	$\frac{w}{1+22w+125w^2}$	$\frac{\eta_1^2\eta_5^2}{X^{1/2}}$	$\binom{2n}{n}\sum_j\binom{n}{j}^2\binom{n+j}{j}$
6 (A)	$\frac{\eta_1^{12}\eta_6^{12}}{\eta_2^{12}\eta_3^{12}}$	$\frac{w}{1-34w+w^2}$	$\frac{\eta_1\eta_2\eta_3\eta_6}{X^{1/2}}$	$\binom{2n}{n}\sum_{j,\ell}(-8)^{n-j}\binom{n}{j}\binom{j}{\ell}^3$
6 (B)	$\frac{\eta_2^6\eta_6^6}{\eta_1^6\eta_3^6}$	$\frac{w}{1+20w+64w^2}$	$\frac{\eta_1\eta_2\eta_3\eta_6}{X^{1/2}}$	$\binom{2n}{n}\sum_j\binom{n}{j}^2\binom{2j}{j}$
6 (C)	$\frac{\eta_3^4\eta_6^4}{\eta_1^4\eta_2^4}$	$\frac{w}{1+14w+81w^2}$	$\frac{\eta_1\eta_2\eta_3\eta_6}{X^{1/2}}$	$\binom{2n}{n}\sum_j\binom{n}{j}^3$
7	$\frac{\eta_7^4}{\eta_1^4}$	$\frac{w}{1+13w+49w^2}$	$\frac{\eta_1^2\eta_7^2}{X^{2/3}}$	$\sum_j\binom{n}{j}^2\binom{2j}{n}\binom{n+j}{j}$
8	$\frac{\eta_1^8\eta_8^8}{\eta_2^8\eta_4^8}$	$\frac{1}{1-24w+16w^2}$	$\frac{\eta_2^2\eta_4^2}{X^{1/2}}$	$\binom{2n}{n}(-1)^n\sum_j\binom{n}{j}\binom{2j}{j}\binom{2n-2j}{n-j}$
9	$\frac{\eta_1^6\eta_9^6}{\eta_3^{12}}$	$\frac{w}{1-18w-27w^2}$	$\frac{\eta_3^4}{X^{1/2}}$	$\binom{2n}{n}\sum_j(-3)^{n-3j}\binom{n}{j}\binom{n-j}{j}\binom{n-2j}{j}$
10	$\frac{\eta_2^4\eta_{10}^4}{\eta_1^4\eta_5^4}$	$\frac{w}{(1+4w)^2}$	$\frac{\eta_1\eta_2\eta_5\eta_{10}}{X^{3/4}}$	$\sum_j\binom{n}{j}^4$
11		$\left(\frac{\eta_1\eta_{11}}{\theta_{1\,1\,\,,3}}\right)_2$	$\frac{\eta_1^2\eta_{11}^2}{X}$	四项递推关系
12	$\frac{\eta_1^4\eta_{12}^4}{\eta_3^4\eta_4^4}$	$\frac{w}{(1+w)^2}$	$\frac{\eta_1\eta_3\eta_4\eta_{12}}{X^{5/6}}$	$\sum_j\binom{n}{j}^2\binom{2j}{j}\binom{2n-2j}{n-j}$

TABLE 3. 续

层级	w	X	Z	$T(n)$
13	$\frac{\eta_{13}^2}{\eta_1^2}$	$\frac{w}{1+5w+13w^2}$	$\frac{\eta_1^2\eta_{13}^2}{X^{7/6}}$	四项递推关系
14 (A)	$\frac{\eta_1^4\eta_{14}^4}{\eta_2^4\eta_7^4}$	$\frac{w}{(1-w)^2}$	$\frac{\eta_1\eta_2\eta_7\eta_{14}}{X}$	$\sum_{j,k}\binom{n+j}{2j+2k}\binom{2j+2k}{j+k}\binom{2k}{k}^2\binom{k}{j}$
14 (B)	$\frac{\eta_1^4\eta_{14}^4}{\eta_2^4\eta_7^4}$	$\frac{w}{(1+w)^2}$	$\frac{\eta_1\eta_2\eta_7\eta_{14}}{X}$	四项递推关系
15 (A)	$\frac{\eta_3^2\eta_{15}^2}{\eta_1^2\eta_5^2}$	$\frac{w}{(1+3w)^2}$	$\frac{\eta_1\eta_3\eta_5\eta_{15}}{X}$	四项递推关系
15 (B)	$\frac{\eta_3^2\eta_{15}^2}{\eta_1^2\eta_5^2}$	$\frac{w}{(1-3w)^2}$	$\frac{\eta_1\eta_3\eta_5\eta_{15}}{X}$	四项递推关系
18	$\frac{\eta_1^2\eta_2^2\eta_9^2\eta_{18}^2}{\eta_3^4\eta_6^4}$	$\frac{w}{(1+3w)^2}$	$\frac{\eta_3^2\eta_6^2}{X^{3/4}}$	$\sum_j(-1)^j\binom{n}{j}\binom{2j}{j}\binom{2n-2j}{n-j}\binom{2n-3j}{n}$
20	$\frac{\eta_1^2\eta_{20}^2}{\eta_4^2\eta_5^2}$	$\frac{w}{(1+w)^2}$	$\frac{\eta_2^2\eta_{10}^2}{X}$	四项递推关系
21	$\frac{\eta_1^2\eta_{21}^2}{\eta_3^2\eta_7^2}$	$\frac{w}{(1-w)^2}$	$\frac{\eta_1\eta_3\eta_7\eta_{21}}{X^{4/3}}$	四项递推关系
22	$\frac{\eta_2^2\eta_{22}^2}{\eta_1^2\eta_{11}^2}$	$\frac{w}{(1+2w)^2}$	$\frac{\eta_1\eta_2\eta_{11}\eta_{22}}{X^{3/2}}$	五项递推关系
23		$\frac{2\eta_1\eta_{23}}{\theta_{1,1,6}+\theta_{2,1,3}}$	$\frac{\eta_1^2\eta_{23}^2}{X^2}$	七项递推关系
24	$\frac{\eta_1^2\eta_3^2\eta_8^2\eta_{24}^2}{\eta_2^2\eta_4^2\eta_6^2\eta_{12}^2}$	$\frac{w}{1+4w^2}$	$\frac{\eta_2\eta_4\eta_6\eta_{12}}{X}$	$\sum_j\binom{n}{2j}\binom{2j}{j}^2\binom{2n-4j}{n-2j}$
33	$\frac{\eta_3\eta_{33}}{\eta_1\eta_{11}}$	$\frac{w}{1+w+3w^2}$	$\frac{\eta_1\eta_3\eta_{11}\eta_{33}}{X^2}$	六项递推关系
35	$\frac{\eta_1\eta_{35}}{\eta_5\eta_7}$	$\frac{w}{1+w-w^2}$	$\frac{\eta_1\eta_5\eta_7\eta_{35}}{X^2}$	六项递推关系

TABLE 4. B^2 和 H的数据，其中 X 和 Z 与表3相同，$B = \dfrac{q}{ZX}$ $\mathrm{d}X\,\mathrm{d}q$，$\overline{\overline{D^2 Z - \dfrac{1}{2Z}(DZ)^2 = HZ}}$，以及 $D = BX\,\mathrm{d}\,\mathrm{d}X\overline{\circ}$

层级	B^2	H	参考文献
1	$1 - 1728X$	$120X$	[**16**], [**34**]
2	$1 - 256X$	$24X$	[**16**], [**34**]
3	$1 - 108X$	$12X$	[**16**], [**34**]
4	$1 - 64X$	$8X$	[**16**], [**34**]
5	$1 - 44X - 16X^2$	$6X(1 + X)$	[**10**], [**16**]
6（A）	$(1 + 32X)(1 + 36X)$	$-12X(1 + 36X)$	[**10**], [**16**]
6（B）	$(1 - 4X)(1 - 36X)$	$6X(1 - 9X)$	[**10**], [**16**]
6（C）	$(1 + 4X)(1 - 32X)$	$4X(1 + 12X)$	[**10**], [**16**]
7	$(1 + X)(1 - 27X)$	$4X(1 + 3X)$	[**14**], [**16**]
8	$(1 + 16X)(1 + 32X)$	$-8X(1 + 24X)$	[**10**], [**16**]
9	$1 + 36X + 432X^2$	$-6X(1 + 27X)$	[**10**], [**16**]
10	$(1 + 4X)(1 - 16X)$	$2X(1 + 15X)$	[**10**], [**13**], [**16**]
11	$1 - 20X + 56X^2 - 44X^3$	$4X(1 - 8X + 11X^2)$	[**16**], [**17**]
12	$(1 - 4X)(1 - 16X)$	$4X(1 - 8X)$	[**16**], [**21**]

TABLE 4. 续

层级	B^2	H	参考文献
13	$(1+X)(1-10X-27X^2)$	$\frac{X}{8}(12+175X+231X^2)$	[**19**]
14 (A)	$(1+4X)(1-10X-7X^2)$	$\frac{X}{2}(2+51X+56X^2)$	[**18**]
14 (B)	$(1-4X)(1-18X+49X^2)$	$\frac{X}{2}(10-141X+392X^2)$	[**20**], [**25**]
15 (A)	$(1-12X)(1-2X+5X^2)$	$\frac{3X}{2}(2-11X+40X^2)$	[**20**]
15 (B)	$(1+12X)(1+22X+125X^2)$	$-\frac{3X}{2}(2+25X)(3+40X)$	[**15**]
18	$(1-12X)(1-16X)$	$6X(1-15X)$	[**14**], [**16**]
20	$(1-4X)(1-12X+16X^2)$	$4X(1-10X+18X^2)$	[**29**]
21	$(1+4X)(1-2X-27X^2)$	$-\frac{X}{2}(2-47X-240X^2)$	[**3**]
22	$(1-8X)(1-4X^2+4X^3)$	$2X(1-3X)(1+4X-10X^2)$	[**3**]
23	$(1-X^2+X^3)(1-8X+3X^2-7X^3)$	$2X(1-X-X^2+12X^3-15X^4+14X^5)$	[**17**]
24	$(1+4X)(1-4X)(1-8X)$	$2X(1+5X-64X^2)$	[**18**], [**42**]
33	$(1-2X-11X^2)(1+4X+8X^2+4X^3)$	$-\frac{X}{2}(2-15X-152X^2-404X^3-264X^4)$	[**3**]
35	$(1-2X+5X^2)(1-8X+16X^2-28X^3)$	$\frac{X}{2}(6-61X+296X^2-580X^3+840X^4)$	[**3**]

