arXiv:2302.00760v1 [math.PR] 1 Feb 2023

正则树上的随机游走无法减速

OMER ANGEL、JACOB RICHEY、YINON SPINKA 和 AMIR YEHUDAYOF F

ABSTRACT. 正则树（或任意非 amenable 图）上的随机游走具有正速度。我们探讨能否通过精心选择顶点的时变置换来减慢这种随机游走。我们证明，在树上无法减慢随机游走。

1 引言

将空间的几何与空间上的随机游走行为联系起来的一项经典结果是：在任何非 amenable 图上，随机游走都具有正速度，即 $\liminf_{t\to\infty} t^{-1}|X_t|$ 存在且几乎处处为正。在传递图上，该极限甚至是一个几乎处处为常数。特别地，在 d 正则树 $\mathbb{T}_d$上，简单随机游走的速度为 $\frac{d-2}{d}$，只要 $d>2$，该速度就为正。本文的研究动机源于这样一个问题：我们能让粒子减速吗？

假设在随机游走的每一步之后 t，我们都可以对树的顶点施加某个置换 π_t，使得如果粒子位于 v，它就会被传送到 $\pi_t(v)$。如果我们观察粒子并据此选择 π_t，就可以不断地将它推回到任意指定的顶点，使它永远不动。我们的主要发现是，如果这些置换不依赖于粒子的位置，那么粒子的运动就无法减慢。

1.1 置换随机游走

我们首先考虑惰性随机游走，出于主要是技术上的原因，这种情况下结果的表述更简洁（见下文讨论）。我们先引入一些记号。固定 $d\geq 2$，令 $\mathbb{T}=\mathbb{T}_d$ 表示以根为根的无限 d-正则树。其顶点集记为 $V=V(\mathbb{T}_d)$。树的根记为 v_0。顶点$v\in V$的深度 $|v|$ 是它到根的距离。v 的邻域 $N(v)$是所有与 v距离至多为一的顶点 u组成的集合。注意，由于我们考虑的是惰性随机游走，采用 $v\in N(v)$会更方便。因此，$N(v)$的大小为 $d+1$。

令 $(X_t)_{t=0}^{\infty}$ 为从 $\mathbb{T}$ 的根出发的懒惰随机游走。惰性参数$\mathbb{P}(X_{t+1}=X_t)$取为 $\frac{1}{d+1}$。也就是说，$X_0=v_0$，而 X_{t+1}是 $N(X_t)$中的一个均匀随机元素。(X_t)的（经验）速度定义为过程$(t^{-1}|X_t|)$。强大数定律表明，该速度几乎必然收敛于 $\frac{d-2}{d+1}$。注意

这在 $d = 2$ 为 $\mathbb{T}_2$ 且速度为 0 的情况下同样成立。有关树上的随机游走，另请参阅例如 [5, 9] 及其中的参考文献。

我们提出以下模型来研究粒子的减速。在粒子开始移动之前，我们可以选择一个由 $\pi_t{}_{t=1}^{\infty}$ 的置换组成的序列。（这些置换不必是有限支撑的； V 的任意双射都可以。）在时刻 t，将置换 π_t 应用于随机游走。因此，置换随机游走 (Y_t) 从根出发，其在时刻 $t+1$ 的位置定义为 $Y_{t+1} = \pi_{t+1}(Y'_{t+1})$，其中 Y'_{t+1} 是 $N(Y_t)$ 中一个均匀随机顶点。(Y_t) 的（经验）速度是过程 $(t^{-1}|Y_t|)$。与 (X_t) 不同，置换随机游走可能没有极限速度。置换随机游走的下速度定义为 $\liminf_{t\to\infty} t^{-1}|Y_t|$。

置换随机游走因其本身的研究价值，以及作为实现其他目标的工具，早已受到研究。Pymar 和 Sousi [8] 为有限正则图上的置换随机游走建立了命中时间的均匀界。Ganguly 和 Peres [3] 研究了在区间上、采用固定均匀随机置换的游走。最近，Chatterjee 和 Diaconis [1, 2] 证明，在每次移动后加入确定性置换，可以显著加快某些马尔可夫链的混合。另一方面，Gou¨ezel [4] 利用置换随机游走，在不对步长分布作矩假设的情况下，建立了双曲空间中随机游走速度的大偏差下界。这里的一种思路是对游走的长步进行条件化，并将该过程视为有界步游走的置换版本；对于后者，可以采用其他方法。本文的核心问题正是在一次介绍这项工作的报告之后提出的。

我们的主要结果是，无论我们如何选择置换（π_t），置换游走（Y_t）都不会比（X_t）慢。

定理 1.1。对于每个 $d \geq 2$、$V(\mathbb{T}_d)$的每个置换序列(π_t) 以及每个时刻 $t \geq 0$，置换随机游走 $|Y_t|$ 的深度在随机序意义下支配懒惰随机游走 $|X_t|$的深度。也就是说，对于所有 $t, n \geq 0$,

$$\mathbb{P}[|Y_t| \geq n] \geq \mathbb{P}[|X_t| \geq n].$$

特别是，$\mathbb{E}|Y_t| \geq \mathbb{E}|X_t|$ 对于所有 $t \geq 0$，且 下极限$\liminf_{t\to\infty} t^{-1}|Y_t| \geq \frac{d-2}{d+1}$ 几乎必然。

注 1.2。定理 1.1 中的过程 (X_t) 和 (Y_t) 对应于一种懒惰随机游走，其以概率 $\frac{1}{d+1}$ 停留在原地。定理 1.1 原样成立（只需对常数 $\frac{d-2}{d+1}$作显而易见的调整），只要停留在原地的概率至少为 $\frac{1}{d+1}$。特别是，当停留在原地的概率为二分之一时，该定理仍成立；这是懒惰随机游走更常见的定义。详情请参见定理 1.1 证明之后的注释。

请注意，即使在 $d = 2$的情况下，该定理仍有指导意义，因为此时极限速度为零。然而，要使定理 1.1 成立，则必须采用懒惰游走。事实上，对于 $\mathbb{T}_d$ 上的非懒惰随机游走，我们可以有 $\mathbb{E}|Y_1| < \mathbb{E}|X_1|$（或者任意其他 t）。

定理 1.1 是更一般现象的一个特例，我们将在接下来的两个定理中描述这一现象。对于定义在 p 上的 V分布，定义 $p^* : \mathbb{N} \to [0, 1]$ 令 $p^*(j)$

为 p中 j 个最大原子的总质量，或者等价地，

$$p^*(s) = \max\{p(J) : J \subset V, |J| = s\}.$$

我们称分布 p **主化**分布 q，如果对于所有 $j \in \mathbb{N}$， $p^*(j) \geq q^*(j)$。

用 p_t 表示 X_t 的分布，用 q_t 表示 Y_t的分布，这些分布隐含地取决于固定的置换（π_t）。定理 1.1 中所断言的随机支配，是以下更具技术性的陈述的推论。主要原因在于，分布 p_t 具有球对称性，且随深度单调；更多细节请参见第 3 节。

