arXiv:2302.00783v1 [math.AG] 1 Feb 2023

瞬子：下一个前沿

GAIA COMASCHI、MARCOS JARDIM、CRISTIAN MARTINEZ 和 DAPENG MU

Abstract. 瞬子源自粒子物理学，自 20 世纪 70 年代以来一直受到深入研究，并从此对数学产生了巨大影响。本文聚焦于过去 $40+$ 年间数学物理引导代数几何发展的一个具体方面。具体而言，我们考察代数几何中 *(mathematical) instanton bundles* 的概念如何从定义在 $\mathbb{CP}^3$ 上的一类向量丛，发展为任意维射影簇上的一类无挠层，并进一步发展为 Fano 三维簇导出范畴中的一类对象。本综述所包含的原创成果恰恰聚焦于后一方向；特别地，我们证明，射影空间上的经典秩 2 瞬子丛确实是 Bridgeland 稳定条件空间中任意适当腔室的瞬子对象。

Contents

1. 引言 2 致谢 4 2. 阿蒂亚–沃德对应与数学瞬子丛 5 3. 瞬子层与反常瞬子层 7 3.1. ADHM 构造与反常瞬子层 9 3.2. 瞬子作为箭图表示 10 4. Fano 三维簇上的瞬子层 12 4.1. Fano 三维簇上的瞬子丛 12 4.2. 瞬子模空间的非空性 12 4.3. 瞬子的单子表示 13 4.4. Fano 三维簇上的瞬子层。14 4.5. 指标为2的法诺三维簇上的瞬子丛 16 4.6. 瞬子的无上同调扩张 18 5. 射影簇上的 h-瞬子层 19 5.1. 射影空间与射影概形上的 h-瞬子层 20 5.2. h-瞬子丛的单子表示 21 5.3. h-瞬子丛的例子 23 6. 通过 Bridgeland 稳定性研究瞬子复形 26 6.1. 来自箭图区域的单子描述 32 6.2. 再论无环扩张 36 参考文献 37

1. Introduction

设 $(M,\ g)$ 是一个4维定向黎曼流形，且 $E \to M$ 是 M 上的一个复向量丛。E 上的一个联络 是一个 $\mathbb{C}$-线性映射

$$\nabla\ :\ \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E) \otimes \Omega^1_M$$

满足莱布尼茨法则：给定一个光滑函数 $f \in C^\infty(M)$ 和一个整体截面 $\sigma \in \Gamma(E)$, 我们有

$$\nabla(f \cdot \sigma) = f \cdot \nabla(\sigma) + \sigma \otimes df;$$

这里， $\Gamma(E)$ 表示向量丛 E 的光滑整体截面构成的 $C^\infty(M)$-模，而 Ω^p_M 表示 M 上光滑 p-形式的空间。

复合 $F_\nabla := \nabla \circ \nabla$ 导出一个 $C^\infty(M)$-线性映射

$$F_\nabla\ :\ \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E) \otimes \Omega^2_M$$

它称为联络 ∇ 的曲率 。换言之， F_∇ 可视为 M 上取值于自同态丛 $\mathrm{End}(E)$ 的 2-形式： $F_\nabla \in \Gamma(\mathrm{End}(E)) \otimes \Omega^2_M$。

若联络 ∇ 相对于霍奇星算子 $*: \Omega^2_M \to \Omega^2_M$ （回忆一下， $*^2 = 1$）为反自对偶，则称其为向量丛 $E \to M$上的瞬子联络 ，即

$$*\,F_\nabla = -F_\nabla. \tag{1}$$

这就是反自对偶杨–米尔斯方程。当 M 非紧致时，通常还会对曲率的总 L^2范数施加有限性条件，即

$$\|F_\nabla\|^2_{L^2} := \int_M \mathrm{tr}(F_\nabla \wedge *F_\nabla) < \infty.$$

自 20 世纪 70 年代以来，瞬子一直受到深入研究，并为一个新数学领域——规范理论——的兴起提供了最初的思想；该领域对微分拓扑、微分几何、数学物理、表示论和代数几何等更传统的领域产生了深远影响。本文聚焦于后者，阐述代数几何中的（数学）瞬子丛 概念在过去 $40+$ 年间的发展历程。

起点是阿蒂亚–沃德对应，下文第 2 节将对此加以阐述；这是数学物理与代数几何之间最早发现的基础性联系（另一个是欣钦–小林对应），并促成了 Atiyah、Hitchin、Drinfeld 和 Manin 的极具影响力的工作 [AHDM78]。粗略地说，阿蒂亚–沃德对应将求解 $M = \mathbb{R}^4$ 上的反自对偶杨–米尔斯方程 1 这一微分几何问题，转化为一个代数几何问题：

构造满足某些性质的 $\mathbb{CP}^3$ 上的向量丛。随后，数学家（即 Barth、Hulek、Le Potier、Okonek、Schneider、Spindler）对这些向量丛进行了研究，并于20世纪80年代创造了（数学）瞬子丛 这一术语。起初，这是一类 $\mathbb{CP}^3$ 上的向量丛；在 Salamon [Sal84] 和 Donaldson [Don85], 的工作之后，它发展成为奇数维射影空间 [OS86]和旗流形 [MMPL20]上的一类向量丛。

在第3节中，我们解释了为何自然地要进一步推广射影空间上的瞬子丛，使其适用于任意射影空间以及非局部自由层。（不一定局部自由的）瞬子层 这一概念由 [Jar06], 提出，并由此引出了反常瞬子层这一概念，分别见定义 3.2 和定义3.3。当人们试图将瞬子丛的模空间紧化，并将其视为稳定层的 Gieseker模空间或某个箭图的稳定表示的模空间中的开子集时，便会出现这些概念。

在第4节和第5节中，我们说明如何将瞬子的定义推广至射影空间以外的代数簇。在第4节中，我们重点讨论 Picard 秩为一的 Fano 三维簇这一特定情形。在这一背景下，我们也开始讨论秩 2 向量丛的情形：总结 Faenzi 在 [Fae14]中介绍的它们的主要性质及其族。我们再次需要考虑一个范围更广的层族，其中包括任意秩且不一定局部自由的层。这正是 [CJ22], 提出 Fano 三维簇上瞬子层的定义并汇集其主要特征的动因。Kuznetsov 在 [Kuz12], 中也研究了 Fano 三维簇 X 上的秩 2 瞬子丛（尤其是指标为 2 的 Fano X 上的情形），但这次他选择用导出范畴的语言来呈现瞬子的性质。Kuznetsov 确实建立了 X 上的瞬子丛与三角范畴 $\mathcal{B}_X := \langle \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X(1) \rangle^{\perp}$中的对象之间的对应关系，并将其命名为瞬子的无上同调扩张；他还展示了这些对象的范畴性质如何“反映”瞬子的层论性质。我们以简要综述[Kuz12]的主要结果作为第4节的结尾。

第5节回顾了 h-瞬子层的定义及其主要性质。Antonelli 和 Casnati 最近在 [AC23] 中引入了这一概念，旨在将先前的瞬子层定义推广到赋有丰沛且全局生成线丛 $\mathcal{O}_X(h)$ 的任意射影概形 X。对于一个 n 维概形 X，线丛 $\mathcal{O}_X(h)$ 诱导出从 X 到 $\mathbb{P}^n$ 的有限态射。普通 h-瞬子层在 X 上沿此态射的直像确实是 $\mathbb{P}^n$ 上符合 [Jar06], 意义的瞬子层；反过来，$\mathbb{P}^n$ 上的瞬子层的拉回则是 X 上的普通 h- 瞬子层。

瞬子层的一个显著特点是，它可以构造为单子的上同调。若 X 相对于线丛 $\mathcal{O}_X(h)$ 是算术 Cohen–Macaulay （ ACM ）的，则 X 上的 h- 瞬子层具有这样的单子表示。接着，我们聚焦于 X 的一些特殊情形，在这些情形下，普通 h-瞬子的单子表示更为简洁。这些单子与 $\mathbb{P}^n$ 上的一些已知单子表示以及一些光滑二次曲面上的单子表示有所重合，并为滚动体提供了一些新的单子表示。随后，我们回顾低维的一些光滑簇上秩为 2 h 的瞬子丛的构造，具体包括曲线、曲面、皮卡秩 1 的 Fano 三维簇以及滚动体。特别地，我们比较 Fano 三维簇上的秩为 2 h 的瞬子丛与第4节中的瞬子丛。我们将看到，在大多数情况下，这两种概念是一致的。最后，我们回顾 Segre 嵌入 $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^3$ 的像上的一个 $h-$ 瞬子丛的例子，以说明较高 Picard 秩簇上的 h-瞬子丛与经典瞬子丛相比可能具有若干病态性质。

最后，第6节包含本文所呈现的原创结果。我们回到第4节的设定，并在 Picard数为一的 Fano 三维簇的导出范畴中引入 $\mathcal{C}$-瞬子对象的概念。这一概念深受 Faenzi [Fae14], 、 Kuznetsov [Kuz12], 和 Comaschi–Jardim[CJ22], 的工作，以及 [JMM22]中所提供的射影空间内 Bridgeland 半稳定对象示例的启发。我们的目标是，在稳定性流形中找到一个腔室 $\mathcal{C}$ ，使得仅在该腔室中的半稳定性就能提供正确的上同调消失条件。对于射影空间和四次曲面三维簇的情形，我们证明存在一个腔室 $\mathcal{C}$ ，使得 $\mathcal{C}$-瞬子具有单子型描述。文中给出了 $\mathcal{C}$-瞬子对象的示例，其中包括一些不符合任何既有定义的示例。此外，我们证明，射影空间中的经典秩 2 瞬子丛对于任意合适的腔室 $\mathcal{C}$而言，确实都是 $\mathcal{C}$-瞬子对象。我们证明，在任意指标 2的 Fano 三维簇上，稳定的 $\mathcal{C}$-瞬子都存在无上同调扩张；此外，这些无上同调扩张仍然是$\mathcal{C}$-瞬子对象。

致谢。 作者谨向 Daniele Faenzi 致以谢意，感谢他就本文主题与我们进行了多次讨论。特别感谢他建议将扭曲对偶函子 (13) 下的不变性作为确定瞬子对象陈特征的恰当方法，这使我们得以找到定义第 6 节中 $\mathcal{C}$-瞬子对象的正确 $(\alpha,\ s)$-切片。GC 获得 FAPESP 博士后资助，项目编号为 2019年/21140-1，以及 BEPE 资助，项目编号为 2022/09063-4。MJ 获得 CNPQ 资助，项目编号为 302889/2018-3，以及 FAPESP 专题项目 规范理论与代数几何 ，项目编号为 2018/21391-1。CM 获得 FAPESP 博士后资助，项目编号为 2020年/06938-4，该资助属于 FAPESP 专题项目 规范理论与

代数几何，项目编号为 2018/21391-1。DM 获得 FAPESP 博士后资助，项目编号为 2020/03499-0。

2. Atiyah–Ward correspondence and mathematical instanton bundles

现在我们将黎曼流形 $(M,\ g)$ 视为配备通常圆度量的四维球面 S^4；请回想，这与 $\mathbb{R}^4 \simeq S^4 \setminus \{\infty\}$ 上的通常欧几里得度量共形；根据乌伦贝克可去奇点定理，$\mathbb{R}^4$ 上的任意瞬子联络都可延拓为 S^4 上的一个瞬子。

此外，S^4 可以如下识别为四元数射影直线 $\mathbb{HP}^1$：每个 $p \in \mathbb{R}^4$ 都与点 $[p:1] \in \mathbb{HP}^1$ 相关联，而 ∞ 则映到 $[1:0] \in \mathbb{HP}^1$。于是可以考虑光滑映射 $\tau: \mathbb{CP}^3 \to \mathbb{HP}^1$，其定义如下：

$$\tau[x:y:z:w] = [x+jy : z+jw].$$

注意，τ 的纤维同构于 $\mathbb{CP}^1$：点 $[u+jv{:}1] \in \mathbb{HP}^1$ 的原像是直线 $[u:\ v:1:\ 0],$，而 $\tau^{-1}([1:\ 0]) = [u:\ v:0:\ 0]$。

这个所谓的 扭量映射 具有如下惊人的性质，这一性质最早由 Atiyah 和 Ward 在 [AW77] 中发现。若 (E,∇) 是 $S^4 \simeq \mathbb{HP}^1$ 上带有瞬子联络的复向量丛，那么拉回联络 $\tau^*\nabla$ 的曲率 $F_{\tau^*\nabla}$ 是一个取值于 $\tau^*\mathrm{End}(E) = \mathrm{End}(\tau^*E)$ 的 $(1,1)$ 型 2-形式。这意味着 $F_{\tau^*\nabla}$ 在拉回向量丛 τ^*E 上诱导出一个全纯结构；我们将其记作 $\mathcal{E}$。

注意，$\mathcal{E}$ 必须满足一些显然的性质。首先，它在纤维 $\tau^{-1}(p)$ 上的限制必须始终是全纯平凡的。其次，注意

$$\tau[x:y:z:w] = \tau[-y:x:-w:z],$$

因为它们的像只相差一个左乘因子 j；因此，拉回向量丛 τ^*E 必须在对合 ι 下保持不变：$\mathbb{CP}^3 \to \mathbb{CP}^3$，由 $\iota[x,y,z,w] = [-y:\ x:\ -w:\ z]$ 给出，即 $\iota^*\mathcal{E} \simeq \mathcal{E}$。

$\mathcal{E}$ 满足的非平凡关键性质由彭罗斯变换给出。该变换给出了与瞬子联络 ∇ 耦合的拉普拉斯算子 Δ 的核，与层上同调群 $H^1(\mathbb{CP}^3, \mathcal{E}(-2))$ 之间的同构，其中 $\mathcal{E}(-2) = \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^3}(-2)$，与通常一样。事实证明，$\ker \Delta$ 为空，恰恰是因为 S^4 具有正标量曲率，且 F_∇ 是反自对偶。因此，我们必有 $H^1(\mathbb{CP}^3, \mathcal{E}(-2)) = 0$。

阿蒂亚–沃德对应本质上表明，可以从满足上述性质的相关全纯向量丛 $\mathcal{E}$ 重构 S^4 上原有的光滑瞬子联络。（由于我们

希望尽快进入代数几何，因此实际上省略了许多细节；这一说法也过度简化了实际的定理。感兴趣的读者可参阅 [Ati78, WW90]）。

阿蒂亚–沃德对应是最早发现的数学物理与代数几何之间的基础性联系，并在代数几何学家中激起了一阵热烈的研究热潮；Hartshorne [Har78] 和 Barth–Hulek [BH78] 的著作或许是最早受到 Atiyah 及其合作者的研究（尤其是[AW77, AHDM78]）启发、探讨射影空间上向量丛的代数几何论文。然而，据我们所知，最早使用“瞬子丛”这一表述的文献是 [OSS11，第 370] 页；在这篇文献中，作者将定义在 $\mathbb{CP}^3$ 上的复瞬子丛定义为满足 $H^2(\mathcal{E}(-2)) = 0$ 的稳定秩二全纯向量丛 $\mathcal{E}$，其中 $c_1(\mathcal{E}) = 0$。

此时（约 1977—78 年），Barth 注意到，每个这样的复瞬子丛 E 都可以实现为单子的上同调；也就是说，它是一个层复形

$$\mathcal{O}_{\mathbb{CP}^3}(-1)^{\oplus c} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^3}^{\oplus 2+2c} \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^3}(1)^{\oplus c} \tag{2}$$

其中 α 是单射，β 是满射，并且满足 $E \simeq \ker \beta / \operatorname{im} \alpha$，且其中 $c = h^1(\mathcal{E}(-1))$. 由于态射 α 和 β 可以视为其元素为线性多项式的矩阵，这使得复瞬子丛的分类问题可以转化为线性代数问题。这正是 Atiyah、Drinfeld、Hitchin 和 Manin 在开创性论文 [AHDM78] 中探讨的关键所在；该文给出了 S^4 上的 $SU(2)$ 瞬子的完整分类。