THEOREM 4.4. 设 $\{t(n)\}$ 为满足初始条件$t(0)=1$ 及三项递推关系的数列

$$(n+1)^2t(n+1)=(\alpha n^2+\alpha n+\beta)t(n)+\gamma n^2t(n-1)$$

对于 $n\geqslant 0$。那么在 $x=0$的某个邻域内，下列恒等式成立：

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}t(n)x^n\right)^2=\frac{1}{1+\gamma x^2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}t(n)\left(\frac{x(1-\alpha x-\gamma x^2)}{(1+\gamma x^2)^2}\right)^n. \tag{4.17}$$

PROOF. 注意，变量替换 (3.3) 与 (4.12) 和 (4.13) 结合起来，可得整体变量替换

$$Z=(1+\gamma x^2)z^2\quad\text{and}\quad X=\frac{x(1-\alpha x-\gamma x^2)}{(1+\gamma x^2)^2}.$$

然后将定理 3.1 应用于 (4.14) 和 (4.15) 中的数据。 □

如前所述，表 3 和表 4 中层级 4 的数据对应于 Ramanujan 的例子，该例已在定理 4.1 中详细推导。这称为经典理论。层级 1、2 和 3 的数据对应于所谓的 Ramanujan 关于椭圆函数替代底数的理论，例如，参见 [**6**] 或 [**16**, 第 4]章。

表3中层级为7、10和18的数列 $T(n)$ 的递推关系形式如下

$$(n+1)^3T(n+1)=(2n+1)(an^2+an+b)T(n)+n(cn^2+d)T(n-1) \tag{4.18}$$

分别适用于 $(a,\ b,\ c,\ d)=(6,\ 2,\ 64,\ -4)$、$(13,\ 4,\ 27,\ -3)$ 和 $(14,\ 6,\ -192,\ 12)$。递推关系 (4.18) 是对递推关系 (3.17) 和 (4.16) 的推广。具体而言，递推关系 (3.17) 和 (4.16) 分别对应于 (3.17) 的特殊情形 $d=0$ 和 $c=-4d$，这就是为什么层级为7、10和18的数列没有出现在 Zagier 第 2 节的例子中。尽管如此，数列 $T(n)$ 仍具有有趣的数论性质。例如，A. Malik 和 A. Straub [**31**] 证明，表3中对应于层级7、10和18的数列 $T(n)$，以及表 1 和表 2 中的所有数列 $t(n)$ 和 $s(n)$，对每个素数 p 都满足形式为 (1.4) 的卢卡斯同余。

表3中的所有数列 $\{T(n)\}$ 都是整数值的，但对应于13级的数列除外；该数列将在第 6 节中详细讨论。在此之前，我们将在第 5 节讨论11 级理论。在第 7 节和第 8 节中，我们将更深入地研究14 级和15 级理论。这将得到新的类 Ap´ery 数列：14 级的数列取值于 $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$，15 级的数列取值于 $\mathbb{Z}[i]$。表3中其余满足四项递推关系的数列，将在第 9 节中考察其是否满足卢卡斯同余。

5. 11 级理论

本节将详细分析表 3 和表 4 中关于11级的数据，并提出一个猜想。根据这些表，定理 3.1 可应用于函数

$$Z=\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}q^{j^2+jk+3k^2}\right)^2\quad\text{and}\quad X=\frac{\eta_1^2\eta_{11}^2}{Z}$$

其中数据由下式给出

$$B^2=1-20X+56X^2-44X^3\quad\text{and}\quad H=4X(1-8X+11X^2)$$

从而推得展开式中的系数 $T(n)$

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} T(n) X^n$$

满足四项递推关系

$$\begin{aligned}(n+1)^3 T(n+1) = {} & 2(2n+1)(5n^2+5n+2)T(n) \\ & - 8n(7n^2+1)T(n-1) \\ & + 22n(2n-1)(n-1)T(n-2).\end{aligned}$$

单个初始条件 $T(0) = 1$ 足以启动递推关系。由 X 和 Z 的 q-展开式可知, $T(n)$ 始终是整数。前几项 $\{T(n)\}_{n=0}^{10}$ 为

1, 4, 28, 268, 3004, 36784, 476476, 6418192, 88986172, 1261473136, 18200713168.

数值计算表明:

Conjecture 5.1. 数列 $\{T(n)\}$ 对每个素数 p都满足卢卡斯同余。

也就是说，对于每个素数 p 和任意正整数 n,

$$T(n) \equiv T(n_0)T(n_1)\cdots T(n_r) \pmod{p}$$

其中 $n = n_0 + n_1 p + \cdots + n_r p^r$ 是 n 在底数 p下的 p-进展开式。

该猜想已对所有素数 $p < 1000$ 和所有 $n < 50000$进行了验证。证明该猜想的一种方法是，找到一个将 $T(n)$ 表示为二项式系数之和的公式，然后应用 Malik 和 Straub [31]的方法。目前尚不清楚这样的二项式和。

6. 13 级理论

表 3 和表 4 中 13 级对应的条目与 [19]中的结果略有不同，并且可以由这些结果推导出来。在该参考文献中，底层函数（我们记作 X^* 和 Z^*）定义如下:

$$X^* = \frac{w}{1+6w+13w^2} \quad \text{and} \quad Z^* = \frac{1}{12}\left(13P(q^{13}) - P(q)\right) \tag{6.1}$$

其中 $w = \eta_{13}^2/\eta_1^2$。根据 [19, 定理 8.1] ，我们可以推导出另一个公式:

$$Z^* = \eta_1^2\eta_{13}^2 \times \frac{(1-X^*)^{2/3}}{(X^*)^{7/6}} \tag{6.2}$$

除了因子 $(1-X^*)^{2/3}$ 之外，这与表3中 Z 所在列的其他公式相似。此外，由于 [19, 定理 6.3 和 7.2] ，可得求导公式 (4.10) 和微分方程 (4.11) 成立，且

$$\left(B^*\right)^2 = 1 - 12X^* - 16X^{*2} \quad \text{and} \quad H^* = \frac{2X^*(1+5X^*-3X^{*2}+3X^{*3})}{(1-X^*)^2}. \tag{6.3}$$

注意， H^* 不是多项式，而是有理函数。展开式中的系数 $T^*(n)$

$$Z^* = \sum_{n=0}^{\infty} T^*(n) X^{*n}$$

是整数，并且已在 [**20**] 中证明满足六项递推关系。相比之下，表 3 和表 4 中对应于 13 级的数据针对的是函数

$$X = \frac{w}{1+5w+13w^2} \quad \text{and} \quad Z = \frac{\eta_1^2\eta_{13}^2}{X^{7/6}} \tag{6.4}$$

与之前一样。比较 (6.4) 与 (6.1) 和 (6.2)，我们便可得到变量替换公式

$$X = \frac{X^*}{1-X^*} \quad \text{and} \quad Z = (1-X^*)^{1/2}Z^*.$$

进行变量替换并应用 (6.1)–(6.3) 后，可知 X 和 Z满足求导公式 (4.10) 和微分方程 (4.11)，其中B^2 和 H 由下式给出

$$B^2 = (1+X)(1-10X-27X^2) \quad \text{and} \quad H = \frac{X}{8}\left(12+175X+231X^2\right).$$

由定理 3.1 可知，幂级数展开中的系数 $T(n)$

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} T(n)X^n$$

满足四项递推关系

$$\begin{aligned}(n+1)^3T(n+1) = {}& \frac{3}{2}(2n+1)(3n^2+3n+1)T(n)\\ &+ \frac{n}{4}(148n^2+27)T(n-1)\\ &+ \frac{3}{8}(6n-5)(6n-1)(2n-1)T(n-2)\end{aligned}$$

其初始条件为 $T(0)=1$、$T(-1)=0$、$T(-2)=0$。然而，前几项为

$$Z = 1+\frac{3}{2}X+\frac{91}{8}X^2+\frac{1287}{16}X^3+\frac{86931}{128}X^4+\frac{1566669}{256}X^5+\frac{59494799}{1024}X^6+\cdots,$$

而项 $T(n)$ 不是整数。我们断言 $4^nT(n)$ 始终是整数。为证明这一点，首先回顾 [**19**, 引理 5.4]：

$$\eta_1^{24} = U^6\times\frac{w}{(1+5w+13w^2)^4} \quad \text{and} \quad \eta_{13}^{24} = U^6\times\frac{w^{13}}{(1+5w+13w^2)^4}, \tag{6.5}$$

其中

$$U = 1-\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{j}{13}\right)\frac{jq^j}{1-q^j},$$

且$\left(\frac{j}{13}\right)$ 是勒让德符号。将 (6.5) 代入 (6.4)，得到

$$Z^2 = U^2\times(1+5w+13w^2) \tag{6.6}$$

并且根据 U和 w的定义可知，Z^2 的 q展开式中的系数都是整数。接下来，由于

$$X = \frac{w}{1+5w+13w^2}, \quad \text{with} \quad w = q\prod_{j=1}^{\infty}\frac{(1-q^{13j})^2}{(1-q^j)^2},$$

由此可知， X 的 q展开式中的系数都是整数。此外，由上文显然可得

$$Z^2 = 1 + O(q) \quad \text{and} \quad X = q + O(q^2).$$

因此，展开式中的系数 $z(n)$

$$Z^2 = \sum_{n=0}^{\infty} z(n)X^n = 1+3X+25X^2+195X^3+1729X^4+16107X^5+156481X^6+\cdots$$

都是整数。现在写作

$$Z^2 = 1 + I \quad \text{where} \quad I = \sum_{n=1}^{\infty} z(n)X^n = 3X + 25X^2 + 195X^3 + 1729X^4 + \cdots$$

使得 I 是一个系数为整数且没有常数项的幂级数。根据二项式定理，我们有

$$Z = Z^2 \times Z^{-1} = Z^2 \times (1+I)^{-1/2} = Z^2 \times \sum_{j=0}^{\infty} \binom{2j}{j} \left(-\frac{I}{4}\right)^j.$$

将右边的表达式按 X 的幂展开时，和式中只有满足 $0 \leqslant j \leqslant n$ 的那些项 $Z^2\binom{2j}{j}(-\frac{I}{4})^j$ 才会对 X^n 的系数有贡献。由于 Z^2 和 I 都可以展开为关于 X 的、系数为整数的幂级数，因此 $4^nT(n)$ 是整数。

令 $S(n) = 4^nT(n)$。那么上述内容可以总结如下。

THEOREM 6.1. 令 $\{S(n)\}$ 为由递推关系定义的数列

$$\begin{aligned}(n+1)^3S(n+1) = {} & 6(2n+1)(3n^2+3n+1)S(n) \\ & + 4n(148n^2+27)S(n-1) \\ & + 24(6n-5)(6n-1)(2n-1)S(n-2)\end{aligned}$$

且初始条件为 $S(0) = 1$、 $S(-1) = 0$、 $S(-2) = 0$。令 X 和 Z 由（6.4）定义，即

$$X = \frac{w}{1+5w+13w^2} \quad \textit{and} \quad Z = \frac{\eta_1^2\eta_{13}^2}{X^{7/6}},$$

其中 $w = \eta_{13}^2/\eta_1^2$。那么 $S(n)$ 始终是整数，并且

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} S(n) \left(\frac{X}{4}\right)^n.$$

$\{S(n)\}_{n=0}^{10}$ 的前几项为：

1, 6, 182, 5148, 173862, 6266676, 237979196, 9366227832, 378768328198, 15643121895492, 657035290739412.

