arXiv:2302.00764v2 [math.NT] 7 Jul 2023

权重 3、61、73 和 79 级参数模非提升形式的特征值与同余

CRIS POOR、JERRY SHURMAN 和 DAVID S. Y UEN

ABSTRACT. 我们利用 Borcherds 乘积，针对层数为 $N = 61$、73、79 的情形，给出权重 3 参数模非提升特征形式 f_N 的一种新构造。我们将 f_N 与 Gritsenko 提升之间的同余分类。我们提供了计算特征值的技术，以支持未来的模性应用。我们的方法并不从傅里叶系数计算海克特征值，而是使用椭圆模形式，具体而言，是使用 Gritsenko 提升的限制以及它们在斜线算子作用下到模曲线的像。

1. INTRODUCTION

我们计算层数为 $N = 61$、73、79 的素数层上的非提升新形式 $f_N \in \mathcal{S}_3($K$(N))$ 的海克特征值，以支持未来对导子为 N 的卡拉比–丘三维簇进行模性证明。Vasily Golyshev 和杜科·冯·斯特拉滕 [8] 最近发现了一个导子为 $N = 79$ 的卡拉比–丘三维簇。预期的模性证明将通过证明相关伽罗瓦表示的等价性来进行，正如 [4] 中所述。我们还利用 Borcherds 乘积给出了每个 f_N的一种新的简单构造。这一构造使我们能够证明提升形式与非提升形式之间的傅里叶系数同余。本文是 Day 61 项目的一部分，该项目于 2019 年 1 月在美因茨启动。

上述 f_N特征值首次出现在 Avner Ash、Paul E. Gunnells 和 Mark McConnell 的工作中 [1], ，他们当时正在寻找一个确实源自 SL(4) 的上同调空间 $H^5(\Gamma_0(N); \mathbb{C})$中的元素。这里，$\Gamma_0(N) \subseteq$ SL$_4(\mathbb{Z})$是由模 N同余于$(0, 0, 0, *)$的底行元素组成的子群。尽管他们没有找到这样的元素，但对于 $N = 61$、73、79，他们确实观察到了 2-欧拉因子和 3-欧拉因子，并认为这些因子源自次数为 2 的 Siegel 模尖点形式。

在 [28] 中，为 $N = 61$、73、79 构造了 $\mathcal{S}_3($K$(N))$中的参数模非提升新形式，它们是 Gritsenko 提升的全纯商。特征值由傅里叶系数直接计算得出，并且计算了足够多的傅里叶系数，以得到 2、3 和 5-欧拉因子。例如，f_{61}的存在性可由 Tomoyoshi Ibukiyama 给出的素数层维数公式推出 [18], ，即 dim $\mathcal{S}_3($K$(61)) = 7$，而提升空间的维数 dim $J_{3,61}^{\text{cusp}} = 6$ 则来自 [7]。事实上，61 是 $\mathcal{S}_3($K$(N))$含有非提升形式的最低层，无论该层是素数层还是合数层；首批这样的层为 61、69、73、76、79、82、85、87、89。

Golyshev 和 Anton Mellit 开发了一种实验方法，利用函数方程的存在，直接搜索 L-级数。2010年，Mellit

Date: 2023年7月11日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：11F46；次要分类：11F30、11F50。*Key words and phrases.* 参数模尖点形式、海克特征值、同余。

找到了导子为 61 的 4 L 次级数的前 53 个狄利克雷系数，并将这些初始系数与 [28] 的 arXiv 版本中 $L(s, f_{61}, \text{spin})$ 的欧拉因子进行了匹配。

随着维数公式日益完善，Ibukiyama 提出了猜想，将 GSp(4) 上权重为 $k \geq 3$ 的标量 [16, 17] 和向量 [19, 21] 参数模形式，与紧扭 GU(2, B) 上的代数模形式联系起来，其中 B 是一个定四元数代数。Pol van Hoften [36] 已证明了 [19] 中的一种猜想形式。Ibukiyama 和 Hidetaka Kitayama 在 [21] 中提出的猜想，已由 Mirko R¨osner 和 Rainer Weissauer 在 [33], 中证明，并在 [6] 中推广，使四元数代数 B 的判别式可以是层 N 的真因子。Neil Dummigan、Ariel Pacetti、Gustavo Rama 和 Gonzalo Tornaria 在 [6] 中的主要成果，是给出一种精确的对应关系；这一对应受到 [20], 的启发，联系了 GU(2, B) 上的代数模形式与某个经过精心选取的五元格上的正交模形式。因此，对于权重为 $k \geq 3$ 、层为 N 且满足 $p \| N$ （其中 p 为某个素数）的情形，参数化新形式与某些正交模形式的海克特征值相同。Jeffery Hein、Watson Ladd 和 Tornaria 合作开发了快速计算素数层 N 上正交模形式特征值的方法 [15, 23]。Rama 和 Tornaria [29] 将这些方法推广到具有涉及旋量范数的特征的正交模形式，并猜想对于素数 N ，$S_3(K(N))$ 与由具有平凡和非平凡特征的正交模形式空间组成的直和之间存在海克不变同构。这项工作促成了 [33]。Hein [15] 计算了 $p < 100$ 和素数层 $N \leq 197$ 的欧拉因子。 [23] 的附录包含素数 $3 \leq p \leq 31$ 和介于 61 至 359 的素数层 N 的欧拉因子。在 [29] 中，给出了无平方因子层 $N < 1000$ 的 2、3 和 5 欧拉因子。Eran Assaf、Ladd、Rama、Tornaria 和 John Voight 在 [3] 中提供了规模更大的正交模形式特征值数据集，涵盖满足 [6] 条件的层 N。其中包括 $T(p^j)$ 在相似因子为 $p^j < 200$ 、$1 \leq j \leq 2$ 时的特征值，以及权三参数化新形式的特征值。

目前已知将伽罗瓦表示与正交模形式联系起来的唯一方法，是转而考察具有相同特征值的参数化模形式。按照 [2], , 可以将伽罗瓦表示与 $H^5(\Gamma_0(N); \mathbb{C})$ 中的元素联系起来，但利用 Sharbly 复形计算特征值的代价很高。因此，目前证明霍奇类型为 (1, 1, 1, 1) 的卡拉比–丘三维簇具有模性，依赖于分别将伽罗瓦表示与该三维簇及一个参数化新形式联系起来，并计算足够多的海克特征值，以应用针对 GSp(4) 的法尔廷斯–塞尔方法。一旦证明了模性，计算欧拉因子最高效的方法将是对有限域上的点进行计数，或者也可以利用与卡拉比–丘三维簇相关的四阶皮卡–福克斯微分方程；关于这一主题的猜想，见 [5] 。实际上，本文通过缓慢的自守方法计算特征值，以支持未来的证明：这些相同的特征值可以通过快速的算术方法计算得到。对于 $N = 61$、73、79，我们给出 p 在 19 以内的 p-欧拉因子，以及素数 $p < 200$ 对应的 T(p) 特征值，包括坏素数 $p = N$。

本文采用 [4] 中使用的限制到模曲线技术，计算参数化新形式的海克特征值。该技术不使用傅里叶系数，也避免了 [28] 中所用的参数模形式多变量傅里叶展开。相反，该技术处理单变量

椭圆模形式的 q 展开；这些展开是将 $f_N|\gamma$（对于 $\gamma \in \mathrm{GSp}_4^+(\mathbb{Q})$）限制到一条固定的辅助模曲线上得到的。该技术的效率取决于构造参数模形式的方法。这里，f_N 被构造成 Gritsenko 提升的商，并运用 [13] 中的思想给出了这一构造的一个新的简洁证明。然而，限制到模曲线这一技术真正的优点在于，它能够实现各种加速方法，其中一些已在 [4] 中给出。本文首次介绍了所有已知的、用于通过这一技术计算 Hecke 算子 $\mathrm{T}(p)$、$\mathrm{T}_1(p^2)$（针对 $p \nmid N$）以及 $\mathrm{T}(p)$、$\mathrm{T}_{1,0}(p^2)$（针对 $p \| N$）特征值的加速方法，其中 p 是素数。

将 f_N 构造为 Gritsenko 提升和 Borcherds乘积的线性组合，可以直接证明傅里叶系数之间的最优同余。这些傅里叶系数的同余立即推出特征值的同余，进而推出欧拉多项式的同余。因此，我们能够将所有非提升特征形式 f_N 与 Gritsenko 提升之间的同余分类。这种证明同余的方法允许同余素数整除 Hecke 域生成元多项式的判别式；紧接下方表格中扩张次数为 7 和 5 的情形便满足这一条件。对于表格的每一行，f_N 与 Gritsenko 提升特征形式 $g = g(a) \in \mathcal{S}_3(\mathrm{K}(N))$ 同余，其中 $a \in \overline{\mathbb{Z}}$ 是 g 的 T(2) 特征值；对于 $K = \mathbb{Q}(a)$，f_N 和 g 的欧拉多项式模数域整数环 $\mathcal{O}_K$的理想 $\mathfrak{a}$ 同余，且 $\mathfrak{a}$ 是满足这一条件的最小 $\mathcal{O}_K$理想。此外，可以对 g 作归一化，使得 f_N和 g 的傅里叶系数模 $\mathfrak{a}$同余。表格还列出了 a的多项式 $q(x) \in \mathbb{Z}[x]$的判别式。在表格的最后一行中，v 是根据定理 4.8 的证明中所述方法，由 a 构造的代数整数。

N	$[K:\mathbb{Q}]$	$\mathfrak{a}$	disc(q)
61	6	$\langle 43, a+7\rangle$	$2^{14}\cdot 3^6\cdot 1892022169$
73	1	3	1
	7	$\langle 3,a\rangle\langle 13,a+6\rangle$	$2^{24}\cdot 3\cdot 13\cdot 19^2\cdot 37\cdot 101\cdot 30391$
79	2	$\langle 2,a+1\rangle$	17
	5	$\langle 2,v\rangle^3$	$2^{16}\cdot 4787257$

利用本文所述的加速方法，我们可以计算出以下特征值和欧拉多项式。这些是自旋多项式，其公式将在下文引理 4.5 的证明中给出。这些结果与配套网页 [30] 至 [29]上发布的结果有相当多的重合。

对于 $N = 61$和 $f = f_{61}$的非提升特征形式，素数 $p < 200$ 对应的数对 $(p, \lambda_f(\mathrm{T}(p))$ 为

(2, −7), (3, −3), (5, 3), (7, −9), (11, −4), (13, −3), (17, 37), (19, −75), (23, 10), (29, 212), (31, −6), (37, −88), (41, −3), (43, 547), (47, −147), (53, −108), (59, −45), (61, 146), (67, −632), (71, −650), (73, 859), (79, −978), (83, 931), (89, −571), (97, 453), (101, 830), (103, 1246), (107, 707), (109, −378), (113, −225), (127, 1607), (131, −1399), (137, −861), (139, 1938), (149, 157), (151, 2356), (157, −414), (163, −11), (167, −1852), (173, −2021), (179,1444), (181, 442), (191, −366), (193, −2790), (197, −815), (199, −2753)。

素数 $p \le 19$ 对应的数对 $(p, \lambda_f(\mathrm{T}_1(p^2)))$ 为

$$(2,7),(3,-9),(5,-9),(7,-42),(11,36),(13,-57),(17,176),(19,32),$$

$p \le 19$ 的欧拉多项式如下。

p	$Q_p(f_{61};\ x)$
2	$1+7x+24x^2+56x^3+64x^4$
3	$1+3x+3x^2+81x^3+729x^4$
5	$1-3x+85x^2-375x^3+15625x^4$
7	$1+9x+56x^2+3087x^3+117649x^4$
11	$1+4x+1738x^2+5324x^3+1771561x^4$
13	$1+3x+1469x^2+6591x^3+4826809x^4$
17	$1-37x+7922x^2-181781x^3+24137569x^4$
19	$1+75x+7486x^2+514425x^3+47045881x^4$

$p = 61$ 的 Atkin–Lehner 符号和欧拉多项式分别为 $\epsilon_{61} = -1$ 和

$$Q_{61}(f_{61};x) = (1-61x)(1-84x+226981x^2).$$

For $N = 73$ and $f = f_{73}$, the pairs $(p, \lambda_f(\mathrm{T}(p)))$ for primes $p < 200$ are

$(2,-6),(3,-2),(5,0),(7,7),(11,-66),(13,16),(17,51),(19,16),$
$(23,153),(29,-18),(31,-185),(37,220),(41,60),(43,-458),(47,9),$
$(53,138),(59,84),(61,-218),(67,70),(71,279),(73,-23),(79,808),$
$(83,-492),(89,-240),(97,1042),$
$(101,138),(103,-5),(107,-180),(109,676),(113,-1086),$
$(127,-104),(131,-2274),(137,144),(139,-80),(149,306),$
$(151,-1721),(157,-320),(163,1798),(167,975),(173,1422),(179,-2784),$
$(181,-1604),(191,2661),(193,2017),(197,-96),(199,2428).$

素数 $p \le 19$ 对应的数对 $(p, \lambda_f(\mathrm{T}_1(p^2)))$ 为

$$(2,6),(3,-9),(5,0),(7,-110),(11,162),(13,-284),(17,-90),(19,-251),$$

$p \le 19$ 的欧拉多项式如下。

p	$Q_p\ (f_{73};\ \ x)$
2	$1+6x+22x^2+48x^3+64x^4$
3	$1+2x+3x^2+54x^3+729x^4$
5	$1+130x^2+15625x^4$
7	$1-7x-420x^2-2401x^3+117649x^4$
11	$1+66x+3124x^2+87846x^3+1771561x^4$
13	$1-16x-1482x^2-35152x^3+4826809x^4$
17	$1-51x+3400x^2-250563x^3+24137569x^4$
19	$1-16x+2109x^2-109744x^3+47045881x^4$

对于 $p = 73$ ， Atkin–Lehner 符号和欧拉多项式分别为 $\epsilon_{73} = -1$ 和

$$Q_{73}(f_{73};x) = (1-73x)(1+97x+389017x^2).$$

For $N = 79$ and $f = f_{79}$, the pairs $(p, \lambda_f(\mathrm{T}(p)))$ for primes $p < 200$ are

$(2,-5),(3,-5),(5,3),(7,15),(11,26),(13,-15),(17,-60),(19,32),$
$(23,50),(29,24),(31,142),(37,-500),(41,240),(43,-320),(47,-105),$
$(53,630),(59,25),(61,194),(67,420),(71,111),(73,460),(79,128),$
$(83,-90),(89,-1261),(97,1895),$
$(101,-1239),(103,-2105),(107,-295),(109,-608),(113,90),$
$(127,2565),(131,578),(137,-50),(139,-849),(149,-904),$
$(151,-354),(157,1980),(163,840),(167,2650),(173,-3570),(179,3340),$
$(181,-708),(191,-695),(193,1000),(197,-40),(199,-141).$

这些结果与 a_p 中卡拉比–丘三维簇 Y_{79} 在 [8], 上的数值表一致，该表列至 $p = 103$。对于素数 $p \le 19$，数对 $(p, \lambda_f(\mathrm{T}_1(p^2)))$ 为

$$(2,2),(3,4),(5,-10),(7,-24),(11,0),(13,-158),(17,-156),(19,-712)$$

以及 $p \le 19$ 的欧拉多项式如下。

p	$Q_p(f_{79};\, x)$
2	$1 + 5x + 14x^2 + 40x^3 + 64x^4$
3	$1 + 5x + 42x^2 + 135x^3 + 729x^4$
5	$1 - 3x + 80x^2 - 375x^3 + 15625x^4$
7	$1 - 15x + 182x^2 - 5145x^3 + 117649x^4$
11	$1 - 26x + 1342x^2 - 34606x^3 + 1771561x^4$
13	$1 + 15x + 156x^2 + 32955x^3 + 4826809x^4$
17	$1 + 60x + 2278x^2 + 294780x^3 + 24137569x^4$
19	$1 - 32x - 6650x^2 - 219488x^3 + 47045881x^4$

对于 $p = 79$，Atkin–Lehner 符号和欧拉多项式分别为 $\epsilon_{79} = -1$ 和

$$Q_{79}(f_{79}; x) = (1 - 79x)(1 - 48x + 493039x^2).$$

致谢。我们感谢 Neil Dummigan 和 Dave Roberts 提供的宝贵意见。本项目是在美国数学研究所的一次 SQuaRE 活动期间完成的。作者感谢 AIM 提供了一个充满支持且富有数学氛围的环境。

2. Background

正整数集合记为 $\mathbb{N}$，非负整数集合记为 $\mathbb{N}_0$。代数数域 K 的整数环记为 $\mathcal{O}_K$。由任意集合 $S \subseteq \mathcal{O}_K$ 生成的 $\mathcal{O}_K$-理想记为 $\langle S \rangle$，但当 p 是有理素数时，我们通常将 $\langle p \rangle$ 记为 $p\mathcal{O}_K$。从 K 到 $\mathbb{Q}$ 的理想范数和伽罗瓦范数均记为 N，因此对所有 $a \in \mathcal{O}_K$，都有 $\mathrm{N}(\langle a \rangle) = |\mathrm{N}(a)|$。

2.1. 参数模形式。

2.1.1. 定义，傅里叶级数表示。由 4×4 矩阵构成的 2阶辛群 Sp(2) 由条件 $g'Jg = J$ 定义，其中撇号表示矩阵转置，J 是斜对称形式 $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$，其每个分块均为 2×2。Sp(2) 的克林根抛物子群为

$$\mathrm{P}_{2,1} = \{ \left(\begin{array}{cc|cc} * & 0 & * & * \\ * & * & * & * \\ \hline * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{array}\right) \},$$

由于矩阵为辛矩阵，任一行或列中出现三个零都会迫使其余两个元素也为零。对于任意正整数 N，次数为 2、层为 N 的参数化模群 K(N)，是保持列向量格 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus N\mathbb{Z}$ 不变的有理辛矩阵群。用坐标表示，

$$\mathrm{K}(N) = \{ \left(\begin{array}{cc|cc} * & *N & * & * \\ * & * & * & */N \\ \hline * & *N & * & * \\ *N & *N & *N & * \end{array}\right) \in \mathrm{Sp}_2(\mathbb{Q}) : \text{all } * \text{ entries integral} \}.$$