1984年，Salamon 提出了阿蒂亚–沃德对应的高维版本 [Sal84]；另见 [CS88]。他考虑了一个映射 τ： $\mathbb{CP}^{2k+1} \to \mathbb{HP}^k$，定义如下：

$$\tau[x_0 : y_0 : \cdots : x_k : y_k] = [x_0 + jy_0 : \cdots : x_k + jy_k],$$

从而推广了上文定义的扭量映射； τ： $\mathbb{CP}^{2k+1} \to \mathbb{HP}^k$ 的纤维也同构于 $\mathbb{CP}^1$。现在设 $E \to \mathbb{HP}^k$ 是一个配备联络 ∇的复向量丛；如果其曲率 F_∇相对于 $\mathbb{HP}^k$中的任意近复结构均为 (1，1) 型，则称其为四元数瞬子；当$k = 1$时，这等价于四维流形上通常的瞬子定义。

事实证明，这一条件恰好满足证明 τ^*E 上的拉回联络的曲率$F_{\tau^*\nabla}$ 在 $\mathbb{CP}^{2k+1}$上属于 $(1,1)$ 型所需，因此会在 τ^*E上诱导出全纯结构。

这促使 Okonek 和 Spindler 在次年提出了数学瞬子丛 的定义，参见 [OS86]。准确地说，数学瞬子丛是一个秩为 $2k$ 的全纯丛 $\mathcal{E}$，定义在 $\mathbb{CP}^{2k+1}$ 上，并满足以下条件

(1) E 是简单的，即 $\mathrm{Hom}(\mathcal{E},\ \mathcal{E}) = \mathbb{C}$；(2) 其陈多项式由 $c_t(\mathcal{E}) = (1-t^2)^{-c}$ 给出；(3) 它在秩 $-2k-1 \le p \le 0$下具有自然上同调，也就是说，对于指定秩中的每个 p，上同调群 $H^p(\mathcal{E}(l))$ 中至多有一个非平凡；(4) $\mathcal{E}$ 具有平凡分裂型，即对于至少一条直线 $\ell \subset \mathbb{CP}^{2k+1}$，$\mathcal{E}|_l$ 是平凡的；(5) $\mathcal{E}$ 具有辛结构，这意味着存在一个同构$\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}^*$，使得 $\phi^* = -\phi$。

后来，Ancona 和 Ottaviani 在 [AO94] 中注意到，条件 (2) 和 (3) 蕴含条件 (1)。数学瞬子丛是 20世纪80年代和90年代多篇文章的研究主题。一个将在后文发挥作用的事实是，条件 (2) 和 (3) 蕴含任意数学瞬子丛都同构于某个单子的上同调

$$\mathcal{O}_{\mathbb{CP}^{2k+1}}(-1)^{\oplus c} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^{2k+1}}^{\oplus 2k+2c} \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^{2k+1}}(1)^{\oplus c}. \tag{3}$$

令 $\wp := \{y_k = 0\} \subset \mathbb{CP}^{2k+1}$ 为一个超平面，并注意到扭量映射的限制$\tau|_\wp : \wp \to \mathbb{HP}^k$ 是满射，在仿射子集之间给出了双射

$$\wp \supset \{x_k \neq 0\} = \mathbb{C}^{2k} \quad \mapsto \quad \mathbb{H}^k = \{q_k \neq 0\} \subset \mathbb{HP}^k$$

$$(x_0, y_0, \cdots, x_{k-1}, y_{k-1}) \mapsto (x_0 + jy_0, \cdots, x_{k-1} + jy_{k-1}).$$

因此，将 $\mathbb{HP}^k$ 上的四元数瞬子联络提升为 $\mathbb{CP}^{2k+1}$ 上的数学瞬子丛，再将其限制到超平面 $\wp$，便得到一个单射，它将 $\mathbb{HP}^k$ 上四元数瞬子的模空间映到 $\wp$ 上秩为 $2k$ 的全纯丛的模空间；这些全纯丛是与显示式 (3) 中类似的线性单子的上同调。对于 $k=1$ 的情形，Donaldson 使用所谓的*ADHM* 构造 证明该映射实际上是一个同构 [Don84]；然而，作者尚不清楚对于 $k>1$ 是否也如此。不过，这一观察可视为研究偶数维复射影空间上的全纯丛的动机，这些全纯丛是线性单子的上同调，见下文定义 3.2。

3. Instanton and perverse instanton sheaves

从此处开始，我们将改用大写罗马字母表示层，而 $\mathbb{P}^n$ 表示 $\mathbb{CP}^n$，这是代数几何中更常见的做法。

我们先回顾射影空间上那些可表示为式（3）所示单子的上同调的层族的刻画。

定理 3.1. 射影空间 E 上的无挠层，是如下形式的单子的上同调

$$U \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \xrightarrow{\alpha} V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \xrightarrow{\beta} W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1),$$

当且仅当 U、 V 和 W 是向量空间，且

(1) $H^0(E(-1)) = H^n(E(-n)) = 0$ 对 $n \geq 2$成立；*(2)* $H^1(E(-2)) = H^{n-1}(E(1-n)) = 0$ 对 $n \geq 3$成立；*(3)* 对每个 k 和 $2 \leq p \leq n-2$，当 $n \geq 4$时， $H^p(E(k)) = 0$ 成立。

证明见 [Jar06，定理 3]；若 部分是在确立进一步的上同调消失之后，对 Beilinson 谱序列的应用；反向结论则可通过长正合列轻松计算得出。

由于四元数射影空间上的四元数瞬子所导出的奇数维和偶数维复射影空间上的局部自由层具有 $c_1 = 0$，因此在 [Jar06] 中提出了以下定义定义。

定义 3.2。 $\mathbb{P}^n$ 上的瞬子层是一个无挠层 E，满足 $c_1(E) = 0$，并符合以下上同调条件

(1) $H^0(E(-1)) = H^n(E(-n)) = 0$，其中 $n \geq 2$；(2) $H^1(E(-2)) = H^{n-1}(E(1-n)) = 0$，其中 $n \geq 3$；(3) 对每个 k 和 $2 \leq p \leq n-2$，当 $n \geq 4$ 时， $H^p(E(k)) = 0$。

数值 $c := h^1(E(-1)) = c_2(E)$ 称为 E的荷；它也常称为 E的量子数。平凡丛 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus r}$ 被视为荷为 0 的瞬子层。

如上一节所定义，数学瞬子丛就是 $\mathbb{P}^{2k+1}$上的秩为 $2k$ 的局部自由瞬子层。因此，前面的定义将数学瞬子丛的概念推广到任意维数射影空间上的任意秩、可能并非局部自由的层。

首先要注意的是，秩 r 小于 $n-1$ 的 $\mathbb{P}^n$上的瞬子层必然是平凡的，即 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus r}$ [Jar06，推论 6]。此外，请注意我们并未对 E的稳定性施加任何条件；事实上，令 E 为 $\mathbb{P}^n$上一个非平凡的、秩为 r 的瞬子层，可以证明：

(1) 若 E 是反身的且 $r \geq n-1$，则 E 是 μ-半稳定的；(2) 若 E 是局部自由的且 $r \geq 2n-1$，则 E 是 μ-半稳定的。
(3) 当 $r = 2$ 且 $n = 3$时， E 是 Gieseker 稳定的。

前两项结论包含在 [Jar06, 定理 15], 中，而第三项则由 [JMT17,定理 4]证明。

因此，一般而言，原则上并不清楚如何构造任意秩和荷的瞬子层模空间。[HL11, HJM15]通过在 $\mathbb{P}^n$上对带框架的瞬子丛采用 ADHM 构造解决了这一问题；而较近期的 [JS20] 则通过箭图表示来解决。下面我们对这两种方法分别作些评论。

3.1. ADHM 构造与反常瞬子层。设 V 和W 分别为维数为 c 和 r的向量空间，并考虑矩阵

$$A, B \in \mathrm{End}(V) \otimes H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-2}}(1))$$

$$I \in \mathrm{Hom}(W, V) \otimes H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-2}}(1)) \quad , \quad J \in \mathrm{Hom}(V, W) \otimes H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-2}}(1))$$

其中 $n \geq 2$；这些称为*ADHM* 矩阵。令 $\mathbb{X}_n(r, c)$表示满足以下*ADHM* 方程的所有上述 ADHM 矩阵的集合：

$$\mathcal{X}_n(r, c) := \Big\{ (A, B, I, J) \;\Big|\; [A, B] + IJ = 0 \Big\}$$

群 $GL(V)$按如下方式作用于 $\mathcal{X}_n(r, c)$

$$g \cdot (A, B, I, J) = (gAg^{-1}, gBg^{-1}, gI, Jg^{-1}).$$

于是可以考虑几何不变量理论商

$$\mathcal{F}_n(r, c) := \mathcal{X}_n(r, c) /\!\!/ GL(V);$$

四元组（A, B, I, J） $\in$ $\mathcal{X}_n(r, c)$)是几何不变量理论稳定的，当且仅当不存在真子空间$S \subset V$使得包含关系 $A(S)$ $B(S)$ $I(W)$ $\subset S \otimes H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-2}}(1))$成立，参见 [HJM15, 第 2 节。3] 以及 [HL11] 中关于 $n = 3$情形的讨论。

每个点（A， B， I， J） $\in \mathbb{X}_n$（r， c）都可用于如下构造 $\mathbb{P}^n$ 上的层复形，其中 $X =$ （A， B， I， J）：

$$E_X^\bullet \;:\; V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \xrightarrow{\alpha} \big(V \oplus V \oplus W\big) \xrightarrow{\beta} V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \tag{4}$$

其中映射 α 和 β 定义如下

$$\alpha = \begin{pmatrix} A + x\mathbf{1}_V \\ B + y\mathbf{1}_V \\ J \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} -B - y\mathbf{1}_V & A + x\mathbf{1}_V & I \end{pmatrix}.$$

更明确地说，设 $[z_0 : \cdots : z_{n-2}]$ 是 $\mathbb{P}^{n-2}$ 上的齐次坐标，且$[z_0 : \cdots : z_{n-2} : x : y]$ 表示 $\mathbb{P}^n$ 上的齐次坐标。那么，态射 α 的第一行可写成如下形式

$$A_0 z_0 + \cdots + A_{n-2} z_{n-2} + x\mathbf{1}_V,$$

其中 $\mathbf{1}_V$ 表示 End(V) 中的恒等映射； α 和 β 的其他元素也可以用类似的方式理解。

注意，正是因为 ADHM 方程成立，$\beta\alpha = 0$。此外，α 是单射，而 $\operatorname{coker}\beta$ 的余维至少为 2，因为 β 沿直线 $\ell = \{z_0 = \cdots = z_{n-2} = 0\}$ 满射；事实上，β 满射，当且仅当对每个 $p \in \mathbb{P}^{n-2}$，都不存在满足以下包含关系的真 $S \subset V$：$A(p)(S)\ B(p)(S)\ I(p)(W) \subset S$。这一条件蕴含 $X = (A,\ B,\ I,\ J)$ 的 GIT 稳定性。

最后，两个复形 E_X 和 $E_{X'}$ 同构，当且仅当 $X' = g \cdot X$。
这些观察引出了以下定义。

定义3.3. A*perverse* 瞬子层 是一个对象 $E \in D^b(\mathbb{P}^n)$，与以下形式的复形准同构

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)^{\oplus c} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus r+2c} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\oplus c}$$

满足以下条件

- $\mathcal{H}^p(E) = 0$ 对于 $p \neq 0,1$;
- $\mathcal{H}^0(E)$ 是一个无挠层;
- $\mathcal{H}^1(E)$ 是一个余维至少为 2 的挠层。

注意，$r = \operatorname{rk}\left(\mathcal{H}^0(E)\right)$，这称为 E 的秩；秩零瞬子层 只是秩为 0 的 perverse 瞬子层。整数 $c = \operatorname{ch}_2(E)$ 称为 E 的荷 。

此外，E 上的一个框架 是指选择一个同构 $\varphi\colon \mathcal{H}^0(E)|_\ell \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_\ell^{\oplus r}$。二元组 (E, φ) 称为一个带框架的 *perverse* 瞬子层。

因此，对于任意 $X \in \mathcal{X}_n(r,\ c)$，公式 (4) 中展示的复形 E_X 是一个秩为 r、荷为 c 的 perverse 瞬子层，并带有框架 $\varphi : \mathcal{H}^0(E)|_\ell \xrightarrow{\sim} W \otimes \mathcal{O}_\ell$。于是，GIT 商 $\mathcal{F}_n(r,\ c)$ 可以解释为秩为 r、荷为 c 的*GIT 稳定* 带框架的 perverse 瞬子层的模空间。

按照定义 3.2，所有瞬子层都是带有 $\mathcal{H}^1(E) = 0$ 的 perverse 瞬子层；而所有带有 $\mathcal{H}^1(E) = 0$ 的 perverse 瞬子层都只是瞬子层。因此，每个带框架的瞬子层都是半稳定的，也就是说，它对应于一个几何不变量理论半稳定的 ADHM 数据。

不是层的 perverse 瞬子层的主要例子，是非局部自由瞬子层的导出对偶。一般而言，perverse 瞬子层的 0^{th}-上同调未必是瞬子层。

3.2. **作为箭图表示的瞬子**。以下形式的线性单子中所包含的信息

$$V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \xrightarrow{\alpha} W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \xrightarrow{\beta} U \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \tag{5}$$

可以整齐地打包为以下箭图的一个表示

(6)
$$\mathbf{Q} := \left\{ \bullet_{-1} \underset{\alpha_n}{\overset{\alpha_0}{\vdots}} \bullet_{0} \underset{\beta_n}{\overset{\beta_0}{\vdots}} \bullet_{1} \right\}$$

每对顶点之间有 $n+1$ 条箭头，并满足这些关系

(7)
$$\beta_j \alpha_i + \beta_i \alpha_j = 0 \quad \text{with} \quad 0 \le i, j \le n.$$

事实上，我们分别将向量空间 V、 W 和 U 放在顶点 -1、0 和 1 上。设 $[x_0$、$\cdots$、$x_n]$ 为 $\mathbb{P}^n$ 上的齐次坐标；那么态射 α 和 β 可写为如下形式

$$\alpha = \sum_{i=0}^{n} A_i x_i \quad \text{and} \quad \beta = \sum_{i=0}^{n} B_i x_i$$

其中 $\alpha_i \in$ 是 Hom(V,W)， $\beta_i \in$ 是 Hom(W,U)。为补全箭图 $\mathbf{Q}$ 的表示，我们将矩阵 A_i 附加到箭头 α_i 上，而矩阵 B_i 则附加到矩阵 β_i 上。最后，由 $\beta\alpha = 0$ 可知，展示式 (7) 中的关系成立。 α 的单射性和 β 的满射性对来自线性单子的 $\mathbf{Q}$ 表示构成集合施加了进一步的（开）条件；更多细节与推广可参见 [JP15] 和 [JS20]。

回到对瞬子层模空间的讨论，我们注意到，与秩为 r、荷为 c 的瞬子层的单子相关联的$\mathbf{Q}$ 的表示的维数向量为（c， $r+2c$， c）。于是可以考虑具有固定维数向量（c， $r+2c$， c）的$\mathbf{Q}$ 的 θ-半稳定表示的 King 模空间 $\mathcal{R}_\theta$（r， c）；其中，稳定参数 θ 给出为

$$\theta = \big(\alpha, -(\alpha+\gamma)\frac{c}{r+2c}, \gamma\big) \quad \text{with} \quad \alpha, \gamma \in \mathbb{R}.$$

不难看出，只要 $\alpha > 0$ 且 $\gamma < 0$， $\mathcal{R}_\theta$（r， c）就是空的，参见 [JS20，引理 7]。

秩 2 瞬子层的情形已在 [JS20] 中得到详细研究。可以证明，如果 E 是一个瞬子层，那么存在 θ，使得相应的$\mathbf{Q}$ 表示是 θ-稳定的，见 [JS20，命题 8]；此外，在 $\alpha\gamma$ 平面中存在一条墙，它会使每个与非局部自由瞬子层相对应的表示失稳，因此反常瞬子层确实对应于$\mathbf{Q}$的某些 θ-稳定表示。