我没有发现数列 $\{S(n)\}$ 满足任何卢卡斯性质。这个数列是否具有任何有趣的数论性质，仍是一个未解决的问题。

7. 由14级理论产生的无理数序列

由 14 级理论导出的 Ap´ery 类数列已在第 7], [**20**] 节和例 6] 中研究过。本节将详细介绍模背景。由此得到四个数列，其中包括两个新的无理数序列。

令 w_{+2}、 w_{+7} 和 w_{+14} 为由下式定义的模函数

$$w_{+2}=\frac{\eta_7^4\eta_{14}^4}{\eta_1^4\eta_2^4},\quad w_{+7}=\frac{\eta_2^3\eta_{14}^3}{\eta_1^3\eta_7^3},\quad w_{+14}=\frac{\eta_1^4\eta_{14}^4}{\eta_2^4\eta_7^4}. \tag{7.1}$$

记号 w_{+m}（其中 $m\in\{2、7、14\}$）是 w_{14+m} 的缩写，它表示 $\Gamma_0(14)+m$的一个固定主模函数。令 y_{+2}、 y_{+7} 和 y_{+14} 为相应的权二模形式，由下式定义

$$y_{+2}=\frac{\eta_1^5\eta_2^5}{\eta_7^3\eta_{14}^3},\quad y_{+7}=\frac{\eta_1^4\eta_7^4}{\eta_2^2\eta_{14}^2},\quad y_{+14}=\frac{\eta_2^5\eta_7^5}{\eta_1^3\eta_{14}^3}.$$

注意到

$$w_{+2}y_{+2}=w_{+7}y_{+7}=w_{+14}y_{+14}=\eta_1\eta_2\eta_7\eta_{14}. \tag{7.2}$$

q展开式

$$w_{+2}=q^3+O(q^4),\quad w_{+7}=q+O(q^2)\quad\text{and}\quad w_{+14}=q+O(q^2)$$

and

$$y_{+2}=\frac{1}{q^2}+O(1),\quad y_{+7}=1+O(q)\quad\text{and}\quad y_{+14}=1+O(q),$$

这表明，函数对 w_{+2} 和 y_{+2} 的性质可能不同于函数对 w_{+7} 和 y_{+7} 以及 w_{+14} 和 y_{+14}。事实上，函数 w_{+7} 和 w_{+14} 通过 [**20**, 定理 3.3]相关联

$$\frac{1}{w_{+7}}+8w_{+7}=\frac{1}{w_{+14}}+w_{+14}-7, \tag{7.3}$$

而 w_{+2} 则通过更复杂的恒等式 [**20**, 定理 3.4]与 w_{+14} 相关联

$$\frac{1}{w_{+2}}+2401w_{+2}=\frac{1}{w_{+14}^3}-\frac{16}{w_{+14}^2}+\frac{48}{w_{+14}}+32+48w_{+14}-16w_{+14}^2+w_{+14}^3. \tag{7.4}$$

恒等式 **(7.3)** 本可以写成如下形式

$$\frac{1}{w_{+7}}+8w_{+7}+\epsilon=\frac{1}{w_{+14}}+w_{+14}-7+\epsilon, \tag{7.5}$$

对于任意常数 ϵ。这启发我们考虑由下式定义的函数 X_ϵ 和 Z_ϵ

$$\frac{1}{X_\epsilon}=\frac{1}{w_{+7}}+8w_{+7}+\epsilon=\frac{1}{w_{+14}}+w_{+14}-7+\epsilon \tag{7.6}$$

and

$$Z_\epsilon=\frac{\eta_1\eta_2\eta_7\eta_{14}}{X_\epsilon}, \tag{7.7}$$

因此

$$X_\epsilon=\frac{1}{q}+(\epsilon-3)+11q+20q^2+57q^3+92q^4+207q^5+O(q^6)$$

and

$$Z_\epsilon=y_{+7}\times(1+\epsilon w_{+7}+8w_{+7}^2)=y_{+14}\times(1+(\epsilon-7)w_{+14}+w_{+14}^2). \tag{7.8}$$

下一个结果表明， ϵ 的某些取值尤为特殊。

THEOREM 7.1. 设 B_ϵ 和 H_ϵ 由下式定义

$$B_\epsilon = \Big(1-(\epsilon-9)X_\epsilon\Big)^{1/2}\Big(1-(\epsilon-5)X_\epsilon\Big)^{1/2}\Big(1-2\epsilon X_\epsilon+(\epsilon^2-32)X_\epsilon^2\Big)^{1/2}$$

and

$$H_\epsilon = X_\epsilon\Bigg(\epsilon-4-\frac{1}{2}\left(7\,\epsilon^2-50\,\epsilon+24\right)X_\epsilon+\left(4\,\epsilon^3-42\,\epsilon^2+26\,\epsilon+448\right){X_\epsilon}^2 - \frac{3}{2}\,(\epsilon-9)\,(\epsilon-5)\left(\epsilon^2-32\right){X_\epsilon}^3\Bigg).$$

那么，求导公式 (4.10) 和微分方程 (4.11) 对$B = B_\epsilon$、 $H = H_\epsilon$、 $X = X_\epsilon$ 和 $Z = Z_\epsilon$均成立。

PROOF. 这些结果已在 [**20**, 引理 4.1 和定理 4.2] 中针对 $\epsilon = 9$ 的情形得到证明。其他情形的证明可通过进行以下变量替换

$$\frac{1}{X_\epsilon}-\epsilon = \frac{1}{X_{\epsilon=9}}-9 \quad \text{and} \quad X_\epsilon Z_\epsilon = X_{\epsilon=9}Z_{\epsilon=9}.$$

□

现在考虑展开式

$$Z_\epsilon = \sum_{n=0}^{\infty} T_\epsilon(n)X_\epsilon^n.$$

由定理 3.1，系数 $T_\epsilon(n)$ 满足五项递推关系

$$\begin{aligned}(7.9)\qquad (n+1)^3T_\epsilon(n+1) &= (2n+1)((2\epsilon-7)(n^2+n)+\epsilon-4)T_\epsilon(n)\\ &\quad -n((6\epsilon^2-42\epsilon+13)n^2+\epsilon^2-8\epsilon+11)T_\epsilon(n-1)\\ &\quad +n(2n-1)(n-1)(2\epsilon^3-21\epsilon^2+13\epsilon+224)T_\epsilon(n-2)\\ &\quad -n(n-1)(n-2)(\epsilon-5)(\epsilon-9)(\epsilon^2-32)T_\epsilon(n-3).\end{aligned}$$

单个初始条件 $T_\epsilon(0) = 1$ 就足以启动递推。
若 $\epsilon \in \{5、9、 \pm\sqrt{32}\}$，则 H_ϵ 的次数降低一阶，函数 B_ϵ 也得到简化，递推关系 (7.9) 化为如下形式的四项关系

$$\begin{aligned}(7.10)\quad (n+1)^3T_\epsilon(n+1) &= (2n+1)(an^2+an+b)T_\epsilon(n)+n(cn^2+d)T_\epsilon(n-1)\\ &\quad +en(2n-1)(n-1)T_\epsilon(n-2).\end{aligned}$$

值得注意的是， $\epsilon = 5、9、 \sqrt{32}$ 和 $-\sqrt{32}$ 恰好是使 (7.5) 两边之一成为平方的值；在这些情形下，我们分别用 $T_{14A}(n)$、 $T_{14B}(n)$、$T_{14C}(n)$ 和 $T_{14\overline{C}}(n)$表示 $T_\epsilon(n)$ 。

数列 $\{T_{14B}(n)\}$ 最早于 [**25**] 被研究，并在 [**20**]中得到进一步探讨。数列 $\{T_{14A}(n)\}$ 似乎最早是在 [**18**] 中，为证明 Z.-W. Sun 的一些猜想 [**40**]而出现的。数列 $\{T_{14A}(n)\}$ 和 $\{T_{14B}(n)\}$ 与相应的模形式一同列于表3中。数列$\{T_{14C}(n)\}$和 $\{T_{14\overline{C}}(n)\}$是新的。

数列 $\{T_{14A}(n)\}$、 $\{T_{14B}(n)\}$ 和 $\{T_{14C}(n)\}$ 的前几项列于表 5 中。若

$$T_{14C}(n) = u+v\sqrt{2}$$

对于某些整数 u 和 v，则

$$T_{14\overline{C}}(n) = u - v\sqrt{2},$$

因此，通过共轭可由 $T_{14C}(n)$ 得到 $T_{14\overline{C}}(n)$。

与数值 $\epsilon = 5$、9、$\pm\sqrt{32}$ 对应的递推关系 (7.10) 中，常数 a、b、c、d 和 e 的值列于表 7 的 14级 标题下。

以下涉及二项式和的公式已在 [**18**] 中得到证明：

$$\begin{aligned} T_{14A}(n) &= \sum_{j,k} \binom{n+j}{2j+2k}\binom{2j+2k}{j+k}\binom{2k}{k}^2\binom{k}{j} \\ &= \sum_{j,k} (-1)^{n-j}\binom{n+j}{2j+2k}\binom{2j+2k}{j+k}\binom{2k}{k}\binom{j+2k}{k}\binom{j+k}{k} \\ &= \sum_{j,k} \binom{n+j-k}{2j+2k}\binom{2j+2k}{j+k}\binom{j+k}{k}^2\binom{2j}{j+k}(-3)^{n-j-3k}. \end{aligned}$$