令 $\mathcal{H}_2$ 表示由 2×2 个虚部正定的对称复矩阵构成的 Siegel 上半空间，它是复上半平面 $\mathcal{H}$ 的推广。该空间中的元素记作

$$\Omega = \left(\begin{array}{cc} \tau & z \\ z & \omega \end{array}\right) \in \mathcal{H}_2,$$

其中 τ、$\omega \in \mathcal{H}$、$z \in \mathbb{C}$，且 Im(Ω) > 0。此外，令 e(w) $= e^{2\pi i w}$，其中 $w \in \mathbb{C}$，则全文采用的标准记号为

$$q = \mathrm{e}(\tau), \quad \zeta = \mathrm{e}(z), \quad \xi = \mathrm{e}(\omega).$$

实辛群 Sp$_2$($\mathbb{R}$) 通过分式线性变换作用于 $\mathcal{H}_2$，g(Ω) $= (a\Omega + b)(c\Omega + d)^{-1}$，其中 $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$；自守因子为 $j(g, \Omega)$ $=$det(cΩ $+ d$)。固定一个整数 k。任意函数 f: $\mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathbb{C}$ 与任意实辛矩阵 $g \in$ Sp$_2$($\mathbb{R}$)，通过权重 k 斜线算子结合后，可构成另一个这样的函数，

$$(f|_k g)(\Omega) = j(g, \Omega)^{-k} f(g(\Omega)).$$

当 k 已经明确确立时，我们通常写作 $f|g$，而不写 $f|_k g$。权重为 k、层为 N 的参数化模形式是一个全纯函数 f: $\mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathbb{C}$，且满足 $|_k$K(N)-不变性。权重为 k、层为 N 的参数化模形式空间记作 $\mathcal{M}_k$(K(N))。

层为 N 的参数化模形式具有傅里叶展开

$$f(\Omega) = \sum_{t \in \mathcal{X}_2(N)^{\mathrm{semi}}} a(t; f)\, \mathrm{e}(\langle t, \Omega \rangle)$$

其中所有 a(t; f) $\in \mathbb{C}$，指标集为

$$\mathcal{X}_2(N)^{\mathrm{semi}} = \{ \left(\begin{smallmatrix} n & r/2 \\ r/2 & mN \end{smallmatrix}\right) : n, m \in \mathbb{N}_0, r \in \mathbb{Z}, 4nmN - r^2 \geq 0 \}$$

以及 $\langle t$、Ω$\rangle$ $=$tr(tΩ)。对于 $\mathbb{C}$ 的任意子环 R，我们将 $\mathcal{M}_k$(K(N))(R) 记为其傅里叶系数全部属于 R 的 $\mathcal{M}_k$(K(N)-R 模。这种记法也适用于下文将要引入的 $\mathcal{M}_k$(K(N)) 的所有子空间，例如，

$\mathcal{S}_k(\mathrm{K}(N))^+(\mathbb{Z})$ 是由参数模尖点形式构成的 $\mathbb{Z}$ 模，这些形式是 Fricke 特征函数，特征值为 1，且所有傅里叶系数都属于 $\mathbb{Z}$。如果 $\mathcal{M}_k(\mathrm{K}(N))(R)$ 中的一个元素所生成的理想恰为 R，则称该元素具有单位内容。

Siegel Φ 算子将任何具有如下傅里叶级数的全纯函数：$f(\Omega)=\sum_t a(t;f)\,\mathrm{e}(\langle t,\Omega\rangle)$，其中对有理半正定$2\times2$矩阵 t求和，映射为函数 $(\Phi f)(\tau)=\lim_{\lambda\to+\infty} f(\left(\begin{smallmatrix}\tau&0\\0&i\lambda\end{smallmatrix}\right))$。若参数化模形式$f$属于 $\mathcal{M}_k(\mathrm{K}(N))$，且对所有 $g\in\mathrm{Sp}_2(\mathbb{Q})$ 均有 $\Phi(f|_k g)=0$，则称其为尖点形式。这是一个有限条件，因为只需对 Helmut Reefschl¨ager 分解中每个双陪集的一个代表元 g 进行检验（另见 [27]中的定理 1.2）；其中上标星号表示矩阵逆转置，

$$\mathrm{Sp}_2(\mathbb{Q})=\bigsqcup_{m\in\mathbb{N}:m\mid N}\mathrm{K}(N)u(\alpha_m)\,\mathrm{P}_{2,1}(\mathbb{Q}),\qquad \alpha_m=\left(\begin{smallmatrix}1&m\\0&1\end{smallmatrix}\right),\ u(\alpha)=\left(\begin{smallmatrix}\alpha&0\\0&\alpha^*\end{smallmatrix}\right).$$

参数化模形式是尖点形式，当且仅当其傅里叶展开支集包含于 $\mathcal{X}_2(N)$，该集合由严格不等式 $4nmN-r^2>0$ 定义；对于与 $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{Z})$ 可公度的群，尖点形式的这一刻画通常并不成立，但对于 $\mathrm{K}(N)$ 则成立，因为 Reefschl¨ager 分解中的代表元具有分块对角形式。参数化尖点形式空间记作 $\mathcal{S}_k(\mathrm{K}(N))$。

2.1.2. 对称形式与反对称形式。椭圆 Fricke 对合

$$\alpha_N=\frac{1}{\sqrt{N}}\begin{pmatrix}0&-1\\N&0\end{pmatrix}:\tau\longmapsto-\frac{1}{N\tau}$$

将 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 的 N Hecke 子群 $\Gamma_0(N)$ 规范化，且其作为矩阵的平方为 -1，因此作为变换的平方为恒等变换。相应的参数化 Fricke 对合为

$$\mu_N=\begin{pmatrix}\alpha_N^*&0\\0&\alpha_N\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}\tau&z\\z&\omega\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}\omega N&-z\\-z&\tau/N\end{pmatrix}.$$

参数化 Fricke 对合将参数化模群 $\mathrm{K}(N)$ 规范化，且其作为变换的平方为恒等变换。空间 $\mathcal{S}_k(\mathrm{K}(N))$ 分解为对应于两个特征值 ±1, $\mathcal{S}_k(\mathrm{K}(N))=\mathcal{S}_k(\mathrm{K}(N))^+\oplus\mathcal{S}_k(\mathrm{K}(N))^-$ 的 Fricke 特征子空间的直和。令 ϵ 表示其中任一特征值。参数化 Fricke 特征形式若满足 $(-1)^k\epsilon=+1$，则称为对称形式；若满足 $(-1)^k\epsilon=-1$，则称为反对称形式。

2.1.3. Atkin–Lehner 对合。设 N 为正整数，c 为 N 的正因子，且 $\gcd(c,N/c)=1$。本文中 N 始终无平方因子，因此 c可以是 N的任意正因子。对于满足 $\alpha\delta c-\beta\gamma N/c=1$ 的任意整数 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$，椭圆 c-Atkin–Lehner 矩阵为

$$\alpha_c=\frac{1}{\sqrt{c}}\begin{pmatrix}\alpha c&\beta\\\gamma N&\delta c\end{pmatrix}.$$

特别地，对于 $c=1$，我们可以取 α、$\delta=1$ 和 β、$\gamma=0$，得到单位矩阵；对于 $c=N$，我们可以取 α、$\delta=0$ 和 β、$\gamma=\mp1$，得到 Fricke 对合矩阵 $\alpha_N=\frac{1}{\sqrt{N}}\left(\begin{smallmatrix}0&-1\\N&0\end{smallmatrix}\right)$。经过简单计算可知，任意 α_c 的逆元都是另一个 $\tilde{\alpha}_c$，任意乘积 $\tilde{\alpha}_c\alpha_c$ 都属于 $\Gamma_0(N)$，因此所有 $\tilde{\alpha}_c$ 组成的集合都包含于陪集 $\Gamma_0(N)\alpha_c$ 中；而该陪集也包含于所有 $\tilde{\alpha}_c$ 组成的集合中，故二者相等。因此，α_c

平方后属于 $\Gamma_0(N)$，并正规化 $\Gamma_0(N)$。一个参数化的 c-Atkin–Lehner 矩阵 x is

$$\mu_c = u\left(\alpha_c^*\right) = \begin{pmatrix} \alpha_c^* & 0 \\ 0 & \alpha_c \end{pmatrix}.$$

任意 μ_c 的逆元都是另一个 $\tilde{\mu}_c$，且任意乘积 $\tilde{\mu}_c\mu_c$ 都属于 K(N)，因此所有 $\tilde{\mu}_c$ 构成的集合都包含于陪集 K(N)μ_c 中，并且它们对参数模形式的作用都相同，尽管此时包含关系是严格的。同样，μ_c 的平方属于 K(N)，逐块检验可知 μ_c正规化 K(N)。对于 $c = 1$，我们取 $\mu_1 = 1_4$。对于 $c = N$，参数化 Fricke 对合就是上一段中的 μ_N。

2.2. Hecke 算子。实辛群包含于更大的群 $\mathrm{GSp}_2^+(\mathbb{R})$ 中，该群由条件 $g'Jg = m(g)J$ 且 $m(g) \in \mathbb{R}_{>0}$ 定义。权重 k 斜线算子扩展为 $(f|_k g)(\Omega) = m(g)^{2k-3} j(g,\Omega)^{-k} f(g(\Omega))$，其中 $g \in \mathrm{GSp}_2^+(\mathbb{R})$。这是斜线算子的算术归一化，与之相对的是解析归一化，后者以 $m(g)^k$ 代替。本文涉及三个 Hecke 算子，它们按双陪集的通常方式定义。特别地，令 T(a,b,c,d) 表示双陪集 K(N) diag(a,b,c,d)K(N)。

- T(p) = T(1, 1, p, p)。由于这里的双陪集也是 T(p, p, 1, 1)，并用于定义算子 $T_{0,1}(p)$，因此这两个算子相等，本文不再提及记号 $T_{0,1}(p)$。一般而言，T(a,b, c,d)、T(c,b,a,d)、T(a,d,c,b) 和 T(c,d,a,b) 都相等；也就是说，我们可以交换第一项与第三项、第二项与第四项，或同时交换这两对项。
- $T_1(p^2)$ = T(1, p, p^2, p)。这是一个标准算子，用于 [4]。
- T1,0(p^2) = T(p, p^2, p, 1)。在 [34] 中，这个算子记作 T1,0(p)。我们将其记作 T1,0(p^2)，以表明其乘子。算子 T1(p^2) 和 T1,0(p^2) 在 Fricke 算子下共轭，μ_N^{-1} T1(p^2)μ_N =T1,0(p^2)。一般而言，μ_N^{-1} T(a,b,c,d)μ_N = T(b,a,d,c)，而右侧还有另外三个名称，如上所述。

本文在 $p \nmid N$ 时使用 $T_1(p^2)$，在 $p \| N$ 时使用 $T_{1,0}(p^2)$。

2.2.1. 傅里叶–雅可比展开。参数模尖点形式 $f \in \mathcal{S}_k$(K(N)) 的傅里叶–雅可比展开为

$$f(\Omega) = \sum_{m \geq 1} \phi_m(f)(\tau, z)\xi^{mN}, \quad \Omega = \begin{pmatrix} \tau & z \\ z & \omega \end{pmatrix},$$

其傅里叶–雅可比系数为

$$\phi_m(f)(\tau, z) = \sum_{t = \left(\begin{smallmatrix} n & r/2 \\ r/2 & mN \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{X}_2(N)} a(t; f) q^n \zeta^r.$$

傅里叶–雅可比系数也记作

$$\phi_m(f)(\tau, z) = \sum_{n,r : 4nmN - r^2 > 0} c\left(n, r; \phi_m\right) q^n \zeta^r.$$

每个傅里叶–雅可比系数 $\phi_m(f)$ 都属于空间 $\mathrm{J}_k^{\mathrm{cusp}}{}_{,\, mN}$，该空间由权重为 k、指标为 mN 的雅可比尖点形式构成，其维数已知。接下来将简要回顾 Jacobi 形式。

2.3. Jacobi 形式。关于雅可比形式理论，参见 [7, 12, 35]。设 k 为整数， m 为非负整数。权重为 k、指标为 m 的 Jacobi 形式、雅可比尖点形式和弱全纯 Jacobi 形式所构成的复向量空间由全纯函数 $g\colon \mathcal{H}\times\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ 组成，这些函数具有傅里叶级数表示

$$g(\tau,z)=\sum_{n,r} c\,(n,r;g)\,q^n\zeta^r$$

具有全部 $c(n,r;\ g)\in\mathbb{C}$，并满足变换律以及对支集的约束。采用通常的记号 $\gamma(\tau)=(a\tau+b)/(c\tau+d)$ 和 $j(\gamma,\tau)=c\tau+d$for$\gamma=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 以及 $\tau\in\mathcal{H}$，变换律为

- $g(\gamma(\tau),z/j(\gamma,\tau))=j(\gamma,z)^k\mathrm{e}(mcz^2/j(\gamma,\tau))g(\tau,z)$ for all $\gamma\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$,
- $g(\tau,z+\lambda\tau+\mu)=\mathrm{e}(-m\lambda^2\tau-2m\lambda z)g(\tau,z)$ for all $\lambda,\mu\in\mathbb{Z}$.

为描述支集上的约束，将判别式与任意整数对 (n,r) 关联起来

$$D=D(n,r)=4nm-r^2.$$

g的主部为 $\sum_{n<0}g_n(\zeta)q^n$，其中 $g_n(\zeta)=\sum_r c(n,r;\ g)\ \zeta^r$，奇异部为$\sum_{D\ (n,\ r)\le 0}c\,(n,r;\ g)\,q^n\zeta^r$。

- 对于雅可比形式空间 $\mathrm{J}_{k,\ m}$，如果 $m>0$，则求和遍历满足 $D\ge 0$ 的整数 n 和 r，因此特别有 $n\ge 0$；如果 $m=0$，则求和遍历 $n\in\mathbb{N}_0$ 和 $r=0$，并且我们得到椭圆模形式。
- 对于雅可比尖点形式空间 $\mathrm{J}_{\text{尖点}\,k,\ m}$ 若 $m>0$，则求和遍历整数 n 和 r，使得 $D>0$，因此特别有 $n>0$；若$m=0$，则求和遍历 $n\in\mathbb{N}$ 和 $r=0$，并且我们得到椭圆尖点形式。
- 对于弱全纯 Jacobi 形式空间 $\mathrm{J}^!_{k,\ m}$ 求和遍历整数 $n\gg-\infty$ 和 r。对于正指标 m，条件 $n\gg-\infty$和 $D\gg-\infty$ 是等价的。

当所有傅里叶系数都属于某个环时，我们也会将该环附加到记号中；例如，$\mathrm{J}^!_{0,\ m}(\mathbb{Z})$ 表示权重 0、指标 m 且傅里叶系数为整数的弱全纯形式所构成的 $\mathbb{Z}$-模。

2.4. θ 块。θ块理论归功于 Gritsenko、Skoruppa 和 Zagier [14]。回顾 Dedekind η函数 $\eta\colon\ \mathcal{H}\longrightarrow\mathbb{C}$ 以及奇雅可比 θ 函数 $\vartheta\colon\ \mathcal{H}\times\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}\eta(\tau)&=q^{1/24}\prod_{n\ge1}(1-q^n),\\ \vartheta(\tau,z)&=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{(n+1/2)^2/2}\zeta^{n+1/2}\\ &=q^{1/8}(\zeta^{1/2}-\zeta^{-1/2})\prod_{n\ge1}(1-q^n\zeta)(1-q^n\zeta^{-1})(1-q^n).\end{aligned}$$

对任意 $d\in\mathbb{N}$，定义 ϑ_d 为 $\vartheta_d(\tau,z)=\vartheta(\tau,dz)$。给定 $k,\ell,d_1,..,d_\ell\in\mathbb{N}$，相应的 θ 块定义为

$$\mathrm{TB}_k[d_1,\dots,d_\ell]=\eta^{2k-\ell}\prod_{j=1}^{\ell}\vartheta_{d_j}.$$

我们将使用来自 [14] 的以下结果。

定理 2.1（Gritsenko、Skoruppa、Zagier）。设 k、m、ℓ、d_1、.....、$d_\ell \in \mathbb{N}$。令 $\bar{B}_2(x) = B_2(x - \lfloor x \rfloor)$，其中 $B_2(x) = x^2 - x + 1/6$ 是第二伯努利多项式。那么 $\mathrm{TB}_k[d_1, \ldots, d_\ell] \in \mathrm{J}^{\mathrm{cusp}}_{k\ m}$，当且仅当 $12 \mid k + \ell$、$2m = \sum_{j=1}^{\ell} d_j^2$，并且对于 $0 \le x \le 1$，$\frac{k}{12} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\ell} \bar{B}_2(d_j x) > 0$；只需检验 $x \in [0, 1/2] \cap \frac{1}{2m}\mathbb{Z}$ 的正性。

2.5. Gritsenko 提升。Gritsenko 提升，或称加法提升，[9] 是一个单射

$$\mathrm{Grit} : \mathrm{J}^{\mathrm{cusp}}_{k,N} \longrightarrow \mathcal{S}_k(\mathrm{K}(N))^{\epsilon} \quad \text{where } \epsilon = (-1)^k.$$

其定义使用 Eichler–Zagier [7] 指标提升算子 V_ℓ：$\mathrm{J}_{k,\ m} \longrightarrow \mathrm{J}_{k,\ m\ell}$并将其扩展到弱全纯 Jacobi 形式 [12]。$\phi \in \mathrm{J}^{\mathrm{cusp}}_{k\ N}$，的 Gritsenko 提升为

$$\mathrm{Grit}(\phi)\left(\begin{smallmatrix}\tau & z\\ z & \omega\end{smallmatrix}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} (\phi|V_m)(\tau, z)\mathrm{e}(m\omega).$$

2.6. Borcherds 乘积。此处引用自[25], 的 Borcherds 乘积定理，是 [13], 中定理 3.3 的特例；该定理又引用自 [12, 10]，并依赖于 Richard Borcherds 的工作。在该定理中，$\sigma_0(m)$ 表示正整数 m的正因子数。

定理 2.2。设 N 为正整数。设 $\psi \in \mathrm{J}^{!}_{0,\ N}$ 为一个权重 0、指标为 N 的弱全纯 Jacobi 形式，其傅里叶展开为

$$\psi(\tau, z) = \sum_{\substack{n,r\in\mathbb{Z}\\ n\gg -\infty}} c(n, r) q^n \zeta^r \quad \textit{where } q = \mathrm{e}(\tau),\ \zeta = \mathrm{e}(\zeta).$$

