arXiv:2302.00784v1 [math.GT] 1 Feb 2023

环形 Khovanov 同调上的 AN L_∞-模结构

CHAMP DAVIS

Abstract. 设 L 是加厚环带中的一个链环。在 [7], 中，Grigsby-Licata-Wehrli 证明环形 Khovanov 同调 of L 带有 $\mathfrak{sl}_2(\wedge)$ 的作用，其中 $\mathfrak{sl}_2$是李代数的外代数流代数。本文将这一结果推广到 L_∞-代数和模的情形。也就是说，我们证明 $\mathfrak{sl}_2(\wedge)$ 是一个 L_∞-代数，且 L 的环形 Khovanov 同调是 L_∞-模，定义在 $\mathfrak{sl}_2(\wedge)$ 上。在L_∞-拟同构意义下，这一结构在 Reidemeister 变换下保持不变。最后，我们给出计算高阶 L_∞-运算的显式公式。

1. Introduction

在 [8], 中，Khovanov 为定向链环定义了一个双分次同调群，它是 Jones 多项式的范畴化。此后，对于紧致定向曲面 Σ，Asaeda、Przytycki 和 Sikora 引入了 Khovanov 同调的一种推广，用于研究 $\Sigma \times [0,1]$ 中的链环，并将 Σ的 Kauffman skein 模范畴化；参见 [3]。当 Σ是环带时，这一理论称为环形 Khovanov 同调，此后受到广泛关注。例如，研究者利用环形 Khovanov 同调与各种 Floer 理论之间的关系，取得了多项检测结果。在 [15], 中，Xie-Zhang 利用瞬子 Floer 同调证明，环形 Khovanov 同调能够检测平凡链环和平凡辫子的闭包。他们还证明，它能够区分辫子闭包与其他链环。最近，Binns-Martin 证明结 Floer 同调能够检测多种环面链环，并据此证明环形 Khovanov 同调能够检测某些辫子闭包；参见 [5]。

环形 Khovanov 同调的一个关键特征是，它具有普通 Khovanov 同调所不具备的额外结构。在 [7], Grigsby-Licata-Wehrli 证明，链环的环形 Khovanov 同调既是一个 $\mathfrak{sl}_2$-表示，也是一个 $\mathfrak{sl}_2(\wedge)$-表示，其中 $\mathfrak{sl}_2(\wedge)$ 是一个与 $\mathfrak{sl}_2$ 相关的 Z-分次李超代数。这种结构已在多个背景下得到研究。一方面，Quefflec-Rose 将其推广，证明环形 Khovanov-Rozansky 同调带有一个 $\mathfrak{sl}_n$-作用；见 [11]。另一方面，Akhmechet-Krushkal-Willis 在将 $\mathfrak{sl}_2$-作用提升到环形 Khovanov 同调的稳定同伦精化方面取得了进展；见 [1]。

在证明环带 Khovanov 复形 CKh(L) 上存在 $\mathfrak{sl}_2$-表示结构时，Grigsby-Licata-Wehrli 证明了 CKh(L) 的边界映射与 $\mathfrak{sl}_2$-作用可交换，这表明 $\mathfrak{sl}_2$-作用在链级成立。相比之下，$\mathfrak{sl}_2(\wedge)$-作用在环形 Khovanov 同调 AKh(L) 上定义良好，但在链级上仅在同伦意义下成立。这一观察表明 AKh(L) 可能存在 L_∞-模结构。本文将 $\mathfrak{sl}_2(\wedge)$ 展示为一个 L_∞-代数，并将$\mathfrak{sl}_2(\wedge)$-表示结构提升为 L_∞-模结构。该模结构在链级和同调上都是环带链环的不变量。具体而言，我们将证明以下定理。

定理 1.1. 设 $L \subset A \times I$ 是一个环带链环。在 $CKh(L;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 和 $\mathrm{AKh}(L;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 上都存在一个关于 L_∞-代数 $\mathfrak{sl}_2(\wedge)$的 L_∞-模结构。除去 L_∞-拟同构，这一模结构仅取决于 $A \times I$ 中 L 的同痕类。