总而言之，构造任意秩和荷的瞬子层的合理（即射影）模空间至少有两种方法：通过 ADHM 构造，或通过箭图表示的模空间。然而，这两种

构造都包含层的导出范畴中更复杂的对象，例如定义 3.3 中考虑的 perverse 瞬子层。

4. Instanton sheaves on Fano threefolds

在第3节中，我们看到如何推广“经典”的瞬子概念：将其定义扩展到任意秩的无挠层，甚至扩展到属于导出范畴 $D^b(\mathbb{P}^n)$ 的对象。另一种可能的方向是在射影空间以外的射影簇上构造瞬子。对于 Picard 秩为一的 Fano 三维簇这一特例，相关工作见 [Fae14、Kuz12、CJ22]。

4.1. Fano 三维簇上的瞬子丛。 Picard 秩为一的 Fano 三维簇上的秩为 2 的局部自由瞬子是主要研究对象 [Fae14]。这里我们概述 Faenzi 工作的主要结果。首先，考虑一个 X Picard 秩为一的 Fano 三维簇，并记 H_X 为 $\mathrm{Pic}(X) \simeq \mathbb{Z}$ 的丰沛生成元。接着将反典范类 K_X 写作 $K_X = -i_X H_X$。我们知道， i_X 是一个正整数（因为 X 是 Fano），称为 X 的指标，其取值范围为 $i_X \in \{1,2,3,4\}$。令 $i_X = 2q_X + e_X$，其中 q_X 和 e_X 是满足 $q_X \geq 0$ 和 $0 \leq e_X \leq 1$的整数。[Fae14]中提出的瞬子定义如下：

定义 4.1。 X 上的瞬子丛是一个秩为 2 的稳定丛，满足 $c_1 = -e_X$，并且

$$E \simeq E^*(-e_X), \quad H^1(E(-q_X)) = 0.$$

注意，瞬子条件 $H^1(E(-q_X)) = 0$ 是瞬子在 $\mathbb{P}^3$上所满足的消失条件 $H^1(E(-2))$ 的类比。利用 Serre 对应和稳定性假设，可以证明瞬子满足以下上同调消失条件：

引理 4.2。 若 X 上的 E 是一个秩为 *2* 的瞬子丛，则有：

$$H^i(E(-q_X)) = 0 \ \textit{and} \ \mathrm{Ext}^i(E, \mathcal{O}_X(-q_X - e_X)) = 0, \ \textit{for all } i; \tag{8}$$

$$\textit{and } H^1(E(-q_X - t)) = 0,\ H^2(E(-q_X + t)) = 0, \textit{ for all } t \geq 0.$$

4.2. 瞬子模空间的非空性。[Fae14]，的首个主要结果涉及：在所有 Picard 秩为一、指标为 $i_X > 1$ 的 Fano 三维簇 X 上，以及在指标为一的非双曲线型 Fano 三维簇上（即 $-K_X$ 非常丰），荷为 n 的瞬子丛模空间 $\mathcal{I}(n)$ 非空；这些三维簇包含一条法丛为 $\mathcal{O}_\ell \oplus \mathcal{O}_\ell(-1)$ 的直线 $\ell \subset X$。

定理 4.3. 模空间 $\mathcal{I}(n)$ 有一个一般光滑的不可约分支，其维数为下方的数值 δ：

i_X	4	3	2	1
δ	$8n-3$	$6n-6$	$4n-3$	$2n-g_X-2$

当 $i_X=2$ 和 $n=1$，以及当 $i_X=1$ 和 $2n<g_X+2$时，$\mathcal{I}$（n）为空。

定理陈述中出现的整数 g_X 是 X 的亏格；我们回顾一下，这个参数定义在指标为一的 Fano 三维簇上，表示 X 的一般余维二平面截面的亏格。

注 4.4. 指标为2的法诺三维簇上的瞬子存在性。特别是在指标为2的法诺三维簇的情形下，证明其非空性

模空间 $\mathcal{I}(n)$（其中 $n>2$）依赖于在 $\mathcal{I}(n)$ 中构造除子，这些除子参数化非局部自由层 E，而这些层仍满足上同调消失$H^\bullet(E(-1))=0$（注意，由半连续性，这些条件都是开条件）。更准确地说，这些层 E 是沿着荷为 $n-1$ 的瞬子丛F的直线 $\mathcal{O}_\ell$ 的结构层 $\ell\subset X$进行的初等变换。这意味着层 E 适合如下形式的短正合列：

$$0\longrightarrow E\longrightarrow F\longrightarrow \mathcal{O}_\ell\longrightarrow 0 \tag{9}$$

（由此我们尤其得知，$F\simeq E^{**}$ 与 $\mathrm{Sing}(F)=\ell$）。随后，应用归纳论证即可证明 $\mathcal{I}(n)$ 非空。首先，我们证明 $\mathcal{I}(2)$ 存在一个一般光滑的不可约分支（为此，我们应用著名的 Serre 对应，它建立了 X 上局部完全交曲线与秩二向量丛之间的联系）。归纳步骤则在于证明：对于一般的点对（F,ℓ），其中 $[F]\in\mathcal{I}(n-1)$，且 $\ell\subset X$ 是 X 上的一条直线，满足形式为 (9) 的短正合列的层 E 的一般变形是荷为 n 的瞬子丛。这一过程提示我们，更一般地，研究满足 $H^i(E(-q_X))=0,$ 的秩二非局部自由层 E 的族，或许有助于更好地理解 $\mathcal{I}(n)$。

4.3. 瞬子的单子表示。 Faenzi 随后将注意力转向定义在 Fano 三维簇 X 上的瞬子，其中 $H^3(X)=0$。在这些三维簇上，瞬子丛与射影空间上的瞬子还有一个共同特征：它们仍可表示为单子的上同调。这一性质之所以引人注目，原因有二：首先，它为我们提供了构造瞬子的“配方”；其次，它使我们能够将它们的模空间构造成 GIT 商。事实证明，条件 $H^3(X)=0$ 确实等价于 X 具有全强例外集合；这使得我们能够证明 Beilinson 定理在 $\mathbb{P}^n$上的类似结果。更具体地说，在满足 $H^3(X)=0$ 的 Fano 三维簇 X 上，存在向量丛 $\mathcal{E}_i,\ i=0,\dots,3,$

满足

$$\mathcal{E}_0 \simeq \mathcal{O}_X(-q_X - e_X),\ \mathcal{E}_3^*(-e_X) \simeq \mathcal{E}_1,\ \mathcal{E}_2^*(-e_X) \simeq \mathcal{E}_2$$

并且使得 $D^b(X) = \langle \mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3 \rangle$。记 $\langle \mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3 \rangle$ 为对偶集，则对于 X 上的每个凝聚层 E，它都是复形 $\mathcal{C}_E^\bullet$ 的上同调，其中 $\mathcal{C}_E^j = \oplus_i H^i(F \otimes \mathcal{F}_{j-i+3}) \otimes \mathcal{E}_{j-i+3}$，指标 i 的取值范围介于 $\max\{0, j\}$ 和 $\min\{3, j+3\}$ 之间。在 E 为瞬子丛的特殊情形下，复形 $\mathcal{C}_E^\bullet$ 是一个单子，其各项可以进一步描述如下。对于一个整数 n，我们固定向量空间 I 和 W，其维数满足以下约束：

i_X	n	$\dim(I)$	$\dim(W)$
4	$n \geq 1$	n	$2n+2$
3	$n \geq 2$	$n-1$	n
2	$n \geq 2$	n	$4n+2$
1	$n \geq 8$	$n-7$	$3n-20$

并记 U 为向量空间 $U := \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3)$。于是我们固定一个同构 $D : W \to W^*$，使得 $D^t = (-1)^{e_X+1} D$，并考虑局部闭的

- 向量空间 $\mathrm{Hom}(W^* \otimes \mathcal{E}_2, I \otimes \mathcal{E}_3)$ 的子簇 $\mathcal{D}_{X,n} \simeq I \otimes W \otimes U$ 定义为

$$\overset{\circ}{\mathcal{D}}_{X,n} := \{A \in \mathrm{Hom}(W^* \otimes \mathcal{E}_2, I \otimes \mathcal{E}_3) \mid A\, D\, A^t = 0 \text{ and A is surjective}\}.$$

最后，我们用 $G(W, D)$ 表示辛群 $Sp(W, D)$ 或正交群 $O(W, D)$，具体取决于 $e_X = 0, 1$；群 $G_n := GL(I) \times G(W, D)$

- 随后通过 $(\zeta, \eta) \cdot A = (\zeta A \eta^t)$ 作用于 $\mathcal{D}_{X,n}$。[Fae14] 的第二个主要结果如下：

定理 4.5. 设 X 是一个光滑的 *Fano* 三维簇，其 *Picard* 秩为一，且满足 $H^3(X) = 0$。设 $I, W, D, \mathcal{E}_i$ 如上所述。则 X 上的一个荷为 n 的瞬子 E 是以下形式的单子的上同调

$$I^* \otimes \mathcal{E}_1 \xrightarrow{DA^t} W^* \otimes \mathcal{E}_2 \xrightarrow{A} I \otimes \mathcal{E}_3,$$

反过来，这样一个单子的上同调是一个荷为 n 的瞬子。荷为 n 的瞬子丛的模空间 $\mathcal{I}(n)$ 同构于几何

- 商 $\mathcal{D}_{X,n}/G_n$。

4.4. Fano 三维簇上的瞬子层。在 [Fae14]，中阐述的 Fano 三维簇上秩为 2 的瞬子丛的主要性质，似乎是射影空间上数学瞬子性质的“自然推广”。那么，如果我们将研究扩展到任意秩且不一定是局部自由的层，是否也会出现类似的情况？换言之

我们可以尝试将 [Jar06] 中 Jardim 所采用的方法应用于除 $\mathbb{P}^3$ 之外的 Fano 三维簇。这一问题已在 [CJ22] 中得到处理，其中给出了如下的瞬子层定义（所采用的记号沿用上一节中的记号）：

定义 4.6。设 X 是 Picard 秩为一且指标为 $i_X = 2q_X + e_X$ 的 Fano 三维簇，其中 q_X、e_X 为整数，满足 $q_X \geq 0$ 和 $0 \leq e_X \leq 1$。X 上的一个瞬子层 E 是一个无挠的 μ-半稳定层，其第一陈类为 $c_1(E) = -e_X$，并且满足：

$$H^1(E(-q_X)) = H^2(E(-q_X)) = 0. \tag{10}$$

E 的荷 定义为 $c_2(E)$。

注 4.7。请注意，这一定义似乎比 [Jar06] 中采用的定义更严格，因为后者不一定蕴含 μ-半稳定性（例如参见 [Jar06，例 3]）。

在转向这一更一般的情形时，引理 4.2 中给出的瞬子的某些上同调刻画仍然成立：

引理 4.8。设 E 是一个瞬子层。那么：

$$H^i(E(-q_X)) = \operatorname{Ext}^i(E, \mathcal{O}_X(-q_X - e_X)) = 0 \quad \textit{for all} \quad i.$$

[CJ22] 中有相当一部分内容专门研究非局部自由瞬子层。构造此类层的一种有效方法，是沿着秩零瞬子对瞬子进行初等变换 。

定义 4.9. X 上的秩零瞬子层是一个一维层 T，满足$H^i(T(-q_X)) = 0, \quad i = 0, 1$。

注 4.10. $H^0(T(-q_X))$ 的消失意味着，对于$n \gg 0, \quad H^0(T(-n)) = 0$。因此，秩零瞬子必为纯一维（也就是说，它不含零维子层）。

初等变换的概念已在注 4.4 中引入：若 E 属于如下形式的短正合列，我们就称 E 是沿秩零瞬子 T 对瞬子 F 作初等变换所得的层：

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow T \longrightarrow 0. \tag{11}$$

由这个短正合列，我们可以轻易验证层 E 确实是一个瞬子，而且还满足 $E^{**} \simeq F^{**}$；尤其是，如果 F 是反身的，那么$F \simeq E^{**}$。因此请注意，在注 4.4 中构造且属于边界 $\partial\mathcal{I}(n)$ 的非局部自由层 E 是瞬子层：它们确实是通过对秩 2 瞬子丛进行初等变换得到的

F（因此，特别是 $F \simeq E^{**}$）沿直线 $\mathcal{O}_\ell$ 的结构层（后者是指标为 2 的 Fano 簇上的秩零瞬子，因为 $H^i(\mathcal{O}_\ell(-1)) = 0$ 对于 $i = 0,\ 1$）。通过上述方法，我们由此可以构造奇异轨迹为 1 维的非自反瞬子族。以下命题总结了非自反瞬子的主要性质：

命题4.11。设 E 是秩为 $r > 0$ 的非自反瞬子层。那么以下结论成立：

- $T_E := E^{**}/E$ 是纯一维的；
- E 的同调维数为一；
- E^{**} 是瞬子，当且仅当 T_E 是秩零瞬子。

总之，我们总能通过沿秩零瞬子对自反瞬子作初等变换，构造出非自反瞬子的族；但是，从命题4.11可知，一般而言，并非所有非自反瞬子都能以这种方式得到。尽管如此，若将范围限制在秩二情形，这一结论仍然成立。

定理4.12. 设 E 是一个秩二瞬子层。那么 E^{**} 是一个瞬子丛，且当 $T_E \neq 0$时，$T_E := E^{**}/E$ 是一个秩零瞬子。

注4.13. 由4.10和定理4.12可知：秩二瞬子 E 要么没有奇点，要么其奇异轨迹 Sing(E) =Supp(E^{**}/E)是纯一维的。

在秩一情形中，对非自反瞬子的研究甚至得出了秩一瞬子的完整分类。

命题4.14. 设 L 是 *Fano* 三维簇X 上的一个荷为 n 、*Picard* 秩为一的秩一瞬子层。以下结论成立：

- 若 $i_X = 3,\ 4$ 则 $n = 0$ 且 $L \simeq \mathcal{O}_X(-e_X)$；
- 若 $i_X = 1,\ 2$，则有 $L \simeq \mathcal{O}_X(-e_X)$，只要 $n = 0$；而对于 $n > 0,\ L$ 总可嵌入如下形式的短正合列：

$$0 \to L \to L' \to \mathcal{O}_\ell(-e_X) \to 0$$

其中 $\ell \subset X$ 是一条直线，L' 是一个荷为 $n - 1$的秩一瞬子。

4.5. **指标为2的法诺三维簇上的瞬子丛**。法诺三维簇 X 上指标为2的秩 2 瞬子丛也是 Kuznetsov 的研究主题 [Kuz12]。在这篇文章中，作者主要关注这些丛作为导出范畴 $D^b(X)$ 中对象时的性质，其中导出范畴是 X的。Kuznetsov 给出的瞬子定义如下：

定义 4.15。设 X 为指标2的 Fano 三维簇。荷为 n 的瞬子是一个秩为 2 的稳定向量丛 E，满足 $c_1(E) = 0,\ c_2(E) = n$，并且$H^1(E(-1)) = 0.$

因此我们注意到，在 X 上，Kuznetsov 采用的瞬子定义与 Faenzi 提出的定义一致。Kuznetsov 对 X 上瞬子丛的研究始于计算其上同调表。

引理 4.16。设 E 是一个荷为 n 的瞬子丛，定义在指标*2*的 *Fano* 三维簇 X 上。那么 E 的上同调表具有如下形式：

t	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	$\cdots$
$h^3(E(t))$	$\cdots$	$*$	0	0	0	0	$\cdots$
$h^2(E(t))$	$\cdots$	$*$	$n-2$	0	0	0	$\cdots$
$h^1(E(t))$	$\cdots$	0	0	0	$n-2$	$*$	$\cdots$
$h^0(E(t))$	$\cdots$	0	0	0	0	$*$	$\cdots$

由此可立即得到以下推论：

推论 4.17. 瞬子的荷大于或等于2。

注 4.18。

- 根据 [Fae14, 定理 3.1], ，我们知道荷为 2 的瞬子确实存在，因此 2 实际上是指标为 2 的 Fano 三维簇上瞬子丛的最小荷。然而， $\mathcal{I}_\ell \oplus \mathcal{O}_X$ 给出了一个荷为 1 的非局部自由瞬子层的例子。