定义

$$A = \frac{1}{24}c(0,0) + \frac{1}{12}\sum_{r\ge 1} c(0,r), \quad B = \frac{1}{2}\sum_{r\ge 1} r\, c(0,r),$$

$$C = \frac{1}{2}\sum_{r\ge 1} r^2 c(0,r), \qquad D_0 = \sum_{n\le -1} \sigma_0(|n|)c(n,0).$$

假设满足以下条件：

(1) 对所有满足 $4nN - r^2 \le 0$ 的整数对 (n, r)，$c(n, r) \in \mathbb{Z}$；(2) $A \in \mathbb{Z}$；

(3) 对所有满足$4nmN - r^2 < 0$ 且 $m \ge 0$ 的本原整数三元组 (n, m, r)，$\sum_{i\ge 1} c(i^2 nm, ir) \ge 0$。

那么，对于权重 $k = \frac{1}{2}c(0, 0)$ 和 Fricke 特征值 $\epsilon = (-1)^{k+D_0}$，Borcherds乘积 $\mathrm{Borch}(\psi)$ 属于 $\mathcal{M}_k(\mathrm{K}(N))^{\epsilon}$。对于充分大的 λ，当 $\Omega = \left(\begin{smallmatrix}\tau & z\\ z & \omega\end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{H}_2$且 $\xi = \mathrm{e}(\omega)$ 时，Borcherds 乘积在 $\mathcal{H}_2$ 的子集 $\{\mathrm{Im}(\Omega) > \lambda I_2\}$ 上具有以下收敛乘积表达式：

$$\mathrm{Borch}(\psi)(\Omega) = q^A \zeta^B \xi^C \prod_{\substack{n,m,r\in\mathbb{Z},\ m\ge 0\\ \textit{if } m=0 \textit{ then } n\ge 0\\ \textit{if } m=n=0 \textit{ then } r<0}} (1 - q^n\zeta^r\xi^{mN})^{c(nm,r)}.$$

另外，令 $\lambda(r) = c(0, r)$，其中 $r \in \mathbb{N}_0$，并回顾相应的 θ 块，

$$\mathrm{TB}(\lambda)(\tau, z) = \eta(\tau)^{\lambda(0)} \prod_{r\ge 1} (\vartheta_r(\tau, z)/\eta(\tau))^{\lambda(r)} \qquad \textit{where } \vartheta_r(\tau, z) = \vartheta(\tau, rz).$$

在 $\{\mathrm{Im}(\Omega) > \lambda I_2\}$ 上，Borcherds乘积是一个收敛无穷级数的重新排列，

$$\mathrm{Borch}(\psi)(\Omega) = \mathrm{TB}(\lambda)(\tau, z)\xi^{C}\exp\left(-\mathrm{Grit}(\psi)(\Omega)\right).$$

在定理中，Borcherds乘积 Borch(ψ) 的除子是若干 Humbert 曲面及其重数之和；为保证全纯性，这些重数必定非负。令 K(N)$^{+}$ 表示由 K(N) 和参数模 Fricke 对合 μ_N 生成的群。定理第 (3) 项中的和，是以下 Humbert 曲面在除子中的重数，其中 $t_o = \left(\begin{smallmatrix} n & r/2 \\ r/2 & mN \end{smallmatrix}\right)$ 和 $D = 4nmN - r^2 < 0$，

$$H_N(t_o) = H_N(-D, r) = \mathrm{K}(N)^{+}\{\,\Omega \in \mathcal{H}_2 : \langle \Omega, t_o\rangle = 0\,\} \subseteq \mathrm{K}(N)^{+}\backslash\mathcal{H}_2.$$

此曲面仅取决于判别式 D 和 r，因此我们可以取t_o，使得 $m = 1$；此外，根据 Gritsenko 和 Hulek [11]，的研究，它仅取决于模 $2N$ 的 r 剩余类。

3. 非提升新形式 fN 的构造

以下命题除最后一项陈述外，已在 [28] 中使用整闭包方法证明。这里我们采用 Borcherds 乘积给出一个新证明，正如新增的最后一项陈述所示。这个新证明直接在权重 3 空间中进行，无须像整闭包方法那样张成权重 6 空间。作为这一构造的副产品，f_{61} 显然模 43 同余于一个 Gritsenko 提升。

命题 3.1. 存在一个具有单位内容的非提升海克特征形式 $f_{61} \in \mathcal{S}_3$(K(61))$^{-}$($\mathbb{Z}$)，它由 Gritsenko 提升的一个有理函数给出，

$$f_{61} = -9G[1] - 2G[2] + 22G[3] + 9G[4] - 10G[5] + 19G[6] - 43\frac{G[1]G[6]}{G[2]}.$$

这里，$G[j] =$ Grit (TB$_3$(D_j)) 对于 $j = 1, \ldots, 6$ 是 θ 块的 Gritsenko 提升，其中

$$\begin{aligned} D_1 &= [2,2,2,3,3,3,3,5,7] & D_2 &= [2,2,2,2,3,4,4,4,7] \\ D_3 &= [2,2,2,2,3,3,4,6,6] & D_4 &= [1,2,3,3,3,3,4,4,7] \\ D_5 &= [1,2,3,3,3,3,3,6,6] & D_6 &= [1,2,2,2,4,4,4,5,6]. \end{aligned}$$

集合 $\{f_{61}, G[1], \ldots, G[6]\}$ 是 $\mathcal{S}_3$(K(61)) 的一组基。每个 Gritsenko 提升 $G[j]$ 也是一个 Borcherds 乘积 $B[j] =$ Borch(–(TB$_3$(D_j)|V_2)/TB$_3$(D_j))。

f_{61} 的存在性可由 Ibukiyama 关于素数层 p 的维数公式推出。为方便起见，该公式列于下文。关于权重 $k \geq 3$ 和无平方因子层 $N \geq 3$ 的更一般维数公式由 Ibukiyama 和 Kitayama [21]给出。

定理 3.2（Ibukiyama 维数公式）。设 $p \geq 5$ 为素数。则

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{S}_3(\mathrm{K}(p)) = {} & \frac{1}{2880}(p^2-1) - 1 \\ & + \frac{1}{64}(p+1)\left(1 - \left(\frac{-1}{p}\right)\right) + \frac{5}{192}(p-1)\left(1 + \left(\frac{-1}{p}\right)\right) \\ & + \frac{1}{72}(p+1)\left(1 - \left(\frac{-3}{p}\right)\right) + \frac{1}{36}(p-1)\left(1 + \left(\frac{-3}{p}\right)\right) \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{8}\left(1-\left(\frac{2}{p}\right)\right)+\frac{1}{5}\left(1-\left(\frac{5}{p}\right)\right)+\left\{\frac{1}{6}\text{ if } p\equiv 5 \bmod 12\right\}.$$

生山公式给出 $\dim \mathcal{S}_3(\mathrm{K}(61)) = 7$，而 [7], 中的 Jacobi 形式维数公式

$$\dim \mathrm{J}^{\mathrm{cusp}}_{3,m} = \sum_{j=1}^{m-1}\left(\dim \mathcal{S}_{2+2j}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) - \mathrm{floor}\left(j^2/(4m)\right)\right),$$

给出 $\dim \mathrm{J}^{\mathrm{cusp}}_{3,61} = 6$。我们首先利用 θ 块张成 $\mathrm{J}^{\mathrm{cusp}}_{3\,61}$，从而张成 $\mathcal{S}_3(\mathrm{K}(61))$。根据命题 3.1 得到的 D_j，定理 2.1 表明，对于 $j = 1, \ldots, 6$，$\mathrm{TB}_3(D_j) \in \mathrm{J}^{\mathrm{cusp}}_{3\,61}$。通过计算 [37], 傅里叶系数，我们发现 θ 块 $\mathrm{TB}_3(D_j)$ 构成 $\mathrm{J}^{\mathrm{cusp}}_{3\,61}$ 的一组基，而 Gritsenko 提升 $G[j] = \mathrm{Grit}\,(\mathrm{TB}_3(D_j))$ 构成 $\mathcal{S}_3(\mathrm{K}(61))$ 中 Gritsenko提升子空间的一组基。最后，我们利用 Borcherds处处乘积定理的一个特殊情形张成 $\mathcal{S}_3(\mathrm{K}(61))$。下面的结果是将 [13] 的定理6.6应用于 q-阶消失为 1 的情形，因此我们称之为推论。

推论 3.3。设 $k, N, \ell, d_1, \ldots, d_\ell \in \mathbb{N}$。假设 $\phi = \mathrm{TB}_k[d_1, \ldots, d_\ell] \in \mathrm{J}^{\mathrm{cusp}}_{k\,N}$，且 $k + \ell = 12$。令 $\psi = -\frac{\phi|V_2}{\phi}$。则 $\psi \in \mathrm{J}^{!}_{0,\,N}(\mathbb{Z})$、$\mathrm{Borch}(\psi) \in \mathcal{M}_k(\mathrm{K}(N))^\epsilon$ 对于 $\epsilon = (-1)^k$ 成立，并且 $\mathrm{Borch}(\psi)$ 和 $\mathrm{Grit}(\phi)$ 的第一和第二个傅里叶–雅可比系数相同。

对于 $j = 1, \ldots, 6$，令 $\psi_j = -(\mathrm{TB}_3(D_j)|V_2)/\mathrm{TB}_3(D_j)$，且 $B[j] = \mathrm{Borch}(\psi_j)$。因此，根据推论，$\psi_j \in \mathrm{J}^{!}_{0,\,61}(\mathbb{Z})$ 和 $B[j] \in \mathcal{M}_3(\mathrm{K}(61))$。$B[j]$的除子由 Humbert 曲面构成，$B[j]$ 在 $H_{61}\left(\begin{smallmatrix} n_o & r_o/2 \\ r_o/2 & 61m_o \end{smallmatrix}\right)$ 上的重数为 $\sum_{i\geq 1} c\left(i^2 n_o m_o, i r_o;\ \psi_j\right)$。图1中的 $B[1]$、$B[2]$ 和 $B[6]$ 的因子表明，$\mathfrak{f} = B[1]B[6]/B[2]$也是全纯的，因为其除子中的 Humbert 曲面重数均为非负数，因此 $\mathfrak{f} \in \mathcal{M}_3(\mathrm{K}(61))^-$。事实上，$\mathfrak{f} \in \mathcal{S}_3(\mathrm{K}(61))$，因为 $\mathfrak{f}$ 的除子包含 $H_{61}(1,1)$，且 $N = 61$ 是素数，如下述引理所示。

引理 3.4. 设 N 是素数，且 $f \in \mathcal{M}_k(\mathrm{K}(N))^\pm$ 是 Fricke 特征形式。若 f 在 Humbert 曲面 $H_N(1,1)$ 上消失，则 f 是尖点形式。

证明。Humbert 曲面 $H_N(1,1)$ 是 $\mathrm{K}(N)^+\hat{}H_N(t_o)$，其中 $t_o = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & N \end{smallmatrix}\right)$ 和 $\hat{}H_N(t_o) = \{\Omega \in \mathcal{H}_2 \colon \langle \Omega\ t_o\rangle = 0\}$。对尺寸相容的矩阵 $\hat{}t$ 和 u 定义 $t[u] = u'tu$。要对 $H_N(t_o)$ 进行参数化，选取列为 v_1 和 v_2 的 $\alpha \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$，使得 $t_o[v_1] = t_o[v_2] = 0$；我们可以取 $\alpha = \left(\begin{smallmatrix} N & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ 或 $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -N \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$。参数化为

$$W_\alpha : \mathcal{H}\times\mathcal{H} \longrightarrow \hat{H}_N(t_o), \qquad (\tau,\omega) \longmapsto \tau v_1 v_1' + \omega v_2 v_2' = \alpha \left(\begin{smallmatrix} \tau & 0 \\ 0 & \omega \end{smallmatrix}\right) \alpha'.$$

回想一下，$u(\alpha) = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^* \end{smallmatrix}\right)$。参数化表明，由于 f 在 $\hat{}H_N(t_o)$ 上消失，$f|_k u(\alpha)\left(\begin{smallmatrix} \tau & 0 \\ 0 & \omega \end{smallmatrix}\right)$ 也在 $\mathcal{H}\times\mathcal{H}$ 上消失，因此显然，对于所有 $\tau \in \mathcal{H}$，$\Phi(f|_k u(\alpha))(\tau) = \lim_{\lambda\to+\infty}(f|_k u(\alpha))\left(\begin{smallmatrix} \tau & 0 \\ 0 & i\lambda \end{smallmatrix}\right)$ 都为 0。

与第 2.1.1 节中一样，f 的尖点形式条件是：对于每个双陪集 $\mathrm{K}(N)u(\alpha_m)\,\mathrm{P}_{2,1}(\mathbb{Q})$ 的代表元 g，$\Phi(f|_k g) = 0$，其中 $0 < m \mid N$ 和 $\alpha_m = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{smallmatrix}\right)$。由于这里的 N 是素数，因此仅有 $m = 1$、N 两种情形，其代表元为 $g = u(\alpha)$，对应于 $\alpha = \left(\begin{smallmatrix} N & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$、$\left(\begin{smallmatrix} 1 & -N \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$（见上一段）；

前者之所以成立，是因为 $\alpha = \left(\begin{smallmatrix} N+1 & -N \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$，且 u 是同态；后者之所以成立，是因为 $u\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2N \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{K}(N)$。上一段已证明，对于这两个 α， $\Phi(f|_k u(\alpha)) = 0$，因此证明完毕。□

[37] 的 $G[1]$、.....、 $G[6]$和 $\mathfrak{f}$ 的傅里叶系数表明，它们张成 $\mathcal{S}_3(\mathrm{K}(61))$，因此 $\mathfrak{f}$ 是非提升形式。此外，傅里叶系数表明，$\mathcal{S}_3(\mathrm{K}(61))$中的每个元素都由其第一和第二个傅里叶–雅可比系数确定，因此推论 3.3 给出了每个 $B[j] = \mathrm{Borch}(\psi_j)$与 $G[j] = \mathrm{Grit}(\mathrm{TB}_3(D_j))$相等，而 Borcherds 乘积都是 Gritsenko 提升。

	$B[1]$	$B[2]$	$B[6]$	$\mathfrak{f} = B[1]B[6]/B[2]$
$H_{61}(1,1)$	9	9	9	9
$H_{61}(4,2)$	3	7	7	3
$H_{61}(5,35)$	7	7	2	2
$H_{61}(9,3)$	4	1	1	4
$H_{61}(13,47)$	3	0	0	3
$H_{61}(16,4)$	0	3	3	0
$H_{61}(20,52)$	4	3	1	2
$H_{61}(25,5)$	1	0	1	2
$H_{61}(36,6)$	0	0	1	1
$H_{61}(41,23)$	0	0	1	1
$H_{61}(49,7)$	1	1	0	0
$H_{61}(56,42)$	1	0	0	1
$H_{61}(65,59)$	0	1	1	0

FIGURE 1. $B[1]$、 $B[2]$、 $B[6]$和 $\mathfrak{f}$ 在 $\mathcal{S}_3(\mathrm{K}(61))$中的因子

既然 $\mathcal{S}_3(\mathrm{K}(61))$已张成，只要能够计算足够多的傅里叶系数，就可以通过线性代数计算 T(2) 在该基上的作用，进而得到非提升特征形式 $f_{61} = -9G[1] - 2G[2] + 22G[3] + 9G[4] - 10G[5] + 19G[6] - 43\mathfrak{f}$，它是 Gritsenko 提升的有理函数。根据定理 2.2 中的乘积展开，当 ψ 成立时，Borcherds乘积 $\mathrm{Borch}(\psi)$具有整数傅里叶系数。注意到 $\mathfrak{f}$ 也是 Borcherds乘积，因为构造 Borcherds乘积是一个加法到乘法同态，因此 f_{61} 具有整数傅里叶系数。此外，正如傅里叶系数$a\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 55 \\ 61 & \end{smallmatrix}\right); f_{61}\right) = -75$ 和 $a\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 61 \end{smallmatrix}\right); f_{61}\right) = 107$所示， f_{61} 具有单位内容。至此，命题 3.1 的新证明完成。

对于 $N = 73$ 和 79，同样的论证也适用；我们仅列出关键要素。这里 $\dim \mathcal{S}_3(\mathrm{K}(73)) = 9$，提升空间维数为 $\dim \mathfrak{J}_3^{\mathrm{cusp}}{}_{,73} = 8$；而 $\dim \mathcal{S}_3(\mathrm{K}(79)) = 8$，提升空间维数为 $\dim \mathfrak{J}_3^{\mathrm{cusp}}{}_{,79} = 7$。

命题 3.5. 存在一个单位内容的非提升海克特征形式 $f_{73} \in \mathcal{S}_3(\mathrm{K}(73))^-(\mathbb{Z})$，它可表示为 Gritsenko 提升的有理函数

$$f_{73} = 9G[1] + 19G[2] + 2G[3] - 13G[4] + 34G[5] - 15G[6] - 12G[7] - 10G[8] - 39\frac{G[2]G[6]}{G[4]}.$$

这里， $G[j] = \text{Grit}(\text{TB}_3(E_j))$（其中 $j = 1, \ldots, 8$）是 θ 块的 Gritsenko 提升，其中

$$E_1 = [2,3,3,3,3,4,4,5,7] \qquad E_2 = [2,3,3,3,3,3,5,6,6]$$
$$E_3 = [2,2,3,4,4,4,4,4,7] \qquad E_4 = [2,2,3,3,4,4,4,6,6]$$
$$E_5 = [2,2,3,3,3,5,5,5,6] \qquad E_6 = [2,2,2,4,4,4,5,5,6]$$
$$E_7 = [2,2,2,2,3,4,4,5,8] \qquad E_8 = [2,2,2,2,2,4,5,6,7].$$

集合 $\{f_{73}, G[1], \ldots, G[8]\}$ 是 $\mathcal{S}_3(\text{K}(73))$ 的一组基。每个 Gritsenko 提升 $G[j]$ 也是一个 Borcherds乘积 $B[j] = \text{Borch}(-(\text{TB}_3(E_j)|V_2)/\text{TB}_3(E_j))$。

证明。证明遵循命题 3.1 中 $N = 61$ 的证明模式。傅里叶系数 $a(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 13/2 \\ 13/2 & 73 \end{smallmatrix}\right); f_{73}) = 7$ 和 $a(\left(\begin{smallmatrix} 1 & -7 \\ -7 & 73 \end{smallmatrix}\right); f_{73}) = -6$ 证明了单位内容；关于 f_{73} 的全纯性，请参见图2。□