由 (7.7) 可得

$$Z_\epsilon X_\epsilon = \eta_1\eta_2\eta_7\eta_{14}$$

与 ϵ 无关，并且利用 (7.6) 可进一步推出

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_\epsilon(n)\left(\frac{w}{1+\epsilon w+8w^2}\right)^{n+1} = w - 4w^2 + 16w^3 - 72w^4 + 368w^5 - 2080w^6 + \cdots$$

也独立于 ϵ。特别地，关于 $\epsilon \in \{5$ 的四个数列 $\{T_\epsilon(n)\}$、9、$\pm\sqrt{32}\}$ 的生成函数之间存在如下关系。

THEOREM 7.2. 在 $w = 0$ 的一个邻域内，以下恒等式成立：

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} T_{14A}(n)\left(\frac{w}{1+5w+8w^2}\right)^{n+1} &= \sum_{n=0}^{\infty} T_{14B}(n)\left(\frac{w}{1+9w+8w^2}\right)^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} T_{14C}(n)\left(\frac{w}{1+\sqrt{32}w+8w^2}\right)^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} T_{14\overline{C}}(n)\left(\frac{w}{1-\sqrt{32}w+8w^2}\right)^{n+1}. \end{aligned}$$

本节最后给出一个猜想性的同余恒等式，该恒等式已通过计算机进行了广泛检验。

CONJECTURE 7.3. 数列 $\{T_{14A}(n)\}$ 和 $\{T_{14B}(n)\}$ 对每个素数 p 都满足卢卡斯同余 (1.4)。数列 $\{T_{14C}(n)\}$ 和 $\{T_{14\overline{C}}(n)\}$ 对素数 p 满足卢卡斯同余，当且仅当 $p = 2$ 或 p 模 8 同余于 1 或 7。

8. 源自 15 级理论的复值序列

尽管有许多相似之处，15 级理论仅在 [**20**]中得到研究。例如，在 [**18**], 的最后一节中，作者惊讶地指出，尽管 14 级理论在该文中多次出现，15 级理论却一次也没有出现。本节将构建模背景，并得到四个数列，其中三个是新的。

TABLE 5. 14 级数列的前几项 $\{T_\epsilon(n)\}$

n	$T_{14A}(n)$: $\epsilon=5$	$T_{14B}(n)$： $\epsilon=9$	$T_{14C}(n)$： $\epsilon=\sqrt{32}$
0	1	1	1
1	1	5	$-4+4\sqrt{2}$
2	9	33	$56-32\sqrt{2}$
3	49	269	$-520+416\sqrt{2}$
4	385	2545	$6512-4224\sqrt{2}$
5	2961	26565	$-69664+52416\sqrt{2}$
6	24801	295785	$862904-582400\sqrt{2}$
7	212409	3441765	$-9870928+7232544\sqrt{2}$
8	1878129	41336145	$123164432-84724224\sqrt{2}$
9	16924945	508419125	$-1472036416+1063509568\sqrt{2}$
10	155204329	6370849633	$18601926816-12933544448\sqrt{2}$

沿用上一节的类似记号，令 w_{+3}、 w_{+5} 和 w_{+15} 为由下式定义的模函数

$$w_{+3}=\frac{\eta_5^3\eta_{15}^3}{\eta_1^3\eta_3^3},\quad w_{+5}=\frac{\eta_3^2\eta_{15}^2}{\eta_1^2\eta_5^2},\quad w_{+15}=\frac{\eta_1^3\eta_{15}^3}{\eta_3^3\eta_5^3}, \tag{8.1}$$

并设 y_{+3}、 y_{+5} 和 y_{+15} 为相应的权二模形式，其定义为

$$y_{+3}=\frac{\eta_1^4\eta_3^4}{\eta_5^2\eta_{15}^2},\quad y_{+5}=\frac{\eta_1^3\eta_5^3}{\eta_3\eta_{15}},\quad y_{+15}=\frac{\eta_3^4\eta_5^4}{\eta_1^2\eta_{15}^2}.$$

与 (7.2) 类似，我们有

$$w_{+3}y_{+3}=w_{+5}y_{+5}=w_{+15}y_{+15}=\eta_1\eta_3\eta_5\eta_{15}. \tag{8.2}$$

按照上一节中的方法进行， q展开式

$$w_{+3}=q^2+O(q^3),\quad w_{+5}=q+O(q^2)\quad\text{and}\quad w_{+15}=q+O(q^2)$$

and

$$y_{+3}=\frac{1}{q}+O(1),\quad y_{+5}=1+O(q)\quad\text{and}\quad y_{+15}=1+O(q),$$

表明，函数对 w_{+3} 和 y_{+3} 的性质可能不同于函数对 w_{+5}, y_{+5} 和 w_{+15}, y_{+15}。函数 w_{+5} 和 w_{+15} 由[**20**,定理 5.3]联系起来

$$\frac{1}{w_{+5}}+9w_{+5}+5=\frac{1}{w_{+15}}-w_{+15}, \tag{8.3}$$

而 w_{+3} 与 w_{+5} 之间的关系则由更复杂的恒等式 [**20**, 定理 5.4]给出

$$\frac{1}{w_{+3}}-125w_{+3}=\frac{1}{w_{+5}^2}+\frac{1}{w_{+5}}-9w_{+5}-81w_{+5}^2. \tag{8.4}$$

恒等式 (8.3) 也可以写成如下形式

$$\frac{1}{w_{+5}} + 9w_{+5} + 5 + \epsilon = \frac{1}{w_{+15}} - w_{+15} + \epsilon \tag{8.5}$$

对于任意常数 ϵ。这提示我们考虑由下式定义的函数 X_ϵ 和 Z_ϵ

$$\frac{1}{X_\epsilon} = \frac{1}{w_{+15}} - w_{+15} + \epsilon \quad \text{and} \quad X_\epsilon Z_\epsilon = \eta_1\eta_3\eta_5\eta_{15} \tag{8.6}$$

从而

$$Z_\epsilon = y_{+15} \times (1 + \epsilon w_{+15} - w_{+15}^2). \tag{8.7}$$

为了帮助确定 ϵ 的有趣取值，我们有以下定理 7.1 的类似结果。

THEOREM 8.1. 令 B_ϵ 和 H_ϵ 由下式定义

$$B_\epsilon = \Big(1-(\epsilon-1)X_\epsilon\Big)^{1/2}\Big(1-(\epsilon+11)X_\epsilon\Big)^{1/2}\Big(1-2\epsilon X_\epsilon+(\epsilon^2+4)X_\epsilon^2\Big)^{1/2}$$

and

$$H_\epsilon = X_\epsilon\Bigg(\epsilon+2\,-\,\frac{1}{2}\left(7\,\epsilon^2+34\,\epsilon-8\right)X_\epsilon+\left(4\,\epsilon^3+30\,\epsilon^2-14\,\epsilon+40\right){X_\epsilon}^2 \\ -\frac{3}{2}\,(\epsilon-1)\,(\epsilon+11)\left(\epsilon^2+4\right){X_\epsilon}^3\Bigg).$$

则对于 $B = B_\epsilon$、$H = H_\epsilon$、$X = X_\epsilon$ 和 $Z = Z_\epsilon$，求导公式 (4.10) 和微分方程 (4.11) 成立。

PROOF. 这些恒等式在 $\epsilon = 1$ 的情形下已于 [**20**, 引理 6.1 和定理 6.2] 中得到证明。其他情形的证明可通过变量替换得出

$$\frac{1}{X_\epsilon} - \epsilon = \frac{1}{X_{\epsilon=1}} - 1 \quad \text{and} \quad X_\epsilon Z_\epsilon = X_{\epsilon=1}Z_{\epsilon=1}.$$

□

现在考虑展开式

$$Z_\epsilon = \sum_{n=0}^{\infty} T_\epsilon(n) X_\epsilon^n.$$

根据定理 3.1，系数 $T_\epsilon(n)$ 满足五项递推关系

$$\begin{aligned}(n+1)^3T_\epsilon(n+1) &= (2n+1)((2\epsilon+5)(n^2+n)+\epsilon+2)T_\epsilon(n)\\ &\quad -n((6\epsilon^2+30\epsilon-7)n^2+\epsilon^2+4\epsilon-1)T_\epsilon(n-1)\\ &\quad +n(2n-1)(n-1)(2\epsilon^3+15\epsilon^2-7\epsilon+20)T_\epsilon(n-2)\\ &\quad -n(n-1)(n-2)(\epsilon-1)(\epsilon+11)(\epsilon^2+4)T_\epsilon(n-3).\end{aligned} \tag{8.8}$$

若 $\epsilon \in \{1, -11, \pm 2i\}$，则 H_ϵ 的次数降低一，函数 B_ϵ 也会简化，递推关系 (8.8) 化为 (7.10) 形式的四项关系。值得注意的是，$\epsilon = 1, -11, 2i$ 和 $-2i$ 正是使 (8.5) 的一边成为平方的值。在这些情形下，数列中的项分别记作 $T_{15A}(n)$, $T_{15B}(n)$, $T_{15C}(n)$ 和 $T_{15\overline{C}}(n)$。数列 $T_{15A}(n)$ 已在 [**20**] 中研究过。其余三个数列（迄今为止）

尚未发表；我于 2015年 发现了它们，并在 2015, [15] 举行的 NTDU 会议上介绍了它们。

常数 a、b、c、d 和 e 的值列于表 7 的 15 级标题下。与 $\epsilon \in \{1、-11、2i\}$ 对应的数列的前几项列于表 6 中。表 6 未列出 $\epsilon = -2i$ 的情形，因为相应数据只是由 $\epsilon = 2i$ 获得的数据的复共轭。对于每个数列，单个初始条件 $T_\epsilon(0) = 1$ 就足以启动递推关系。由 (8.6) 可得

$$Z_\epsilon X_\epsilon = \eta_1\eta_3\eta_5\eta_{15}$$

与 ϵ 无关，并且利用 (7.6) 可进一步得到

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_\epsilon(n)\left(\frac{w}{1+\epsilon w-w^2}\right)^{n+1} = w + 2w^2 + 11w^3 + 72w^4 + 545w^5 + 4450w^6 + \cdots$$

也与 ϵ 无关。特别地，四个数列 $\{T_\epsilon(n)\}$（其中 $\epsilon \in \{1、-11、\pm 2i\}$）的生成函数之间具有如下关系。