- 由引理 4.16 中所示的表可知，由于 $H^0(E) = 0$，瞬子丛的 Gieseker 稳定性 E 实际上与其斜率稳定性一致。

- 由于定义 4.15 要求满足稳定性假设，我们可知，按照 Kuznetsov（或等价地，Faenzi）的意义定义的瞬子向量丛，显然也是按照定义 4.6 定义的瞬子。然而，反向推论并不成立： [CJ22] 确实证明，指标为 2 的 Fano 三维簇存在严格 μ半稳定的秩 2 向量丛E，其满足 $ch(E) = (2,0,-n,0)$ 且 $H^i(E(-1)) = 0$，对所有 i均成立。因此，这些向量丛按照定义 4.6 属于瞬子，但不符合定义 4.15 和定义 4.1 的意义。在上述文献中还证明，实际上，指标为 2 的 Fano 三维簇是唯一具有严格μ半稳定的秩 2 瞬子丛族且其荷为 $n > 0$ 的 Fano 三维簇；此外，每个此类瞬子 E 都属于一个短正合列：

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow E \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

其中 L 是荷为 n 的秩一瞬子。

4.6. 瞬子的无上同调扩张。如前所述，Kuznetsov 的主要目标之一是用导出范畴的语言描述瞬子的性质。回顾一下，对于一个指标为 2 的 Fano 三维簇 X ，线丛的集合 $\mathcal{O}_X$， $\mathcal{O}_X(1)$ 是例外的；因此，我们得到导出范畴 $D^b(X)$ 的如下半正交分解：

$$D^b(X) = \langle \mathcal{B}_X, \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X(1) \rangle, \ \mathcal{B}_X := \langle \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X(1) \rangle^{\perp}.$$

从一个瞬子 E 出发，正如 $E \in \langle \mathcal{O}_X(1) \rangle^{\perp}$ （这是引理 4.16 的结论），我们~可以构造一个对象 $E \in \mathcal{B}_X$ ，使其通过 $\mathcal{O}_X$ 进行左突变。我们回顾一下，通过 $\mathcal{O}_X$ 进行左突变是指函子 $\mathbb{L}_{\mathcal{O}}$: $D^b(X) \to \langle \mathcal{O}_X \rangle^{\perp}$ ，它将对象 $F \in D^b(X)$ 映射为求值态射 $\mathrm{Ext}^\bullet(\mathcal{O}_X, F) \otimes \mathcal{O}_X \to F$ 的锥。对于一个瞬子丛 E，复形 $\mathrm{Ext}^\bullet(\mathcal{O}_X, E) \otimes \mathcal{O}_X$ 集中在~次数 -1 （再次说明，这是引理 4.16 的结论），因此 $E := \mathbb{L}_{\mathcal{O}}(E)$ 实际上是一个层对象，并且适合于如下短正合列：

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow \tilde{E} \longrightarrow \mathcal{O}_X^{n-2} \longrightarrow 0.$$

~层 E 称为 E 的无上同调扩张。

引理 *4.19.* 瞬子的无上同调扩张 E 是一个简单的斜率半稳定~~~向量丛 E ，其 $ch(E) = (n, 0, -n, 0)$，并且满足 $H^\bullet(E) = H^\bullet(E(-1)) = 0$。此外， $h^0(\tilde{E}) = h^1(\tilde{E}) = n-2$ 且 $h^2(\tilde{E}) = h^3(\tilde{E}) = 0$.

现在回忆一下，由于瞬子 E （定义 4.15 意义下）具有秩 2，且第一陈类为 0，因此它是自对偶的；这一性质尤其意味着其无上同调扩张具有“广义自对偶性”。事实上，考虑函子D: $D^b(X) \to D^b(X)$ $F \mapsto \mathbb{L}_{\mathcal{O}}(R\mathcal{H}om(F, \mathcal{O}_X))$。不难证明，函子 D 满足以下性质：

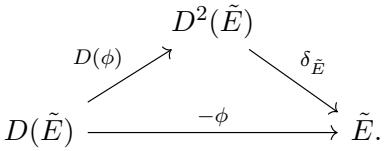
引理 4.20。

- 存在一个自然同构 δ : $D^2 \xrightarrow{\sim} id$;
- 范畴 $\mathcal{B}_X$ 由 D 保持不变。

定义函子 D 后，我们便可以陈述无上同调扩张的自对偶性质。

~**命题 4.21**。 设 E 是瞬子丛 E的无上同调扩张。则存在一个斜对称同构 $D(\tilde{E}) \xrightarrow{\phi} \tilde{E}$，使其构成

交换图：



事实证明，瞬子丛 E 可以由其无上同调扩张“重构”出来。每个满足命题 4.21 和引理 4.19 中所有性质的向量丛 F，确实都是某个唯一的瞬子丛的无上同调扩张。

定理 *4.22.* 设 F 是 X 上的一个向量丛，满足 $ch(F) = (n, 0, -n, 0)$，且 $H^\bullet(F) = H^\bullet(F(-1)) = 0$。则对于 $i > 1$，有 $h^i(F^*) = 0$，并且$h^0(F^*) = h^1(F^*) \leq n-2$；此外，若 $h^0(F^*) = n-2$，则存在唯一的˜荷为 n 的瞬子丛 E，使得 $F \simeq E$。

值得一提的是，在这种情形下，直线的理想层 $\mathcal{I}_\ell$, $\ell \subset X$也具有若干与瞬子（更确切地说，与其无上同调扩张）相同的特征。显然可以证明 $\mathcal{I}_\ell \in \mathcal{B}_X$；此外，还有以下结论

命题 4.23. 直线的理想层 $\mathcal{I}_\ell$ $\ell \subset X$ 在 D 下保持不变： $D(\mathcal{I}_\ell) \simeq \mathcal{I}_\ell$。此外，该同构是斜对称的（其含义见命题 *4.21*）。

5. h-INSTANTON SHEAVES ON PROJECTIVE VARIETIES

近年来，若干作者进一步将瞬子丛的概念推广到了 Fano 三维簇以外的情形。这同样最初受到规范理论的启发：回想一下， $\mathbb{P}^2$与 S^4 一样，也具有四元数 Kähler 流形的结构，其扭量空间是旗流形 $F(0, 1, 2)$，由 $\mathbb{CP}^2$ 中的点和直线构成；在这种情况下，阿蒂亚–沃德对应给出了 $\mathbb{CP}^2$ 上的四元数瞬子与 $F(0, 1, 2)$ 上一类全纯丛之间的对应，而这些丛也称为瞬子丛。

继 [Don85]，Marchesi 之后，Malaspina 和 Pons-Llopis 在 [MMPL20]中对 $F(0, 1, 2)$上的瞬子丛进行了数学处理。这项案例研究进一步促使人们在其他 Picard 秩大于 1 的 Fano 三维簇上引入瞬子丛的概念，参见例如[AM20a,ACG21a, ACG21b,CCGM21]。

最新进展中，Antonelli 和 Casnati 通过某些上同调消失条件，在关于丰沛且全局生成的线丛 $\mathcal{O}_X(h)$ 的射影概形 X 上定义了一类层；这些条件推广了此前研究过的例子（射影空间、Picard 秩 1 的 Fano 三维簇）。他们证明，这些层可以通过单子构造，因此将其称为

位于 X 上的瞬子层是合理的。本节将遵循 [AC23]，回顾这些瞬子层的定义与构造；我们先从这两位作者提出的定义说起。

定义 5.1。 [AC23，定义 1.3 和定理 1.4] 设 X 是一个维数为 n （$n \geq 1$）的不可约射影概形，并赋有一个丰沛且全局生成的线丛 $\mathcal{O}_X$（h）。若 $\mathcal{E}$ 是 X 上的凝聚层， k 是一个非负整数且 $\delta \in \{0,1\}$，则称 $\mathcal{E}$ 为一个 h-瞬子层，若以下断言成立：

(1) $h^0(\mathcal{E}(-h)) = h^n(\mathcal{E}((\delta-n)h)) = 0$;
(2) $h^i(\mathcal{E}(-(i+1)h)) = h^{n-1}(\mathcal{E}((\delta-n+i)h)) = 0$ if $1 \leq i \leq n-2$;
(3) $\delta h^i(\mathcal{E}(-ih)) = 0$ for $2 \leq i \leq n-2$;
(4) $h^1(\mathcal{E}(-h)) = h^{n-1}(\mathcal{E}((\delta-n)h)) = k$;
(5) $\delta(\chi(\mathcal{E}) - (-1)^n\chi(\mathcal{E}(-nh)))) = 0$.

下表给出了当 $n \geq 4$ 时，具有缺陷 δ 和量子数 k 的 h–瞬子层 $\mathcal{E}$ 的上同调。

t	$\cdots$	$-n-1$	$-n$	$-n+1$	$\cdots$	-2	-1	0	$\cdots$
$h^n(\mathcal{E}(t))$	$\cdots$	$*$	0 / $*$	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$
$h^{n-1}(\mathcal{E}(t))$	$\cdots$	$*$	$*$ / k	k / 0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$
$h^{n-2}(\mathcal{E}(t))$	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$
$\vdots$									
$h^2(\mathcal{E}(t))$	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$
$h^1(\mathcal{E}(t))$	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$	0	k	$*$	$\cdots$
$h^0(\mathcal{E}(t))$	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$	0	0	$*$	$\cdots$

上述图表中的一个单元格 a b 表示，当 $\delta = 0$时，上同调等于 b ；当 $\delta = 1$时，上同调等于 a。具有 $\delta = 0$ 的 h-瞬子层 $\mathcal{E}$ 称为普通瞬子；如果 $\delta = 1$，则称为非普通瞬子。

注 5.2. 定义 5.1 并未要求 h–瞬子层具有稳定性。即使在 X 光滑且 $\mathcal{E}$ 是秩为 2 的 h–瞬子丛的情形下， $\mathcal{E}$也可能是严格半稳定的，或是不稳定的；这与在 $\mathbb{P}^n$ 上的瞬子层的情形类似（注 4.7）。更多详情请参见 [AC23，第 8.4] 命题。

5.1. **h关于射影空间和射影概形上的瞬子层**。当 $X \cong \mathbb{P}^n$ 时，我们选择丰线丛为 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(h) := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$。此时，普通 $h-$ 瞬子层的定义与第 3 节中的定义 3.2 一致，也就是说，若 $\mathcal{E}$ 是秩为 r 、荷为 c 的普通 h-瞬子层，则 $\mathcal{E}$ 是 Jar06] 意义下的瞬子层。根据定理 3.1， $\mathcal{E}$

具有如下单子表示；反过来，如果这种表示的上同调无挠，那么它就是一个 $h-$ 瞬子层。

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus c}(-1) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus 2r+c} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus c}(1) \to 0$$

这一性质可推广到非普通的 h–瞬子层。AC23，命题 3.2] 证明，非普通的 $h-$ 瞬子层是下述单子的上同调，而此类单子的上同调是非普通h–瞬子，前提是 b_1, $b_2 \geq \chi(\mathcal{E})$。

$$0 \to \mathcal{M}^{-1} \to \mathcal{M}^0 \to \mathcal{M}^1 \to 0,$$

其中

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^{-1} &:= \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)^{\oplus b_1 - \chi(\mathcal{E})} \\
\mathcal{M}^0 &:= \begin{cases} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus b_0} \oplus \Omega^1_{\mathbb{P}^n}(1)^{\oplus k} \oplus \Omega^{n-1}_{\mathbb{P}^n}(n-1)^{\oplus k} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)^{\oplus b_1} & \text{if } n \geq 3 \\ \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus b_0} \oplus \Omega^1_{\mathbb{P}^n}(1)^{\oplus k} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)^{b_1} & \text{if } n = 2 \end{cases} \\
\mathcal{M}^1 &:= \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus b_0 - \chi(\mathcal{E})}.
\end{aligned}$$

对于赋有丰沛且整体生成线丛 $\mathcal{O}_X(h)$的一般射影概形 X， $\mathcal{O}_X(h)$的完全线性系诱导一个有限态射$\varphi_{|\mathcal{O}_X(h)|}\colon X \to \mathbb{P}^N$，其中 $N \in \mathbb{Z}_{>0}$。接着，从 $\mathbb{P}^N$ 中的 $N-n$ 个一般点作投影，诱导出有限态射 $p\colon X \to \mathbb{P}^n$，满足 $p^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) = \mathcal{O}_X(h)$。利用以下事实：对于任意有限态射 p，有 $R^i p_*(\mathcal{E}) = 0$ $(i \geq 1)$，并结合投影公式，可证明（[AC23，定理 1.4]），若 $\mathcal{E}$ 是 X上的 h-瞬子层，则 $p_*(\mathcal{E})$是 $\mathbb{P}^n$上的 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$–瞬子层。更一般地， h-瞬子层在沿有限态射推前后仍保持为瞬子层。

5.2. h-瞬子丛的单子表示。我们已经看到，瞬子层在 $\mathbb{P}^n$ 上（定理 3.1）、反常瞬子层在 $\mathbb{P}^n$ 上（定义3.3），以及某些 Fano 三维簇上的瞬子层（定理 4.5）都存在单子表示。对于光滑 n 维簇 X （$n \geq 3$），设其配有非常丰线丛 $\mathcal{O}_X$（h），并假设 X 关于该线丛$\mathcal{O}_X$（h）是算术 Cohen–Macaulay 的。文献 [AC23, 定理 1.7] 证明，向量丛 $\mathcal{E}$ 在 X 上是缺陷为 $\delta \in \{0,1\}$ 、量子数为 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 的$h-$瞬子丛，当且仅当它是某类单子的上同调。在本小节中，我们回顾此类概形 X 上 h–瞬子丛的单子表示，并附加条件 h^0（X，ω_X（$n-1$）h）$= 0$。有了这一额外条件，单子的表示将更加简洁，并满足某种对偶性。我们

有关构造的技术细节，以及一般 ACM 概形和二次超曲面上的构造，请参见 [AC23, 定理 1.7], [JM10, 定理 3.3] 和 [CMR09]。

首先，回顾一下，具有非常丰线丛 $\mathcal{O}_X(h)$ 的光滑簇 X 是 ACM 概形，当且仅当

(1) $h^i(\mathcal{O}_X(th)) = 0$ 对于 $i = 1, 2, \ldots\ldots, n-1, t \in \mathbb{Z}$; (2) $h^i(\mathcal{I}_{X|\mathbb{P}^N}(t)) = 0$（其中嵌入为 $|\mathcal{O}_X(h)|: X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$）。

若层 $\mathcal{E} \in Coh(X)$ 满足以下条件，则称其为 Ulrich 层

(1) $h^0(\mathcal{E}(-(t+1)h)) = h^n(\mathcal{E}((t-n)h)) = 0$ 对于 $t \geq 0$;
(2) $h^i(\mathcal{E}(t)) = 0$ 对于 $i = 1, 2, \ldots\ldots, n-1$，且 $t \in \mathbb{Z}$

若 X 是 ACM 概形，且满足额外的消失条件 $h^0(X, \omega_X((n-1))h) = 0$，那么普通 h-瞬子丛 $\mathcal{E}$ 的单子表示将具有如下形式（[AC23，推论 7.2]）

$$0 \to \mathcal{C}^{U,h} \to \mathcal{B} \to \mathcal{C} \to 0 \tag{12}$$

其中 $\mathcal{C} = \mathcal{O}_X^{\oplus k}$，且 $\mathcal{B}$ 是一个 Ulrich 丛。层 $\mathcal{C}^{U,h}$ 是 $\mathcal{C}$ 的 Ulrich 对偶层，其含义是 $\mathcal{C}^{U,h} := \mathcal{C}^\vee((n+1)h + K_X)$。

事实上，对于光滑概形 X，消失条件 $h^0(X, \omega_X((n-1))h) = 0$ 仅在 X 属于以下三种情形之一时成立：$X \cong \mathbb{P}^n$； X 是光滑二次超曲面；或者 X 是基于光滑曲线 B 的滚动体。