	$B[2]$	$B[4]$	$B[6]$	$B[2]B[6]/B[4]$
$H_{73}(1,1)$	9	9	9	9
$H_{73}(4,2)$	3	7	7	3
$H_{73}(8,64)$	1	3	3	1
$H_{73}(9,3)$	7	4	1	4
$H_{73}(12,42)$	0	1	1	0
$H_{73}(16,4)$	0	3	3	0
$H_{73}(24,30)$	0	1	3	2
$H_{73}(25,5)$	1	0	2	3
$H_{73}(36,6)$	2	2	1	1
$H_{73}(37,57)$	2	0	0	2
$H_{73}(48,62)$	0	0	1	1
$H_{73}(65,49)$	1	0	0	1
$H_{73}(72,46)$	1	1	0	0
$H_{73}(73,73)$	0	2	2	0

FIGURE 2. $\mathcal{S}_3(\text{K}(73))$ 中 $B[2]$、$B[4]$、$B[6]$ 和 $B[2]B[6]/B[4]$ 的因子

下一个命题给出了 f_{79} 的一个更简洁的表达式，比 [28] 中给出的表达式更简洁。这个表达式清楚地显示了模 32 的同余。

命题 3.6. 存在一个具有单位内容的非提升海克特征形式 $f_{79} \in \mathcal{S}_3(\text{K}(79))^-(\mathbb{Z})$，它由 Gritsenko 提升的有理函数给出

$$f_{79} = 4G[1] + 13G[2] - 15G[3] + 8G[4] + 5G[6] - 11G[7] - 32\frac{G[2]G[3]}{G[1]}.$$

这里，对于 $j = 1$，……，7，$G[j] = \text{Grit}(\text{TB}_3(F_j))$ 是 θ 块的 Gritsenko 提升，其中

$$F_1 = [1,2,2,2,2,3,4,4,10] \qquad F_2 = [2,2,2,2,4,4,5,6,7]$$
$$F_3 = [1,1,1,1,2,3,4,5,10] \qquad F_4 = [2,2,2,2,2,4,4,5,9]$$
$$F_5 = [1,3,3,3,3,4,4,5,8] \qquad F_6 = [1,1,1,1,1,2,2,8,9]$$
$$F_7 = [1,2,2,3,3,3,4,5,9].$$

集合 $\{f_{79}, G[1], \ldots, G[7]\}$ 是 $\mathcal{S}_3(\text{K}(79))$ 的基。每个 Gritsenko 提升 $G[j]$ 也是一个 Borcherds乘积 $B[j] = \text{Borch}(-(\text{TB}_3(F_j)|V_2)/\text{TB}_3(F_j))$。

证明。再次，证明过程与命题 3.1 的证明相同。傅里叶系数$a(\left(\begin{smallmatrix}1 & 6\\ 6 & 79\end{smallmatrix}\right);\ f_{79}) = 58$和 $a(\left(\begin{smallmatrix}1 & -7\\ -7 & 79\end{smallmatrix}\right);\ f_{79}) = 101$证明了单位内容，关于 f_{79}的全纯性请参见图 3。□

	$B[1]$	$B[2]$	$B[3]$	$B[2]B[3]/B[1]$
H_{79}(1, 1)	9	9	9	9
H_{79}(4, 2)	7	7	3	3
H_{79}(5, 59)	2	2	2	2
H_{79}(8, 18)	1	1	1	1
H_{79}(9, 3)	1	1	1	1
H_{79}(13, 31)	1	0	1	0
H_{79}(16, 4)	2	2	1	1
H_{79}(20, 40)	1	1	0	0
H_{79}(21, 69)	0	2	0	2
H_{79}(25, 5)	1	1	2	2
H_{79}(36, 6)	0	1	0	1
H_{79}(40, 44)	0	0	1	1
H_{79}(44, 26)	0	1	0	1
H_{79}(45, 19)	0	0	1	1
H_{79}(49, 7)	0	1	0	1
H_{79}(65, 67)	1	1	0	0
H_{79}(76, 32)	0	0	1	1
H_{79}(80, 78)	1	1	0	0
H_{79}(100, 10)	1	0	1	0

FIGURE 3. $\mathcal{S}_3$(K(79))中 $B[1]$、$B[2]$、$B[3]$和 $B[2]B[3]/B[1]$ 的因子

4. CLASSIFICATION OF CONGRUENCES TO GRITSENKO LIFTS

一些初步结果虽然十分简单或众所周知，但对于证明特征形式的傅里叶系数逐项同余很有帮助。

引理 4.1. 设 p 为有理素数。设 K 为代数数域。考虑 $\mathcal{O}_K$ 中的元素 a 以及 $\mathcal{O}_K$-理想 $\mathfrak{a} = \langle p, a\rangle$。若 $p \mid \mathrm{N}(a)$，则 $\mathfrak{a}$ 可被位于 p之上的素理想整除，特别是 $\mathfrak{a}$ 并非全部为 $\mathcal{O}_K$。若 $p \| \mathrm{N}(a)$，则 $\mathfrak{a}$ 为素数，且 $\mathrm{N}(\mathfrak{a}) = p$。

证明. 条件 $p \,|\mathrm{N}(a)$ 表示位于 p 之上的素理想 $\mathfrak{p}$ 整除 $\langle a\rangle$，并且 $\mathfrak{p}$ 也整除 $p\mathcal{O}_K$，因此它整除它们的和 $\mathfrak{a}$，于是有 $\mathrm{N}(\mathfrak{a}) > 1$。包含关系 $p\mathcal{O}_K \subseteq \mathfrak{a}$ 和 $\langle a\rangle \subseteq \mathfrak{a}$ 给出整除关系 $\mathrm{N}(\mathfrak{a}) \mid \mathrm{N}(p\mathcal{O}_K) = p^{[K:\mathbb{Q}]}$ 以及 $\mathrm{N}(\mathfrak{a}) \,|\mathrm{N}(\langle a\rangle) = |\mathrm{N}(a)|$。因此，若 $p \| \mathrm{N}(a)$，则 $\mathrm{N}(\mathfrak{a}) = p$，从而 $\mathfrak{a}$为素数。□

引理 4.2. 设 $k, \ell \in \mathbb{N}$ 互素。设 K 为代数数域，$\mathfrak{u} \subseteq \mathcal{O}_K$为理想，$c \in \mathcal{O}_K$ 为元素。若 $\ell c \in \mathfrak{u}$，则 $c \in \mathfrak{u} + k\mathcal{O}_K$。

证明。存在 $m, n \in \mathbb{Z}$ 满足 $1 = m\ell + kn$，因此 $c = m\ell c + knc \in \mathfrak{u} + k\mathcal{O}_K$。□

以下结果是众所周知的库默尔–戴德金定理，但我们陈述所需的特定版本。

引理 4.3. 设 $K = \mathbb{Q}(a)$ 是一个带有 $a \in \mathcal{O}_K$ 的代数数域。设 $\varphi(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 是 a 的最小多项式。设 p 是一个有理素数。假设 $p^2 \nmid \mathrm{disc}(\varphi)$ 在 $\mathbb{Z}$ 中；也就是说，或者 $p \nmid \mathrm{disc}(\varphi)$，或者 $p \| \mathrm{disc}(\varphi)$。那么，将 φ 模 p 分解为不可约多项式的幂，

$$\varphi(x) \equiv \prod_{i=1}^{g} \varphi_i(x)^{e_i} \bmod p\mathbb{Z}[x], \qquad \deg(\varphi_i) = f_i \text{ for each } i,$$

给出了 p 在 $\mathcal{O}_K$ 中分解为素理想幂的形式，

$$p\mathcal{O}_K = \prod_{i=1}^{g} \langle p, \varphi_i(a)\rangle^{e_i}, \qquad \mathrm{N}(\langle p, \varphi_i(a)\rangle) = p^{f_i} \text{ for each } i.$$

证明。由于 $\mathrm{disc}(\varphi) = \mathrm{disc}(K) \cdot |\mathcal{O}_K/\mathbb{Z}[a]|^2$，这些假设给出 $p \nmid |\mathcal{O}_K/\mathbb{Z}[a]|$，因此 [24] 的定理 27 得出所需结果。□

下一个引理给出了坏素数至多一次整除层时，标准 Hecke 算子对傅里叶系数的作用。

引理 4.4。设 $f \in \mathcal{S}_k(\mathrm{K}(N))$，其中 $k \geq 3$ 且 $N \in \mathbb{N}$。设 $p \in \mathbb{N}$ 为满足 $p \nmid N$ 或 $p \| N$ 的素数。若 $p \nmid N$，则令 T 为 $\mathrm{T}(p)$、$\mathrm{T}_1(p^2)$ 中的任一个；若 $p \| N$，则令 T 为 $\mathrm{T}(p)$、$\mathrm{T}_{1,0}(p^2)$ 中的任一个。则 $f|_k\mathrm{T}$ 的傅里叶系数是 f 无关的、由 f 的傅里叶系数组成的固定 $\mathbb{Z}$-线性组合。

证明。关于 $p \nmid N$ and $\mathrm{T} = \mathrm{T}(p), \mathrm{T}_1(p^2)$，参见 [4], pp.1165–1168。

对于 $p \| N$ 以及 $\mathrm{T} = \mathrm{T}(p)$、$\mathrm{T}_{1,0}(p^2)$，结论由以下公式得出。这些公式对 $k \geq 0$ 成立，并且显然对于 $k \geq 3$具有整系数。令 $M \equiv (N/p)^{-1}$ 模 p，并令 a、$c \in \mathbb{Z}$ 满足 $ap - cN/p = 1$，因此 $NM/p \equiv 1$ 模 p 且 $ap^2 - cN = p$。那么对于任意 $t \in \mathcal{X}_2(N)$，回想一下，对于尺寸相容的矩阵 t 和 u，有 $t[u] = u'tu$，

$$\begin{aligned} a(t; f|\mathrm{T}(p)) = {} & a(pt; f) + p^{k-2} \sum_{x \bmod p} a(\tfrac{1}{p}\, t \left[\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -x & p \end{smallmatrix}\right)\right]; f) \\ & + p^{k-2} \sum_{y \bmod p} a(\tfrac{1}{p}\, t \left[\left(\begin{smallmatrix} p & NMy \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right]; f) + p^{2k-3} a(\tfrac{1}{p}\, t; f) \\ & + p^{k-3} \begin{Bmatrix} p-1 & \text{if } p \mid 2t_{12} \\ -1 & \text{else} \end{Bmatrix} a(\tfrac{1}{p}\, t \left[\left(\begin{smallmatrix} ap & N \\ c & p \end{smallmatrix}\right)\right]; f), \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} a(t; f|\mathrm{T}_{1,0}(p^2)) = {} & p^{k-3} \sum_{x \bmod p} a(t \left[\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -x & p \end{smallmatrix}\right)\right]; f) \\ & + p^{3k-6} \sum_{y \bmod p} a(t \left[\begin{pmatrix} 1 & NMy/p \\ 0 & 1/p \end{pmatrix}\right]; f) \\ & + p^{2k-6} \sum_{y \bmod p} \begin{Bmatrix} p-1 & \text{if } p \left| \begin{matrix} 2t_{12}(1 + 2cN/p + 2cy) \\ + 2t_{22}c/p \end{matrix} \right. \\ -1 & \text{else} \end{Bmatrix} \\ & \qquad \cdot a(t \left[\begin{pmatrix} (cN+p+cNMy)/p & N+NMy \\ c/p & 1 \end{pmatrix}\right]; f) \\ & + p^{2k-6} \sum_{x,y \bmod p} \begin{Bmatrix} p-1 & \text{if } p \mid 2t_{12}My + t_{22}/N \\ -1 & \text{else} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$$\cdot\, a(t\left[\begin{pmatrix} 1+NMxy/p & NMy \\ x/p & 1 \end{pmatrix}\right]; f).$$

这些公式由 T(p) 和 $\mathrm{T}_{1,0}(p^2)$ 的双陪集公式推导而来，其中 $p\|N$，如 [34] 中所述。该推导依赖于以下结果：取上述的p、N、M、a、c，再考虑任意一个模 p 的 $x \neq 0$，并令 $\hat{x} = x^{-1}$ 模 p，使得 $x\hat{x} = 1$ 模 p。令 $S \in \mathrm{K}(N)$ 为矩阵

$$S = \begin{pmatrix} ap & N & N\hat{x}/p & a\hat{x} \\ c & p & \hat{x} & c\hat{x}/p \\ cNMx/p & NMx & 1+NMx\hat{x}/p & c(NMx\hat{x}/p-1)/p \\ aNMx & N^2Mx/p & N(NMx\hat{x}/p-1)/p & a+aNMx\hat{x}/p \end{pmatrix}$$

并令 U 为分块上三角矩阵

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -N/p & -N\hat{x}/p & -\hat{x} \\ -c/p & a & -a\hat{x} & -c\hat{x}/p \\ 0 & 0 & ap & c \\ 0 & 0 & N & p \end{pmatrix}.$$

那么它们的乘积就是零维尖点 $C_0(NMx/p)$，其定义见 [27] 第 449 页。

$$SU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & NMx/p & 1 & 0 \\ NMx/p & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

从这里出发，我们可以将 [34], 中公式里的所有矩阵化为上三角形式，从而得到上述两个傅里叶系数公式。[34] 中的公式给出了斜线算子的解析标量不变规范化。因此，除了化为上三角形式之外，[34] 中的第一个公式还需乘以 p^{k-3}，第二个公式需乘以 p^{2k-6}，以得到算术归一化。□

在下面的引理中，理想 $\mathfrak{a}$ 不必是素理想。

引理 4.5. 设 $k \geq 3$ 和 N 为正整数。设 $p \in \mathbb{N}$ 为素数，且满足 $p \nmid N$或 $p\|N$。若 $p \nmid N$，则令 T 为 T(p) 或 $\mathrm{T}_1(p^2)$；若 $p\|N$，则令 T 为 T(p) 或 $\mathrm{T}_{1,0}(p^2)$。设 K 为代数数域。考虑两个属于同一弗里克空间且具有相同 Atkin–Lehner 符号 ϵ_p 的 T-特征形式（若 $p\|N$），它们分别为 $f \in \mathcal{S}_k(\mathrm{K}(N))^{\pm}(\mathbb{Z})$，且具有单位内容，以及 $g \in \mathcal{S}_k(\mathrm{K}(N))^{\pm}(\mathcal{O}_K)$。设$\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}_K$ 为理想，并假设 f 和 g 的傅里叶系数模 $\mathfrak{a}$同余，

$$a(t;f) \equiv a(t;g) \bmod \mathfrak{a} \quad \textit{for all } t \in \mathcal{X}_2(N).$$

那么 f 和 g 的 T-特征值模 $\mathfrak{a}$同余，

$$\lambda_f(\mathrm{T}) \equiv \lambda_g(\mathrm{T}) \bmod \mathfrak{a}.$$

若 $p \nmid N$、f 和 g 对 T $=$ T(p) 以及 $T = \mathrm{T}_1(p^2)$ 都是 T-特征形式；或者若$p\|N$、f 和 g 对 T $=$ T(p) 以及 $T = \mathrm{T}_{1,0}(p^2)$ 都是 T-特征形式，那么 f和 g 的 p-欧拉多项式模 $\mathfrak{a}$同余。

证明。根据引理 4.4，每个 $a(t_o;\, f|_k\mathrm{T}) = \lambda_f(\mathrm{T})a(t_o;\, f)$ 都是傅里叶系数 $a(t;\, f)$ 的 $\mathbb{Z}$-线性组合。因此，$\lambda_f(\mathrm{T})$ 属于 $\mathbb{Q}$。此外，T 的特征多项式关于 $\mathbb{Z}[x]$ 是首一的，其根为代数整数，所以实际上 $\lambda_f(\mathrm{T})$ 属于 $\mathbb{Z}$。类似地，$\lambda_g(\mathrm{T})$ 属于 $\mathcal{O}_K$。对于所有 $t \in \mathcal{X}_2(N)$，由于 $a(t;\, f)$ 和 $a(t;\, g)$ 模 $\mathfrak{a}$ 等价，并且 $a(t;\, f|_k\mathrm{T})$ 和 $a(t;\, g|_k\mathrm{T})$ 是相同的 $\mathbb{Z}$-线性

组合，即由 $a(u;\ f)$ 和 $a(u;\ g)$ 构成的组合，因此它们模 $\mathfrak{a}$ 也等价。所以，由于 f 和 g 是特征形式，$(\lambda_f(\mathrm{T}) - \lambda_g(\mathrm{T}))a(t;\ f) = a(t;\ f|_k\mathrm{T}) - a(t;\ g|_k\mathrm{T})$ 属于 $\mathfrak{a}$。由于 f 的单位内容为 1，某个有限的 $\mathbb{Z}$-线性组合 $\sum_t n_t a(t;\ f)$ 等于 1，因此特征值之差 $\lambda_f(\mathrm{T}) - \lambda_g(\mathrm{T}) = \sum_t n_t(\lambda_f(\mathrm{T}) - \lambda_g(\mathrm{T}))a(t;\ f)$ 属于 $\mathfrak{a}$。因此，$\lambda_f(\mathrm{T}) \equiv \lambda_g(\mathrm{T})$ 模 $\mathfrak{a}$。

至于 f和 g的 p-欧拉多项式，对于 $p \nmid N$，令 $f|_k\mathrm{T}(p) = \lambda_f(\mathrm{T}(p))f$，并令 $f|_k\mathrm{T}_1(p^2) = \lambda_f(\mathrm{T}_1(p^2))f$。那么，$p$-欧拉多项式由 [4],中的 (4.2.16) 给出

$$Q_p(f,x) = 1 - \lambda_f(\mathrm{T}(p))x + (p\lambda_f(\mathrm{T}_1(p^2)) + p^{2k-5}(1+p^2))x^2 - p^{2k-3}\lambda_f(\mathrm{T}(p))x^3 + p^{4k-6}x^4,$$