THEOREM 8.2. 以下恒等式在 $w = 0$ 的一个邻域内成立：

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} T_{15A}(n)\left(\frac{w}{1+w-w^2}\right)^{n+1} &= \sum_{n=0}^{\infty} T_{15B}(n)\left(\frac{w}{1-11w-w^2}\right)^{n+1}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} T_{15C}(n)\left(\frac{w}{1+2iw-w^2}\right)^{n+1}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} T_{15\overline{C}}(n)\left(\frac{w}{1-2iw-w^2}\right)^{n+1}.\end{aligned}$$

我们以一个与猜想 7.3 类似的猜想结束本节。

CONJECTURE 8.3. 数列 $\{T_{15A}(n)\}$ 和 $\{T_{15B}(n)\}$ 对每个素数 p都满足卢卡斯同余。数列 $\{T_{15C}(n)\}$ 和 $\{T_{15\overline{C}}(n)\}$ 满足素数 p 对应的卢卡斯同余，当且仅当 $p = 2$ 或 p 模 4 同余于 1。

9. 层级 20、21 和 24，以及一个一般猜想

本节将考察表3中其余系数 $T(n)$ 满足四项递推关系的项，即层级 20、21 和 24。

首先，将定理3.1应用于表 3 和表 4 中层级 20 和 21 的数据，可得以下四项递推关系

$$\begin{aligned}(n+1)^3T(n+1) &= 4(2n+1)(2n^2+2n+1)T(n)\\ &\quad - 16n(4n^2+1)T(n-1) + 8(2n-1)^3T(n-2)\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}(n+1)^3T(n+1) &= -(2n+1)(n^2+n+1)T(n)\\ &\quad + n(35n^2+12)T(n-1) + 6(2n-1)(3n-1)(3n-2)T(n-2),\end{aligned}$$

分别而言。这两个递推关系都不能仅凭一个初始条件 $T(0) = 1$ 就启动；要处理 $n = 0$ 和 $n = 1$ 的情况，还必须规定

TABLE 6. 15级数列的前几项 $\{T_\epsilon(n)\}$

n	$T_{15A}(n)$： $\epsilon=1$	$T_{15B}(n)$： $\epsilon=-11$	$T_{15C}(n)$： $\epsilon=2i$
0	1	1	1
1	3	-9	$2+2i$
2	15	87	$6+8i$
3	105	-867	$44+52i$
4	855	8775	$290+480i$
5	7533	-89559	$1612+4372i$
6	69909	918141	$7140+39568i$
7	673515	-9432873	$2536+361688i$
8	6673095	96984423	$-559166+3303552i$
9	67565445	-997061295	$-10693900+29823140i$
10	696024945	10245169737	$-151732284+264070928i$

$T(-1)=0$ 和 $T(-2)=0$。此外，目前尚未发现这些数列的卢卡斯同余。

另一方面，将定理 3.1 应用于表 3 和表 4 中关于 24级的数据，可得递推关系

$$(9.1)\quad (n+1)^3T(n+1)=2(2n+1)(2n^2+2n+1)T(n)\\ +4n(4n^2+1)T(n-1)-64n(n-1)(2n-1)T(n-2),$$

而单个初始条件 $T(0)=1$ 就足以启动递推关系。这是因为 $T(n-1)$的系数含有因子 n，而 $T(n-2)$的系数含有因子 $n(n-1)$。此外，数值证据表明:

CONJECTURE 9.1. 由递推关系 (9.1) 和初始条件 $T(0)=1$ 定义的数列，对所有素数 p都满足卢卡斯同余。

现在我们已经考察了表3中的所有四项递推关系，看起来满足卢卡斯同余的数列都是自启动数列。根据定理 3.1，如果相应的多项式 B^2 和 H 的次数为 3，即，则数列 $T(n)$ 满足四项递推关系，

$$B^2=1+g_1X+g_2X^2+g_3X^3 \quad\text{and}\quad H=h_1X+h_2X^2+h_3X^3$$

并且递推关系为

$$\begin{aligned}&(n+1)^3T(n+1)\\ &\quad+\left(n+\tfrac12\right)\left(g_1n^2+g_1n-2h_1\right)T(n)\\ &\qquad+n\left(g_2n^2-g_2-2h_2\right)T(n-1)\\ &\qquad\quad+\left(n-\tfrac12\right)\left(g_3n^2-g_3n-2g_3-2h_3\right)T(n-2)=0.\end{aligned}$$

只要单个初始条件 $T(0)=1$可用于启动递推关系，该数列就能自启动；当 n 整除 $T(n-1)$ 的系数，且 $n(n-1)$ 整除 $T(n-2)$的系数时，便满足这一条件。

第一个条件已经满足；当且仅当 $g_3 = -h_3$时，第二个条件才满足，此时递推关系变为

$$\begin{aligned}&(n+1)^3T(n+1)\\&\quad+\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\left(g_1n^2+g_1n-2h_1\right)T(n)\\&\quad\quad+n\left(g_2n^2-g_2-2h_2\right)T(n-1)\\&\quad\quad\quad+g_3n(n-1)\left(n-\tfrac{1}{2}\right)T(n-2)=0,\end{aligned}$$

或者等价地

$$\begin{aligned}(n+1)^3T(n+1)=(2n+1)(an^2+an+b)T(n)+n(cn^2+d)T(n-1)\\+en(2n-1)(n-1)T(n-2),\end{aligned}\tag{9.2}$$

其中

$$a=-\frac{g_1}{2},\quad b=h_1,\quad c=-g_2,\quad d=g_2+2h_2,\quad e=-\frac{g_3}{2}=\frac{h_3}{2}.$$

表 7 列出了参数 (a,b,c,d,e) 的取值；对于这些取值，由递推关系 (9.2) 和初始条件 $T(0)=1$ 定义的数列被猜想满足卢卡斯同余。

10. 渐近展开

文献 (1.5) 中提到了 Ap´ery 数的一个渐近公式。我们寻求由定理 3.1 中的递推关系 (3.11) 定义的数列的类似渐近展开，即

$$(n+1)\sum_{j=0}^{k}g_j(n+1-\tfrac{j}{2})(n+1-j)T(n+1-j)=2\sum_{j=1}^{k}h_j(n+1-\tfrac{j}{2})T(n+1-j),\tag{10.1}$$

其中 g_j 和 h_j 是常数，且 $g_0=1$。我们从以下试探形式开始

$$T(n)\sim C\,n^{\alpha}R^n\left(1+\frac{b_1}{n}+\frac{b_2}{n^2}+\cdots\right)\tag{10.2}$$

并代入 (10.1)。为了计算展开式，注意对于 $j=0$、1、2、.....，我们有

$$\begin{aligned}\frac{T(n+1-j)}{n^{\alpha}R^n}&=\frac{(n+1-j)^{\alpha}}{n^{\alpha}}\frac{R^{n+1-j}}{R^{n+1}}\left(1+\frac{b_1}{n+1-j}+\frac{b_2}{(n+1-j)^2}+\cdots\right)\\&=\frac{1}{R^j}\left(1-\frac{\alpha(j-1)}{n}+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\frac{(j-1)^2}{n^2}+\cdots\right)\\&\quad\times\left(1+\frac{b_1}{n}+\frac{(j-1)b_1+b_2}{n^2}+\cdots\right).\end{aligned}$$

现在将 (10.1) 除以 $n^{\alpha}R^{n+1}n^2(n+1)$，并代入上述展开式，得到

TABLE 7. 四项递推关系的参数

$$(n+1)^3T(n+1) = (2n+1)(an^2+an+b)T(n) + n(cn^2+d)T(n-1) + en(2n-1)(n-1)T(n-2)$$

以及初始条件 $T(0) = 1$，它们生成的数列被猜想满足卢卡斯同余。

层级	Name	a	b	c	d	e
11	$T_{11}(n)$	10	4	-56	-8	22
14	$T_{14A}(n)$	3	1	47	4	14
	$T_{14B}(n)$	11	5	-121	-20	98
	$T_{14C}(n)$	$8\sqrt{2}-7$	$4\sqrt{2}-4$	$168\sqrt{2}-205$	$32\sqrt{2}-43$	$28(11\sqrt{2}-16)$
	$T_{14\overline{C}}(n)$	$-8\sqrt{2}-7$	$-4\sqrt{2}-4$	$-168\sqrt{2}-205$	$-32\sqrt{2}-43$	$-28(11\sqrt{2}+16)$
15	$T_{15A}(n)$	7	3	-29	-4	30
	$T_{15B}(n)$	-17	-9	-389	-76	-750
	$T_{15C}(n)$	$5+4i$	$2+2i$	$31-60i$	$5-8i$	$-40-30i$
	$T_{15\overline{C}}(n)$	$5-4i$	$2-2i$	$31+60i$	$5+8i$	$-40+30i$
24	$T_{24}(n)$	4	2	16	4	-64

$$\sum_{j=0}^{k} \frac{g_j}{R^j}\left(1-\frac{j-1}{n}\right)\left(1-\frac{j-2}{2n}\right)\left(1-\frac{\alpha(j-1)}{n}+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\frac{(j-1)^2}{n^2}+\cdots\right) \times\left(1+\frac{b_1}{n}+\frac{(j-1)b_1+b_2}{n^2}+\cdots\right) = 2\sum_{j=1}^{k}\frac{h_j}{R^j}\left(\frac{1}{n^2}+\cdots\right),$$

其中我们已展开至包含 n^{-2} 的项。

比较 n^0 的系数，得到

$$\sum_{j=0}^{k} \frac{g_j}{R^j} = 0.$$

$_k$因此， R^{-1} 是多项式 $G(x) = 1 + \sum g_j x^j$的根。$_{j=1}$

接下来，对 n^{-1} 的系数进行比较，得到

$$\sum_{j=0}^{k} \frac{g_j}{R^j} \left(-(j-1) - \frac{(j-1)}{2} - \alpha(j-1) \right) + b_1 \sum_{j=0}^{k} \frac{g_j}{R^j} = 0.$$

利用 R^{-1} 是 $G(x)$ 的根这一事实并化简后，我们得到

$$\sum_{j=0}^{k} \frac{g_j}{R^j} \left(-\frac{3j}{2} \right) = \alpha \sum_{j=0}^{k} \frac{j g_j}{R^j}, \quad \text{i.e.,} \quad -\frac{3}{2} G'(R^{-1}) = \alpha G'(R^{-1}).$$