定理 1.3。对于每个 $t \geq 0$，分布 p_t 主化 q_t。

p_t 主化 q_t 这一事实可以解释为： q_t 的无序度至多为 p_t的无序度。具体而言，该定理意味着，Y_t 的香农熵至多为 X_t的香农熵。对正则树上的懒惰随机游走应用时变置换，无法增加其熵。

该定理的第二种解释是，对于每个 t，都存在一个关于 V的置换的分布 r_t，使得若从 r_t 中独立于 X_t抽取 σ_t，那么 $(X_t, \sigma_t(X_t))$ 与 (X_t, Y_t) 具有相同的分布。换言之，存在一个关于单个置换 σ_t 的分布，使得可以用它来替代对 t 个置换π_1，……，π_t的迭代应用。

比定理 1.3 更一般的结论也成立。令 $B_n = \{v \in V : |v| \leq n\}$ 表示树[1] 中半径为 $n \geq -1$的球，并令 $\partial B_n = B_n \setminus B_{n-1}$ 表示半径为 n的球面。固定 V 的一个序 $v_0, v_1, v_2, \ldots$，使其满足以下性质：对每个 $i < j$，都有$|v_i| \leq |v_j|$ ；并且若 $|v_i| = |v_j|$，则 v_i 的 $d-1$ 个子节点在序中排在 v_j 的 $d-1$ 个子节点之前。形如 $\{v_0, v_1, \ldots, v_i\}$ 的初始段称为拟球。注意，每个球都是拟球。若分布 p 满足对每个 i 都有 $p(v_i) \geq p(v_{i+1})$，则称其关于 V 贪婪排列。

定理 1.4。设 p 和 q 是定义在 V 上的分布，并设 p' 和 q' 分别是从 p 和 q出发进行一步懒惰随机游走后得到的相应分布。如果p 是贪婪排列的且主化 q，那么 p' 也是贪婪排列的且主化 q'。

定理 1.1 和 1.3 可由最后一个定理结合以下两个观察，通过简单的归纳论证得出。首先，初始分布 p_0 是贪婪排列的，且主化 q_0。其次，如果分布 p 主化 q，那么它也主化 q(即，形如 $q \circ \pi$ 的分布，其中置换 π 是 V的置换。因此，定理 1.4 意味着，对每个 $t \geq 0$ 以及每个有限的 $J \subset V$，

$$p_t(B) \geq q_t(J), \tag{1.1}$$

其中 B 是大小为 $|B| = |J|$ 的拟球。

[1]球 B_{-1} 为空。

1.2 非懒随机游走

最后一个结果是正则树上的惰性随机游走所特有的。对于非惰性游走，该结论过强，因而不成立。正则树上简单非懒随机游走的分布并非贪婪排列的，因为该树是二分的；特别是，(1.1) 可能早在 $t = 1$ 时就不成立。

另一方面，接下来我们将介绍上述定理在非懒惰随机游走情形下的对应版本，它们确实成立。在 $\mathbb{T}_d$ 上简单（非懒惰）随机游走的极限速度为 $\frac{d-2}{d}$，几乎必然成立。如前所述，对于这类随机游走，定理 1.1中的同一随机支配关系并不成立。尽管如此，我们证明该关系几乎成立（至少当 $d > 2$，且树不是一条直线时）。

用 $N'(v)$ 表示 v 不包括 v 在内的 d 邻点。设 (S_t) 是一个简单随机游走，使得 $S_0 = v_0$，且 S_{t+1} 在 $N'(S_t)$ 上均匀分布。设 (Z_t) 是一个置换后的简单随机游走，使得 $Z_0 = v_0$，且 Z_{t+1} 为 $\pi_{t+1}(Z'_{t+1})$，其中 Z'_{t+1} 在 $N'(Z_t)$ 上均匀分布。

定理 1.5. 对于每个 $d > 2$、$V(\mathbb{T}_d)$的每个置换序列(π_t) 以及每个时刻 $t \geq 1$，都有 $|Z_t| + 2$ 在随机意义上支配 $|S_t|$。特别地，$\mathbb{E}|Z_t| \geq \mathbb{E}|S_t| - 2$ 对于所有 $t \geq 0$，且 下极限 $\liminf_{t\to\infty} t^{-1}|Z_t| \geq \frac{d-2}{d}$ 几乎必然成立。

对于 $d = 2$，(Z_t) 的平速度上界 $\frac{d-2}{d}$ 显然成立，但定理中的更强结论并不成立。一个证明方法是令 π_t 在某个较大的时刻 $2T$之前均为恒等置换，然后通过 π_{2T}将范围 $[-2T, 2T]$ 内的所有偶数映射到 $[-T, T]$ 中的所有整数，使得 $\mathbb{E}|Z_{2T}| = \frac{1}{2}\mathbb{E}|S_{2T}|$。

我们将从定理 1.5 的以下变体推出定理 1.4，该变体考虑了非懒惰随机游走的周期性。顶点集可按奇偶性划分为 $V_0 = \{v \in V : \ |v| = 0 \text{ 模 } 2\}$ 和 $V_1 = V \setminus V_0$。若分布 p的支撑位于**半贪婪排列**的其中一个 V_0 或 V_1，且 $p(v_i) \geq p(v_j)$ 对每个 $i < j$ 满足 v_i 和 v_j 具有相同奇偶性（使用与上文相同的 V排序），则称该分布为半贪婪排列。

定理 1.6。 设 p 和 q 是定义在 V上的分布，p' 和 q' 分别是从 p 和 q出发进行一步非惰性随机游走后对应的分布。若 p 是半贪婪排列的并主化 q，则 p' 是半贪婪排列的并主化 q'。

尽管 S_t 的分布并非贪婪排列，但它是半贪婪排列。因此，该定理意味着，对于每个 $t \geq 0$，S_t 的分布都主化 Z_t 的分布（尽管 $|S_t|$ 的分布不一定主化 $|Z_t|$的分布）。

1.3 速度过程

定理 1.1 和1.5 证明，在任意特定时刻，标准（惰性/简单）随机游走的距离随机支配置换随机游走的距离。自然会想知道，对于相应的过程，这种随机支配是否仍然成立；也就是说，这两个过程能否耦合，使得置换随机游走的距离始终不小于标准随机游走的距离。