本文的组织结构如下。在第 2 节中，我们回顾 $\mathfrak{sl}_2$、$\mathfrak{sl}_2$（$\wedge$）和 $\mathfrak{sl}_2$（$\wedge$）^{dg} 的定义，并综述 Grigsby-Licata-Wehrli 得出的一些关键结果。在第 3 节中，我们将更详细地介绍环形 Khovanov 同调的背景。在第 4 节中，我们介绍有关 L_∞-代数和模的相关背景信息。在第 5 节中，我们解释 $\mathfrak{sl}_2$（$\wedge$）^{dg} 和 $\mathfrak{sl}_2$（$\wedge$）为何是 L_∞-代数。在第 6 节和第 7 节中，我们解释 CKh（L）和 AKh（L）为何是 L_∞-模。在第 8 节中，我们证明这些结构在 Reidemeister 变换下的不变性。在第 9 节中，我们给出一些例子，说明该结构并非平凡。

注。 定理 1.1 的证明依赖于若干关于 L_∞-模的结果。特别是，定理 4.11、引理 4.12 和定理 4.13 的证明是在 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 上给出的。我们预期这些结果在带符号的情形下仍然成立，但在各自的证明中追踪符号十分繁琐，且超出了本文的范围。除这三个证明之外，我们将在适当之处保留符号。忽略符号会影响 $\mathfrak{sl}_2$、$\mathfrak{sl}_2$（$\wedge$）以及 $\mathfrak{sl}_2$（$\wedge$）^{dg} 中的括号关系；参见第 2 节。缺少符号也会影响 CKh（L）上的 $\mathfrak{sl}_2$（$\wedge$） L_∞-模结构中涉及的高阶运算；参见定理 6.1。

1.1. **致谢**。 作者谨向导师 Robert Lipshitz 致谢，感谢他的指导以及许多富有帮助的交流。

2. The Lie algebras $\mathfrak{sl}_2, \mathfrak{sl}_2(\wedge)$, and $\mathfrak{sl}_2(\wedge)_{dg}$

本节回顾我们关注的李代数。首先，我们回顾 $\mathfrak{sl}_2$ 的定义。接着，我们定义李超代数 $\mathfrak{sl}_2(\wedge)$，它将是我们主要研究的 L_∞-代数。最后，我们定义辅助李超代数 $\mathfrak{sl}_2(\wedge)_{dg}$，它与 $\mathfrak{sl}_2(\wedge)$ 密切相关，并将帮助我们证明若干关键结果。

2.1. **李代数** $\mathfrak{sl}_2$。 为统一记号，我们将李代数 $\mathfrak{sl}_2$ 的标准基记为 $\{e, f, h\}$。在 $\mathbb{Z}$ 上，李括号关系如下：

$$[e, f] = h,\ [e, h] = -2e,\ [f, h] = 2f.$$

2.2. **李超代数** $\mathfrak{sl}_2(\wedge)$。 在 [7], 中，Grigsby-Licata-Wehrli 引入了一个更大的李代数 $\mathfrak{sl}_2(\wedge)$，其中包含 $\mathfrak{sl}_2$ 作为子代数。事实上，$\mathfrak{sl}_2(\wedge)$ 具有 $\mathbb{Z}$-分次李超代数的结构。

定义 2.1。 A **李超代数** $\mathfrak{g}$ 是一个 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-分次向量空间 $\mathfrak{g}_{\text{even}} \oplus \mathfrak{g}_{\text{odd}}$，配备双线性映射 $[\cdot,\cdot]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$，称为超李括号，并满足以下条件：

（超反对称性）$[x, y] = -(-1)^{|x||y|}[y, x]$

(Super Jacobi identity) $(-1)^{|x||y|}[x,[y,z]] + (-1)^{|y||x|}[y,[z,x]] + (-1)^{|z||y|}[z,[x,y]] = 0$

这里，x，y 和 z 是关于 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-分次的齐次元素。记号 $|x|$ 表示 x的次数，而 $[x, y]$ 的次数必须等于 x 和 y的次数之和模 2。这些条件应视为通常李代数公理的类比，只不过需要考虑分次。

现在我们按照 [7]中的表述，通过生成元与关系来描述外代数流代数 $\mathfrak{sl}_2(\wedge)$。作为向量空间，

$$\mathfrak{sl}_2(\wedge) \cong \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2,$$