I如果我们进一步假设 R^{-1} 是 G的单根，则可得 $\alpha = -3/2$。令 $\alpha = -3/2$ ，并比较 n^{-2} 的系数，得到

$$\sum_{j=0}^{k} \frac{g_j}{R^j} \left(\frac{j^2}{8} + b_1 j - \frac{b_1}{2} + b_2 - \frac{1}{8} \right) = 2 \sum_{j=1}^{k} \frac{h_j}{R^j}.$$

我们再次利用 R^{-1} 是 $G(x)$ 的根这一事实进行化简，得到

$$b_1 \sum_{j=0}^{k} \frac{j g_j}{R^j} + \frac{1}{8} \sum_{j=0}^{k} \frac{j^2 g_j}{R^j} = 2 \sum_{j=1}^{k} \frac{h_j}{R^j},$$

并且可以求解得到

$$b_1 = \frac{16H(R^{-1}) - G^{**}(R^{-1})}{8G^{*}(R^{-1})},$$

其中

(10.3)

$$H(x) = \sum_{j=1}^{k} h_j x^j, \quad G^{*}(x) = x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} G(x) \quad \text{and} \quad G^{**}(x) = x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} G(x) \right).$$

如有需要，可通过进一步展开来计算其他系数 $b_2, b_3, \ldots$ r
并比较 $n^{-3}, n^{-4}, \ldots$ 的系数。

众所周知，(10.2) 中 C 的值不能仅凭递推关系确定。相反，可以使用前向差分准确确定 C 的值，例如，参见 [**43**, 第 954] 页对该方法的说明。然后，可以使用 PSLQ 算法猜测该常数的精确值。或者，如果已知有关该数列的其他事实，例如已知其二项式和表示，那么或许可以解析地计算 C 的值，例如参见 Hirschhorn [**26**], [**28**]。原则上，Hirschhorn 的方法可应用于数列 T_{14A} 和 T_{24}，但表 7 中其他数列的二项式和尚不为人所知，因此 C 的值是通过数值方法确定的，故属于猜想。

上述计算和讨论可结合定理 3.1 使用，并总结如下。

THEOREM 10.1. 假设 $Z = Z(X)$ 在 $X = 0$的邻域内解析，且 $Z(0) = Z_0 \neq 0$, 并满足二阶非线性微分方程

$$\mathrm{D}^2 Z - \frac{1}{2Z}\left(\mathrm{D}Z\right)^2 = HZ,$$

其中 D 是微分算子

$$\mathrm{D} = BX\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X},$$

其中

$$B = \sqrt{G} \quad and \quad G = 1 + \sum_{j=1}^{k} g_j X^j,$$

and

$$H = \sum_{j=1}^{k} h_j X^j.$$

假设 $G(x)$ 有一个模最小的唯一根 r_0，并且假设 r_0 是单根。那么幂级数展开中的系数 $T(n)$

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} T(n) X^n$$

具有如下渐近展开式

$$T(n) \sim C\, n^{-3/2}\, R^n \left(1 + \frac{b_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \tag{10.4}$$

其中 $R = 1/r_0$ 和 $b_1 = \dfrac{16H(r_0) - G^{**}(r_0)}{8G^{*}(r_0)}$，以及 G^* 和 G^{**} 由式 (10.3) 定义。

将这个公式与已知结果进行一些核对是有益的。根据定理 3.2 前后的讨论，我们有对应于 Ap´ery 数的

$$G(x) = 1 + 2\alpha x + (\alpha^2 + 4\gamma)x^2 \quad \text{and} \quad H(x) = (2\beta - \alpha)x - \frac{(\alpha^2 + 4\gamma)x^2}{2}$$

其中 $(\alpha, \beta, \gamma) = (-17, -6, -72)$。解 $G(x) = 0$ 可得最小根 $r_0 = 17 - 12\sqrt{2}$，因此

$$R = \frac{1}{r_0} = 17 + 12\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^4.$$

此外，

$$b_1 = \frac{16H(r_0) - G^{**}(r_0)}{8G^{*}(r_0)} = \left.\frac{57 - 6x}{8x - 136}\right|_{x = 17 - 12\sqrt{2}} = -\frac{3}{4} + \frac{15\sqrt{2}}{64}.$$

因此，我们得到 Ap´ery 数的

$$A(n) \sim \frac{C}{n^{3/2}}(1 + 2\sqrt{2})^4 \left(1 + \frac{15\sqrt{2} - 48}{64n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

C 的值可以通过数值方法确定，我们得到 $C = \frac{(1+2\sqrt{2})^2}{2^{9/4}\pi^{3/2}}$。这些结果与 Hirschhorn [**26**] 和 [**27**], 一致，其中也确定了 $1/n^2$ 和 $1/n^3$ 的系数。

作为另一个例子，考虑 7级的情形。由表 4 可知，$G(x) = (1 + x)(1 - 27x)$ 和 $H(x) = 4x(1+3x)$。G 的模最小的根为 $r_0 = 1/27$，因此 $R = 27$。此外，

$$b_1 = \frac{16H(r_0) - G^{**}(r_0)}{8G^{*}(r_0)} = \left.\frac{-45 - 150x}{104 + 216x}\right|_{x=1/27} = -\frac{65}{144}.$$

因此，我们得到

$$T(n) \sim \frac{C}{n^{3/2}} 27^n \left(1 - \frac{65}{144n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

再次，C 的值可通过数值方法确定，我们发现$C = \frac{\sqrt{27}}{4\pi^{3/2}}$, ，这一切都与 Hirschhorn 的另一项结果 [**28**]一致。

定理 10.1 可用于确定表 7 中八个数列渐近展开式里的参数 R 和 b_1 。数列 T_{11}、T_{14A}、T_{14B}、T_{15A}、T_{15B} 和 T_{24} 对应的多项式 G 和H 见表 4，其他数列对应的多项式则可从定理 7.1 和 8.1 中提取。每个渐近展开式中的相应参数 C 通过有限差分以数值方法确定。结果汇总于表 8。表中关于 $T_{14B}(n)$ 的结果与 Guillera 和 Zudilin 给出的公式 [**25**, 例 6]一致。

要点是，只需考察表 4 中的多项式 $G = B^2$，便可确定渐近展开中的主导项，精确到常数 C。如果需要更精细的近似，例如 $1/n$ 项，那么表 4 中的多项式 H 就会派上用场。

11. 更多猜想：超同余

设 $T(0) = 1$，且 $\{T(n)\}$ 满足关于素数 p的卢卡斯同余；也就是说，对所有正整数 n,

$$T(n) \equiv T(n_0)T(n_1)\cdots T(n_r) \pmod{p},$$

其中 $n = n_0 + n_1 p + \cdots + n_r p^r$ 是以 p为底的 n 的 p-进展开。于是，由于 $pn = n_0 p + n_1 p^2 + \cdots + n_r p^{r+1}$，立即可得同余式

$$T(pn) \equiv T(n) \pmod{p}$$

对所有正整数 n均成立。Gessel [**23**]证明，对于 Ap´ery 数，存在更强的同余式，即对所有素数 $p \geqslant 5$ 及所有正整数 n,

$$T(pn) \equiv T(n) \pmod{p^3}, \tag{11.1}$$

其中 $T(n) = A(n)$ 是 Ap´ery 数。涉及素数 p 的幂的这类同余称为超同余。Ap´ery 数是表 2 中标记为 6(A) 的数列，自然值得检验表 7 中的其他数列是否也满足这类同余。Chan等人 [**9**, 定理 2.3] 证明了标记为 6(B) 的数列也满足同余式 (11.1)。[1] 他们猜想 [**9**, 猜想 3.1]该同余式也适用于标记为 6(C) 的 Almkvist–Zudilin 数，而 T. Amdeberhan 和 R. Tauraso [**2**] 已证明了这一点。关于这些数列满足的超同余，更多结果

[1]表 2 中标记为 6(B) 的数 $s(n)$ 的绝对值称为 Domb 数。

TABLE 8. 渐近展开中的参数
$T(n) \sim C\,\dfrac{R^n}{n^{3/2}}\left(1+\dfrac{b_1}{n}+O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right).$

数列	R	b_1	C 的猜测值
$T_{11}(n)$	$1-\dfrac{20}{R}+\dfrac{56}{R^2}-\dfrac{44}{R^3}=0$ 因此 $R=16.82750\ldots$	$-\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{275R^{-2}-184R^{-1}+21}{33R^{-2}-28R^{-1}+5}\right)$ $=-0.3995791\cdots$	$\frac{xR}{\pi^{3/2}}=0.3287368\ldots$, 其中 $2^{10}\cdot 11x^6+2^5\cdot 29x^2-11=0$
$T_{14A}(n),\quad \epsilon=5$	$5+4\sqrt{2}$	$-\dfrac{223}{196}+\dfrac{1025\sqrt{2}}{3136}$	$\dfrac{5+4\sqrt{2}}{4\pi^{3/2}}\times\left(\dfrac{9\sqrt{2}-8}{14}\right)^{1/2}$
$T_{14B}(n),\quad \epsilon=9$	$(1+2\sqrt{2})^2$	$-\dfrac{7}{4}+\dfrac{69\sqrt{2}}{64}$	$\dfrac{(1+2\sqrt{2})^2}{4\pi^{3/2}}\times\left(\dfrac{8-5\sqrt{2}}{2}\right)^{1/2}$
$T_{14C}(n),\quad \epsilon=\sqrt{32}$	$8\sqrt{2}$	$\dfrac{443}{392}-\dfrac{60\sqrt{2}}{49}$	$\dfrac{8}{\pi^{3/2}}\times\left(\dfrac{8\sqrt{2}-11}{7}\right)^{1/2}$
$T_{14\overline{C}}(n),\quad \epsilon=-\sqrt{32}$	$-(1+2\sqrt{2})^2$	$\dfrac{339}{784}+\dfrac{201\sqrt{2}}{196}$	$\dfrac{(1+2\sqrt{2})^2}{\pi^{3/2}}\times\left(\dfrac{\sqrt{14}}{7}+\dfrac{\sqrt{7}}{14}\right)$
$T_{15A}(n),\quad \epsilon=1$	12	$-\dfrac{489}{1000}$	$\dfrac{6\sqrt{3}}{5\pi^{3/2}}$
$T_{15B}(n),\quad \epsilon=-11$	-12	$\dfrac{3}{8}$	$\dfrac{12\sqrt{3}}{\pi^{3/2}}$
$T_{15C}(n),\quad \epsilon=2i$	$11+2i$	$-\dfrac{1209}{2000}+\dfrac{231}{1000}i$	$\dfrac{(11+2i)^{3/2}}{20\pi^{3/2}}$
$T_{15\overline{C}}(n),\ \epsilon=-2i$	$11-2i$	$-\dfrac{1209}{2000}-\dfrac{231}{1000}i$	$\dfrac{(11-2i)^{3/2}}{20\pi^{3/2}}$
$T_{24}(n)$	8	$-\dfrac{3}{8}$	$\dfrac{\sqrt{8}}{\pi^{3/2}}$