有些出人意料的是，事实证明这并非总是可能。为明确起见，我们关注惰性随机游走。举例来说，考虑一个置换序列 π，其中π_1 和 π_2 是恒等置换，而 π_3 是 T 的一个自同构，它将 v_0 的一个邻点映射到 v_0。直接计算可得

$$\mathbb{P}[|X_2| + |X_3| \le 2] = \tfrac{1}{d+1} + \tfrac{4d}{(d+1)^3} < \tfrac{1}{d+1} + \tfrac{5d-1}{(d+1)^3} = \mathbb{P}[|Y_2| + |Y_3| \le 2],$$

使得 $(|Y_2|, |Y_3|)$ 在随机意义上不支配 $(|X_2|, |X_3|)$。

当 $d = 2$ 时，这种效应可以随时间反复出现并不断增强。下面的结果表明，对于某些置换，甚至是平移，置换随机游走的距离会在无穷多个时刻显著更小（无论这两个过程如何耦合）。

定理 1.7。 固定 $d = 2$。存在一个置换序列 (π_t)，其元素都是 $V(\mathbb{T}_2) \cong \mathbb{Z}$ 的置换，且全部为平移；对于懒惰随机游走过程(X_t) 与置换随机游走过程 (Y_t)的任意耦合，几乎必然有，

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{|X_t| - |Y_t|}{\sqrt{t \log\log t}} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{1.2}$$

另一方面，当 $d > 2$ 时，我们证明，如果要求这些置换是 $\mathbb{T}_d$ 的自同构，那么上述情况不会发生（甚至不会近似发生）。下面的结果就是对此的阐述。对于一般的置换，我们不知道这种效应能有多强。例如，我们不知道是否总能将这两个过程耦合起来，使得几乎必然地，对于所有足够大的 t，$|X_t| \le |Y_t|$。

定理 1.8。 对于每个 $d > 2$ 以及 $\mathbb{T}_d$ 的任意自同构序列(π_t)，都存在一个耦合，将惰性随机游走过程(X_t) 与置换随机游走过程(Y_t)耦合起来，使得几乎必然有，

$$|Y_t| - |X_t| \ge t^{1/2 - o(1)} \qquad as\ t \to \infty.$$

即使每个 π_t 都是恒等映射，这个定理也很有意思。它指出，存在一种耦合两个惰性随机游走的方式，使得其中一个明显比另一个距离更远。这个结果在以下意义下是紧的：不能完全去掉 $o(1)$ 项。我们的证明给出了这一项的定量估计，并表明 $t^{1/2-o(1)}$ 可以替换为 $\sqrt{t}/(\log^C t$，其中 $C > 0$是某个常数。参见 引理 5.2 及其后的第二条评注。

1.4 谱论证

证明上述结果的一种自然方法是使用谱方法（见 [7]及其中的参考文献）。具体而言，$\ell^2(V)$ 上的转移核是范数为 $\rho < 1$ 的压缩算子，而置换在 $\ell^2(V)$ 上是等距变换。因此，$\|q_t\|_2 \le \rho^t$呈指数衰减。由此很容易得到 Y_t 下速度的一个正下界。此外，这一论证适用于任何非 amenable 图。不过，由此得到的速度界并不尖锐。

谱隙的证明使用了树的等周不等式。我们的证明同样使用等周不等式，这并不令人意外；见 命题 2.2 和 2.3下文。命题 2.3 是一种非标准的等周不等式，它将所关注集合中“孤立”点的数量考虑在内。 命题 2.1 是对运用主序语言表述的等周不等式的重要推广。

2 等周性

如前所述，我们的论证依赖于树的等周性质。不过，要对置换随机游走与正则随机游走进行尽可能有力的比较，我们需要精确的等周不等式，下面就来证明这些不等式。

回忆一下， $N(v)$ 是顶点 v 的邻域，其中包括 v 本身。对于 $J \subset V$， J 的邻域定义为

$$N(J) = \bigcup_{v \in J} N(v).$$

为了分析随机游走的行为，我们需要更详细地了解边界。对于 $J \subset V$ 和 $i \in [d+1]$，定义

$$K_i(J) = \{v \in V : |N(v) \cap J| \geq i\}.$$

特别地，集合 $K_1(J)$ 是邻域 $N(J)$。

一个**分拆** 是一个序列 $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\ell)$，其中 $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_\ell \geq 0$。注意，通常会省略末尾的 0，但为了方便，我们将分拆的长度固定下来，因此可以包含 0。分拆的大小定义为$|\mu| = \sum_i \mu_i$。分拆上的支配序定义如下。对于分拆μ， λ，若 $|\mu| = |\lambda|$，则记作 $\lambda \prec \mu$，并且

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_r \leq \mu_1 + \cdots + \mu_r, \qquad \text{for all } r. \tag{2.1}$$

以下主序结论是树的标准等周不等式的推广。

命题 2.1。 设 $J \subset V$ 为有限集，且设 B 为满足 $|B| = |J|$的拟球。令$k_i = |K_i(J)|$，且 $m_i = |K_i(B)|$。则(k_i) 作为分拆支配(m_i)：$(k_1, \ldots, k_{d+1}) \succ (m_1, \ldots, m_{d+1})$。

为了证明这一结果，我们需要关于树的等周性质的几个引理。令 $\kappa_1(J)$ 表示由 J 诱导的连通分支数。令 $\kappa_2(J)$ 表示在这样一个图中由 J 诱导的连通分支数：该图是在树中任意两个距离为 2 的顶点之间添加边后得到的。第一引理给出了任意 J 下 $|N(J)|$ 的一个公式：

命题 2.2。对于每个有限的 $J \subset V$，

$$|N(J)| = (d-1)|J| + \kappa_1(J) + \kappa_2(J).$$

证明。 我们对 $|J|$ 使用归纳法来证明该断言。当 $|J| = 0$ 时，基础情形显然成立。设J非空。设 $v \in J$是 J 中深度最大的顶点。设 $N_1 = N(v) \cap (J \setminus \{v\})$，且 $N_2 = N(N(v)) \cap (J \setminus \{v\})$。以下两个等式成立：

$$\kappa_1(J \setminus \{v\}) = \kappa_1(J) - \mathbf{1}_{\{N_1=\emptyset\}} \qquad \text{and} \qquad \kappa_2(J \setminus \{v\}) = \kappa_2(J) - \mathbf{1}_{\{N_2=\emptyset\}}.$$

归纳假设意味着

$$|N(J \setminus \{v\})| = (d-1)|J| + \kappa_1(J) + \kappa_2(J) - (d - 1 + \mathbf{1}_{\{N_1=\emptyset\}} + \mathbf{1}_{\{N_2=\emptyset\}}).$$

剩下要证明的是

$$|N(J)| - |N(J \setminus \{v\})| = d - 1 + \mathbf{1}_{\{N_1=\emptyset\}} + \mathbf{1}_{\{N_2=\emptyset\}}.$$

左边等于

$$|N(J) \setminus N(J \setminus \{v\})| = |N(v) \setminus N(J \setminus \{v\})| = d + 1 - |N(v) \cap N(J \setminus \{v\})|.$$