而这在模 $\mathfrak{a}$意义下由 $\lambda_f(\mathrm{T}(p))$ 和 $\lambda_f(\mathrm{T}_1(p^2))$ 决定。对于素数 $p\|N$，令 $f|_k\mathrm{T}(p) = \lambda_f(\mathrm{T}(p))f$，并令 $f|_k\mathrm{T}_{1,0}(p^2) = \lambda_f(\mathrm{T}_{1,0}(p^2))f$；回想一下，$\epsilon_p$ 表示 f 和 g共有的 Atkin–Lehner 符号。在这种情况下，p-欧拉多项式为（参见 [22], 第 547 页）：

$$Q_p(f,x) = 1 - (\lambda_f(\mathrm{T}(p)) + p^{k-3}\epsilon_p)x + (p\lambda_f(\mathrm{T}_{1,0}(p^2)) + p^{2k-3})x^2 + p^{3k-5}\epsilon_p x^3,$$

而这在模 $\mathfrak{a}$意义下由 $\lambda_f(\mathrm{T}(p))$、$\lambda_f(\mathrm{T}_{1,0}(p^2))$ 和 ϵ_p决定。我们指出，最后这种情形无需使用引理 4.4 中关于 $a(t;\ f|\mathrm{T}_{1,0}(p^2))$ 的公式即可证明，因为对于 $N = p$，坏欧拉多项式只依赖于 $\lambda_f(\mathrm{T}(p))$ 和 ϵ_p。事实上，我们有如下关系：$p^{k-3}\lambda_f(\mathrm{T}(p))\epsilon_p + \lambda_f(\mathrm{T}_{1,0}(p^2)) + p^{2k-5} + p^{2k-6} = 0$。关于局部表示中这一关系的参考文献见 [32],第 248 页。□

有了所需的辅助结果，我们便可以证明本节的主要结果。

定理 4.6. 令 $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{S}_3(\mathrm{K}(61))$ 为 Gritsenko 提升构成的子空间。T(2) 在 $\mathcal{G}$ 上的特征多项式在 $\mathbb{Q}$ 上不可约，

$$q(x) = x^6 - 29x^5 + 322x^4 - 1714x^3 + 4471x^2 - 5205x + 2026.$$

令 a 为 q 的一个根，并令 $K = \mathbb{Q}(a)$。参照图 4 中 K 的元素 $d_j(a)$，以及命题 3.1 中的 Gritsenko 提升 $G[j]$，考虑 $\mathcal{G}(K)$ 中的一个元素，

$$g(a) = \sum_{j=1}^{6} d_j(a)G[j].$$

则 $g(a)$ 属于 $\mathcal{G}(\mathcal{O}_K)$，且它是一个 T(2) 特征形式，其特征值为 a；对于所有素数 p，它也是 T(p) 和 $\mathrm{T}_{1,0}(p^2)$ 的特征形式。$\mathcal{O}_K$-理想

$$\mathfrak{a} = \langle 43, a+7\rangle$$

是素理想。f_{61} 的傅里叶系数和欧拉多项式与 $g(a)$ 的傅里叶系数和欧拉多项式模 $\mathfrak{a}$ 同余。理想 $\mathfrak{a}$ 是唯一能使 f_{61} 与 $g(a)$ 的欧拉多项式同余的（真）$\mathcal{O}_K$-理想。

证明。Gritsenko 提升空间 $\mathcal{G}$ 的基为 $\{G[j]:\ j = 1,\ \ldots\ldots,\ 6\}$。我们可以计算 $G[j]$ 的足够多傅里叶系数（见 [37]），从而得到作用于 $\mathcal{G}$ 的 T(2) 矩阵，

j	c_j	$d_j(a)$
1	-9	$\frac{515}{2}+\frac{2377}{4}a+443a^2-\frac{269}{2}a^3+17a^4-\frac{3}{4}a^5$
2	-2	$\frac{1899}{8}+\frac{7813}{16}a+\frac{1223}{4}a^2-\frac{649}{2}a^3+\frac{39}{4}a^4-\frac{7}{16}a^5$
3	22	$\frac{305}{2}+\frac{1697}{4}a-359a^2+\frac{237}{2}a^3-16a^4+\frac{3}{4}a^5$
4	9	$-396+855a-596a^2+174a^3-22a^4+a^5$
5	-10	$-140+215a-97a^2+17a^3-a^4$
6	19	-24

FIGURE 4. $N=61$的 Gritsenko 提升系数

相对于该基，T(2) 从左侧作用于 $\mathbb{C}^6$ 的列向量，

$$M=\begin{pmatrix} 9 & 0 & 4 & -1 & 4 & 1\\ -6 & 1 & -4 & -4 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 8 & 2 & 2 & 0\\ 3 & 4 & 0 & 11 & -4 & -2\\ -8 & 0 & -8 & -1 & -3 & -1\\ -1 & -4 & 2 & -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

特征多项式 $q(x)=\det(xI-M)$ 如所述。

每个 $d_j(a)$ 都属于 $\mathcal{O}_K$，这可通过计算机软件确认；每个$G[j]$都属于 $\mathcal{G}(\mathbb{Z})$，因此 $g(a)$ 属于 $\mathcal{G}(\mathcal{O}_K)$。将向量 $(d_1(a)\dots,d_6(a))$ 视为列向量，则它属于 $\ker(aI-M)$，因此 $g(a)$ 是 $\mathcal{G}(\mathcal{O}_K)$ 中 T(2) 的特征形式，特征值为 a。T(2) 的特征多项式可分离，因为其判别式 $\operatorname{disc}(q)=2^{14}\cdot 3^6\cdot 1892022169$ 非零。因此，T(2) 的特征空间是一维的，进而 $g(a)$ 是每个与 T(2) 交换的 Hecke 算子的特征形式。对于 $T(p)$ 和 $T_{1,0}(p^2)$（其中 $p\neq 2$），交换性是自动成立的。对于 $T_{1,0}(4)$，交换子 $[T(2),T_{1,0}(4)]$ 由降级算子构成；根据 [32] 中的命题 6.21，因而 $[T(2),T_{1,0}(4)]=0$ 在 $\mathcal{S}_3(K(61))$ 上成立，因为 61 是素数且 $\mathcal{S}_3(K(1))=\{0\}$。因此，$g(a)$ 是所有上述 Hecke 算子的特征形式。

$q(x)$ 模 43 的约化为

$$q(x)\equiv(x+7)(x+25)(x+30)(x^3+38x^2+13x+12)\bmod 43,$$

并且由于 $43\nmid\operatorname{disc}(q)$，引理 4.3 表明 $\mathcal{O}_K$-理想 $\mathfrak{a}=\langle 43,a+7\rangle$ 是素理想；更一般地，$\mathfrak{a}$, $\langle 43,a+25\rangle$ 和 $\langle 43,a+30\rangle$ 是 $\mathcal{O}_K$ 的范数为 43 的理想。

图 4 中的值 c_j 满足命题 3.1 中的 $f_{61}=43\mathfrak{f}+\sum_{j=1}^{6}c_jG[j]$。因此

$$f_{61}-g(a)=43\mathfrak{f}+\sum_{j=1}^{6}(c_j-d_j(a))G[j].$$

对于 $j=1,\dots,6$，我们计算得出 $1616(c_j-d_j(a))\in\langle a+7\rangle$。由引理 4.2，结合 $k=43$、$\ell=1616$、$\mathfrak{u}=\langle a+7\rangle$ 和 $c=c_j-d_j(a)$，可得 $c_j-d_j(a)\in\langle 43,a+7\rangle=\mathfrak{a}$。$43\mathfrak{f}$ 的傅里叶系数也属于 $\mathfrak{a}$。因此，在傅里叶系数意义下，$f_{61}\equiv g(a)$ 模 $\mathfrak{a}$ 同余。由于 $\mathcal{S}_3(K(61))=\mathcal{S}_3(K(61))^-$，且 61 是素数，引理 4.5 表明，$f_{61}$ 和 $g(a)$ 的所有 p-欧拉多项式模 $\mathfrak{a}$ 同余。

$\mathcal{G}$ 上的 T(3) 矩阵见 [37]。结合 T(2) 的矩阵，我们计算出两个特征值之差：

$$\lambda_{g(a)}(\mathrm{T}(2)) - \lambda_{f_{61}}(\mathrm{T}(2)) = a + 7$$
$$\lambda_{g(a)}(\mathrm{T}(3)) - \lambda_{f_{61}}(\mathrm{T}(3)) = \tfrac{1495}{48} - \tfrac{4313}{96}a + \tfrac{691}{24}a^2 - \tfrac{349}{48}a^3 + \tfrac{19}{24}a^4 - \tfrac{1}{32}a^5 + 3.$$

任何包含这些特征值之差的理想，其范数都整除这些范数，

$$\mathrm{N}\left(\lambda_{g(a)}(\mathrm{T}(2)) - \lambda_{f_{61}}(\mathrm{T}(2))\right) = 2^9 \cdot 43 \cdot 101$$
$$\mathrm{N}\left(\lambda_{g(a)}(\mathrm{T}(3)) - \lambda_{f_{61}}(\mathrm{T}(3))\right) = 5^2 \cdot 19 \cdot 43 \cdot 139,$$

因此整除这些范数的最大公因数 43；又因为该理想是一个真理想，所以它等于 43。因此，该理想是范数为 43 的理想$\mathfrak{a} = \langle 43, a+7\rangle, \langle 43, a+25\rangle, \langle 43, a+30\rangle$之一，并且它包含 $a+7$，所以它就是 $\mathfrak{a}$。□

图 4 中 $\mathcal{O}_K$ 的 $d_j(a)$按以下方式确定。选取某个$v \in K^6 \cap \ker(M - aI)$。求满足 $\ell v \in \mathcal{O}_K^6$的最小 $\ell \in \mathbb{N}$。搜索满足 $43 \mid \mathrm{N}(c_j - b\ell v_j)$的$b \in \mathbb{Z}$，其中 $j = 1, \ldots, 6$，且 c_j 来自图 4。于是，$b\ell v_j$具有我们所需的性质，并且作为 $\mathcal{O}_K$ 的一个元素，它的形式为 $d_j(a)$。

特征值模 43 以上素理想的同余也在 [6], 中得到证明，其中还包含了 Buzzard 和 Golyshev 发现的、模 19 的同余证明，即 f_{61} 到一个吉田提升的同余。

定理 4.7. 令 $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{S}_3(\mathrm{K}(73))$ 为 Gritsenko 提升的子空间。T(2) 在 $\mathcal{G}$ 上的特征多项式 q 在 $\mathbb{Q}$ 上分解为 $q = q_1 q_7$，其中不可约因子 q_1 和 q_7 为

$$q_1(x) = x - 9,$$
$$q_7(x) = x^7 - 30x^6 + 357x^5 - 2157x^4 + 7034x^3 - 12145x^2 + 9964x - 2832.$$

参考图 5 中的整数 $d_{1,j}$ 以及命题 3.5 中的 Gritsenko提升 $G[j]$，考虑 $\mathcal{G}(\mathbb{Z})$ 的一个元素，

$$g_1 = \sum_{j=1}^{8} d_{1,j} G[j].$$

则 g_1 是一个 T(2) 特征形式，特征值为 9，并且对所有素数 p，它都是 T(p) 和 $\mathrm{T}_{1,0}(p^2)$ 的特征形式。f_{73} 和 g_1 的傅里叶系数及欧拉多项式模 $3\mathbb{Z}$同余。能够在 f_{73} 和 g_1 的欧拉多项式之间产生同余的唯一（真） $\mathbb{Z}$-理想是 $3\mathbb{Z}$。

令 a 为 q_7 和 $K = \mathbb{Q}(a)$ 的一个根。参照图 5 中 K 的元素 $d_{7,j}(a)$，以及命题 3.5 中的 Gritsenko 提升 $G[j]$，考虑 $\mathcal{G}(K)$ 中的一个元素，

$$g_7(a) = \sum_{j=1}^{8} d_{7,j}(a) G[j].$$

则 $g_7(a)$ 属于 $\mathcal{G}(\mathcal{O}_K)$，是一个 T(2) 特征形式，特征值为 a，并且对于所有素数 p，它也是 T(p) 和 $\mathrm{T}_{1,0}(p^2)$ 的特征形式。$\mathcal{O}_K$-理想

$$\mathfrak{a} = \langle 3, a\rangle, \qquad \mathfrak{b} = \langle 13, a+6\rangle$$

是素数。f_{73} 和 $g_7(a)$ 的傅里叶系数与欧拉多项式分别模 $\mathfrak{a}$ 和模 $\mathfrak{b}$ 同余。使 f_{73} 和 $g_7(a)$ 的欧拉多项式之间产生同余的唯一素数幂 $\mathcal{O}_K$-理想是 $\mathfrak{a}$ 和 $\mathfrak{b}$。

j	c_j	$d_{1,j}$	$d_{7,\ j}(a)$
1	9	-3	$-\frac{632307}{4}+\frac{8480021}{16}a-\frac{36446543}{64}a^2+\frac{16486531}{64}a^3-\frac{442583}{8}a^4+\frac{357943}{64}a^5-\frac{13671}{64}a^6$
2	19	-2	$-\frac{247387}{2}+\frac{2906781}{8}a-\frac{9639367}{32}a^2+\frac{3516515}{32}a^3-\frac{77947}{4}a^4+\frac{52719}{32}a^5-\frac{1703}{32}a^6$
3	2	-1	$\frac{134939}{4}-\frac{1626701}{16}a+\frac{6689239}{64}a^2-\frac{2996715}{64}a^3+\frac{80271}{8}a^4-\frac{64895}{64}a^5+\frac{2479}{64}a^6$
4	-13	2	$-\frac{280607}{2}+\frac{3673513}{8}a-\frac{15573571}{32}a^2+\frac{6924839}{32}a^3-\frac{181543}{4}a^4+\frac{142859}{32}a^5-\frac{5307}{32}a^6$
5	34	1	$\frac{411139}{4}-\frac{4124773}{16}a+\frac{16534783}{64}a^2-\frac{7232243}{64}a^3+\frac{187815}{8}a^4-\frac{146535}{64}a^5+\frac{5399}{64}a^6$
6	-15	3	$\frac{850479}{4}-\frac{12504265}{16}a+\frac{51374171}{64}a^2-\frac{22172735}{64}a^3+\frac{569099}{8}a^4-\frac{441443}{64}a^5+\frac{16243}{64}a^6$
7	-12	3	$\frac{648207}{4}-\frac{8826201}{16}a+\frac{37654939}{64}a^2-\frac{16649519}{64}a^3+\frac{434027}{8}a^4-\frac{340515}{64}a^5+\frac{12643}{64}a^6$
8	-10	2	-10072

FIGURE 5. $N = 73$ 的 Gritsenko 提升系数

证明。与定理 4.6 的证明类似，T(2) 在 $\mathcal{G}$ 上关于基 $\{G[j]\colon j = 1, \dots, 8\}$ 的矩阵 M 为

$$M = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 3 & -4 & -2 & -2 & 4 & 2 \\ -4 & 1 & -1 & -2 & -3 & 0 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 5 & 8 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 6 & 8 & 8 & -4 & -5 \\ -4 & -4 & -8 & -4 & -1 & -4 & 2 & 7 \\ -2 & 0 & -3 & 4 & 3 & 2 & 1 & -1 \\ -3 & -4 & -7 & -6 & -4 & -8 & 4 & 11 \end{pmatrix}.$$

特征多项式 $q(x) = \det(xI - M) = q_1(x)q_7(x)$ 如所述。

向量 $(d_{1,\ 1},\ \dots,\ d_{1,\ 8})$ 属于 $\ker(9I - M)$，因此 g_1 是一个特征值为 9 的 T(2) 特征形式。T(2) 的特征多项式 q 可分离，因为其判别式 $\operatorname{disc}(q) = 2^{36} \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 13 \cdot 19^2 \cdot 37 \cdot 101 \cdot 30931$ 非零；因此，如定理 4.6 的证明所述，g_1 是所有上述 Hecke 算子的特征形式。

图 5 中的值 c_j 满足命题 3.5 中的条件 $f_{73} = -39\mathfrak{f} + \sum_{j=1}^{8} c_j G[j]$。因此

$$f_{73} - g_1 = -39\mathfrak{f} + \sum_{j=1}^{8} (c_j - d_{1,j}) G[j].$$

图 5 显示，系数 $c_j - d_{1,\ j}$ 全都属于 $3\mathbb{Z}$，$-39\mathfrak{f}$ 的傅里叶系数也同样如此，因此 g_1 和 f_{73} 的傅里叶系数模 $3\mathbb{Z}$ 同余。

由于 $\mathcal{S}_3(\mathrm{K}(73)) = \mathcal{S}_3(\mathrm{K}(73))^-$，且 73 是素数，引理 4.5 表明，$f_{73}$ 和 g_1 的所有 p-欧拉多项式模 $3\mathbb{Z}$ 同余。同样，T(3) 在 $\mathcal{G}$ 上的矩阵见 [37]。对于 $p = 2,\ 3$，特征值之差 $\lambda_{g_1}(\mathrm{T}(p)) - \lambda_{f_{73}}(\mathrm{T}(p))$ 为

$$\lambda_{g_1}(\mathrm{T}(2)) - \lambda_{f_{73}}(\mathrm{T}(2)) = 9 + 6 = 15 = 3 \cdot 5,$$
$$\lambda_{g_1}(\mathrm{T}(3)) - \lambda_{f_{73}}(\mathrm{T}(3)) = 4 + 2 = 6 = 2 \cdot 3.$$

任何包含这些元素的理想都包含 $3\mathbb{Z}$，因此它是 $3\mathbb{Z}$。

现在令 a 为 q_7 的一个根，并令 $K = \mathbb{Q}(a)$。每个$d_{7,\,j}(a)$都属于 $\mathcal{O}_K$，且每个$G[j]$ 都属于 $\mathcal{G}(\mathbb{Z})$，因此 $g_7(a)$属于 $\mathcal{G}(\mathcal{O}_K)$。向量 $(d_{7,\,1}(a) \ldots, d_{7,\,8}(a))$ 属于 null$(aI - M)$，因此 $g_7(a)$是 $\mathcal{G}(\mathcal{O}_K)$中的一个 T(2) 特征形式，其特征值为 a。由于 q_7 的根互不相同，$g_7(a)$是所有上述 Hecke 算子的特征形式。

由于 $\mathrm{disc}(q_7) = 2^{24} \cdot 3 \cdot 13 \cdot 19^2 \cdot 37 \cdot 101 \cdot 30931$ 仅被 3 整除一次，引理 4.3 表明，q_7 模 3 的分解为，

$$q_7(x) \equiv x(x+2)^2(x^4 + 2x^3 + x + 1) \bmod 3,$$

确定了因式分解 $3\mathcal{O}_K = \langle 3, a\rangle\langle 3, a+2\rangle^2\langle 3, a^4 + 2a^3 + a + 1\rangle$，其中前右侧的两个素理想范数为 3，第三个的范数为 3^4。