5.2.1. 如果 $X = \mathbb{P}^n$，普通（第3节）和非普通 h-瞬子层（第5.1节）的单子表示均已在前述各节中给出。

5.2.2. 如果 $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$ 是光滑二次超曲面，令 $\mathcal{O}_X(h) := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)|_X$、$\mathcal{S}$（当 n 为奇数时）以及 $\mathcal{S}'$、$\mathcal{S}''$（当 n 为偶数时）为旋量丛。那么，根据 n 的奇偶性，单子 (12) 可以明确写成以下两个单子之一

$$0 \to \mathcal{O}_X^{\oplus k} \to S(h)^{\oplus s} \to \mathcal{O}_X(h)^{\oplus k} \to 0 \quad \text{for } n = \text{odd}$$

其中 $s = h^0(\mathcal{E} \otimes \mathcal{S}) - h^1(\mathcal{E} \otimes \mathcal{S}) + 2^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}k$

$$0 \to \mathcal{O}_X^{\oplus k} \to S'(h)^{\oplus s'} \oplus S''(h)^{\oplus s''} \to \mathcal{O}_X(h)^{\oplus k} \to 0 \quad \text{for } n = \text{even}$$

其中 s' 和 s'' 定义如下：

$$s' = \begin{cases} h^0(\mathcal{E} \otimes \mathcal{S}') - h^1(\mathcal{E} \otimes \mathcal{S}') + 2^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}k & \text{if } n \equiv 0 \pmod 4 \\ h^0(\mathcal{E} \otimes \mathcal{S}'') - h^1(\mathcal{E} \otimes \mathcal{S}'') + 2^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}k & \text{if } n \equiv 2 \pmod 4 \end{cases},$$

$$s'' = \begin{cases} h^0(\mathcal{E} \otimes \mathcal{S}'') - h^1(\mathcal{E} \otimes \mathcal{S}'') + 2^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}k & \text{if } n \equiv 0 \pmod 4 \\ h^0(\mathcal{E} \otimes \mathcal{S}') - h^1(\mathcal{E} \otimes \mathcal{S}') + 2^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}k & \text{if } n \equiv 2 \pmod 4 \end{cases}.$$

对于 $n = 3$,4,5 这些情形，上述单子与 [Fae14],[AS89]和 [Ott90]中的单子一致。

5.2.3. 若 X 是一个滚动体，即 $X = \mathbb{P}(\mathcal{G})$，其中 $\mathcal{G}$ 是光滑曲线 B上的局部自由层，定义 $\mathcal{O}_X(h) := \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{G})}(1)$，并令 f为投影 $\pi\colon X = \mathbb{P}(\mathcal{G}) \to B$ 在一个闭点处的纤维。在这种情况下， X 是 $\mathbb{P}^N$中的最小次数簇，此类簇上的 Ulrich丛见 [AHMPL19]中的描述。此外，只有当 $B \cong \mathbb{P}^1$时， X才关于 $\mathcal{O}_X(h)$ 是算术 Cohen–Macaulay。下面我们回顾维数为 $n = 3$ 和 4 的两个例子。更多详情请参阅 [AC23，例 7.7 和 7.8] 。

例 5.3. 对于 $n = 3$，普通 h-瞬子丛的单子 (12) 具有如下形式

$$0 \to \mathcal{O}_X((d-2)f)^{\oplus k} \to \mathcal{B} \to \mathcal{O}_X(h)^{\oplus k} \to 0$$

其中 $\mathcal{B}$ 是 X上的 Ulrich 丛。根据 [AHMPL19，定理 4.7], ，我们知道 Ulrich 丛 $\mathcal{B}$ 适合如下短正合列

$$0 \to \mathcal{B}_2 \to \mathcal{B} \to \mathcal{O}_X((d-1)f)^{\oplus s_3} \to 0,$$

其中 $\mathcal{B}_2$ 是一个扩张

$$0 \to \mathcal{O}_X(h-f)^{\oplus s_1} \to \mathcal{B}_2 \to \Omega^1_{X|\mathbb{P}^1}(2h-f)^{\oplus s_2} \to 0$$

对于某些 s_1， s_2， $s_3 \in \mathbb{Z}_{>0}$。

例 5.4. 对于 $n = 4$，令 X 为 Segre 嵌入 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3 \hookrightarrow \mathbb{P}^7$ 的像。3则 X是一个有理正规卷曲簇，且 $\mathcal{G} \cong \bigoplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$。令 $p\colon X \to \mathbb{P}^3$为该$i=0$投影，则有 $\Omega^1_{X|\mathbb{P}^1} \cong p^*(\Omega^1_{\mathbb{P}^3})$。

若 $\mathcal{E}$ 是一个秩为 r 、量子数为 k的普通 h-瞬子丛，则单子 (12) 变为

$$0 \to \mathcal{O}_X(2f)^{\oplus k} \to \mathcal{B} \to \mathcal{O}_X(h)^{\oplus k} \to 0$$

其中 $\mathcal{B}$ 属于短正合列

$$0 \to \mathcal{O}_X(h-f)^{\oplus s_1} \oplus p^*\Omega^1_{\mathbb{P}^3}(2h-f)^{\oplus s_2} \to \mathcal{B} \to p^*\Omega^1_{\mathbb{P}^3}(3h-f)^{\oplus s_2} \oplus \mathcal{O}_X(3f)^{\oplus s_4} \to 0$$

for some $s_1, s_2, s_3, s_4 \in \mathbb{Z}_{>0}$.

5.3. **的示例** h**-瞬子丛**。本小节回顾在低维光滑簇（$n \leq 3$）及卷曲上构造（可定向的） h-瞬子丛的一些方法。首先，回忆一下：秩为 2 h的瞬子丛 $\mathcal{E}$ 在 X 上可定向，当且仅当其缺陷为 $\delta \in \{0, 1\}$，且 $c_1(\mathcal{E}) = (n+1-\delta)h + K_X$属于 $A^1(X) \cong \mathrm{Pic}(X)$。

5.3.1. 当 X 是赋有全局生成的丰沛线丛 $\mathcal{O}_X(h)$ 的光滑曲线时， h-瞬子层 $\mathcal{E}$ 必定是局部自由的。此外，设g 为 X的亏格，并选取一个非有效除子 $\theta \in \mathrm{Pic}^{g-1}(X)$。那么，根据定义， $\mathcal{O}_X(\theta+h)^r$和 $(\mathcal{O}_X(\theta) \oplus \mathcal{O}_X(\theta+h))^r$分别是秩为 r 的普通h-瞬子丛和秩为 $2r$的非普通 h-瞬子丛。

特别地，若 $X \cong \mathbb{P}^1$，则一个 h-瞬子层 $\mathcal{E}$ 是

$$\mathcal{E} = \begin{cases} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus \chi(\mathcal{E})} & \text{if } \delta = 0 \\ (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1))^{\oplus \chi(\mathcal{E})} & \text{if } \delta = 1 \end{cases}$$

此时的量子数为 $k = \delta\chi(\mathcal{E})$。

5.3.2. 当 X 是光滑曲面时，具有缺陷 $\delta \in \{0,1\}$ 且量子数足够大的秩 2 可定向 h-瞬子丛总是存在。接下来，对于 Kodaira 维数 $\kappa(X)$为 $-\infty$ 的情形（[AC23，例 6.10]），我们简要回顾其构造；当 $\kappa(X) = 0$，1，2 时的情形，参见 [AC23，例 6.10]以及 [ESW03]。

对于 $\kappa(X) = -\infty$，令 $\mathcal{O}_X(h)$为 X 上的一个非常 ample 线丛，且满足$h^0(X, \mathcal{O}_X(h)) = N+1$。可通过如下扩张中的 Serre 对应构造一个秩为 2 h的瞬子丛

$$0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{E} \to \mathcal{I}_{Z|X}((1-\delta)h - K_X) \to 0,$$

其中 $Z \subset X$ 是一个 0–维概形，其次数为 $\mathrm{degree}(Z) \geq (1-\delta)(N+1)+1$。

5.3.3. 当 X 是皮卡秩 1 的 Fano 三维簇时，定义 $\mathcal{O}_X(h) := \mathcal{O}_X(H)$，其中除子 H 是 Pic(X) 的丰沛生成元（此时我们称 $\mathcal{O}_X(H)$ 为基本线丛）。将 X 的指标记为 i_X ($i_X = 1$，2，3，4)。根据[ACG21a，定义 1.1]，，若一个秩为 2 的向量丛 $\mathcal{E}$ 位于 X 上，且满足经典瞬子丛 的条件，则称其为经典瞬子丛

(1) $c_1(\mathcal{E}) = -\epsilon h$ with $\epsilon \in \{0,1\}$

(2) $h^0(\mathcal{E}) = h^1(\mathcal{E}(-q_X^\epsilon h)) = 0$ where $q_X^\epsilon := \left[\frac{i_X + 1 - \epsilon}{2}\right]$.

注 5.5。 与 Fano 簇上另外两种瞬子层的定义（定义 4.1 和 4.6）相比，在此语境下，我们不要求 $c_1(\mathcal{E}) = -e_X$ 对于 $\mathcal{E}$ 为经典瞬子丛 。对 $\mathcal{E}$的稳定性也没有限制（注 5.2）。

下面的命题展示了经典瞬子丛与秩为 2 的 h-瞬子丛之间的关系。

命题 5.6。 [AC23，命题 8。6] 设 X 是一个 *Picard* 秩为 *1* 的 *Fano* 三维簇，配备非常丰的基本线丛 $\mathcal{O}_X(h)$。若 $\mathcal{E}$ 是一个秩为

2 的向量丛，且 $c_1(\mathcal{E}) = (4-\delta-i_X)h$，其中 $\delta = \{0,1\}$，则以下断言成立：

(1) 若 $\mathcal{E}$ 是一个 h-瞬子丛，则其缺陷为 δ 且

(a) 若 $(i_X,\delta) \notin \{(4,0),(4,1),(3,1)\}$，则 $\mathcal{E}_{norm,h}$ 是一个经典瞬子丛，其中 $\mathcal{E}_{norm,h} := \mathcal{E}\left(-\left[{c_1(\mathcal{E})}_2{}^{+1}\right]h\right)$。(b) 若 $(i_X,\delta) \in \{(4,0),(4,1),(3,1)\}$，则 $\mathcal{E}_{norm,h}$ 是一个经典瞬子丛，当且仅当 $h^0(\mathcal{E}) = 0$。

(2) 若 $\mathcal{E}_{norm,\ h}$ 是一个经典瞬子丛且

(a) 若 $(i_X,\delta) \notin \{(1,\ 0)\}$，则 $\mathcal{E}$ 是一个 h-瞬子丛。(b) 若 $(i_X,\delta) \in \{(1,\ 0)\}$，则 $\mathcal{E}$ 是一个缺陷为 δ 的 h-瞬子丛，当且仅当 $h^0(\mathcal{E}_{norm,\ h}) = 0$。

5.3.4. 当 X 是一条光滑曲线 B 上的 $n \geq 3$ 维滚动体时，可通过 Serre 对应构造 X 上量子数为 k 的秩 2 普通 h-瞬子丛。根据 [AC23 第 10], 节，我们在下文简要回顾这一构造。

设 $\mathcal{G}$ 是 B 上秩为 $r \geq 3$ 的局部自由层。定义 $\mathcal{O}_X(h) := \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{G})}(1)$，并假设 $\mathcal{O}_X(h)$ 丰沛且整体生成。对每个 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，取 k 个一般点 $b_i \in B (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k)$，并令 $L_i = \pi^{-1}(b_i) \cong \mathbb{P}^{n-1}$ 为态射 $\pi\colon X = \mathbb{P}(\mathcal{G}) \to B$ 的纤维。令 $\theta \in \mathrm{Pic}^{g-1}(B)$ 为 B 的非有效 Θ-特征，并令 D 为 B 上的一个除子，使得 $\mathcal{O}_B(D) = \det(\mathcal{G})$。证明下列正合列中的秩 2 向量丛 $\mathcal{E}$ 是一个普通、可定向、 μ-半稳定的 h-瞬子，其量子数为 k：

$$0 \to \mathcal{O}_X(\pi^*(D+\theta)) \to \mathcal{E} \to \mathcal{I}_{Z|X}(h+\pi^*(\theta)) \to 0.$$

备注 5.7. 如果 X 是 Picard 数为 $\rho_X \geq 2$的 Fano 三维簇，那么 h-瞬子丛的表现可能不同于经典瞬子丛。我们回顾 X 为 Segre 嵌入 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^7$的像时的情形。关于较高 Picard 秩 Fano 簇上的经典瞬子丛，可参阅[CCGM21], [MMPL20] 和 [AM20b] ；关于较高 Picard 秩簇上 h-瞬子丛的其他病态性质示例，可参阅 [AC23，第 9] 节。

令 X 为 Segre 嵌入 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^7$ 的像， $p_i\colon X \to \mathbb{P}^1 (i = 1,\ 2,\ 3)$ 为三个投影。定义 $\mathcal{O}_X(h_i) := p_i^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))$，以及 $\mathcal{O}_X(h) := \mathcal{O}_X(h_1+h_2+h_3)$。令 $L \subset X$ 为 $|h_2|$ 与 $|h_3|$的一般截面的交，则 $L \cong \mathbb{P}^1$。选取 $s \geq 0$ 条互不相交的此类曲线，并令 Z 为它们的并。存在满足以下序列的秩 2 向量丛 $\mathcal{E}$，并且可以验证，这类向量丛是可定向的、普通的、简单的 h-瞬子丛，但是

是 μ-不稳定的：

$$0 \to \mathcal{O}_X(h_1 + 3h_3) \to \mathcal{E} \to \mathcal{I}_{Z|X}(h_1 + 2h_2 - h_3) \to 0.$$

6. Instanton complexes via Bridgeland stability

在本文余下部分，我们继续采用第4节中的假设，即 X 表示一个 Picard 数为一且满足 $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}H$ 的光滑射影Fano三维簇。与前文相同，记 $K_X = -i_X H$ 和 $i_X = 2q_X + e_X$，其中i_X，q_X，$e_X \in \mathbb{Z}$, $i_X > 0$, $q_X \geq 0$和 $e_X \in \{0, 1\}$。对于一个对象 $E \in D^b(X)$ 以及$\beta \in \mathbb{R}$，我们将数值扭曲陈特征定义为

$$v_\beta(E) = (\mathrm{ch}_0^\beta(E)H^3, \mathrm{ch}_1^\beta(E)H^2, \mathrm{ch}_2^\beta(E)H, \mathrm{ch}_3^\beta(E)),$$

其中

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}_0^\beta(E) &= \mathrm{ch}_0(E) \\
\mathrm{ch}_1^\beta(E) &= \mathrm{ch}_1(E) - \beta\,\mathrm{ch}_0(E)H \\
\mathrm{ch}_2^\beta(E) &= \mathrm{ch}_2(E) - \beta\,\mathrm{ch}_1(E)H + \frac{\beta^2}{2}\,\mathrm{ch}_0(E)H^2 \\
\mathrm{ch}_3^\beta(E) &= \mathrm{ch}_3(E) - \beta\,\mathrm{ch}_2(E)H + \frac{\beta^2}{2}\,\mathrm{ch}_1(E)H^2 - \frac{\beta^3}{6}\,\mathrm{ch}_0(E)H^3.
\end{aligned}$$

如 [Li19], 所示，对于每个 β，α，$s \in \mathbb{R}$ 且满足 α，$s > 0$，函数

$$Z_{\beta,\alpha,s}(E) = -\,\mathrm{ch}_3^\beta(E) + \left(s + \frac{1}{6}\right)\mathrm{ch}_1^\beta(E)H^2 + i\left(\mathrm{ch}_2^\beta(E)H - \frac{\alpha^2}{2}\,\mathrm{ch}_0(E)H^3\right)$$

是一个稳定性条件 $\sigma_{\beta,\,\alpha,\,s} = (Z_{\beta,\,\alpha,\,s},\ \mathcal{A}^{\beta,\,\alpha})$ 的中心荷，其支撑心由下文所述的两步倾斜过程构造而成。

(a) 首先考虑 Mumford斜率

$$\mu_\beta(E) = \begin{cases} \frac{\mathrm{ch}_1^\beta(E)H^2}{\mathrm{ch}_0(E)H^3} & \text{if } \mathrm{ch}_0(E) \neq 0 \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