因此我们需要证明

$$|N(v) \cap N(J \setminus \{v\})| = 2 - \mathbf{1}_{\{N_1=\emptyset\}} + \mathbf{1}_{\{N_2=\emptyset\}} = \mathbf{1}_{\{N_1\neq\emptyset\}} + \mathbf{1}_{\{N_2\neq\emptyset\}}.$$

根据 v 的选取， $N(v) \cap N(J \setminus \{v\})$ 中至多有两个顶点： v 及其父节点。顶点 v 位于 $N(J \setminus \{v\})$ 中，当且仅当 $N_1 \neq \emptyset$。它的父节点位于 $N(J \setminus \{v\})$ 中，当且仅当$N_2 \neq \emptyset$。□

对于下一个引理，我们还需要以下定义。 J 中的孤立点集合和 J 中的连通点集合定义为

$$\mathsf{iso}(J) = \{v \in J : N(v) \cap J = \{v\}\} \quad \text{and} \quad \mathsf{con}(J) = J \setminus \mathsf{iso}(J).$$

命题 2.3. 对于每个非空的 $J \subset V$，

$$|N(J)| \geq \begin{cases} 1 + d|J| & \mathsf{con}(J) = \emptyset \\ 2 + d|\mathsf{iso}(J)| + (d-1)|\mathsf{con}(J)| & \mathsf{con}(J) \neq \emptyset. \end{cases}$$

证明。 根据命题 2.2，

$$\begin{aligned} |N(J)| &= (d-1)(|\mathsf{iso}(J)| + |\mathsf{con}(J)|) + \kappa_1(J) + \kappa_2(J) \\ &\geq (d-1)(|\mathsf{iso}(J)| + |\mathsf{con}(J)|) + (|\mathsf{iso}(J)| + \mathbf{1}_{\{\mathsf{con}(J)\neq\emptyset\}}) + 1. \end{aligned}$$ □

命题 *2.1* 的证明。 (k_i) 和 (m_i) 递减这一点显而易见。它们是大小相同的划分 $s = (d+1)|J|$。如果 $|J| = 1$ 那么该命题显然成立，因此我们可以假设 $|J| > 1$。在 V 上序的选取意味着存在 $n \geq 0$ 使得 $B_n \subseteq B \subsetneq B_{n+1}$，其中 B_n 是半径为 n的球。我们可以写成

$$|J| = |B| = |B_n| + a(d-1) + c,$$

其中 a, c 为非负整数，满足 $c < d - 1$。

这棵树足够简单，因此我们可以用以下这些量计算所有的 m_i:

$$\begin{aligned} m_1 &= (d-1)|J| + 2, \\ m_2 &= |J|, \\ \forall\ 3 \le i \le c+2 \qquad m_i &= |B_{n-1}| + a + 1, \\ \forall\ c+3 \le i \le d+1 \qquad m_i &= |B_{n-1}| + a. \end{aligned}$$

情形 $r = 1$ （2.1）现在由命题 2.2得证:

$$k_1 = |N(J)| \ge (d-1)|J| + 2 = m_1.$$

情形 $r = 2$ 证明如下。若 $k_2 = 0$ 则 $k_i = 0$ 对所有 $i \ge 2$ 均成立，证明即告完成。另一方面，若 $k_2 \ge 1$ 则由命题 2.3，并且因为$\mathsf{con}(J) \subseteq K_2(J)$,

$$k_1 + k_2 \ge (d-1)|J| + 1 + 1 = (d-1)|J| + 2 = m_1 + m_2.$$

对于 $r \in \{3, 4, \ldots, d\}$，使用归纳法，由于 $k_r \ge k_{r+1} \ge \ldots \ge k_{d+1}$，我们有

$$k_r \ge a_r := \frac{s - \sum_{i\in[r-1]} k_i}{d-r+2}.$$

由归纳法，

$$\begin{aligned} \sum_{i\in[r]} k_i &\ge a_r + \sum_{i\in[r-1]} k_i \\ &= \frac{s}{d-r+2} + \frac{d-r+1}{d-r+2} \sum_{i\in[r-1]} k_i \\ &\ge \frac{s}{d-r+2} + \frac{d-r+1}{d-r+2} \sum_{i\in[r-1]} m_i \\ &= b_r + \sum_{i\in[r-1]} m_i, \end{aligned}$$

其中

$$b_r := \frac{s - \sum_{i\in[r-1]} m_i}{d-r+2}.$$

如果 $r \le c+2$，那么

$$\begin{aligned} b_r &= \frac{(c+2-r+1)(|B_{n-1}|+a+1) + (d+1-c-2)(|B_{n-1}|+a)}{d-r+2} \\ &= \frac{(d-r+2)(|B_{n-1}|+a) + c + 2 - r}{d-r+2}, \end{aligned}$$

而如果 $r > c+2$，那么

$$b_r = \frac{(d-r+2)(|B_{n-1}|+a)}{d-r+2}.$$

由此可得 $m_r = \lceil b_r \rceil$。所有 k_i 和 m_i 都是整数，因此所需的不等式得证。□

3 惰性随机游走

下面的命题阐述了等周不等式与随机游走行为之间的关键联系。

命题 3.1. 设 $J \subset V$ 为有限集， B 为满足 $|B| = |J|$的拟球。令$k_i = |K_i(J)|$ 以及 $m_i = |K_i(B)|$。对于任意分布 q，

$$\sum_{i\in[d+1]} q^*(k_i) \le \sum_{i\in[d+1]} q^*(m_i).$$

意识到 q^* 可以是 $\mathbb{N}$ 上任意一个从 0 增至 1 的凹函数后，这看起来或许就不那么令人惊讶了。 命题 3.1的证明基于以下主序不等式，该不等式称为 Hardy–Littlewood–P´olya 不等式和卡拉马塔不等式；后者的一个版本最早由 Schur 证明，参见例如 [6,定理 3.C。1]。请注意，支配序的定义 $\mu \succ \lambda$ 可直接扩展到实数的分拆，其中部分为实数而非整数，因此也适用于非整数的被支配序列。在我们的情形中， k_i 和 m_i 都是整数。

定理 3.2。 设 $I \subset \mathbb{R}$ 为一个区间，且 $f\colon\ I \to \mathbb{R}$ 为凹函数。若 $\mu, \lambda \in I^t$ 是两个划分，满足 $\mu \succ \lambda$，则

$$\sum_{i\in[t]} f(\mu_i) \le \sum_{i\in[t]} f(\lambda_i).$$

命题 *3.1*的证明。 应用 定理 3.2 和 命题 2.1 需要将q^* 扩展为凹函数。根据构造，函数 $q^*\colon$ $\mathbb{N} \to [0,1]$ 是递增的，且可写为 $q^*(j) = \sum_{i\in[j]} D(i)$，其中 $D\colon\ \mathbb{N} \to [0,1]$ 是递减函数。因此，通过分段线性插值将 q^* 扩展到 $\mathbb{R}_+$ 后，所得函数递增且为凹函数。 □