表 1 和表 2 中的结果，以及表3中对应于7级、10级和18级的数列，均由 Straub 在 [**39**] 中总结。

我们简要讨论一下7级的超同余。设 $T(n)$ 为表3中的7级数列，并设 $t(n)$ 定义为

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} t(n)X^n\right)^2=\sum_{n=0}^{\infty}T(n)X^n$$

因此

$$\sum_{j=0}^{n} t(j)t(n-j)=T(n)=\sum_{j}\binom{n}{j}^2\binom{2j}{n}\binom{n+j}{j}.$$

Chan等人 [**9**, 猜想5.4] 猜想

$$t(pn)\equiv t(n)\pmod{p^2} \tag{11.2}$$

对于所有正整数 n，以及所有满足模7二次剩余条件的素数 p，L. O'Brien [**32**, 猜想9.3] 也猜想该同余对 $p=7$ 成立。据我所知，这个猜想仍未解决。对于另一个数列，人们猜想 [**14**, 猜想5.1]，即

$$T(pn)\equiv T(n)\pmod{p^3} \tag{11.3}$$

对所有正整数 n 和所有素数 $p\geqslant 3$均成立。R. Osburn、B. Sahu 和 A. Straub 已证明素数 $p\geqslant 5$ 满足猜想 **(11.3)** [**33**, 定理 1.2]。

因此，权一数列 $\{t(n)\}$ 对剩余类模 7 中一半的素数 p满足模 p^2 同余，而权为二的数列 $\{T(n)\}$对所有素数 $p \geqslant 5$ （并且猜想对$p = 3$也成立）满足更强的模 p^3 同余。

上述讨论引出了一个问题：表 7 中由四项递推关系定义的自启动数列，是否存在超同余? 虽然模 p^3 的同余似乎很少见（我发现素数$p = 2$ 对应的一些同余，以及素数 $p = 3$对应的一些同余），但我确实发现了几个有趣的模 p^2 同余，以下猜想对此作了总结。

11.1. 11级。以下是关于11级的猜想。

Conjecture 11.1. 设 $\{T_{11}(n)\}$ 为表 7 中的11级数列。对于所有正整数 n，有

$$T_{11}(pn) \equiv T_{11}(n) \pmod{p^2} \quad \textit{if } p \in \{2, 59, 5581\}.$$

此外，在 $p = 2$ 的情况下，我们还有

$$T_{11}(2n) \equiv T_{11}(n) \pmod{2^6}$$

除非 $n = 1$ 或 $n = 1 + 2^{j-1}$ 或 $n = 1 + 3 \times 2^j$，其中某个 $j \in \mathbb{Z}^+$。

猜想 11.1 中的素数 59 和 5581 很令人惊讶。我测试了素数 $p < 10000$，没有发现其他具有这一性质的素数，除了 $p = 2$。目前信息不足，无法推测模 p^2 同余是否对其他素数 $p > 10000$也成立。这些猜想已针对 $pn \leqslant 10^6$进行了测试；换言之，在 $p = 59$的情况下测试了 $1 \leqslant n \leqslant 1694$，在 $p = 5581$的情况下测试了 $1 \leqslant n \leqslant 17$ 。后者情况下的 17 个数据点或许看起来证据不足，但 1694 个数据点为素数 $p = 59$提供了相当有力的证据。表9给出了一些其他素数的统计数据。该表表明，对于其他素数，模 p^2 同余可能对 n 的特定取值成立。例如，我们有:

Conjecture 11.2.

$$T_{11}(3n) \equiv T_{11}(n) + 3n \pmod{3^2}$$

and

$$T_{11}(5n) \equiv T_{11}(n) \pmod{5^2} \quad \textit{if and only if } 5|n.$$

该猜想推导出表9中的数值 $c(3) = 333$和 $c(5) = 200$。不过，读者应注意，不应将数值 $c(7) = 750$ 和 $c(11) = 875$ 视为暗示有 $3/4$ 的整数满足模 p^2 同余（针对素数 $p = 7$），也不应认为在情形 $p = 11$下，这一比例是整数的 $7/8$。这些比例恰好与简单的有理数相符，纯属巧合；随着 n 的范围增大，这些比例也会发生变化。

值得将猜想 11.1 与 Chan 等人相应的 11 级猜想进行比较:

Conjecture 11.3（ [9]中的猜想 5.5）。令 $t_{11}(n)$ 定义为

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} t_{11}(n)x^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} T_{11}(n)x^n,$$

TABLE 9. $c(p)$ 的值：$=\#\quad n:\ T_{11}(pn)\equiv T_{11}(n)\pmod{p^2}$，以及素数 $p\leqslant 101$对应的 $1\leqslant n\leqslant 1000\}$。注意 $c(2)$ 和 $c(59)$的值。

p	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41
$c(p)$	1000	333	200	750	875	274	222	286	129	62	32	27	48
p	43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	101
$c(p)$	87	87	18	1000	49	136	56	27	63	24	11	10	9

其中 $T_{11}(n)$ 是表 7 中的 11级数列。等价地，

$$\sum_{j=0}^{n} t_{11}(j)t_{11}(n-j)=T_{11}(n)$$

or

$$(n+1)^2t_{11}(n+1)=2(10n^2+5n+1)t_{11}(n)$$
$$-8(7n^2-7n+2)t_{11}(n-1)+22(n-1)(2n-3)t_{11}(n-2)$$

其中 $t_{11}(0)=1$ 和 $t_{11}(-1)=t_{11}(-2)=0$。那么

$$t_{11}(pn)\equiv t_{11}(n)\pmod{p^2}$$

对于所有正整数 n 以及满足 $\left(\frac{p}{11}\right)=1$的所有素数 p。

换言之，我们猜想权一数列 $\{t_{11}(n)\}$ 对于模 11 的二次剩余素数，满足模 p^2 同余。这类似于公式 (11.2) 给出的 7级猜想。然而，权为二的数列 $\{T_{11}(n)\}$ 似乎对于一个小得多且尚未确定的素数集合，满足模 p^2 同余。这远弱于公式 (11.3) 中对应的 7级结果，无论是同余的强度，还是素数集合 p方面都是如此。

11.2. 14级。以下是对应的 14级猜想。

CONJECTURE 11.4. 设 $\{T_{14A}(n)\}$、$\{T_{14B}(n)\}$、$\{T_{14C}(n)\}$ 和 $\{T_{14\overline{C}}(n)\}$ 为表 7 中的 14 级数列。对于所有正整数 n，有

$$T_{14A}(pn)\equiv T_{14A}(n)\pmod{p^2}\quad \textit{if } p\in\{2,\,17,\,263\}$$

and

$$T_{14B}(pn)\equiv T_{14B}(n)\pmod{p^2}\quad \textit{if } p\in\{2,\,7,\,17,\,263\}.$$

此外，在 $p=2$ 的情况下，我们还有

$$T_{14A}(2n)-T_{14A}(n)\equiv\begin{cases}0\pmod{2^4} & \textit{if } n\equiv 0 \textit{ or } 3\pmod 4,\\ 8\pmod{2^4} & \textit{if } n\equiv 1 \textit{ or } 2\pmod 4;\end{cases}$$

$$T_{14B}(2n)-T_{14B}(n)\equiv\begin{cases}0\pmod{2^4} & \textit{if } n\equiv 0\pmod 2,\\ 12\pmod{2^4} & \textit{if } n\equiv 1\pmod 2;\end{cases}$$

and

$$T_{14C}(2n) \equiv T_{14C}(n) \pmod{2^6} \quad and \quad T_{14\overline{C}}(2n) \equiv T_{14\overline{C}}(n) \pmod{2^6}$$

除非 $n = 1$、2、3 或 $n = 2^j \times 3 + 1$，其中 j 为某个非负整数。

该猜想已针对素数 $p < 10000$ 以及满足 $pn \leqslant 100000$ 的 n 值进行了检验。最明显的问题是，为什么素数 $p = 7$ 会出现在关于 T_{14B} 的猜想中，却不出现在关于 T_{14A} 的猜想中? 作为部分回答，我们猜想

$$T_{14A}(7n) \equiv T_{14A}(n) \pmod{7^2} \quad \text{if } n \equiv 0,\ 4,\ 5 \text{ or } 6 \pmod{7}.$$

11.3. 15 级。以下是相应的 15 级猜想。关于 $T_{15\overline{C}}(n)$ 的同余可以从关于 $T_{15C}(n)$ 的猜想通过复共轭推导得出，因此不予列出。

Conjecture 11.5. 设 $\{T_{15A}(n)\}$、$\{T_{15B}(n)\}$ 和 $\{T_{15C}(n)\}$ 为表 7 中的 15级数列。那么，关于 $p \in \{2、3、5\}$ 存在模 p^2 的同余，如下所示:

- 在 $p = 2$ 的情况下，我们有

$$T_{15A}(2n) - T_{15A}(n) \equiv \begin{cases} 0 \pmod{2^3} & \text{if } n \equiv 0 \pmod 2, \\ 4 \pmod{2^3} & \text{if } n \equiv 1 \pmod 2; \end{cases}$$

$$T_{15B}(2n) - T_{15B}(n) \equiv \begin{cases} 16 \pmod{2^5} & \text{if } n \equiv 2 \pmod 4, \\ 0 \pmod{2^5} & \text{otherwise}, \end{cases}$$

and

$$T_{15C}(2n) \equiv T_{15C}(n) \pmod{2^3}$$

除非对于某个非负整数 j，$n = 1$ 或 $n = 1 + 2^j$。

- *In th*[e在 $p = 3$ 的情况下，我们] *have*

$$T_{15A}(3n) \equiv T_{15A}(n) \pmod{3^3}$$

除非对于某个非负整数 j，$n = 1$、$n = 2$、$n = 1 + 3^j$或 $n = 1 + 2 \times 3^j$。并且，

$$T_{15B}(3n) \equiv T_{15B}(n) \pmod{3^3}$$

此外，除非对于某个非负整数 j，$n = 1$、$n = 1+3^j$或 $n = 1+2\times 3^j$。

$$T_{15C}(3n) - T_{15C}(n) \equiv \begin{cases} i \pmod 3 & \text{if } n \equiv 3,\ 5 \text{ or } 6 \pmod 8, \\ 2i \pmod 3 & \text{if } n \equiv 1,\ 2 \text{ or } 7 \pmod 8, \\ 0 \pmod 3 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