类似地，q_7 模 13 的因式分解

$$q_7(x) \equiv (x+6)^2(x^5 + 10x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 4x + 8) \bmod 13,$$

确定了因式分解 $13\mathcal{O}_K = \langle 13, a+6\rangle^2\langle 13, a^5+10a^4+6a^3+11a^2+4a+8\rangle$。这里 $\langle 3, a\rangle$ 和 $\langle 13, a+6\rangle$ 分别是定理中的理想 $\mathfrak{a}$ 和 $\mathfrak{b}$，因此如所声称的，这些理想都是素理想。

图 5 中的值 c_j 满足命题 3.5 中的条件 $f_{73} = -39\mathfrak{f} + \sum_{j=1}^{8} c_j G[j]$。因此

$$f_{73} - g_7(a) = -39\mathfrak{f} + \sum_{j=1}^{8} (c_j - d_{7,j}(a))G[j].$$

Let

$$w = \tfrac{134943}{2} - \tfrac{1626701}{8}a + \tfrac{6689239}{32}a^2 - \tfrac{2996715}{32}a^3 + \tfrac{80271}{4}a^4 - \tfrac{64895}{32}a^5 + \tfrac{2479}{32}a^6.$$

这个属于 $\mathcal{O}_K$ 的元素的范数为

$$\mathrm{N}(w) = -2^7 \cdot 3 \cdot 3919 \cdot 1941571 \cdot 8583739212883,$$

因此根据引理 4.1，理想 $\langle 3, w\rangle$ 是范数为 3 $\mathcal{O}_K$ 的理想之一，即 $\langle 3, w\rangle = \mathfrak{a} = \langle 3, a\rangle$ 或 $\langle 3, w\rangle = \langle 3, a+2\rangle$。此外，$32w$ 不属于 $\langle 3, a+2\rangle$，这一点可通过在 $32w$ 中将 a 替换为 1，然后模 3 化简看出。因此，$\langle 3, w\rangle = \mathfrak{a}$。现在令 $\ell = 13062763087974964715 4734$。对于 $j = 1$，.....，8，计算 $\ell(c_j + 2d_{7,j}(a)) \in \langle w\rangle$。引理 4.2 结合给定的 $k = 3, \ell$、$\mathfrak{u} = \langle w\rangle$ 和 $c = c_j + 2d_{7,j}(a)$，得到 $c_j + 2d_{7,j}(a) \in \langle 3, w\rangle = \mathfrak{a}$，从而可知 $c_j - d_{7,j}(a) \in \mathfrak{a}$。$-39\mathfrak{f}$ 的傅里叶系数也属于 $\mathfrak{a}$。因此，在傅里叶系数意义下，$f_{73} \equiv g_7(a)$ 模 $\mathfrak{a}$ 同余。转向 $\mathfrak{b} = \langle 13, a+6\rangle$ 同余，我们计算范数

$$\mathrm{N}(a+6) = 9270300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 13 \cdot 2377.$$

取 $\ell = 356550$。对于 $j = 1, \ldots, 8$，计算 $\ell(c_j + 12d_{7,\,j}(a)) \in \langle a+6\rangle$。引理 4.2 给出的 $k = 13, \ell$、$\mathfrak{u} = \langle a+6\rangle$ 和 $c = c_j + 12d_{7,\,j}(a)$ 得出 $c_j + 12d_{7,\,j}(a) \in \langle 13, a+6\rangle = \mathfrak{b}$。因此，与上文类似，$f_{73} \equiv g_7(a)$ 在傅里叶系数层面模 $\mathfrak{b}$ 同余。正如定理 4.6 的证明，这证明了 f_{73} 和 $g_7(a)$ 的所有 p-欧拉多项式模 $\mathfrak{a}$ 且模 $\mathfrak{b}$ 同余。

可能的素数幂同余理想的范数仅限于 3 或 13，这是通过计算两个特征值之差及其和从 $\mathcal{O}_K$ 到 $\mathbb{Z}$ 的范数得出的，

$$\begin{aligned}
&\mathrm{N}\left(\lambda_{g_7(a)}(\mathrm{T}(2)) - \lambda_{f_{73}}(\mathrm{T}(2))\right) = \mathrm{N}\,(a+6) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 13 \cdot 2377,\\
&\mathrm{N}\left(\lambda_{g_7(a)}(\mathrm{T}(3)) - \lambda_{f_{73}}(\mathrm{T}(3))\right)\\
&\quad = \mathrm{N}\left(\tfrac{241}{4} - \tfrac{3171}{16}a + \tfrac{13965}{64}a^2 - \tfrac{6297}{64}a^3 + \tfrac{167}{8}a^4 - \tfrac{133}{64}a^5 + \tfrac{5}{64}a^6 + 2\right)\\
&\quad = 2^2 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 195809,\\
&\mathrm{N}\left(\lambda_{g_7(a)}(\mathrm{T}(2)) - \lambda_{f_{73}}(\mathrm{T}(2)) + \lambda_{g_7(a)}(\mathrm{T}(3)) - \lambda_{f_{73}}(\mathrm{T}(3))\right)\\
&\quad = 3^6 \cdot 13 \cdot 61 \cdot 4793,
\end{aligned}$$

因为这些范数的最大公因数为 $3 \cdot 13$。如果同余理想的范数为 3，那么由于它包含特征值之差 $a+6$，它也包含 $\langle 3, a+6\rangle = \langle 3, a\rangle = \mathfrak{a}$，因此它就是 $\mathfrak{a}$。类似地，如果同余理想的范数为 13，那么它就是 $\langle 13, a+6\rangle = \mathfrak{b}$。□

图 5 中的整数$d_{1,j}$ 以及多项式 $d_{7,j}$，是以与图 4 中多项式 d_j 类似的方式确定的。证明中的值 w 是通过对集合 $\{c_j + nd_{7,j}(a)\}$ 进行测试得到的；我们对各种整数 n 逐一测试，直到集合中的某个元素整除集合 $\mathcal{O}_K$中的所有其他元素。w 来自 $n=2$，随后又得到 $j=3$。

T(2) 特征值为 q_1 的 Gritsenko 提升源自 lmfdb 上的椭圆新形式 73.4.a.a；q_7 和 73.4.a.b 的情况也类似。

定理 4.8. 设 $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{S}_3$(K(79)) 为 Gritsenko 提升构成的子空间。T(2) 在 $\mathcal{G}$ 上的特征多项式 q $\mathbb{Q}$ 上的分解为 $q = q_2 q_5$，其不可约因子 q_2 和 q_5 为

$$\begin{aligned}
q_2(x) &= x^2 - 11x + 26,\\
q_5(x) &= x^5 - 27x^4 + 261x^3 - 1077x^2 + 1766x - 964.
\end{aligned}$$

设 a 是 q_2 和 $K = \mathbb{Q}(a)$ 的一个根。参照图 6 中 K 的元素 $d_{2,j}(a)$ 以及命题 3.6 中的 Gritsenko 提升 $G[j]$，考虑 $\mathcal{G}(K)$ 的一个元素，

$$g_2(a) = \sum_{j=1}^{7} d_{2,j}(a) G[j].$$

那么 $g_2(a)$ 属于 $\mathcal{G}(\mathcal{O}_K)$，且它是 T(2) 特征值为 a 的 T(2) 特征形式；同时，对于所有素数 p，它也是 T(p) 和 $\mathrm{T}_{1,0}(p^2)$ 的特征形式。$\mathcal{O}_K$-理想

$$\mathfrak{a} = \langle 2, a+1\rangle$$

是素理想，且 f_{79} 和 $g_2(a)$ 的傅里叶系数与欧拉多项式模 $\mathfrak{a}$ 同余。使 f_{79} 与 $g_2(a)$ 的欧拉多项式同余的唯一（真）理想是 $\mathfrak{a}$。

令 b 为 q_5 和 $L = \mathbb{Q}(b)$ 的根。参照图 6 中 L 的元素 $d_{5,j}(b)$，以及命题 3.6 中的 Gritsenko 提升 $G[j]$，考虑 $\mathcal{G}(L)$ 的一个元素，

$$g_5(b) = \sum_{j=1}^{7} d_{5,j}(b) G[j].$$

那么 $g_5(b)$ 属于 $\mathcal{G}(\mathcal{O}_L)$，并且它有一个特征值为 b 的 T(2) 特征形式；对于所有素数 p，它也是 T(p) 和 $\mathrm{T}_{1,0}(p^2)$ 的特征形式。令 $w = \frac{35}{4} - \frac{435}{8}b + \frac{565}{16}b^2 - \frac{25}{4}b^3 + \frac{5}{16}b^4$ 为 $\mathcal{O}_L$ 的一个元素。$\mathcal{O}_L$-理想

$$\mathfrak{b} = \langle 8, w \rangle$$

是范数为 4 的 2 上方某个素数 $\mathcal{O}_L$-理想的立方。f_{79}和 $5g_5(b)$ 的傅里叶系数模 $\mathfrak{b}$ 同余，f_{79} 和 $g_5(b)$ 的欧拉多项式模 $\mathfrak{b}$ 同余。每个使 f_{79} 和 $g_5(b)$ 的欧拉多项式同余的（真）理想都整除 $\mathfrak{b}$。

j	c_j	$d_{2,\ j}(a)$	$d_{5,\ j}(b)$
1	4	$5-a$	$\frac{103}{2} - \frac{257}{4}b + \frac{135}{8}b^2 - 3b^3 + \frac{1}{8}b^4$
2	13	$-8+a$	$\frac{199}{4} - \frac{435}{8}b + \frac{257}{16}b^2 - \frac{7}{4}b^3 + \frac{1}{16}b^4$
3	-15	$6-a$	$-\frac{19}{4} + \frac{87}{8}b - \frac{113}{16}b^2 + \frac{5}{4}b^3 - \frac{1}{16}b^4$
4	8	$3-a$	$3-b$
5	0	$9-a$	$10-9b+b^2$
6	5	$4-a$	$4-b$
7	-11	$-18+3a$	$-\frac{203}{4} + \frac{443}{8}b - \frac{257}{16}b^2 + \frac{7}{4}b^3 - \frac{1}{16}b^4$

FIGURE 6. Gritsenko 提升的系数，适用于 $N = 79$

证明。与定理 4.6 的证明类似，T(2) 在 $\mathcal{G}$ 上关于基 $\{G[j] : \ j = 1, \ldots, 7\}$ 的矩阵 M 为

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 & -2 & -8 & -2 & -6 \\ -4 & 2 & 0 & -3 & -7 & -2 & -5 \\ 3 & 0 & 9 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 11 & -1 & -6 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 9 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 7 & -1 & -3 & -1 \\ 5 & 2 & 1 & -3 & 8 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

特征多项式 $q(x) = \det(xI - M) = q_2(x)q_5(x)$ 如所述。

设 a 是 q_2 的根，且 $K = \mathbb{Q}(a)$。每个 $d_{2,j}(a)$ 都属于 $\mathcal{O}_K$，而每个 $G[j]$ 都属于 $\mathcal{G}(\mathbb{Z})$，因此 $g_2(a)$ 属于 $\mathcal{G}(\mathcal{O}_K)$。向量 $(d_{2,1}(a) \ldots, d_{2,7}(a))$ 属于 $\ker(aI - M)$，因此 $g_2(a)$ 是 $\mathcal{G}(\mathcal{O}_K)$ 中一个 T(2) 特征形式，其特征值为 a。T(2) 的特征多项式 q 可分离，因为其判别式 $\mathrm{disc}(q) = 2^{26} \cdot 17^3 \cdot 59^2 \cdot 4787257$ 非零，因此 $g_2(a)$ 如定理 4.6 的证明所述，是所有上述 Hecke 算子的特征形式。

$q_2(x)$ 模 2 的约化为 $q_2(x) \equiv x(x+1) \bmod 2$。由于 2 不整除 $\mathrm{disc}(q_2) = 17$，根据引理 4.3，$\mathcal{O}_K$-理想 $\mathfrak{a} = \langle 2, a+1 \rangle$ 是素数。

图 6 中的值 c_j 满足命题 3.6 中的 $f_{79} = -32\mathfrak{f} + \sum_{j=1}^{7} c_j G[j]$。因此

$$f_{79} - g_2(a) = -32\mathfrak{f} + \sum_{j=1}^{7} (c_j - d_{2,j}(a)) G[j].$$

对于 $j = 1, \dots, 7$，我们计算得 $53(c_j - d_{2,\,j}(a)) \in \langle a+5 \rangle$。由引理 4.2，取 $k = 2$、$\ell = 53$、$\mathfrak{u} = \langle a+5 \rangle$ 和 $c = c_j - d_{2,\,j}(a)$，可得 $c_j - d_{2,\,j}(a) \in \langle 2, a+5 \rangle = \mathfrak{a}$。$-32\mathfrak{f}$ 的傅里叶系数也属于 $\mathfrak{a}$。因此，在傅里叶系数意义下，$f_{79} \equiv g_2(a)$ 与模 $\mathfrak{a}$ 同余。与定理 4.6 的证明一样，这证明了 f_{79} 和 $g_2(a)$ 的所有 p-欧拉多项式模 $\mathfrak{a}$ 同余。

通过计算一个特征值之差的范数，再计算另一个已是有理整数的特征值之差，可知 f_{79} 和 $g_2(a)$ 的可能同余理想仅限于范数为 2 的理想，

$$\begin{aligned} \mathrm{N}\left(\lambda_{g_2(a)}(\mathrm{T}(2)) - \lambda_{f_{79}}(\mathrm{T}(2))\right) &= \mathrm{N}(a+5) = 2 \cdot 53, \\ \lambda_{g_2(a)}(\mathrm{T}(3)) - \lambda_{f_{79}}(\mathrm{T}(3)) &= 11 - (-5) = 16 = 2^4, \end{aligned}$$

因为这些值的最大公因数是 2。任何此类同余理想也包含特征值之差 $a+5$，因此它包含 $\langle 2, a+5 \rangle = \mathfrak{a}$，所以它是 $\mathfrak{a}$。

设 b 是 q_5 和 $L = \mathbb{Q}(b)$ 的一个根。每个 $d_{5,\,j}(b)$ 都属于 $\mathcal{O}_L$，且每个 $G[j]$ 都属于$\mathcal{G}(\mathbb{Z})$，因此 $g_5(a)$ 属于 $\mathcal{G}(\mathcal{O}_L)$。向量 $(d_{5,\,1}(b) \dots, d_{5,\,7}(b))$ 属于 $\mathrm{null}(bI - M)$，因此 $g_5(b)$ 是 $\mathcal{G}(\mathcal{O}_L)$ 中一个特征值为 b 的 T(2) 特征形式。由于 q_5 的根互不相同，$g_5(b)$ 是所有上述 Hecke 算子的特征形式。

与上文类似，

$$f_{79} - 5g_5(b) = -32\mathfrak{f} + \sum_{j=1}^{7} (c_j - 5d_{5,j}(b)) G[j].$$

回顾定理陈述中的元素 $w \in \mathcal{O}_L$ 和理想 $\mathfrak{b} = \langle 8, w \rangle$。计算机软件表明，$\mathfrak{b}$ 是素数范数为 4 的理想 $\langle 2, v \rangle$ 在 2 上方的立方，其中 $v = \frac{1}{16}b^4 - \frac{5}{4}b^3 + \frac{129}{16}b^2 - \frac{151}{8}b + \frac{51}{4}$，因此 $\mathfrak{b}$ 的范数为 64，这也可以直接验证。对于 $j = 1, \dots, 7$，我们计算得 $635(c_j - 5d_{5,j}(b)) \in \langle w \rangle$。引理 4.2 结合 $k = 8$, $\ell = 635$, $\mathfrak{u} = \langle w \rangle$ 以及 $c = c_j - 5d_{5,j}(b)$，得到 $c_j - 5d_{5,j}(b) \in \langle 8, w \rangle = \mathfrak{b}$。$-32\mathfrak{f}$ 的傅里叶系数也属于 $\mathfrak{b}$。因此，在傅里叶系数意义下，$f_{79} \equiv 5g_5(b)$ 与 $\mathfrak{b}$ 同余。仿照定理 4.6 的证明，并注意到将 $g_5(b)$ 缩放 5 倍不会影响其海克特征值或欧拉多项式，这就证明了 f_{79} 和 $g_5(a)$ 的所有 p-欧拉多项式模 $\mathfrak{b}$ 同余。

通过计算两个特征值之差的范数，f_{79} 和 $g_5(a)$可能的同余理想仅限于 $\mathfrak{b}$ 的因子，

$$\begin{aligned} &\mathrm{N}\left(\lambda_{g_5(b)}(\mathrm{T}(2)) - \lambda_{f_{79}}(\mathrm{T}(2))\right) = \mathrm{N}\left(b+5\right) = 2^8 \cdot 349, \\ &\mathrm{N}\left(\lambda_{g_5(b)}(\mathrm{T}(5)) - \lambda_{f_{79}}(\mathrm{T}(5))\right) \\ &\quad = \mathrm{N}\left(\tfrac{1884}{16} - \tfrac{1582}{16}b + \tfrac{401}{16}b^2 - \tfrac{36}{16}b^3 + \tfrac{1}{16}b^4 - 3\right) \\ &\quad = 2^6 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 67, \end{aligned}$$

因为这些范数的最大公因数为 64，所以同余理想的范数整除 64。令 $\mathfrak{c}$ 表示该同余理想，$\mathfrak{b}$ 和 $\mathfrak{c}$ 的最小公倍数也是一个同余理想，因此其范数整除 $64 = \mathrm{N}(\mathfrak{b})$，所以最小公倍数为 $\mathfrak{b}$。也就是说，$\mathfrak{c} \mid \mathfrak{b}$。□

本证明中的 w 是以类似于 $N = 73$情形的方法找到的，这次使用了 $n = 5$和 $j = 3$。具有由 q_2 和 q_5 给出的 T(2) 特征值的 Gritsenko提升，来源于 lmfdb 上的椭圆新形式 79.4.a.a 和 79.4.a.b。

5. Computation of eigenvalues

在本节中， N 是一个正整数， f 是 $\mathcal{M}_k(\mathrm{K}(N))$的一个元素，而 p 是素数。此外， a、b、c 是整数，使得一个矩阵及其两个 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}(\sqrt{p}))$-等价矩阵为正，

$$s = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c/N \end{pmatrix}, \qquad \breve{s} = \begin{pmatrix} a/p & b \\ b & pc/N \end{pmatrix}, \qquad \widehat{s} = \begin{pmatrix} pa & b \\ b & c/(pN) \end{pmatrix}.$$