下面的观察有助于证明分布是贪婪排列的这一性质。

观察 3.3。 设 B 为一个拟球，且 $i \in [d+1]$。那么， $K_i(B)$是一个拟球。

证明。 将 B写成 $B = \{v_0, v_1, \dots, v_i\}$。 V上的序的选择意味着存在 $n \ge 0$使得 $B_n \subseteq B \subsetneq B_{n+1}$，并且我们可以将 $|B| = |B_n| + a(d-1)$ 写作 $+ c$，其中 a, c 是非负整数，使得 $c < d-1$。按如下方式分析不同的 $K_i(B)$：集合 $K_1(B) = N(B)$ 包含 B_{n+1} 以及 ∂B_{n+2}中的一些最小元素。集合$K_2(B)$ 等于 B。对于 $i \in \{3, \dots, c+2\}$，集合 $K_i(B)$ 包含 B_{n-1} 以及 ∂B_n中最小的 $a+1$个元素。对于 $i \in \{c+3, \dots, d+1\}$，集合 $K_i(B)$ 包含 B_{n-1} 以及 ∂B_n中最小的 a 个元素。□

现在我们可以完成主要结果的证明了。

定理 定理 *1.4*的证明。 设 $J \subset V$ 并设 B 是一个大小相同的拟球。对于$i \in [d+1]$，令 $k_i = |K_i(J)|$ 和 $m_i = |K_i(B)|$。我们有

$$\begin{aligned} q'(J) &= \frac{1}{d+1} \sum_{i \in [d+1]} q(K_i(J)) \\ &\leq \frac{1}{d+1} \sum_{i \in [d+1]} q^*(k_i) \qquad (3.1) \\ &\leq \frac{1}{d+1} \sum_{i \in [d+1]} q^*(m_i) \qquad (3.2) \\ &\leq \frac{1}{d+1} \sum_{i \in [d+1]} p^*(m_i) \qquad (3.3) \\ &= \frac{1}{d+1} \sum_{i \in [d+1]} p(K_i(B)) \qquad (3.4) \\ &= p'(B). \end{aligned}$$

这里，第一个和最后一个等号根据懒惰随机游走的定义成立；(3.1) 根据 q^* 的定义成立；(3.2) 根据命题 3.1 成立；(3.3) 成立，因为 p 主化 q；最后，(3.4) 根据观察 3.3 以及 p 是贪婪排列的这一假设成立。

对于达到 J 的集合 $q'^*(s)$，由上文可知 $q'^*(s) \leq p'(B) = p'^*(s)$。根据观察 p'， p' 是贪婪排列的这一事实成立。观察 3.3。 □

定理 定理 *1.1* 的证明。 定理 1.4 推出 (1.1)，特别是对所有 $p_t(B_n) \geq q_t(B_n)$ n，$t \geq 0$。换言之， $|Y_t|$ 随机占优于 $|X_t|$ ，对每个 $t \geq 0$ 都成立。这意味着 $\mathbb{E}|Y_t| \geq \mathbb{E}|X_t|$。接下来只需证明 $\liminf_{t\to\infty} t^{-1}|Y_t| \geq \frac{d-2}{d+1}$ 几乎必然成立。对每个 $\varepsilon > 0$，标准的集中界表明，存在常数c， $C > 0$，

$$\mathbb{P}\left[t^{-1}|X_t| < \tfrac{d-2}{d+1} - \varepsilon\right] \leq Ce^{-ct}.$$

由于对每个 $t \geq 0$， $|Y_t|$ 在随机序意义上支配 $|X_t|$ ，因此将 X_t替换为 Y_t 后，同样成立。博雷尔–坎特利引理完成了证明。□

注 3.4。 定理 1.4以及因此也包括 定理 1.1 和 1.3，可推广到懒惰随机游走，其中停留不动的概率可以是任意 $\gamma \geq \frac{1}{d+1}$。其思路是，如果$q'_\gamma$ 是将分布 q 以懒惰参数 γ进行一次懒惰随机游走后得到的结果，那么对于任意 $\gamma > \delta$，

$$q'_\gamma = (\gamma - \delta)q + (1 - \gamma + \delta)q'_\delta.$$

我们将此应用于 $\gamma > \delta = \frac{1}{d+1}$， 得到

$$\begin{aligned} q'_\gamma(J) &= \Big(\gamma - \frac{1}{d+1}\Big)q(J) + \Big(1 - \gamma + \frac{1}{d+1}\Big)\frac{1}{d+1} \sum_{i \in [d+1]} q(K_i(J)) \\ &\leq \Big(\gamma - \frac{1}{d+1}\Big)p(B) + \Big(1 - \gamma + \frac{1}{d+1}\Big)\frac{1}{d+1} \sum_{i \in [d+1]} p(K_i(B)) = p'(B). \end{aligned}$$

4 简单随机游走

本节中，我们考虑简单（非惰性）随机游走。论证与惰性情形类似，因此省略一些未改变的细节。对于 $J \subset V$，令

$$N'(J) = \bigcup_{v \in J} N'(v).$$

主要困难源于树是二分的这一事实。半球 B'_n 是如下形式的集合

$$B'_n = \{v \in B_n : |v| \equiv n \mod 2\}.$$

半拟球 是拟球与 V_0 或 V_1 的交集。半拟球具有奇偶性。半贪婪排列 分布是支撑在一个拟球上的分布。

命题 4.1. 对于每个非空的 $J \subset V$，

$$|N'(J)| \geq 1 + (d-1)|J|.$$

证明. 先假设 J 包含在 V_0 或 $V_1 = V \setminus V_0$ 中。在这种情况下，$\kappa_1(J) = |J|$ 因此命题 2.2 推出

$$|N'(J)| = |N(J)| - |J| = (d-1)|J| + \kappa_2(J) \geq (d-1)|J| + 1.$$

其次，对于任意 J，若 $|v| \neq |w|$ 模 2，则有 $N'(v) \cap N'(w) = \emptyset$。分别将上述结果应用于 $J \cap V_0$ 和 $J \cap V_1$，即可得出结论。□