- 在 $p = 5$ 的情况下，我们有

$$T_{15B}(5n) \equiv T_{15B}(n) \pmod{5^2}$$

对所有正整数 n 均成立。此外，若对于互不相同的非负整数 j_1、.....、j_k，$n - 1 \neq 5^{j_1} + 5^{j_2} + \cdots + 5^{j_k}$，即 $n-1$ 的五进制展开式并非完全由 0 和 1 组成，则

$$T_{15A}(5n) \equiv T_{15A}(n) \pmod{5^2}$$

and

$$T_{15C}(5n) \equiv T_{15C}(n) \pmod{5^2}.$$

再一次，这个猜想已针对素数 $p < 10000$以及满足 $pn \leqslant 100000$ 的 n 值进行了检验。

11.4. 24级。最后，以下是相应的 24级猜想。

CONJECTURE 11.6. 令 $\{T_{24}(n)\}$ 为表 7 中的 24级序列。对于所有正整数 n，有

$$T_{24}(pn) \equiv T_{24}(n) \pmod{p^2} \quad \text{if } p \in \{2, 89, 179, 643\}.$$

在 $p = 2$ 的情况下，我们还有

$$T_{24}(2n) \equiv T_{24}(n) \pmod{2^5}$$

除非对于某个非负整数 j，$n = 1$ 或 $n = 1 + 2^j$。

在 $p = 3$ 的情况下，我们有

$$T_{24}(3n) - T_{24}(n) \equiv \begin{cases} 3 \pmod 9 & \text{if } n \equiv 4 \text{ or } 5 \pmod 6, \\ 6 \pmod 9 & \text{if } n \equiv 1 \text{ or } 2 \pmod 6, \\ 0 \pmod 9 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

该猜想已针对素数 $p < 10000$ 以及满足 $pn \leqslant 100000$ 的 n 值进行了检验。

致谢：谨此回忆并感谢本研究于2015年启动时与 Wadim Zudilin 进行的有益讨论。感谢匿名审稿人提出建议，使本文的呈现更加完善。

参考文献

[1] G. Almkvist、D. van Straten 和 W. Zudilin, *Generalizations of Clausen's formula and algebraic transformations of Calabi–Yau differential equations*，《爱丁堡数学会会刊》，54（2011），273–295。[2] T. Amdeberhan 和 R. Tauraso, *Supercongruences for the Almkvist–Zudilin numbers*，《Acta Arith.》，173（2016），255–268。[3] T. Anusha、E. N. Bhuvan、S. Cooper 和 K. R. Vasuki, *Elliptic integrals and Ramanujan-type series for $1/\pi$ associated with $\Gamma_0(N)$, where N is a product of two small primes*，《数学分析及其应用杂志》，**472** 2019 1551 1570（），– R. Apery, ，《Ast´erisque》，61（1979），11–13。[4] ´ *Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$*。[5] B. C. Berndt, *Ramanujan's Notebooks, Part III*, Springer-Verlag, 纽约, 1991。[6] B. C. Berndt、S. Bhargava 和 F. G. Garvan, *Ramanujan's theories of elliptic functions to alternative bases* **347** 1995 4163 4244 ，《美国数学会汇刊》，（）–。[7] F. Beukers, *Another congruence for the Apéry numbers*，《数论杂志》，25（1987），201–210。[8] A. Bostan、S. Boukraa、G. Christol、S. Hassani 和 J.-M. Maillard, *Ising n-fold integrals as diagonals of rational functions and integrality of series expansions* **46** 185202, ，《J. Phys. A》，44页，2013年。[9] H. H. Chan、S. Cooper 和 F. Sica, *Congruences satisfied by Apéry-like numbers*，《Int. J. Number Theory》，6（2010），89–97。[10] H. H. Chan、Y. Tanigawa、Y. Yang 和 W. Zudilin, *New analogues of Clausen's identities arising from the theory of modular forms* **228** 2011 1294 1314 ，《Adv. Math.》，（），–。[11] H. H. Chan 和 H. Verrill, *The Apéry numbers the Almkvist–Zudilin numbers and new series*，《Math. Res. Lett.》，（），–。[12] G. Christol, *Diagonales de fractions rationnelles et equations différentielles*，《超度量分析研究小组，第10年：1982/83，第2号，第18号》，10页，巴黎亨利·庞加莱研究所，1984年。[13] S. Cooper, *Level 10 analogues of Ramanujan's series for $1/\pi$,* ，《J. Ramanujan Math. Soc.》，27（2012），59–76。[14] S. Cooper, *Sporadic sequences, modular forms and new series for $1/\pi$,* ，《Ramanujan J.》，29（2012），163–183。

[15] S. Cooper, *The Rogers–Ramanujan continued fraction*, 会议报告, Number Theory Down Under（NTDU）, 纽卡斯尔大学, 澳大利亚, 2015年9月18日。[16] S. Cooper, *Ramanujan's Theta Functions*, 施普林格, 尚, 2017年。[17] S. Cooper、J. Ge 和 D. Ye, *Hypergeometric transformation formulas of degrees* 3 7 11 *and* , , , 23 **421** 2015 1358 1376 《数学分析及其应用杂志》, （）, –。[18] S. Cooper、J. Wan 和 W. Zudilin, *Holonomic alchemy and series for* $1/\pi$. 收录于: 解析数论、模形式与 q-超几何级数, George E. Andrews 和 Frank Garvan（编）, 《施普林格数学与统计学讲义》, 221（2017）, 179–205, 施普林格, 尚, 2017年。[19] S. Cooper 和 D. Ye, *The Rogers-Ramanujan continued fraction and its level* 13 *analogue*, 《逼近理论杂志》, 193（2015）, 99–127。[20] S. Cooper 和 D. Ye, *Level 14 and 15 analogues of Ramanujan's elliptic functions to alternative bases* **368** 2016 7883 7910 , 《美国数学会汇刊》, （）, –。[21] S. Cooper 和 D. Ye, *The level* 12 *analogue of Ramanujan's function* k, 《澳大利亚数学会杂志》, 101（2016）, 29–53。[22] J. Franel, *Solution to a question of Laisant*, 《L'interm´ediaire des math´ematiciens》, 1（1894）, 45–47。[23] I. Gessel, *Some congruences for Apéry numbers*, 《数论杂志》, 14（1982）, 362–368。[24] O. Gorodetsky, *New representations for all sporadic Apéry-like sequences with applications* , 《实验数学》, （）, –。[25] J. Guillera 和 W. Zudilin, *Ramanujan-type formulae for* $1/\pi$*: The art of translation*. 收录于: 《斯里尼瓦萨·拉马努金的遗产》, B. C. Berndt 和 D. Prasad（编）, 拉马努金数学学会讲义丛书, 20（2013）, 181–195, 拉马努金数学学会, 迈索尔, 2013年。[26] M. D. Hirschhorn, *Estimating the Apéry numbers*, 《斐波那契季刊》, 50（2012）, 129–131。[27] M. D. Hirschhorn, *Estimating the Apéry numbers II*, 《斐波那契季刊》, 51（2013）, 215–217。[28] M. D. Hirschhorn, *A sequence considered by Shaun Cooper*, 《新西兰数学杂志》, 43（2013）, 37–42。[29] T. Huber、D. Schultz 和 D. Ye, *Series for* $1/\pi$ *of level* 20, , 《数论杂志》, 188（2018）, 121–136。[30] L. Lipshitz 和 A. van der Poorten, *Rational functions, diagonals, automata and arithmetic*, 《数论》（班夫, AB, 1988）, 339–358, 德格鲁伊特出版社, 柏林, 1990年。[31] A. Malik 和 A. Straub, *Divisibility properties of sporadic Apéry-like numbers*, 《数论研究》2（2016）, 第5篇, 1–26。[32] L. O'Brien, *Modular Forms and two new integer sequences at level* 7, 理学硕士论文, 梅西大学, 新西兰, 2016年。[33] R. Osburn、B. Sahu 和 A. Straub, *Supercongruences for sporadic sequences*, 《爱丁堡数学会会刊》, 59（2016）, 503–518。[34] S. Ramanujan, *Modular equations and approximations to* π, 《牛津数学季刊》, 45（1914）, 350–372。重印于 [**35**, 23–39]。[35] S. Ramanujan, *Collected Papers*, 第三次印刷, AMS Chelsea, 普罗维登斯, 罗得岛州, 2000年。[36] T. Sato（Takeshi Sato）, *Apéry numbers and Ramanujan's series for* $1/\pi$, , 在日本数学会年会（2002年3月28日至31日）上所作报告的摘要。[37] N. J. A. Sloane, *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, （在线整数数列百科全书）`http://www.research.att.com/~njas/sequences/` （网页访问日期: 2024年5月5日）。[38] A. Straub, *Multivariate Apéry numbers and supercongruences of rational functions*, 《代数与数论》, 8（2014）, 1985–2007。[39] A. Straub, *Gessel–Lucas congruences for sporadic sequences*, 《数学月刊》, 203（2024）, 883–898。[40] Z.-W. Sun, *List of conjectural series for powers of* π *and other constants*, （2014）, 33页。`http://arxiv.org/abs/1102.5649v47` （网页访问日期: 2022年12月23日）。[41] A. van der Poorten, *A proof that Euler missed ... Apéry's proof of the irrationality of* $\zeta(3)$*. An informal report* **1** 1978 79 195 203 《数学智能》, （/）, –。[42] D. Ye, 致 S. Cooper 的私人通信（2013年11月11日）。[43] D. Zagier, *Vassiliev invariants and a strange identity related to the Dedekind eta-function*, 《拓扑学》, 40（2001）, 945–960。[44] D. Zagier, *Elliptic modular forms and their applications*. 《模形式入门》, 1–103, 施普林格, 柏林, 2008年。

[45] D. Zagier, *Integral solutions of Apéry-like recurrence equations*, 群与对称性, 349–366, CRM讲义丛书, 47 美国数学学会, 罗德岛州普罗维登斯, 2009.

School of Mathematical and Computational Sciences, Massey University, Private Bag 102904, North Shore Mail Centre, Auckland, New Zealand
Email address: s.cooper@massey.ac.nz