以下 $\mathrm{Coh}(X)$ 的满加性子范畴构成一个挠对：

$$\mathcal{F}_\beta = \{E \in \mathrm{Coh}(X) \colon \mu_\beta(F) \leq 0 \text{ for all subsheaves } F \hookrightarrow E\}$$

$$\mathcal{T}_\beta = \{E \in \mathrm{Coh}(X) \colon \mu_\beta(Q) > 0 \text{ for all quotient sheaves } E \twoheadrightarrow Q\}.$$

关于这个挠对对 $\mathrm{Coh}(X)$ 进行倾斜，我们得到 $D^b(X)$ 上一个有界t-结构的心：

$$\mathrm{Coh}^\beta(X) := \langle \mathcal{F}_\beta[1], \mathcal{T}_\beta \rangle.$$

(b) 现在考虑倾斜斜率

$$\nu_{\beta,\alpha}(E)=\begin{cases}\frac{\mathrm{ch}_2^\beta(E)H-\frac{\alpha^2}{2}\mathrm{ch}_0(E)H^3}{\mathrm{ch}_1^\beta(E)H^2} & \text{if } \mathrm{ch}_1^\beta(E)H^2\neq 0\\ +\infty & \text{otherwise.}\end{cases}$$

和之前一样，我们有挠对

$\mathcal{F}_{\beta,\alpha}=\{E\in\mathsf{Coh}^\beta(X)\colon\ \nu_{\beta,\alpha}(F)\ \le 0\text{对所有 }\ F\hookrightarrow E\mathsf{Coh}^\beta(X)\}\mathcal{T}_{\beta,\alpha}=\{E\in$ $\mathsf{Coh}^\beta(X)\colon\ \nu_{\beta,\alpha}(Q)\ >0\text{ 对所有 }\ E\twoheadrightarrow Q\ \mathsf{Coh}^\beta(X)\}$.中的商对象

相对于这个挠对对 $\mathsf{Coh}^\beta(X)$ 进行倾斜，我们得到所需的心

$$\mathcal{A}^{\beta,\alpha}:=\langle\mathcal{F}_{\beta,\alpha}[1],\mathcal{T}_{\beta,\alpha}\rangle.$$

我们将 $\mathcal{A}^{\beta,\alpha}$ 上相应的 Bridgeland 斜率记为

$$\lambda_{\beta,\alpha,s}(E)=\frac{\mathrm{ch}_3^\beta(E)-\left(s+\frac{1}{6}\right)\alpha^2\,\mathrm{ch}_1^\beta(E)H^2}{\mathrm{ch}_2^\beta(E)H-\frac{\alpha^2}{2}\,\mathrm{ch}_0(E)H^3}.$$

我们希望提出一种新的瞬子对象定义，它能够“扩展”Faenzi [Fae14], Kuznetsov [Kuz12], 以及 Comaschi–Jardim [CJ22] 在第4节中给出的定义，并且某些 $D^b(X)$ 中的对象可以满足该定义。我们希望，我们的范畴方法能够以更加系统的方式研究瞬子模空间。其思想是将 μ-半稳定性和消失条件替换为某种 Bridgeland 稳定性。为了确定适当的稳定性条件，回顾经典情形：在 $\mathbb{P}^3$ 上的秩 2 瞬子丛中，给出单子描述的消失条件，是在结合 μ-稳定性、一个上同调群的消失、Serre 对偶性，以及第一陈类为平凡的秩 2 向量丛是自对偶这一事实之后得到的。

我们先来考虑这个函子

$$E\mapsto E^D:=R\mathcal{H}om(E,\mathcal{O}(-e_X))[2]. \tag{13}$$

我们有如下结果：

命题 6.1。 [JMM22，命题 6.12]。设 $\nu_{\beta,\ \alpha}(E)\neq 0$，则

$$E\ \textit{is}\ \sigma_{\beta,\alpha,s}-\textit{semistable}\iff E^D\ \textit{is}\ \sigma_{-\beta-e_X,\alpha,s}-\textit{semistable}.$$

特别地，如果 $\beta_0:=-e_X/2$ 且 $\nu_{\beta_0,\ \alpha}(E)\neq 0$，那么 E 是 $\sigma_{\beta_0,\ \alpha.s}$-半稳定的，当且仅当 E^D 是 $\sigma_{\beta_0,\ \alpha,\ s}$-半稳定的。

命题 6.2. 如果 $\mathrm{ch}(E)=\mathrm{ch}(E^D)$，那么 $v_{\beta_0}(E)=(-R,0,D,0)$。此外，如果 $E\in\mathcal{A}^{\beta_0,\ \alpha}$ 对所有 $\alpha>0$ 均成立，那么 $R,D\ge 0$。

证明。 如果 $v=(v_0,v_1,v_2,v_3)$，定义 $v^\vee:=(v_0,-v_1,v_2,-v_3)$。显然，

$$v_\beta(E)^\vee = v_{-\beta}(E^\vee).$$

Thus

$$v_{\beta_0}(E)^\vee = v_{-\beta_0-e_X}(E^\vee\otimes\mathcal{O}(-e_X)) = v_{\beta_0}(E^D) = v_{\beta_0}(E).$$

此外，若 $E\in\mathcal{A}^{\beta_0,\alpha}$ 对所有 $\alpha>0$ 成立，则

$$D+\frac{\alpha^2}{2}R\geq 0 \quad \text{for all } \alpha>0,$$

这意味着 $R,D\geq 0$。 □

命题 6.3. 线丛 $\mathcal{O}(q_X)$ 对 $\alpha<i_X/2$ 和 $s>0$ 是 $\sigma_{\beta_0,\alpha,s}$-稳定的。

证明。 这是一个直接的计算，因为皮卡秩 1 的三维簇上的线丛，只要属于 $\mathrm{Coh}^{\beta_0}(X)$ 和 $\mathcal{A}^{\beta_0,\alpha}$，就分别是倾斜稳定和 Bridgeland 稳定的。注意到

$$v_{\beta_0}(\mathcal{O}(q_X)) = \left(H^3, \frac{i_X}{2}H^3, \frac{1}{2}\left(\frac{i_X}{2}\right)^2 H^3, \frac{1}{6}\left(\frac{i_X}{2}\right)^3 H^3\right),$$

因此

$$\mu_{\beta_0}(\mathcal{O}(q_X)) = \frac{i_X}{2},\quad \nu_{\beta_0,\alpha}(\mathcal{O}(q_X)) = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{i_X}{2}\right)^2-\frac{\alpha^2}{2}}{\frac{i_X}{2}}.$$

因此，由于 $\mathcal{O}(q_X)$ 是 μ_{β_0}-稳定的，$\mathcal{O}(q_X)\in\mathrm{Coh}^{\beta_0}(X)$。所以，$\mathcal{O}(q_X)$ 也 $\nu_{\beta_0,\alpha}$-稳定。由于 $\nu_{\beta_0,\alpha}(\mathcal{O}(q_X))>0$ 当且仅当 $\alpha<i_X/2$，因此对于这些值，$\mathcal{O}(q_X)\in\mathcal{A}^{\beta_0,\alpha}$。□

考虑区域

$$\mathcal{U}:=\left\{(\alpha,s)\colon \alpha,s>0,\ \left(s+\frac{1}{6}\right)\alpha^2<\frac{1}{6}\left(\frac{i_X}{2}\right)^2\right\}.$$

我们通过识别 $(\alpha,s)\leftrightarrow\sigma_{\beta_0,\alpha,s}$，得到 $\mathcal{U}\subset\mathrm{Stab}(X)$。我们将稳定条件的集合 $\{\sigma_{\beta_0,\alpha,s}\}_{\alpha,s>0}$ 称为 (α,s)-切片。根据上述计算，显然对于所有 $(\alpha,s)\in\mathcal{U}$，$\lambda_{\beta_0,\alpha,s}(\mathcal{O}(q_X))>0$。

定义 6.4。 固定一个数值扭曲陈特征 $v_{\beta_0}=(-R,0,D,0)$，其中 $R\geq 0$、$D>0$，并令 $\mathcal{C}$ 为 v_{β_0} 的一个腔室，使得 $\mathcal{C}\cap\mathcal{U}\neq\emptyset$。令 $E\in D^b(X)$，且 $v_{\beta_0}(E)=v_{\beta_0}$，我们称 E 为一个 $\mathcal{C}$-瞬子对象，如果 E 对于 $\mathcal{C}$ 中的某个稳定性条件是 Bridgeland 半稳定的。

注记 6.5. 在 [JMM22, 第 5] 节中证明，对于数值扭曲陈特征 $v_{\beta_0}=(-R,0,D,0)$，(α,s)-切片的墙与室分解是有限的。此外，还给出了计算墙的算法。

引理 6.6. 设 E 是一个 $\mathcal{C}$-瞬子，并且在 (α, s)-切片的最外层腔室中也是 *Bridgeland* 半稳定的。那么，若 $(,) \in \mathcal{C}$, E 对所有 $\alpha \geq \alpha_0$ 都是 $\sigma_{\beta_0,\alpha,s}$-半稳定的，也就是说，在 $\mathcal{C}$ 右侧的所有腔室中均半稳定。

证明。由于这些墙彼此不相交，且每个关于 E 的致不稳定墙都与竖直直线 $\{(\alpha_0, s) : s > 0\}$ 相交，因此只需证明，在范畴 $\mathcal{A}^{\beta_0,\alpha_0}$ 中，E 的任何子对象都不能在 $s > s_0$ 处使 E 不稳定。事实上，若 $A \hookrightarrow E$ 是这样的子对象，则

$$\lambda_{\beta_0,\alpha_0,s}(A) \leq \lambda_{\beta_0,\alpha_0,s}(E) \text{ in the outermost chamber, and}$$
$$\lambda_{\beta_0,\alpha_0,s}(A) = \lambda_{\beta_0,\alpha_0,s}(E) = 0 \text{ at the wall produced by } A.$$

因此，$\lambda_{\beta_0,\alpha_0,s_0}(A) > \lambda_{\beta_0,\alpha_0,s_0}(E)$，因为 $\lambda_{\beta_0,\alpha_0,s}$ 的分子关于 s 是线性的。除非 A 从未真正使 E 不稳定，即对于所有 $s \geq s_0$，$\lambda_{\beta_0,\alpha_0,s}(A) = 0$。□

定理 6.7. 设 $E \in D^b(X)$ 是一个对象，满足 $v_{\beta_0}(E) = (-R, 0, D, 0)$，且 $\mathcal{C}$ 是该陈特征在 (α, s)-切片中的一个腔室，并且满足 $\mathcal{C} \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$。那么

(1) E 是一个 $\mathcal{C}$-瞬子对象，当且仅当 E^D 是一个 $\mathcal{C}$-瞬子对象。*(2)* 如果 E 是一个 $\mathcal{C}$-瞬子对象，那么 $E \in \langle \mathcal{O}(q_X) \rangle^{\perp}$。

证明。(1) 是命题 6.1 的直接推论，并且利用了这样的事实：$v_{\beta_0}(E) = v_{\beta_0}(E^D)$。对于 (2)，注意到

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{O}(q_X), E) = 0$$

因为对于 $\mathcal{C}$上的稳定条件，$\mathcal{O}(q_X)$ 是稳定的，且

$$\lambda_{\beta_0,\alpha,s}(\mathcal{O}(q_X)) > 0 = \lambda_{\beta_0,\alpha,s}(E).$$

注意到

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ext}^i(\mathcal{O}(q_X), E) &= \mathrm{Ext}^{3-i}(E, \mathcal{O}(q_X - i_X))^* \\
&= \mathrm{Ext}^{3-i}(\mathcal{O}, E^\vee \otimes \mathcal{O}(-e_X) \otimes \mathcal{O}(q_X - i_X + e_X))^* \\
&= \mathrm{Ext}^{3-i}(\mathcal{O}, E^D \otimes \mathcal{O}(-q_X)[-2])^* \\
&= \mathrm{Ext}^{1-i}(\mathcal{O}(q_X), E^D)^*.
\end{aligned}$$

结合这一计算与 (1)，我们得到 $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(q_X)\ E) = 0$。对于 i 的其他取值，我们会得到同一心中的对象之间的负 Ext，这是不可能的。因此 $E \in \langle \mathcal{O}(q_X) \rangle^{\perp}$。□

例 6.8。JMM22 命题 5. 表明，扭曲陈特征为 $v_{\beta_0} = (0,\ 0,\ D,\ 0)$ 且 $D > 0$ 位于相应的 $(\alpha,\ s)$ 切片的有限墙与腔室分解中最外层腔室内的 Bridgeland 半稳定对象，恰好是（扭曲的）Gieseker 半稳定层。此外，如果一个

（扭曲的）Gieseker 半稳定层 T 满足 $v_\beta(T) = (0,\ 0,\ D,\ 0)$，且也是一个 $\mathcal{C}$-瞬子对象，也就是说，在由 $\mathcal{O}(q_X)$ 产生的潜在数值墙之前的任何位置都不会被 destabilize，那么定理 6.7 表明，E 是一个一维瞬子层。

例 6.9. 设 $X = Q^3 \subset \mathbb{P}^4$ 是一个二次超曲面，且 $\iota\colon X \hookrightarrow \mathbb{P}^4$ 是相应的包含映射。X 上的旋量丛 S 由以下短正合列定义

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)^{\oplus 4} \xrightarrow{M} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}^{\oplus 4} \xrightarrow{N} \iota_* S \longrightarrow 0,$$

其中矩阵 M 满足

$$M^2 = (x_0^2 + x_1x_2 + x_3x_4)I.$$

此外，将 N 限制到 X 上可得到以下短正合列

$$0 \longrightarrow S(-1) \longrightarrow \mathcal{O}_X^{\oplus 4} \longrightarrow S \longrightarrow 0. \tag{14}$$

层 $S(-1)$ 是一个秩为 2 且具有最小荷的瞬子层。注意，在此情形下 $i_X = 3$，因此 $q_X = 1 = e_X$。于是 $\beta_0 = -1/2$，利用正合列 (14) 进行简单计算可得

$$v_{\beta_0}(S(-1)[1]) = \left(-2H^3, 0, \frac{H^3}{4}, 0\right) = \left(-4, 0, \frac{1}{2}, 0\right).$$

注意，由于 $S(-1)$ 是斜率稳定的，且 $\mu_{\beta_0}(S(-1)) = 0$，因此 $S(-1)[1] \in \mathrm{Coh}^{\beta_0}(X)$；又由于 $\nu_{\beta_0,\,\alpha}(S(-1)[1]) = +\infty$，因此 $S(-1)[1] \in \mathcal{A}^{\beta_0,\,\alpha}$ 对所有 $\alpha > 0$ 均成立。

现在，由 [JMM22, 定理 3.1] 可知，$S(-1)[1]$ 渐近地 $\lambda_{\beta_0,\,\alpha,\,s}$-稳定，因此在 $(\alpha,\ s)$-切片的最外层腔室中是 Bridgeland 稳定的。此外，正如 [JMM22, 第5节 3], 所证明的，若 E 是一个满足 $v_{\beta_0}(E) = (-R,\ 0,\ D,\ 0)$ 的对象，且 $A \hookrightarrow E$ 是一个致不稳定子对象，并产生 $(\alpha,\ s)$-切片中的一维墙，那么若 $v_{\beta_0}(A) = (r,\ c,\ d,\ e)$，则必有

$$0 < d < D, \tag{15}$$

$$0 < c(6e) \le \min\{(2d)^2, (2D - 2d)^2\}, \tag{16}$$

$$-\frac{c}{6e}(2D - 2d) - R \le r \le \frac{c}{6e}2d. \tag{17}$$

此外，在我们的情形下，还有

$$\mathrm{ch}_1(A)H^2 \in 2\mathbb{Z},\ \mathrm{ch}_2(A)H \in \mathbb{Z},\ r \in 2\mathbb{Z},\ 4d \in \mathbb{Z},\ \text{and } 24e \in \mathbb{Z}. \tag{18}$$

因此，利用 $v_{\beta_0}(S(-1)[1]) = \left(-4,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 0\right)$，经过直接计算可知，$S(-1)[1]$ 的致不稳定子对象的陈特征仅有以下可能：

$$v_{\beta_0}(A) = \left(r, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{24}\right),\quad r = -6,\ 2,$$