对于 $J \subset V$ 和 $i \in [d]$，定义

$$K'_i(J) = \{v \in V : |N'(v) \cap J| \geq i\}.$$

固定 J，并令 B 为一个大小相同的半拟球。令 $k_i = |K'_i(J)|$，且 $m_i = |K'_i(B)|$。

命题 4.2。对于 V 上的任意分布 q，

$$\sum_{i \in [d]} q^*(k_i) \leq \sum_{i \in [d]} q^*(m_i).$$

证明。与前面一样，只需证明下式，即可由 定理 3.2 推出命题：$k_1, \ldots\ldots, k_d) \succ (m_1, \ldots\ldots, m_d)$。显然，这些都是划分；又由于 $d|J| = \sum_{i \in [d]} k_i = \sum_{i \in [d]} m_i$，它们的大小相同。接下来只需证明这些划分满足（2.1）。记

$$|J| = |B| = |B'_n| + a(d-1) + c,$$

其中 $B'_n \subset B \subsetneq B'_{n+2}$，以及 a，$c \geq 0$都是满足 $c \leq d-2$的整数。现在，m_i的取值如下：$m_1 = (d-1)|J| + 1$；对于 $2 \leq i \leq c+1$，有 $m_i = |B'_{n-2}| + a + 1$；对于 $c+2 \leq i \leq d$，有 $m_i = |B'_{n-2}| + a$。不等式 $\sum_{i \in [r]} k_i \geq \sum_{i \in [r]} m_i$的$r = 1$ 结论可由 命题 4.1得到。对于 $r \geq 2$，可采用与命题 2.1的证明类似的归纳法进行证明。□

观察 4.3。设 B 为一个半拟球，且 $i \in [d]$。那么，$K'_i(B)$ 是一个与 B奇偶性相反的半拟球。

定理 定理 *1.6*的证明。 设 $J \subset V$，并设 B 为一个与 J大小相同且奇偶性与 p相反的半拟球。设 $k_i = |K_i'(J)|$ 和 $m_i = |K_i'(B)|$。我们有

$$\begin{aligned} q'(J) &= \frac{1}{d}\sum_{i\in[d]} q(K_i'(J)) \\ &\le \frac{1}{d}\sum_{i\in[d]} q^*(k_i) \qquad (4.1) \\ &\le \frac{1}{d}\sum_{i\in[d]} q^*(m_i) \qquad (4.2) \\ &\le \frac{1}{d}\sum_{i\in[d]} p^*(m_i) \qquad (4.3) \\ &= \frac{1}{d}\sum_{i\in[d]} p(K_i'(B)) \qquad (4.4) \\ &= p'(B), \end{aligned}$$

其中，第一个和最后一个等号根据非惰性随机游走的定义成立；(4.1) 根据 q^* 的定义成立；(4.2) 根据命题 4.2成立；(4.3) 成立，因为 p 主化 q；而 (4.4) 根据 观察 4.3以及 p 半贪婪排列这一假设成立。结论可用与定理 1.4 的证明相同的方法推出。□

定理 *1.5*的证明。令 p_t 表示 S_t 的分布，并令 q_t 表示 Z_t 的分布。由于 $d > 2$，我们有 $|B_n| \le 1 + d(d-1)^n \le |B'_{n+1}|$。于是有

$$\begin{aligned} q_t(B_n) &\le q_t^*(|B_n|) \qquad (4.5) \\ &\le p_t^*(|B_n|) \qquad (4.6) \\ &\le p_t^*(|B'_{n+1}|) \qquad (4.7) \\ &\le p_t(B_{n+2}), \qquad (4.8) \end{aligned}$$

其中 (4.5) 根据 q_t^* 的定义成立；(4.6) 根据 定理 1.6 以及关于 t 的归纳法成立；(4.7) 成立，因为 $|B_n| \le |B'_{n+1}|$；而 (4.8) 成立，因为 p_t 是半贪婪排列，且 $B'_{n+1} \cup B'_{n+2} \subseteq B_{n+2}$。证明的其余部分与 定理 1.1 的证明类似。□

5 异常时刻

本节讨论在 $\mathbb{Z} \cong \mathbb{T}_2$ 以及$\mathbb{T}_d$ 上进行的 $d > 2$随机游走可能发生的减速。虽然定理 1.1 中的支配性仍然适用，但我们在此探讨是否可以选取（π_t），使得在某些异常时刻，$|Y_t|$ 远小于$|X_t|$。我们证明了定理 1.7，说明在存在发生减速的异常时刻 $\mathbb{Z}$。与之相反，我们证明了定理 1.8，说明在不存在此类时刻 T_d，当

$d > 2$ 且置换仅限于自同构。本节内容基本独立于论文前面的部分。

5.1 $\mathbb{Z}$ 的异常时刻

定理 *1.7* 的证明。 置换 (π_t) 都是 $\mathbb{Z}$的平移。因此，这些置换不仅彼此可交换，也与随机游走的各步可交换。我们将定义一个整数序列 ℓ_t，并将置换 π_t 定义为 $\pi_t\pi_{t-1}\cdots\pi_1(v) = v - \ell_t$。因此，过程 $(Y_t + \ell_t)$ 与随机游走 (X_t) 具有相同的分布。然而，这些过程之间的耦合未必满足 $Y_t = X_t - \ell_t$，尽管这是一种可能的耦合。

为了定义 (ℓ_t)，令 $\phi(t)$ 表示 $(\frac{4}{3}t\log\log t)^{1/2}$ 的整数部分。令 $f(t)$ 为一个趋于无穷、增长速度慢于 $\phi(t)$ 的正整数值非递减函数。令 $(b_j)_{j=0}^{\infty}$由 $b_0 = 1$ 和对所有 $j \geq 0$ 均成立的 $b_{j+1} = b_j + f(b_j)$ 定义。令 (ℓ_t) 由以下条件定义：对所有 $j \geq 0$ 和 $0 \leq i < f(b_j)$， ℓ_{b_j+i} 是 $\phi(b_j)\overline{\cdot(\frac{4i}{f\ b_j()} - 2)}$ 的整数部分。直观地说，对于每个 j，形如 ℓ_{b_j+i} 的数均匀且稠密地分布在 $-2\phi(b_j)$ 与 $2\phi(b_j)$ 之间的区间内。

固定 $\varepsilon > 0$，并考虑时刻集合 T_ε，其中 t 时 $X_t \geq (1-\varepsilon)\phi(t)$。由懒惰随机游走 (X_t) 的迭代对数律可知， T_ε 几乎必然是无限集。由同一迭代对数律可知，几乎必然，时刻集合 T' 中满足 $|Y_t + \ell_t| \leq 1.5\phi(t)$ 的时刻 t 包含除有限个以外的所有正整数。

固定一个充分大的 $t \in T_\varepsilon \cap T'$。令 $j \geq 0$ 满足 $b_j \leq t < b_{j+1}$。由于 $|Y_t + \ell_t| \leq 1.5\phi(t) < 2\phi(b_j)$，存在 $0 \leq i < f(b_j)$ 使得

$$|(Y_t + \ell_t) - \ell_{b_j+i}| \leq \varepsilon\phi(t).$$

在时刻 $t' = b_j + i$，我们有

$$X_{t'} \geq X_t - |t - t'| \geq (1-\varepsilon)\phi(t) - f(b_j) \geq (1-\varepsilon)\phi(t) - f(t) > 0,$$

and

$$|Y_{t'}| = |(Y_{t'} + \ell_{t'}) - \ell_{t'}| \leq |(Y_t + \ell_t) - \ell_{t'}| + |t - t'| \leq \varepsilon\phi(t) + f(t).$$