设 $\phi_s(\tau) = \tau s$为 $\tau \in \mathcal{H}$，并令 ϕ_s^*表示其拉回。下文的命题 5.2 给出了当 $p \nmid N$ 时限制 $\phi_s^*(f|_k\mathrm{T}(p))$ 和 $\phi_s^*(f|_k\mathrm{T}_1(p^2))$ 的初始公式；当 $p \| N$ 时，命题 5.5 类似地给出了 $\phi_s^*(f|_k\mathrm{T}(p))$ 和 $\phi_s^*(f|_k\mathrm{T}_{1,0}(p^2))$ 的初始公式。这些初始公式都由有限个有限和组成，但其中有些和在计算上难以处理。命题 5.3 和 5.6 表明，初始公式中的若干和可以改写为在较小指标集上的求和，从而使其变得可处理。这些思路已在 [4], 中使用，但当时并未给出具体细节。

引理 5.1。参考正上方的矩阵 s ，定义一个从复上半平面到二维 Siegel 上半空间的映射，

$$\phi_s : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}_2, \qquad \phi_s(\tau) = \tau s.$$

设 $R \subseteq \mathbb{C}$ 为一个子环。那么， ϕ_s 的拉回是一个环同态，它将系数在 R 中的层为 N 的 Siegel 参数化模形式分次环映射到系数在 R 中的层为 $\det(s)N$ 的椭圆模形式分次环，

$$\phi_s^* : \mathcal{M}(\mathrm{K}(N))(R) \longrightarrow \mathcal{M}(\Gamma_0(\det(s)N))(R)$$

定义为

$$(\phi_s^* f)(\tau) = f(\tau s).$$

映射 ϕ_s^* 将权重乘以 2，并将尖点形式映射为尖点形式。

椭圆模形式 $\phi_s^* f$ 是将 f 限制到曲线 $\phi_s(\mathcal{H})$ 上所得的形式，也称为在 s 下对 f 的限制。

证明。该证明是对 Poor– Yuen [26, 命题 5.4] 结果的直接修改。□

设参数化模形式 $f \in \mathcal{M}_k(\mathrm{K}(N))$ 的傅里叶展开为（其中$\langle t,\ \Omega\rangle = \mathrm{tr}(t\Omega)$）

$$f(\Omega) = \sum_{t \in \mathcal{X}_2(N)^{\mathrm{semi}}} a(t;f)\, \mathrm{e}(\langle t, \Omega\rangle).$$

其限制 $\phi_s^* f \in \mathcal{M}_{2k}(\Gamma_0(\det(s)N))$ 的傅里叶展开为（其中 $q = \mathrm{e}(\tau)$）

$$(\phi_s^* f)(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \Bigg(\sum_{t:\ \langle s,t\rangle = n} a(t;f) \Bigg) q^n.$$

此外，若 f 右作用以相似因子为 $\mu = \det(AD)^{1/2}$ 的分块上三角矩阵 $\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ 0 & D \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GSp}_4^+(\mathbb{Q})$，则所得函数的限制为

$$\begin{aligned} \phi_s^*(f|_k\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ 0 & D \end{smallmatrix}\right))(\tau) &= (f|_k\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ 0 & D \end{smallmatrix}\right))(s\tau) \\ &= \det(AD)^{k-3/2}\det(D)^{-k} f(AsD^{-1}\tau + BD^{-1}) \\ &= \det(A)^k \det(AD)^{-3/2} \sum_{n\in\mathbb{Q}_{\geq 0}} \left(\sum_{t:\, \langle AsD^{-1}, t\rangle = n} a(t;f)\mathrm{e}\left(\langle BD^{-1}, t\rangle\right)\right) q^n. \end{aligned} \tag{1}$$

为了通过限制到模曲线的技巧计算特征值，我们将限制映射 ϕ_s^* 应用于特征值方程 $\lambda_f(T)f = f|T = \sum_{j=1}^m f|t_j$。这里我们假设 $T = \mathrm{K}(N)\,\mathrm{diag}(a,b,c,d)\mathrm{K}(N) = \bigsqcup_{j=1}^m \mathrm{K}(N)t_j$，其中 t_j 为分块上三角矩阵，且 $m = \deg T$ 是 $\mathrm{K}(N)\backslash T$ 中陪集的数量。对每一项 $\phi_s^*(f|t_j)$ 使用方程 (1)，限制后的特征值方程

$$\lambda_f(T)\phi_s^*(f) = \sum_{j=1}^m \phi_s^*(f|t_j) \tag{2}$$

只要椭圆模形式 $\phi_s^*(f)$ 不恒等于零，就能唯一确定特征值 $\lambda_f(T)$。事实上，方程 (2) 中 $q = \mathrm{e}(\tau)$ 的每个后续幂都会对特征值 $\lambda_f(T)$ 提供一次独立的计算，因此可用于检查计算基础设施。为提高效率，方程 (2) 的系数在有限域 $\mathbb{F}_\ell$ 上计算，而不是在 $\overline{\mathbb{Q}}$ 上计算。

设 T 具有一个相似因子 μ，且它是一个 p 次幂。方程 (1) 中的因子 $\mathrm{e}\left(\langle BD^{-1}, t\rangle\right)$ 是 μ 次单位根。为简单起见，假设 $\lambda_f(T) \in \mathbb{Z}$。选取一个在分圆域 $K = \mathbb{Q}(\mathrm{e}(1/\mu))$ 中完全分裂的辅助素数 ℓ。根据这里的库默尔–戴德金引理 4.3，μ 次分圆多项式 Φ_μ 在 $\mathbb{F}_\ell$ 中分裂。令 $r \in \mathbb{Z}$ 为 Φ_μ 在 $\mathbb{F}_\ell$ 中的一个根。在 K 中，我们知道 $\mathrm{N}(r - \mathrm{e}(1/\mu)) = \Phi_\mu(r) \equiv 0$ 模 ℓ，因此，根据引理 4.1，在 $\mathcal{O}_K$ 中存在一个位于 $\langle r - \mathrm{e}(1/\mu)\ \ell\rangle$ 之上的素理想 $\mathfrak{m}$。我们在有限域 $\mathcal{O}_K/\mathfrak{m} \cong \mathbb{F}_\ell$ 上计算方程 (2) 的系数，利用同余 $\mathrm{e}(1/\mu) \equiv r$ 模 $\mathfrak{m}$ 将计算化简为整数运算，并得到 $\lambda_f(T)$ 模 ℓ。当 ℓ 充分大时，一般界 $|\lambda_f(T)| \leq \mu^{k-3}\deg T$（参见 [4], 中的命题 6.7.1）确定了 $\lambda_f(T) \in \mathbb{Z}$。

与使用引理 4.4 中的公式相比，限制在模曲线上进行计算的主要优势在于，部分求和后若投影到 q 的整数次幂上，方程 (2) 中的许多项都可以省略。命题 5.3 和 5.6 中的加速结果表明，我们可以对指标集进行部分求和，即使其规模约为 $\deg T$ 的 p 分之一，仍能保持方程 (2) 中 q 的整数次幂对应的等式成立。

另一个附带的好处是，我们或许无需计算特征形式 f 的傅里叶系数。例如，在第3节中，每个特征形式都表示为 Gritsenko 提升 $G[i]$ 的有理函数。特化 $\phi_s^*(G[i]|t_j)$ 根据这些 Gritsenko 提升的傅里叶系数计算，而这又可以归结为计算雅可比形式的傅里叶系数。使用单变量而非多变量幂级数在计算上也更有利。用于限制 f 的 s 可从多个候选项中选取，以提高速度并使 $\phi_s^*(f)$ 的 q 阶尽可能小。对于 $N = 61$ 和良素数 p，我们使用了 $s = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$，其 q 阶为 2；对于 $p = 61$，我们使用了 $s = \left(\begin{smallmatrix} 13 & 2 \\ 2 & 19/61 \end{smallmatrix}\right)$，其 q 阶为 1。对于 $N = 73$，即 79，在所有情形下，我们分别使用了 $s = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 2 \end{smallmatrix}\right)$、$\left(\begin{smallmatrix} 158 & 47 \\ 47 & 14 \end{smallmatrix}\right)$，它们的 q 阶均为 3。

现在我们给出加速定理，用于计算 $p \nmid N$ 下 $f|_k\mathrm{T}(p)$ 和 $f|_k\mathrm{T}_1(p^2)$ 的限制，以及 $p\|N$ 下 $f|_k\mathrm{T}(p)$ 和 $f|_k\mathrm{T}_{1,0}(p^2)$ 的限制。回顾一下，这些 Hecke 算子定义为对双陪集取斜作用，

$$\begin{aligned}\mathrm{T}(p) &= \mathrm{K}(N)\,\mathrm{diag}(1,1,p,p)\mathrm{K}(N)\\ \mathrm{T}_1(p^2) &= \mathrm{K}(N)\,\mathrm{diag}(1,p,p^2,p)\mathrm{K}(N)\\ \mathrm{T}_{1,0}(p^2) &= \mathrm{K}(N)\,\mathrm{diag}(p,p^2,p,1)\mathrm{K}(N).\end{aligned}$$

关于这些双陪集分解为右陪集的方式，见 [4, 34]。

对于 $p \nmid N$ 的情形，我们使用 [4] 中的单陪集分解，以及应用 (1) 后得到的以下结果。

命题 5.2. 设 N、f、p、s、$\check{s}$、$\hat{s}$ 如本节开头所述。设$p \nmid N$。对于任意整数 i、j、k，令 $t_{i,j,k} = \left(\begin{smallmatrix} i/p & j/p \\ j/p & k/p \end{smallmatrix}\right)$，$u_{i,j,k} = \left(\begin{smallmatrix} i/p^2 & j/p \\ j/p & k/p^2 \end{smallmatrix}\right)$，以及$v_i = pu_{0,ia,i(ia+2b)}$。$s$ 下 $f|_k\mathrm{T}(p)$ 和 $f|_k\mathrm{T}_1(p^2)$ 的限制为

$$\begin{aligned}\phi_s^*(f|_k\mathrm{T}(p))(\tau) &= p^{2k-3}f(ps\tau) + p^{k-3}\sum_{i \bmod p} f(\check{s}\tau + t_{i,0,0})\\ &\quad + p^{k-3}\sum_{i,k \bmod p} f((\hat{s}+v_i)\tau + t_{0,0,k}) + p^{-3}\sum_{i,j,k \bmod p} f(s\tau/p + t_{i,j,k})\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\phi_s^*(f|_k\mathrm{T}_1(p^2))(\tau) &= p^{3k-6}f(p\check{s}\tau) + p^{3k-6}\sum_{i \bmod p} f(p(\hat{s}+v_i)\tau)\\ &\quad + p^{2k-6}\sum_{i\not\equiv 0 \bmod p} f(s\tau + t_{i,0,0}) + p^{2k-6}\sum_{\substack{i \bmod p,\\ j\not\equiv 0 \bmod p}} f(s\tau + jt_{i^2,i,1})\\ &\quad + p^{k-6}\sum_{\substack{i \bmod p^2,\\ j \bmod p}} f(\check{s}\tau/p + u_{i,j,0}) + p^{k-6}\sum_{\substack{i,j \bmod p,\\ k \bmod p^2}} f((\hat{s}+v_i)\tau/p + u_{0,j,k})\end{aligned}$$

展开为 Puiseux q-级数后，命题 5.2 中限制项的求和内部会发生抵消。以下命题重述了 [4] 的命题 6.3.8，同时还给出了一些额外公式；它表明，部分求和会产生新的限制项，其在较小指标集上的和对于 q 的整数次幂等于原来的和。该命题较为微妙之处在于，其较简单的系数只有在整数次幂处才必然与原系数相符。对于 Puiseux 级数 $f \in \mathbb{C}[[q^{1/\infty}]]$ 和 $e \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$，令 $\mathrm{coeff}_e f$ 表示 f 中 q^e 的系数，它是一个复数。

命题 5.3. 设 $N, f, p, s, \check{s}, \hat{s}$ 如本节开头所述。设$p \nmid N$。对于任意整数 i, j, k，令 $t_{i,j,k} = \left(\begin{smallmatrix} i/p & j/p \\ j/p & k/p \end{smallmatrix}\right)$，$u_{i,j,k} = \left(\begin{smallmatrix} i/p^2 & j/p \\ j/p & k/p^2 \end{smallmatrix}\right)$，以及$v_i = pu_{0,ia,i(ia+2b)}$。以下结论对所有 $e \in \mathbb{N}_0$ 均成立。

(a) *If* $p \nmid a$ *then*

$$\mathrm{coeff}_e \sum_{i \bmod p} f(\check{s}\tau + t_{i,0,0}) = p\,\mathrm{coeff}_e f(\check{s}\tau)$$

and

$$\mathrm{coeff}_e \sum_{i,j,k \bmod p} f(s\tau/p + t_{i,j,k}) = p\,\mathrm{coeff}_e \sum_{j,k \bmod p} f(s\tau/p + t_{0,j,k})$$

and

$$\operatorname{coeff}_e \sum_{\substack{i \bmod p^2 \\ j \bmod p}} f(\breve{s}\tau/p + u_{i,j,0}) = p^2 \operatorname{coeff}_e \sum_{j \bmod p} f(\breve{s}\tau/p + u_{0,j,0}).$$

(b) 若 $p \nmid b$，则

$$\operatorname{coeff}_e \sum_{i,j,k \bmod p} f(s\tau/p + t_{i,j,k}) = p \operatorname{coeff}_e \sum_{i,k \bmod p} f(s\tau/p + t_{i,0,k})$$

and

$$\operatorname{coeff}_e \sum_{\substack{i \bmod p^2 \\ j \bmod p}} f(\breve{s}\tau/p + u_{i,j,0}) = p \operatorname{coeff}_e \sum_{i \bmod p^2} f(\breve{s}\tau/p + u_{i,0,0}).$$

(c) 若 $p \nmid c$ 则

$$\operatorname{coeff}_e \sum_{i,j,k \bmod p} f(s\tau/p + t_{i,j,k}) = p \operatorname{coeff}_e \sum_{i,j \bmod p} f(s\tau/p + t_{i,j,0}).$$

(d) 对于 $i \in \mathbb{Z}$，若 $p \nmid c + i(ia + 2b)N$ 则

$$\operatorname{coeff}_e \sum_{k \bmod p} f((\widehat{s} + v_i)\tau + t_{0,0,k}) = p \operatorname{coeff}_e f((\widehat{s} + v_i)\tau)$$

and

$$\operatorname{coeff}_e \sum_{\substack{j \bmod p \\ k \bmod p^2}} f((\widehat{s} + v_i)\tau/p + u_{0,j,k}) = p^2 \operatorname{coeff}_e \sum_{j \bmod p} f((\widehat{s} + v_i)\tau/p + u_{0,j,0}).$$

证明。我们证明 (d) 的第二部分，其余部分类似；(c) 已在 [4] 中证明。设 $p \nmid c + i(ia + 2b)N$。设 $e \in \mathbb{N}_0$。令 $t = \begin{pmatrix} n & r/2 \\ r/2 & mN \end{pmatrix}$，则左侧 q^e 的系数为

$$\sum_{\substack{j \bmod p,\ k \bmod p^2 \\ n,r,m:\, an + (ia+b)r/p + (c+i(ia+2b)N)mN/p^2 = e}} a(t; f)\mathrm{e}(jr/p + kmN/p^2).$$

由于 $\sum_{j \bmod p} \mathrm{e}(jr/p) = 0$ 若 $p \nmid r$，此和为

$$\sum_{\substack{n,r,m:\, an + (ia+b)r/p \\ +(c+i(ia+2b)N)mN/p^2 = e \\ p \mid r}} \sum_{j \bmod p,\ k \bmod p^2} a(t; f)\mathrm{e}(jr/p + kmN/p^2).$$

由于 $p \nmid c + i(ia + 2b)N$，若 $p \mid r$，则求和中的 $p^2 \mid m$（因为 $p \nmid N$）。因此，上述求和变为

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{n,r,m:\, an + (ia+b)r/p \\ +(c+i(ia+2b)N)mN/p^2 = e \\ p \mid r}} \sum_{j \bmod p,\ k \bmod p^2} a(t; f)\mathrm{e}(jr/p + 0) \\ &= \sum_{\substack{n,r,m:\, an + (ia+b)r/p \\ +(c+i(ia+2b)N)mN/p^2 = e \\ p \mid r}} \sum_{j \bmod p} p^2 a(t; f)\mathrm{e}(jr/p) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{n,r,m:\, an+(ia+b)r/p \\ +(c+i(ia+2b)N)mN/p^2=e}} \sum_{j \bmod p} p^2 a(t;f)\mathrm{e}(jr/p) \\
&= p^2 \sum_{j \bmod p} \sum_{\substack{n,r,m:\, an+(ia+b)r/p \\ +(c+i(ia+2b)N)mN/p^2=e}} a(t;f)\mathrm{e}(jr/p) \\
&= p^2 \sum_{j \bmod p} \mathrm{coeff}_e\, f((\hat{s}+v_i)\tau/p + u_{0,j,0}).
\end{aligned}
$$