它们产生了唯一可能的致不稳定墙：

$$W = \left\{ (\alpha, s) \colon \left(s + \frac{1}{6} \right) \alpha^2 = \frac{1}{24} \right\}.$$

因此，如果 $\mathcal{C}_{out}$ 表示（α，s）-切片中 $v_{\beta_0}(S(-1)[1])$ 的最外层腔室，那么 $\mathcal{C}_{out} \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$，从而 $S(-1)[1]$ 是一个 $\mathcal{C}_{out}$-瞬子对象。

例 6.10。设 X 是一个 Picard 数为一、指标2且次数为 $H^3 > 1$的 Fano 三维簇。在此情形下，$e_X = 0$ 且 $q_X = 1$。若 $\ell \subset X$ 是一条直线，则 $\mathrm{ch}(\mathcal{I}_\ell[1]) = (-1, 0, \ell, 0)$，因此

$$v_0(\mathcal{I}_\ell[1]) = (-H^3, 0, 1, 0).$$

由 [JMM22，第 3.4]例以及 $\mathcal{O}_\ell$ 的 Gieseker 稳定性可知，对于所有 $\alpha \gg 0$，$\mathcal{I}_\ell[1]$都是 $\sigma_{0,\,\alpha,\,s}$-稳定的。另一方面，如果 $\mathcal{I}_\ell[1]$ 在（α，s）-切片中曾经不稳定，那么应存在一个破坏稳定性的子对象 $A \hookrightarrow \mathcal{I}_\ell[1]$，使得 $v_0(A) = (r,\ c,\ d,\ e)$满足不等式（15）、（16）和（17）。因此，我们应有

$$0 < 2d < 2$$

因此 $2d = 1$、$c = 1$ 和 $6e = 1$。然而，由于 $c = \mathrm{ch}_1(A)H^2 \neq 1$，且 $H^3 > 1$，所以这样的 A 不可能存在。因此，对于每个满足 $\mathcal{C} \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$ 的腔室 $\mathcal{C}$，$\mathcal{I}_\ell[1]$ 都是一个 $\mathcal{C}$-瞬子对象。

例 6.11. JMM22 的例 6.15] 中指出，由正合三角定义的对象 $A \in D^b(\mathbb{P}^3)$：

$$\mathcal{O}_H(-1)[1] \longrightarrow A \longrightarrow \mathcal{O}_H(2), \tag{19}$$

其中 H 表示 $\mathbb{P}^3$ 中的一个超平面，在包含秩为 0 的瞬子层作为稳定对象的稳定性室中是 Bridgeland 稳定的。因此，按照我们的定义，这样的 A 是一个$\mathcal{C}$-瞬子对象。我们希望直接验证 A 确实具有一种“单子式”表示。

我们的出发点是 H 的余切丛的欧拉正合列：

$$0 \longrightarrow \Omega^1_H(2) \longrightarrow \mathcal{O}_H(1)^{\oplus 3} \longrightarrow \mathcal{O}_H(2) \longrightarrow 0$$

将上面的满射与 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)^{\oplus 3} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_H(1)^{\oplus 3}$ 复合，我们得到一个正合列

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)^{\oplus 3} \longrightarrow \mathcal{O}_H(2) \longrightarrow 0, \tag{20}$$

其中层 G 由以下扩张给出

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}^{\oplus 3} \longrightarrow G \longrightarrow \Omega^1_H(2) \longrightarrow 0.$$

现在有一个复合满射 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}^{\oplus 3} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_H^{\oplus 3} \twoheadrightarrow \Omega_H^1(2)$，其核 K 由以下正合列给出

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)^{\oplus 3} \longrightarrow K \longrightarrow \mathcal{O}_H(-1) \longrightarrow 0,$$

并且还满足以下序列

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}^{\oplus 6} \longrightarrow G \longrightarrow 0. \tag{21}$$

于是我们得到一个单射

$$\alpha\colon \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)^{\oplus 3} \hookrightarrow K \hookrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}^{\oplus 6}$$

以及一个态射

$$\beta\colon \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}^{\oplus 6} \twoheadrightarrow G \hookrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)^{\oplus 3}$$

其余核恰好是 $\mathcal{O}_H(2)$。此外，$\beta\alpha = 0$，并且 $(\ker\ \beta/\operatorname{im}\ \alpha) \simeq \mathcal{O}_H(-1)$，因为 $\ker\beta = K$ and $\operatorname{im}\ \alpha \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)^{\oplus 3}$。

总之，对象 A 与复形拟同构

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)^{\oplus 3} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}^{\oplus 6} \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)^{\oplus 3}.$$

注 6.12. 由正合三角（19）定义的 $\mathcal{C}$-瞬子对象 A 是一种新型瞬子。事实上，此前定义的瞬子复形只有 perverse 瞬子，而 A 不属于这一范畴，因为 $\mathcal{H}^{-1}(A) = \mathcal{O}_H(-1)$ 不是无挠层（见定义3.3）。

6.1. **来自箭图区域的单子描述。** 本小节将研究两个例子，即 $\mathbb{P}^3$ 和二次曲面 $Q^3 \subset \mathbb{P}^4$。在这两个例子中，我们都有全强例外集合，它们生成的箭图区域与相应的（α，s）-切片相交。由此将得到某些 $\mathcal{C}$-瞬子对象的单子型描述。我们指出，类似的技巧也可用于研究具有全强例外集合的其他 Fano 三维簇。

6.1.1. $X = \mathbb{P}^3$。在这种情况下，我们有 $e_X = 0$，因此 $\beta_0 = 0$。如 [JMM22, 引理 6.10] 所示，经过简单计算可得

$$(\alpha, s) \in \mathcal{R} = \left\{(\alpha, s)\colon 1 < (6s+1)\alpha^2 < \frac{4-3\alpha^2}{2-\alpha^2},\ 0 < \alpha < 1,\ s > 0\right\}$$

我们有 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2)[2]$，$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)[2]$，$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}[1]$，$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \in \mathcal{A}^{0,\alpha}$ 此外

$$\lambda_{0,\alpha,s}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2)[2]) < \lambda_{0,\alpha,s}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)) \le 0 = \lambda_{0,\alpha,s}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}[1]) \le \lambda_{0,\alpha,s}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)[2]).$$

因此，对于每个 $(\alpha, s) \in \mathcal{R}$，我们都可以选择 $t_{\alpha,s} \in \mathbb{R}$，使得

$$\lambda_{0,\alpha,s}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2)[2]) < t_{\alpha,s} < \lambda_{0,\alpha,s}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)),$$

从而相对于挠对进行倾斜 $\mathcal{A}^{0,\alpha}$

$$\mathcal{F}_{0,\alpha,s} = \{E \in \mathcal{A}^{0,\alpha} \colon \lambda_{0,\alpha,s}(F) \leq t_{\alpha,s} \text{ for all subobjects } F \hookrightarrow E \text{ in } \mathcal{A}^{0,\alpha}\}$$
$$\mathcal{T}_{0,\alpha,s} = \{E \in \mathcal{A}^{0,\alpha} \colon \lambda_{0,\alpha,s}(Q) > t_{\alpha,s} \text{ for all quotients } E \twoheadrightarrow Q \text{ in } \mathcal{A}^{0,\alpha}\},$$

我们得到心 $\langle \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2)[3], \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)[2], \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}[1], \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)\rangle$。

现在注意，每个满足 $\mathrm{ch}(E) = (-R, 0, D, 0)$ 的 Bridgeland 半稳定对象 E 都属于子范畴 $\mathcal{T}_{0,\alpha,s}$，因此它拟同构于以下形式的复形

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)^{\oplus D} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}^{\oplus 2D+R} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)^{\oplus D}. \tag{22}$$

此外，[JMM22 的引理 6.6] 还证明了，E 的 Bridgeland 稳定性等价于复形 (22) 关于向量 $\Theta_0 = (-1, 0, 1)$ 的 King 稳定性。特别地，在区域 $\mathcal{R}$ 中，此类对象都不可能是 Bridgeland 不稳定的。因此，与区域 $\mathcal{R}$ 相交的 $v_0 = (-R, 0, D, 0)$ 只有一个 Bridgeland 腔室 $\mathcal{C}$，而 $\mathbb{P}^3$ 中所有的 $\mathcal{C}$-瞬子对象都有单子型描述 (22)。

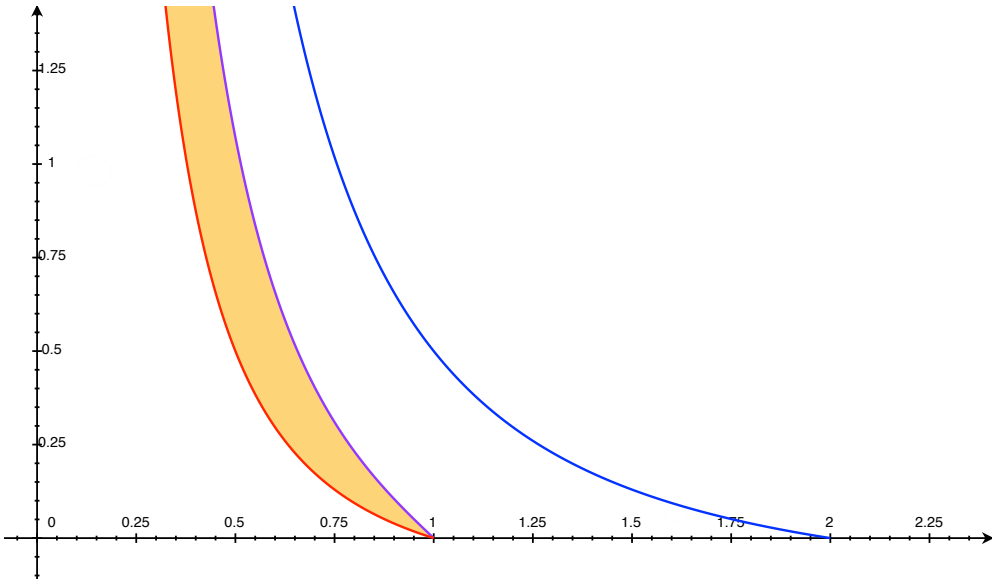
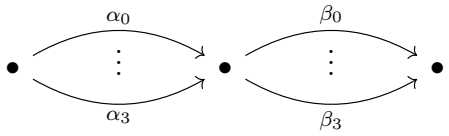


FIGURE 1. 箭图区域 $\mathcal{R}$ 在 (α, s)-切片中以黄色标出。蓝色曲线是 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2)$ 的潜在墙（瞬子墙），红色曲线是 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)$ 的潜在墙（塌缩墙），紫色曲线由 Bridgeland 斜率方程 $\lambda_{0,\alpha,s}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2)[2]) = \lambda_{0,\alpha,s}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1))$ 给出。

注 6.13。 正如第3节.2 中所解释的，在 [JS20] 中，作者详细研究了箭图表示的几何不变量理论变化

(23)



对于维数向量 $\vec{n} = (1, 3, 1)$，即 $R = 2$ 和 $D = 1$。他们证明，King稳定性参数空间 $\vec{n}^{\perp}$ 具有有限墙与腔室分解，其中只有两个腔室对应的模空间非空。这两个腔室共用一面由向量 $\Theta_0 := (-1, 0, 1) \in \vec{n}^{\perp}$给出的墙。此外，他们证明， Θ_0-半稳定表示与复形 (22) S-等价，而这些复形拟同构于瞬子层（局部自由和非局部自由）的平移或 perverse 瞬子。

例 6.14. 考虑唯一的非分裂扩张

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2)[2] \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2) \longrightarrow 0.$$

在由 $\lambda_{0,\ \alpha,\ s}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2)) = 0$给出的“瞬子墙”上，对象 E 是严格半稳定的，因此它在与区域 $\mathcal{U}$相交的腔室 $\mathcal{C}_0$ 中稳定。请注意，尽管对象 E 是自对偶的，即 $E^D = E$，但按照我们的定义，它并不是一个 $\mathcal{C}_0$-瞬子，因为其陈特征 $\mathrm{ch}(E) = (2, 0, 2, 0)$ 不满足通常的 Bogomolov不等式。此外，腔室 $\mathcal{C}_0$ 不可能与箭图区域 $\mathcal{R}$ 相交，因为这样的 E 没有单子型描述。事实上，若情况如此，则 E 会拟同构于如下形式的复形

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)^{\oplus 2} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}^{\oplus 2} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)^{\oplus 2},$$

但这将意味着存在一个满射 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)^{\oplus 2} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2)$，这是不可能的。

例 6.15. 设 E 是如第 2 节所定义的 $\mathbb{P}^3$ 上的秩 2 瞬子丛，特别地， E 是 μ-稳定的。那么，根据 E 的经典单子表示可知，$E[1]$ 拟同构于如下形式的一个复形

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}^{\oplus c} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}^{\oplus 2+2c} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)^{\oplus c}.$$

此外，根据 [JS20, 命题 6]，显示式 (6) 中的箭图 $\mathbf{Q}$ 表示关于向量 $\Theta_0 = (-1,0,1)$ 是稳定的。另一方面，由于μ-稳定性以及 E的局部自由性，对象 $E[1]$ 在最外层腔室中是稳定的，因为它满足 [JMM22, 定理 3.1]的假设。因此，引理 6.6 意味着，对于满足 $\mathcal{C} \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$ 的每个腔室 $\mathcal{C}$， $E[1]$ 都是一个 $\mathcal{C}$-瞬子对象。显然，同样的论证表明，如果 E 是 $\mathbb{P}^3$ 上的一个 μ-稳定的局部自由瞬子层，那么 $E[1]$ 就是一个 $\mathcal{C}$-瞬子对象。

6.1.2. $X = Q^3 \subset \mathbb{P}^4$. 在此情形下，我们有 $e_X = 1$，因此 $\beta_0 = -1/2$。我们有全强例外集合

$$\mathcal{O}_X(-1),\ S(-1),\ \mathcal{O}_X,\ \mathcal{O}_X(1),$$

其中 $S(-1)$ 是例 6.9 中定义的旋量丛。注意，由于 $H^3 = 2$，因此

$$v_{\beta_0}(\mathcal{O}_X(n)) = \left(2, 2\left(n+\frac{1}{2}\right), \left(n+\frac{1}{2}\right)^2, \frac{1}{3}\left(n+\frac{1}{2}\right)^3\right).$$

因此，计算 Mumford 斜率和倾斜斜率的符号可得

$$\mathcal{O}_X(-1)[1],\ \mathcal{O}_X,\ \mathcal{O}_X(1) \in \mathrm{Coh}^{\beta_0}(X),$$

$$\mathcal{O}_X(-1)[2] \in \mathcal{A}^{\beta_0,\alpha} \quad \text{for } \alpha \le \frac{1}{2},$$

$$\mathcal{O}_X \in \mathcal{A}^{\beta_0,\alpha} \quad \text{for } \alpha < \frac{1}{2},$$

$$\mathcal{O}_X(1) \in \mathcal{A}^{\beta_0,\alpha} \quad \text{for } \alpha < \frac{3}{2}.$$

对于区域中的 (α, s)

$$\mathcal{R} = \left\{(\alpha, s)\colon \frac{1}{4} < (6s+1)\alpha^2 < \frac{9}{4},\ \ 0 < \alpha < \frac{1}{2},\ \ s > 0\right\}$$

我们有

$$\lambda_{\beta_0,\alpha,s}(\mathcal{O}_X) < \lambda_{\beta_0,\alpha,s}(S(-1)[1]) = 0 < \lambda_{\beta_0,\alpha,s}(\mathcal{O}_X(-1)[2]),\ \text{and}\ \lambda_{\beta_0,\alpha,s}(\mathcal{O}_X(1)) > 0,$$

由例 6.9 可知，所有这些对象在 $\mathcal{R}$ 中都是 Bridgeland 半稳定的。此外，由于在 $\mathcal{R}$, $\lambda_{\beta_0,\alpha,s}(\mathcal{O}_X(1))$ 趋近于 $(6s+1)\alpha^2 = \frac{9}{4}$ 时趋近于零，而 $\lambda_{\beta_0,\alpha,s}(\mathcal{O}_X(-1)[2])$ 趋近于 $(6s+1)\alpha^2 = \frac{1}{2}$ 时趋近于零，因此区域