因此，

$$|X_{t'}| - |Y_{t'}| \geq (1-2\varepsilon)\phi(t) - 2f(t) \geq (1-3\varepsilon)\phi(t').$$

我们得出结论：几乎必然，

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{|X_t| - |Y_t|}{\phi(t)} \geq 1.$$

由于 $\limsup_{t\to\infty} \frac{|X_t|}{\cancel{\phi\ t}\ ()} = 1$ 几乎必然成立，上述等式成立。 □

5.2 $d > 2$ 不存在异常时刻

我们将定理 1.8 的证明分成两部分，以便于阅读，并强调提升自同构限制时缺失的部分。

引理 5.1。 对于每个 $d > 2$ 以及 T_d上的任意自同构序列(π_t)，都存在一个对惰性随机游走过程(X_t) 和置换随机游走过程(Y_t)的耦合，使得几乎必然有：

$$|Y_t| \geq |X_t| - 2\log t \qquad \textit{for all } t \textit{ large enough.}$$

证明。 利用 (π_t) 仅由自同构构成这一点，不难验证 $(\pi_t\pi_{t-1}\cdots\pi_1 X_t)$ 与置换随机游走过程 (Y_t) 具有相同的分布。因此，令 $Y_t = \pi_t\pi_{t-1}\cdots\pi_1 X_t$ 即可描述 (X_t) 与 (Y_t) 之间的耦合。

要证明该耦合满足所声称的性质，注意到 $|X_t| - |Y_t| > k$ 意味着 $|X_t| < k$ 或 $(\pi_t\pi_{t-1}\cdots\pi_1)^{-1}v_0 \in T_k(X_t)$，其中 $T_k(x)$（在$|x| \geq k$时定义）是 $\{v \in V(\mathbb{T}) : |v| \geq k\}$ 中包含 x 的连通分支（子树）。由于给定深度 $|X_t|$时， X_t 服从均匀分布，因此我们得到

$$\mathbb{P}(|X_t| - |Y_t| > k) \leq \mathbb{P}(|X_t| < k) + \frac{1}{|\partial B_k|},$$

其中 $\partial B_k = \{v \in V(\mathbb{T}) : |v| = k\}$ 且 $|\partial B_k| = d(d-1)^{k-1}$。关于 (X_t) 速度的标准集中界现在推出 $\sum_{t=1}^{\infty}\mathbb{P}(|X_t| - |Y_t| > 2\log t) < \infty$，而博雷尔–坎特利引理完成证明。□

引理 5.2。 设(X_t) 是 $\mathbb{Z}$ 上的一个非平凡最近邻随机游走（可以有偏，也可以具有任意的停滞性）。存在一个耦合，将(X_t) 与它的另一个副本(X'_t) 耦合起来，使得对于某个常数 $C > 0$，几乎必然有：

$$X'_t - X_t \geq \frac{\sqrt{t}}{(\log t)^C} \qquad \textit{for all } t \textit{ large enough.}$$

备注 5.3。 对于正偏随机游走， X_t 和 X'_t 最终为正，因此结论等价于 $|X'_t| - |X_t| \geq \sqrt{t}/(\log t)^C$。交换 (X_t) 与 (X'_t) 的角色，可知同一结论对于负偏随机游走也成立。另一方面，对于无偏随机游走， $X'_t = 0$会无穷多次成立。

注记 5.4。 项 $\sqrt{t}/(\log t)^C$ 并非最优，但无法改进为 $c\sqrt{t}$。事实上，在任何耦合中，事件 $\{X_t \geq 0, X'_t < c\sqrt{t}\}$ 发生的概率都有下界，因此由法图引理可知，$X'_t - X_t < c\sqrt{t}$ 以正概率无穷多次发生。

证明。 我们总可以对 (X_t) 和 (X'_t) 进行耦合，使它们在相同的时刻保持不动（而这组时刻的密度小于 1）。因此，只需处理非惰性情形。于是我们假设，对于某个 $p \in (0, 1)$， $\mathbb{P}(X_1 - X_0 = 1) = p$ 且 $\mathbb{P}(X_1 - X_0 = -1) = 1 - p$。

关键步骤是构造两个二项分布随机变量之间的耦合，二者均服从 Binomial$(n, p)$$B_n$，并且 B'_n 满足

$$\mathbb{P}\big(B'_n - B_n \geq \tfrac{\sqrt{n}}{\log^2 n}\big) \geq c' \qquad \text{and} \qquad \mathbb{P}(B'_n < B_n) \leq \tfrac{C'}{\log^2 n},$$

其中，$c', C' > 0$ 是依赖于 p 但不依赖于 n的常数。令 m 为 $\sqrt{n}/\log^2 n$ 的整数部分，并考虑两个区间

$$I_n = [pn - \sqrt{n}, pn] \cap \mathbb{N} \qquad \text{and} \qquad J_n = [pn - \sqrt{n}, pn - m] \cap \mathbb{N}.$$

记 $f(i) = \mathbb{P}(B_n = i)$，并注意到，当 $i \le p(n+1)$ 时，$\frac{f(i)}{f(i-1)} = \frac{p}{1-p} \cdot \frac{n-i+1}{i} \ge 1$。因此，$f(i)$ 关于 $i \in I_n$ 单调递增，而对于 $i \in J_n$，$f(i) \le f(i+m)$。由此可知，存在一种耦合，使得

$$\begin{aligned} B_n \notin I_n &\implies B'_n = B_n, \\ B_n \in J_n &\implies B'_n = B_n + m, \\ B_n \in I_n \setminus J_n &\implies B'_n \in I_n. \end{aligned}$$

中心极限定理意味着，当 $n \to \infty$ 时，$\mathbb{P}(B_n \in J_n)$ 收敛到某个正数常数 $c = c(p)$。由于对于某个常数 $C = C(p)$，f 有上界 $C/\sqrt{n}$，因此我们有 $\mathbb{P}(B_n \in I_n \setminus J_n) \le Cm/\sqrt{n} \le C/\log^2 n$。至此，便构造出了具有所述性质的 B_n 与 B'_n 之间的耦合。