□

现在我们给出当 $p\|N$时类似的加速定理。只需让 p 的一个幂整除 N，即可得到所有上三角陪集代表元。

命题 5.4. 设 $p\|N$。固定 $\hat{}p$、$\hat{}N \in \mathbb{Z}$，使得 $\hat{}pp + \hat{}NN/p = 1$。我们有以下右陪集分解。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{K}(N)\,\mathrm{diag}(p,p,1,1)\mathrm{K}(N) = &\sum_{i,j,k \bmod p} \mathrm{K}(N)\begin{pmatrix} 1 & 0 & i & j \\ 0 & 1 & j & k/p \\ & & p & 0 \\ & & 0 & p \end{pmatrix} \\
&+ \sum_{i,j \bmod p} \mathrm{K}(N)\begin{pmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ i & 1 & 0 & j/p \\ & & 1 & -i \\ & & 0 & p \end{pmatrix} + \sum_{i,j \bmod p} \mathrm{K}(N)\begin{pmatrix} 1 & -Nj & i & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ & & p & 0 \\ & & Nj & 1 \end{pmatrix} \\
&+ \sum_{j \bmod p} \mathrm{K}(N)\begin{pmatrix} p & -N & jN/p & j \\ \hat{N} & \hat{p}p & \hat{p}j & -\hat{N}j/p \\ & & \hat{p}p & -\hat{N} \\ & & N & p \end{pmatrix} + \mathrm{K}(N)\begin{pmatrix} p & 0 & & \\ 0 & p & & \\ & & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{K}(N)\,\mathrm{diag}(p,p^2,p,1)\mathrm{K}(N) = &\sum_{\substack{i,j \bmod p \\ k \bmod p^2}} \mathrm{K}(N)\begin{pmatrix} p & 0 & 0 & jp \\ i & 1 & j & -ij+k/p \\ & & p & -ip \\ & & 0 & p^2 \end{pmatrix} \\
&+ \sum_{j \bmod p} \mathrm{K}(N)\begin{pmatrix} p & -Njp & & \\ 0 & p^2 & & \\ & & p & 0 \\ & & Nj & 1 \end{pmatrix} + \sum_{\substack{i,j,k \bmod p \\ k \neq 0 \bmod p}} \mathrm{K}(N)\begin{pmatrix} p & -jNp & 0 & 0 \\ -i & ijN+p & jNk/p & k/p \\ & & ijN+p & i \\ & & jNp & p \end{pmatrix} \\
&+ \sum_{\substack{i,j \bmod p \\ i \neq 0 \bmod p}} \mathrm{K}(N)\begin{pmatrix} p & -Npj & -ijN & -i \\ \hat{N} & p-\hat{N}Nj & i(\hat{N}Nj/p-1) & i\hat{N}/p \\ & & p-\hat{N}Nj & -\hat{N} \\ & & jNp & p \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

证明。$\mathrm{K}(N)\,\mathrm{diag}(p,p,1,1)\mathrm{K}(N)$ 的分解的陪集代表元，正是 [34], 的命题 2.10 中给出的右陪集代表元，只是我们对 [34] 的命题 2.10 中的最后一个代表元作了如下替换：对于 $p \nmid i$，替换为

$$
\begin{pmatrix} p & 0 & & \\ 0 & p & & \\ & & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & i\hat{N}N & 1 & 0 \\ i\hat{N}N & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{with} \quad \begin{pmatrix} p & -N & \hat{\imath}N/p & \hat{\imath} \\ \hat{N} & \hat{p}p & \hat{p}\hat{\imath} & -\hat{N}\hat{\imath}/p \\ & & \hat{p}p & -\hat{N} \\ & & N & p \end{pmatrix},
$$

其中 $\hat{\imath}$ 满足 $\hat{\imath}i \equiv 1 \bmod p$。直接计算可得，左侧代表元右乘右侧代表元的逆元

为

$$\begin{pmatrix} (i\hat{i}\hat{N}N+p)/p & (i\hat{i}\hat{N}N^2-Np)/p^2 & -\hat{i}N/p & -\hat{i} \\ (\hat{N}p-i\hat{i}\hat{N}^2N)/p^2 & ((i\hat{i}\hat{N}N+p)\hat{p})/p & -\hat{i}\hat{p} & \hat{i}\hat{N}/p \\ (i\hat{N}^2N)/p & -i\hat{N}N\hat{p} & p\hat{p} & -\hat{N} \\ -i\hat{N}N & -(i\hat{N}N^2)/p & N & p \end{pmatrix}.$$

利用 $1-\hat{i}\hat{i}NN/p$ 是 p 的倍数这一事实，可以直接验证这些矩阵项满足矩阵属于 K(N) 的条件。对 i 模 p 求和，与对 $\hat{i}$ 模 p、$\hat{i}\neq 0$ 求和相同，因此我们用 j 替换 $\hat{i}$。由此可按所述替换代表元。K(N) diag($p,p^2,p,1$)K(N) 的分解证明类似。□

在接下来的两个命题中，$t_{i,\ j,\ k}$ 和 $u_{i,\ j,\ k}$ 的定义与命题5.2和命题5.3中的定义不同。

命题 5.5。设 $N,f,p,s,\check{s},\hat{s}$ 如本节开头所述。设 $p\|N$。对于任意整数 i,j,k，令 $t_{i,\ j,\ k}=\begin{pmatrix} i/p & j/p \\ j/p & k/p^2 \end{pmatrix}$，$u_{i,\ j,\ k}=\begin{pmatrix} i/p & j/p \\ j/p & k/p^3 \end{pmatrix}$，$v_i=pt_{0,\ ia,\ i(ia+2b)}$，以及 $w_j=j\begin{pmatrix} (-2b+jc)N/p & -c \\ -c & 0 \end{pmatrix}$。固定 $\hat{p},\hat{N}\in\mathbb{Z}$，使得 $\hat{p}p+\hat{N}Nj/p=1$。$f|_k$T(p) 和 $f|_k$ T$_{1,0}$(p^2) 的限制为

$$\begin{aligned}
&\phi_s^*(f|_k\mathrm{T}(p))(\tau)\\
&=p^{-3}\sum_{i,j,k \bmod p} f(s\tau/p+t_{i,j,k})\\
&\quad+p^{k-3}\sum_{i,k \bmod p} f((\hat{s}+v_i)\tau+t_{0,0,k})\\
&\quad+p^{k-3}\sum_{i,j \bmod p} f((\check{s}+w_j)\tau+t_{i,0,0})\\
&\quad+p^{k-3}\sum_{j\not\equiv 0 \bmod p} f\left(\begin{pmatrix} -2bN+cN/p+ap & b-\hat{p}c+a\hat{N}-2b\hat{N}N/p \\ b-\hat{p}c+a\hat{N}-2b\hat{N}N/p & \frac{-\hat{p}c\hat{N}N+a\hat{N}^2N+\hat{p}cp+2\hat{p}b\hat{N}Np}{Np} \end{pmatrix}\tau+t_{0,j,0}\right)\\
&\quad+p^{2k-3}f(ps\tau)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\phi_s^*(f|_k\mathrm{T}_{1,0}(p^2))(\tau)\\
&=p^{k-6}\sum_{\substack{i,j \bmod p,\\ k \bmod p^2}} f((\hat{s}+v_i)\tau/p+u_{0,j,k})\\
&\quad+p^{2k-6}\sum_{i,j \bmod p,i\neq 0} f\left((s+\begin{pmatrix} j(cj-2b)N & \frac{a\hat{N}-2b\hat{N}jN+c\hat{N}j^2N-cjp}{p} \\ \frac{a\hat{N}-2b\hat{N}jN+c\hat{N}j^2N-cjp}{p} & \frac{a\hat{N}^2-2b\hat{N}^2jN+c\hat{N}^2j^2N+2b\hat{N}p-2c\hat{N}jp}{p^2} \end{pmatrix})\tau+t_{0,i,0}\right)\\
&\quad+p^{3k-6}\sum_{j \bmod p} f(p(\check{s}+w_j)\tau)\\
&\quad+p^{2k-6}\sum_{\substack{i,j \bmod p,\\ k\not\equiv 0 \bmod p}} f\left((s+\begin{pmatrix} j(-2b+cj)N & \frac{-ai+2bijN-cij^2N-cjp}{p} \\ \frac{-ai+2bijN-cij^2N-cjp}{p} & \frac{ai^2-2bi^2jN+ci^2j^2N-2bip+2cijp}{p^2} \end{pmatrix})\tau+t_{0,0,k}\right)
\end{aligned}$$

证明。将 (1) 应用于命题 5.4。□

我们有以下可用的加速方法。

命题 5.6. 设 $N, f, p, s, \breve{s}, \hat{s}$ 与本节开头处相同。设$p \| N$。对于任意整数 i, j, k，令 $t_{i,j,k} = \left(\begin{smallmatrix} i/p & j/p \\ j/p & k/p^2 \end{smallmatrix}\right)$, $u_{i,j,k} = \left(\begin{smallmatrix} i/p & j/p \\ j/p & k/p^3 \end{smallmatrix}\right)$, $v_i = pt_{0,ia,i(ia+2b)}$, 以及 $w_j = j\left(\begin{smallmatrix} (-2b+jc)N/p & -c \\ -c & 0 \end{smallmatrix}\right)$。则以下结论对所有 $e \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 均成立。

(a) *If $p \nmid a$, then*

$$\operatorname{coeff}_e \sum_{i,j,k \bmod p} f(s\tau/p + t_{i,j,k}) = p \operatorname{coeff}_e \sum_{j,k \bmod p} f(s\tau/p + t_{0,j,k})$$

and

$$\operatorname{coeff}_e \sum_{i,j \bmod p} f((\breve{s} + w_j)\tau + t_{i,0,0}) = p \operatorname{coeff}_e \sum_{j \bmod p} f((\breve{s} + w_j)\tau)$$

(b) *If $p \nmid b$ then*

$$\operatorname{coeff}_e \sum_{i,j,k \bmod p} f(s\tau/p + t_{i,j,k}) = p \operatorname{coeff}_e \sum_{i,k \bmod p} f(s\tau/p + t_{i,0,k}).$$

(c) *If $p \nmid c$ then*

$$\operatorname{coeff}_e \sum_{i,j,k \bmod p} f(s\tau/p + t_{i,j,k}) = p \operatorname{coeff}_e \sum_{i,j \bmod p} f(s\tau/p + t_{i,j,0})$$

and

$$\operatorname{coeff}_e \sum_{i,k \bmod p} f((\hat{s} + v_i)\tau + t_{0,0,k}) = p \operatorname{coeff}_e \sum_{i \bmod p} f((\hat{s} + v_i)\tau)$$

and

$$\operatorname{coeff}_e \sum_{\substack{i,j \bmod p, \\ k \bmod p^2}} f((\hat{s} + v_i)\tau/p + u_{0,j,k}) = p^2 \operatorname{coeff}_e \sum_{i,j \bmod p} f((\hat{s} + v_i)\tau/p + u_{0,j,0}).$$

(d) *For fixed i, if $p \nmid ia + b$ then*

$$\operatorname{coeff}_e \sum_{\substack{j \bmod p, \\ k \bmod p^2}} f((\hat{s} + v_i)\tau/p + u_{0,j,k}) = p \operatorname{coeff}_e \sum_{k \bmod p^2} f((\hat{s} + v_i)\tau/p + u_{0,0,k}).$$

证明。证明过程与命题 5.3 的证明类似 □

另一项提速方法是：对于 $X, Y \in \mathrm{M}_2^{\mathrm{sym}}$，如果集合 $\{t \in \mathcal{X}_2 : \mathrm{Tr}(Xt) = e\}$ 为空，那么 $\operatorname{coeff}_e f(X\tau + Y) = 0$。这里该集合与 Y无关，且结论对所有 Y均成立，因此检查该集合是否为空可以节省大量计算时间。此外，当某个计算 f 的特定公式的分母对某些 X 和 Y可能为零时，这一结果尤为关键，因为我们只需跳过这个 X。

References

[1] Avner Ash、Paul E. Gunnells 和 Mark McConnell。SL(4, ℤ) 同余子群的上同调。II。 *J. Number Theory*, 128(8):2263–2274, 2008。[2] Avner Ash、Paul E. Gunnells 和 Mark McConnell。SL $_4\,\mathbb{Z}$ *J.* ( ) 同 *Algebra* 553 211 247, 2020
余子群的扭曲一维系数上同调与伽罗瓦表示。 , : – 。[3] Eran Assaf、Watson Ladd、Gustavo Rama、Gonzalo Tornaria 和 John Voight。五元正交模形式中的参数模形式数据库。
https://math.dartmouth.edu/ jvoight/articles/paramodular-lucant-012223.pdf, 2023。

[4] Armand Brumer、Ariel Pacetti、Cris Poor、Gonzalo Tornar´ıa、John Voight 和 David S. Yuen。论典型阿贝尔曲面的参数模性。

Algebra Number Theory 13 5 1145 1195, , ( ): – 。[5] 2019
Philip Candelas、Xenia de la Ossa 和 Duco van Straten。由 Calabi-Yau 微分方程得到的局部ζ函数。arXiv:2104.07816, 2021。[6] Neil Dummigan、Ariel Pacetti、Gustavo Rama 和 Gonzalo Tornaria。五元形式与参数模形式。arXiv:2112.03797, 2021。[7] Martin Eichler 和 Don Zagier。

The theory of Jacobi forms 55 *Progress in Math-* , 第 卷。*ematics* ¨ 1985
Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 。[8] Vasily Golyshev 和 Duco van Straten。通过纤维化动机得到的同余。即将在《纯粹与应用数学季刊》发表。[9] Valeri Gritsenko。极化阿贝尔曲面模空间的无理性。载于 *Abelian varieties (Egloffstein, 1993)* 63 84 1995 , 第 – 页。de Gruyter，柏林，。附有作者和 K. Hulek 撰写的附录。[10] Valeri A. Gritsenko。Borcherds模形式 ϕ_{12}的 24 个面。arXiv:1203.6503, 2012。[11] Valeri A. Gritsenko 和 Klaus Hulek。最小 Siegel 模三维簇。

Math. Proc. Cam- , ( ): – 。[12] *bridge Philos. Soc.* 123 3 461 485, 1998
Valeri A. Gritsenko 和 Viacheslav V. Nikulin。自守形式与 Lorentzian Kac-Moody 代数。II。*Internat. J. Math.*, 9(2):201–275, 1998。[13] Valeri A. Gritsenko、Cris Poor 和 David S. Yuen。无处不在的 Borcherds 乘积。

J. Num- , : – 。[14] *ber Theory* 148 164 195, 2015
Valeri A. Gritsenko、Nils-Peter Skoruppa 和 Don Zagier。θ块。`https://math.univ-lille1.fr/d7/sites/default/files/THETA%20BLOCKS22.09.18_1.pdf`。[15] Jeffery Hein。*Orthogonal modular forms: A application to a conjecture of Birch algorithms* , 。博士论文，达特茅斯学院，。https://doi.org/ 。/ddlp. 。[16] Tomoyoshi Ibukiyama。二维辛Euler因子。*and computations* 2016 10 1349 2156

J. Fac. Sci. Univ. Tokyo , ( ): – 。[17] *Sect. IA Math.* 30 3 587 614, 1984
Tomoyoshi Ibukiyama。关于 Sp(2, R) 自守形式维数与其紧扭 Sp(2) 维数之间的关系。I。载于 *Automorphic forms and number theory (Sendai, 1983)*，第 7 卷 *Adv. Stud. Pure Math.*，第 7–30 页。North-Holland，阿姆斯特丹，1985。[18] Tomoyoshi Ibukiyama。权重 3 的 Siegel 模形式维数公式与超奇异阿贝尔簇。载于 *Siegel Modular Forms and Abelian Varieties, Proceedings of the 4th Spring Conference on Modular Forms and Related Topics*，第 39–60 页，2007。[19] Tomoyoshi Ibukiyama。参数模形式与紧扭。载于 *Automorphic forms on GSp(4): Proceedings of the 9th Autumn Workshop on Number Theory* 37 48, 2007 , 第 – 页。[20]

Tomoyoshi Ibukiyama。五元格与二元四元数厄米格。*Tohoku Math. J. (2)* 71 2 207 220, 2019 , ( ): – 。[21]

Tomoyoshi Ibukiyama 和 Hidetaka Kitayama。无平方因子级参数模形式的维数公式及其与内扭曲的比较。*J. Math. Soc. Japan*, 69(2):597–671, 2017。[22] Jennifer Johnson-Leung 和 Brooks Roberts。与 Hilbert 模形式相关的二次 Siegel 模形式。*J. Number Theory*, 132(4):543–564, 2012。[23] Watson Bernard Ladd。*Algebraic modular forms on SO_5 $\mathbb{Q}$ and the computation of paramod-* ( ) 。博士论文，*ular forms* 2018 6 46709 加州大学伯克利分校，。https://escholarship.org/uc/item/ wd 。[24] Daniel Marcus。*Number Fields*。Universitext。Springer，第二版，2018。[25] Cris Poor、Jerry Shurman 和 David S. Yuen。权重 2、无平方因子级的 Siegel 参数化模形式。*Int. J. Number Theory*, 13(10):2627–2652, 2017。[26] Cris Poor 和 David S. Yuen。二次小权重下 $\Gamma_0(p)$的尖点形式维数。*Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 77:59–80, 2007。[27] Cris Poor 和 David S. Yuen。二次参数模群的尖点结构。*J. Korean Math. Soc.*, 50(2):445–464, 2013。[28] Cris Poor 和 David S. Yuen。参数化尖点形式。*Math. Comp.*, 84 1438, 2015 293 1401( ): – 。[29] Gustavo Rama 和 Gonzalo Tornar´ıa。*The Computation of paramodular forms* 4 , 第 卷。第十四届算法数论研讨会，。[30] Gustavo Rama 和 Gonzalo Tornar´ıa。五元正交模形式，2020。*Open Book Series* 2020
`http://www.cmat.edu.uy/cnt/`。[31] Helmut Reefschl¨ager。*Berechnung der Anzahl der 1-Spitzen der Paramodularen Gruppen 2-ten Grades* 。博士论文，哥廷根乔治-奥古斯特大学，。¨ ¨ 1973

[32] Brooks Roberts 和 Ralf Schmidt。 *Local Newforms for* 4 1918 *Lecture Notes* GSp( ), *in Mathematics* 2007 的卷。Springer，柏林，。[33] Mirko R¨osner 和 Rainer Weissauer。GSp(4) 内形式之间的全局提升。arXiv:2103.14715v1，2021。[34] Ralf Schmidt。包结构与参数模形式。 *Trans. Amer. Math. Soc.*, 370 5 3085( )：–3112，2018。[35] Nils-Peter Skoruppa 和 Don Zagier。雅可比形式的迹公式。 *J. Reine Angew.* , ： – *Math.* 393 168 198，1989。[36] Pol van Hoften。参数化模 Siegel 三维簇的几何Jacquet-Langlands对应。 *Math. Z.*, 299(3-4)：2029–2061，2021。[37] David S. Yuen、Cris Poor 和 Jerry Shurman。61、73 和 79 级权三参数模非提升形式的特征值，2022。http://www.siegelmodularforms.org/pages/degree2/day61/。

Department of Mathematics, Fordham University, Bronx, NY 10458 USA
Email address: poor@fordham.edu

Department of Mathematics, Reed College, Portland, OR 97202 USA
Email address: jerry@reed.edu

92-1507 Punawainui St., Kapolei, HI 96707 USA
Email address: yuen888@hawaii.edu