–

$$\mathcal{R}_0 = \{(\alpha, s)\colon \lambda_{\beta_0,\alpha,s}(\mathcal{O}_X(-1)[2]) < \lambda_{\beta_0,\alpha,s}(\mathcal{O}_X(1)),\ \alpha, s > 0\}$$

与 $\mathcal{R}$ 有非空交集。因此，对于每个 $(\alpha, s) \in \mathcal{R} \cap \mathcal{R}_0$，我们可以选择 $t_{\alpha,s} \in \mathbb{R}$，使得

$$\lambda_{\beta_0,\alpha,s}(\mathcal{O}_X(-1)[2]) < t_{\alpha,s} < \lambda_{\beta_0,\alpha,s}(\mathcal{O}_X(1)),$$

并相对于挠对倾斜心 $\mathcal{A}^{\beta_0,\alpha}$

$$\mathcal{F}_{\beta_0,\alpha,s} = \{E \in \mathcal{A}^{\beta_0,\alpha}\colon \lambda_{\beta_0,\alpha,s}(F) \le t_{\alpha,s} \text{ for all subobjects } F \hookrightarrow E \text{ in } \mathcal{A}^{\beta_0,\alpha}\}$$

$$\mathcal{T}_{\beta_0,\alpha,s} = \{E \in \mathcal{A}^{\beta_0,\alpha}\colon \lambda_{\beta_0,\alpha,s}(Q) > t_{\alpha,s} \text{ for all quotients } E \twoheadrightarrow Q \text{ in } \mathcal{A}^{\beta_0,\alpha}\},$$

我们得到心 $\langle \mathcal{O}_X(-1)[3],\ \ S(-1)[2],\ \ \mathcal{O}_X[1],\ \ \mathcal{O}_X(1)\rangle$。

因此可知，如果 E 是一个 $\lambda_{\beta_0,\,\alpha,\,s}$-半稳定对象，满足 $(\alpha,\ s)\in\mathcal{R}\cap\mathcal{R}_0$，且 $v_{\beta_0}(E)=(-R,\ 0,\ D,\ 0)$，那么 $E[1]$ 拟同构于一个如下形式的复形

$$\mathcal{O}_X(-1)^{\oplus a}\longrightarrow S(-1)^{\oplus b}\longrightarrow\mathcal{O}_X^{\oplus c}\longrightarrow\mathcal{O}_X(1)^{\oplus n}.$$

直接计算该复形的陈特征可得

$$n=0,\ a=c=D-\frac{R}{8}=\mathrm{ch}_2(E)H,\ \text{and}\ b=c+\frac{R}{4}.$$

因此，若 $\mathcal{C}$ 是与区域 $\mathcal{R}\cap\mathcal{R}_0$ 相交的 $v_{\beta_0}=(-R,0,D,0)$ 的一个腔室，则每个 $\mathcal{C}$-瞬子对象都有如下形式的单子型描述

$$\mathcal{O}_X(-1)^{\oplus c}\longrightarrow S(-1)^{\oplus c+\frac{R}{4}}\longrightarrow\mathcal{O}_X^{\oplus c}.$$

6.2. **重新审视无环扩张**。设 X 是一个 Picard 数为一、指标为 2 的 Fano 三维簇。在此情形下，$q_X=1$ 且 $e_x=0$。与秩 2 瞬子丛的情形一样，我们有如下结果。

引理 6.16. 设 E 是一个稳定的 $\mathcal{C}$-瞬子对象，满足 $v_0(E)=(-R,0,D,0)$。则

$$\dim\mathrm{Ext}^i(\mathcal{O}_X[1],E)=\begin{cases}D-\frac{R}{H^3} & \textit{if } i=1\\ 0 & \textit{otherwise.}\end{cases}$$

证明。像命题 6.3 中那样简单验证斜率，可得对所有 $\alpha^2<2$，$\mathcal{O}_X(2)\in\mathcal{A}^{0,\alpha}$。此外，对于每个满足 $\alpha^2<2$ 的 (α,s)-切片中的稳定性条件，$\mathcal{O}_X(2)$ 都是稳定的。

现在，注意到

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^i(\mathcal{O}_X[1],E)&\cong\mathrm{Ext}^{3-i}(E,\mathcal{O}_X(-2)[1])^*\\&=\mathrm{Ext}^{4-i}(\mathcal{O}_X(2),E^\vee)^*\\&=\mathrm{Ext}^{2-i}(\mathcal{O}_X(2),E^D)^*.\end{aligned}$$

由于 E^D 再次是一个稳定的 $\mathcal{C}$-瞬子对象，并且 $\lambda_{0,\,\alpha,\,s}(\mathcal{O}_X(2))>0$ 位于区域$\mathcal{U}$上，因此

$$\mathrm{Ext}^i(\mathcal{O}_X[1],E)=0\ \ \text{for}\ \ i\geq 2.$$

同样，$\mathrm{Ext}^i(\mathcal{O}_X[1],\ E)=0$ 对于 $i\leq 0$，因为 $\mathcal{O}_X[1]$ 在该 $(\alpha,\ s)$-切片中的每个稳定性条件下都是稳定的，并且 $\lambda_{0,\,\alpha,\,s}(\mathcal{O}_X[1])=\lambda_{0,\,\alpha,\,s}(E)=0$。因此

$$\dim\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_X[1],E)=\chi(E)=D-\frac{R}{H^3}.$$

□

命题 6.17。设 E 是一个稳定的 $\mathcal{C}$-瞬子对象，则存在一个 $\mathcal{C}$-˜瞬子对象 E，使其适合于一个正合列

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow \tilde{E} \longrightarrow \mathcal{O}_X^{\oplus D-\frac{R}{H^3}}[1] \longrightarrow 0,$$

˜并满足 $\mathrm{Hom}^\bullet(\mathcal{O}_X[1], E) = 0$。

证明。由于根据引理 6.16，$\mathrm{Hom}^\bullet(\mathcal{O}_X[1], E) \otimes \mathcal{O}_X[1] = \mathcal{O}_X^{\oplus D-\frac{R}{H^3}}$，因此 $\tilde{E}$就是求值映射的锥

$$\mathrm{Hom}^\bullet(\mathcal{O}_X[1], E) \otimes \mathcal{O}_X[1] \to E.$$

˜ E 的半稳定性可由以下事实推出：

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow \tilde{E} \longrightarrow \mathcal{O}_X^{\oplus D-\frac{R}{H^3}}[1] \longrightarrow 0 \tag{24}$$

只要 $E \in \mathcal{A}^{0,\alpha}$，它就是 $\mathcal{A}^{0,\alpha}$ 中的一个短正合列，并且

$$\lambda_{0,\alpha,s}(E) = \lambda_{0,\alpha,s}(\mathcal{O}_X[1]) = 0.$$

˜将此函子作用于短正合列 (24)，即可推出 $\mathrm{Hom}^\bullet(\mathcal{O}_X[1], E)$ 的消失。□

例 6.18. 假设 $H^3 > 1$，且令 $\ell \subset X$ 为一条直线。那么 $\mathcal{O}_\ell$ 是一个秩零瞬子层，同时也是一个 $\mathcal{C}$-瞬子。事实上，$\mathcal{O}_\ell$ 是一个 Gieseker 稳定层，因此对于所有 $\alpha \gg 0$，它都是 $\lambda_{0、\alpha、s}$-半稳定的（见 [JMM22，命题 5.3]）；若 $\mathcal{O}_\ell$ 在（α、s）-切片中不稳定，则必定存在一个子对象$A \hookrightarrow \mathcal{O}_\ell$使其成为不稳定对象，其中 v_0（A）=（r、c、d、e），且满足

$$2d = 1, \text{ and } \ 0 < c(6e) \leq 1,$$

这是不可能的，因为 $H^3 > 1$。$\mathcal{O}_\ell$ 的无上同调扩张恰好是 $\mathcal{I}_\ell[1]$，它是一个严格半稳定的 $\mathcal{C}$-瞬子（见例 6.10）。请注意，与秩 2 瞬子丛的情形不同（其无上同调扩张是层），同时也是稳定 $\mathcal{C}$-瞬子的秩零瞬子层的无上同调扩张必定是一个复形。

References

[AC23] V. Antonelli 和 G. Casnati, *Instanton sheaves on projective schemes*, 《纯粹与应用代数杂志》**227**(4), 107246 (2023年)。[ACG21a] V. Antonelli、G. Casnati 和 O. Genc, *Even and odd instanton bundles on Fanothreefolds*, arXiv 电子预印本，arXiv:2105.00632（2021年5月），2105.00632。[ACG21b] V. Antonelli、G. Casnati 和 O. Genc, *Instanton bundles on* $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{F}_1$, 《代数通讯》**49**(8), 3594–3613 (2021年)。[AHDM78] M. Atiyah、N. Hitchin、V. Drinfeld 和 Y. Manin, *Construction of instantons*, 《物理快报 A》**65**(3), 185–187 (1978年)。

[AHMPL19] M. Aprodu、S. Huh、F. Malaspina 和 J. Pons-Llopis, *Ulrich bundles on smooth projective varieties of minimal degree*, 《美国数学会会刊》（2019年）。[AM20a] V. Antonelli 和 F. Malaspina, *Instanton bundles on the Segre threefold with Picardnumber three*, 《数学消息》293(6), 1026–1043 (2020年)。[AM20b] V. Antonelli 和 F. Malaspina, *Instanton bundles on the Segre threefold with Picardnumber three*, 《数学消息》293(6), 1026–1043 (2020年)。[AO94] V. Ancona 和 G. Ottaviani, *Stability of special instanton bundles on* $\mathbb{P}^{2n+1}$, 《美国数学会汇刊》341, 677–693 (1994年)。[AS89] E. Arrondo 和 I. Sols, *Classification of smooth congruences of low degree*, J. Reine Angew. Math. 393, 199–219 (1989年)。[Ati78] F. Atiyah, *Geometry of Yang-Mills fields*, 第 216–221 页，Springer Berlin Heidelberg，德国海德堡，1978年。[AW77] M. F. Atiyah 和 R. S. Ward, *Instantons and algebraic geometry*, 《数学物理通讯》55(2), 117–124 (1977年)。[BH78] W. Barth 和 K. Hulek, *Monads and moduli of vector bundles*, 《数学手稿》25(4), 323–347 (1978年)。[CCGM21] G. Casnati、E. Coskun、O. Genc 和 F. Malaspina, *Instanton Bundles on the Blowupof the Projective 3-Space at a Point*, 《密歇根数学杂志》70(4), 807–836 (2021年)。[CJ22] G. Comaschi 和 M. Jardim, *Instanton sheaves on Fano threefolds*，arXiv 电子预印本，arXiv:2208.03210（2022年8月），2208.03210。[CMR09] L. Costa 和 R. M. Mir´o-Roig, *Monads and instanton bundles on smooth hyper-quadrics*, 《数学消息》282(2), 169–179 (2009年)。[CS88] M. M. Capria 和 S. M. Salamon, *Yang-Mills fields on quaternionic spaces*, 《非线性》1(4), 517–530 (1988年)。[Don84] S. K. Donaldson, *Instantons and geometric invariant theory*, 《数学物理通讯》93(4), 453–460 (1984年)。[Don85] S. K. Donaldson, 《旗流形上的向量丛与 Ward对应》，载于 *Geometry today (Rome, 1984)*，第 60 卷， *Progr. Math.*，第 109–119 页，Birkhäuser Boston，波士顿，马萨诸塞州，1985年。[ESW03] D. Eisenbud、F.-O. Schreyer 和 J. Weyman, *Resultants and Chow Forms via Exte-rior Syzygies*, 《美国数学学会杂志》16(3), 537–579 (2003年)。[Fae14] D. Faenzi, *Even and odd instanton bundles on Fano threefolds of Picard number one*, 《数学手稿》144(1), 199–239 (2014年)。[Har78] R. Hartshorne, *Stable vector bundles and instantons*, 《数学物理通讯》59(1), 1–15 (1978年)。[HJM15] A. A. Henni、M. Jardim 和 R. V. Martins, *ADHM construction of perverse instantonsheaves*, 《格拉斯哥数学杂志》57(2), 285–321 (2015年)。[HL11] M. Hauzer 和 A. Langer, *Moduli spaces of framed perverse instantons on* $\mathbb{P}^3$, 《格拉斯哥数学杂志》53(1), 51–96 (2011年)。

[Jar06] M. Jardim, *Instanton sheaves on complex projective spaces*, 《Collectanea Mathematica》57，69–91（2006）。[JM10] M. Jardim 和 R. V. Martins, *Linear and Steiner Bundles on Projective Varieties*, 《Communications in Algebra》38(6), 2249–2270（2010）。[JMM22] M. Jardim、A. Maciocia 和 C. Martinez, *Vertical Asymptotics forBridgeland Stability Conditions on 3-Folds*, 《International Mathematics Research Notices》（2022年8月）, h t t p s://academic.oup.com/imrn/advance-article-pdf/doi/10.1093/imrn/rnac236/45630479/rnac236.pdf, rnac236。[JMT17] M. Jardim、M. Maican 和 A. S. Tikhomirov, *Moduli spaces of rank 2 instanton sheaves on the projective space*, 《Pacific J. Math.》291，399–424（2017），1702.06553。[JP15] M. Jardim 和 D. M. Prata, *Vector bundles on projective varieties and representa-tions of quivers*, 《Algebra Discrete Math.》20(2)，217–249（2015）。[JS20] M. Jardim 和 D. D. Silva, *Instanton sheaves and representations of quivers*, 《Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society》63(4)，984–1004（2020）。[Kuz12] A. Kuznetsov, *Instanton bundles on Fano threefolds*, 《Open Mathematics》10(4)，1198–1231（2012）。[Li19] C. Li, *Stability conditions on fano threefolds of picard number 1*, 《JEMS》21(3)，709–726（2019）。[MMPL20] F. Malaspina、S. Marchesi 和 J. Pons-Llopis, *Instanton bundles on the flag varietyF(0,1,2)*, 《Annali Scuola Normale Superiore - Classe Di Scienze》（2020）。[OS86] C. Okonek 和 H. Spindler, *Mathematical instanton bundles on*$\mathbb{P}^{2n+1}$, 《J. Reine Angew. Math.》364，35–50（1986）。[OSS11] C. Okonek、M. Schneider 和 H. Spindler, *Vector bundles on complex projectivespaces*, 《Modern Birkhäuser Classics》, Birkhäuser/Springer Basel AG，巴塞尔，2011年，1988年版的修订重印本，附有 S. I. Gelfand 撰写的附录。[Ott90] G. Ottaviani, *On Cayley bundles on the five-dimensional quadric*, 《Boll. Un. Mat. Ital. A (7)》4(1)，87–100（1990）。[Sal84] S. M. Salamon, 《四元数结构与扭量空间》，载于 *Global Riemanniangeometry (Durham, 1983)*，Ellis Horwood Ser. Math. Appl.，第65–74页，Horwood，奇切斯特，1984年。[WW90] R. S. Ward 和 R. O. Wells, Jr., *Twistor geometry and field theory*，Cambridge Monographs on Mathematical Physics，剑桥大学出版社，剑桥，1990年。

IMECC - UNICAMP, Departamento de Matemática,
Rua Sérgio Buarque de Holanda, 651, 13083-970 Campinas-SP, Brazil*Email address*:
gaia.comaschi@gmail.comIMECC - UNICAMP, Departamento de Matemática,
Rua Sérgio Buarque de Holanda, 651, 13083-970 Campinas-SP, Brazil*Email address*:
jardim@ime.unicamp.brSchool of Engineering, Science and Technology,
Universidad del Rosario, Carrera6 No. 12C-16, 111711, Bogotá, Colombia*Email address*:
cristianm.martinez@urosario.edu.coIMECC - UNICAMP, Departamento de Matemática,
Rua Sérgio Buarque de Holanda, 651, 13083-970 Campinas-SP, Brazil*Email address*:
dapeng@unicamp.br