上述 B_n 与 B'_n 之间的耦合很重要，因为 X_t 与 $2B_t - t$ 同分布。考虑时刻 $t_n = 2^n$，其中 $n \ge 1$。我们构造 (X_t) 与 (X'_t) 之间的耦合，使其在这些时刻具有马尔可夫性。固定 $n \ge 1$，并假设我们已经以某种方式耦合了 $(X_t)_{t \le t_n}$ 与 $(X'_t)_{t \le t_n}$（$n = 1$ 的耦合可以任意进行）。现在描述时间区间 $(t_n, t_{n+1}]$ 内两个过程之间的（条件）耦合。此耦合仅取决于 X_{t_n} 和 X'_{t_n}。$(X_t - X_{t_n})_{t_n \le t \le t_{n+1}}$ 与 $(X'_t - X'_{t_n})_{t_n \le t \le t_{n+1}}$ 的分布完全独立于过去（在给定时刻 t_n 的条件下）。它们是长度为 $t_{n+1} - t_n = 2^n$ 的两条随机游走，记为 $(S_i)_{i=0}^{2^n}$ 和 $(S'_i)_{i=0}^{2^n}$。为耦合这两条游走，我们首先使用上述 B_{2^n} 与 B'_{2^n} 之间的耦合（经映射 $x \mapsto 2x - 2^n$ 推前）来耦合端点 S_{2^n} 和 S'_{2^n}。给定端点后，我们耦合这两条游走，使得当 $S'_{2^n} \ge S_{2^n}$ 时，对所有 i 均有 $S'_i \ge S_i$；否则则任意耦合。前一种情况可以这样实现：先采样 (S_i)，然后从增量 $S_i - S_{i+1}$ 为 -1 的坐标中均匀选取 $\frac{1}{2}(S'_{2^n} - S_{2^n})$ 个坐标 i，并在这些位置将相应增量 $S'_i - S'_{i-1}$ 设为 $+1$（其余所有增量在两条游走中保持相同）。至此，(X_t) 与 (X'_t) 之间的耦合构造完毕。

还需要检验所构造的耦合是否具有所声称的性质。令$\Delta_n = X_{t_{n+1}} - X_{t_n}$ 和 $\Delta'_n = X'_{t_{n+1}} - X'_{t_n}$。定义事件

$$E_n = \{\Delta'_n - \Delta_n \ge 2^{n/2}/n^2\} \qquad \text{and} \qquad F_n = \{\Delta'_n < \Delta_n\}.$$

由于 F_n 的概率至多为 C'/n^2，几乎必然只有有限多个 F_n 发生。令 N_1 为满足对任意 $n \ge N_1$，F_n 都不发生的最小正整数。注意到，对于 $t \ge t_{N_1}$，$X'_t - X_t$ 是非递减的。由于 $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是相互独立的事件，且每个事件的概率至少为 c'，几乎必然有无限多个事件发生。此外，几乎必然，对于任意足够大的 n，E_{n-1}，E_{n-2}，$\ldots$，$E_{n - C'' \log n}$ 中至少有一个发生，其中 $C'' > 0$ 是某个足够大的常数。令 N_2 为使得这对 $n \ge N_2$成立的最小正整数。注意，如果 $n - C'' \log n \ge \max\{N_1, N_2\}$ 和 $t_n \le t \le t_{n+1}$，

那么令满足 E_m 发生的 $n - C'' \log n \le m < n$，我们得到

$$\begin{aligned} X'_t - X_t &\ge X'_{t_{m+1}} - X_{t_{m+1}} \\ &= \Delta'_m - \Delta_m + X'_{t_m} - X_{t_m} \\ &\ge 2^{m/2}/m^2 + X'_{t_N} - X_{t_N} \\ &\ge \sqrt{t} \cdot e^{-5C \log\log t}, \end{aligned}$$

其中，最后一个不等式在 t 足够大时成立。 □

定理 1.8 的证明。令 (X'_t) 表示懒惰随机游走 (X_t) 的一个副本。根据第一引理，可以将 (X'_t) 和 (Y_t) 耦合，使得 $|X'_t| - |Y_t| \le 2\log\ t$ 最终成立。根据第二引理（以及其后的第一条注记），可以将随机游走 $(|X_t|)$ 和 $(|X'_t|)$ 耦合，使得 $|X'_t| - |X_t| \ge \sqrt{t}/\log^C t$ 最终成立。将此耦合扩展为 (X_t) 和 (X'_t) 的耦合。现在，过程 (X_t) 和 (Y_t) 已耦合，使得$|Y_t| - \bar{|}X_t| \ge \sqrt{t}/\log^C t - 2\bar{\log}\ t \ge \sqrt{t}/\log^{2C} t$ 最终成立。□

去掉引理 5.1中的 $|X_t| - |Y_t|$ 自同构假设，即使这会使 t 的上界从 $2\log\ \sqrt{t}/(\log\ t)^C$ 增至某个足够大的常数 C，也足以去掉定理 1.8中的自同构假设。

致谢

OA 谨向美国数学研究所（本项目在此启动）和以色列理工学院（合作在此开始）致谢。OA 和 YS 获加拿大自然科学与工程研究理事会的部分资助。AY 获美以双边科学基金会的部分资助。

参考文献

[1] S. Chatterjee 和 P. Diaconis。利用确定性跳跃加速马尔可夫链。《概率论及相关领域》，178(3-4)，2020。[2] S. Chatterjee 和 P. Diaconis。勘误：利用确定性跳跃加速马尔可夫链。《概率论及相关领域》，181(1-3):377–400，2021。[3] S. Ganguly 和 Y. Peres。置换随机游走通常在线性时间内离开。在*2014*年第十一届解析算法与组合学研讨会论文集（*ANALCO*）中，第 74–81 页。工业与应用数学学会，2014。[4] S. Gou¨ezel。无矩条件下双曲空间上随机游走的指数界。《突尼斯数学杂志》，4(4):635–671，2023。[5] R. Lyons 和 Y. Peres。树与网络上的概率论。剑桥大学出版社，2017。[6] A. W. Marshall、I. Olkin 和 B. C. Arnold。不等式：主序理论及其应用，第 143 卷。施普林格，1979。[7] B. Morris 和 Y. Peres。演化集合、混合与热核界。《概率论及相关领域》，133(2):245–266，2005。[8] R. Pymar 和 P. Sousi。置换随机游走离开得更快。*arXiv* 预印本 *arXiv:1304.6704*，2013。[9] B. Vir´ag。锚定扩张与随机游走。《几何与泛函分析》，10(6):1588–1605，2000。

Department of Mathematics, University of British Columbia
电子邮箱：angel@math.ubc.ca

Department of Mathematics, University of British Columbia
电子邮件地址：jfrichey@math.ubc.ca

Department of Mathematics, University of British Columbia
School of Mathematical Sciences. Tel Aviv University. Tel Aviv 6997801, Israel电子邮件地址：yinon@math.ubc.ca

Department of Mathematics, Technion-IIT
电子邮件地址：amir.yehudayoff@gmail.com