其中，关于 Z-分次和 Z/2Z-分次，第一项在 0 次，第二项在 1 次。李超代数结构所需的 Z/2 Z-分次是 Z-分次模 2 的约化。将第一项的标准基记为 $\{e, f, h\}$，将 1 次项的标准基记为 $\{v_2, v_{-2}, v_0\}$，李超代数 $\mathfrak{sl}_2(\wedge)$ 的括号关系为

$$\begin{array}{lll} [e,f]=h & [h,e]=2e & [f,v_0]=2v_{-2} \\ [e,v_2]=0 & [h,f]=-2f & [f,v_{-2}]=0 \\ [e,v_0]=-2v_2 & [h,v_0]=0 & [h,v_2]=2v_2 \\ [e,v_{-2}]=v_0=-[f,v_2] & [h,v_{-2}]=-2v_{-2} & [v_i,v_j]=0 \text{ for } i,j\in\{2,0,-2\}. \end{array}$$

2.3. **李超代数** $\mathfrak{sl}_2(\wedge)^{dg}$。按照 [7], 的描述，我们介绍 Z-分次李超代数 $\mathfrak{sl}_2(\wedge)^{dg}$。作为 Z-分次超向量空间，0 次生成元为 $\{e, f, h\}$，1 次生成元为 $\{v_2, v_{-2}, d, D\}$。定义括号关系为

$$\begin{array}{lll} [e,f]=h & [e,v_{-2}]=-[f,v_2]; & [d,y]=0 \text{ for all } y\in\{e,f,h,v_2,v_{-2}\}; \\ [h,e]=2e; & [f,v_{-2}]=0; & [D,y]=0 \text{ for all } y\in\{e,f,h,v_2,v_{-2}\}; \\ [h,f]=-2f; & [h,v_2]=2v_2; & [d,d]=[D,D]=[v_2,v_2]=[v_{-2},v_{-2}]=0. \\ [e,v_2]=0; & [h,v_{-2}]=-2v_{-2}; & [v_2,v_{-2}]+[d,D]=0. \end{array}$$

通过以下两个引理， $\mathfrak{sl}_2(\wedge)^{dg}$ 的结构变得更加清晰。第一个引理给出了 $\mathfrak{sl}_2(\wedge)^{dg}$的一组基，第二个引理则通过将 $\mathfrak{sl}_2(\wedge)^{dg}$ 视为一个微分由 d的伴随作用给出的链复形，说明 $\mathfrak{sl}_2(\wedge)$ 是 $\mathfrak{sl}_2(\wedge)^{dg}$ 的同调的一个直和项。这两个引理都在 [7]中得到证明。

引理 2.2 ([7]；引理 6)。设 $\tilde{v_0} = [e, v_{-2}] = -[f, v_2]$，且 $x = [v_2, v_{-2}] = -[d, D] = \frac{1}{2}[\tilde{v_0}, \tilde{v_0}]$。那么集合 $\{e, f, h, v_2, v_{-2}, \tilde{v_0}, d, D, x\}$ 构成 $\mathfrak{sl}_2(\wedge)^{dg}$的一组基。

引理 2.3 ([7]; 引理 7). 链复形 $(\mathfrak{sl}_2(\wedge)^{dg}, [d, \cdot])$ 的同调同构于 $\mathfrak{sl}_2(\wedge)$ 与平凡李超代数的直和。也就是说， $H(\mathfrak{sl}_2(\wedge)^{dg}, [d, \cdot]) \cong \mathfrak{sl}_2(\wedge) \oplus \mathbb{Z}$。

3. Annular Khovanov homology

本节回顾环形 Khovanov 同调的构造，并介绍其某些结构。其他讲解参见 [12], [14], 和 [7]。首先，设 $L \subset A \times I$是加厚环带中的一个链环。通过考虑投影 $A \times I \to A \times \{0\}$, 链环 L 可得到图 $P(L) \subset A$，该图可视为位于$S^2 - \{X,O\}$之中，其中 X 是代表 A内边界的一个基点，O 是代表 A外边界的一个基点；参见图 1。

如果忽略基点 X，我们可以构造普通的 Khovanov 复形 CKh($P(L)$)。CKh($P(L)$) 由定向的 Kauffman 状态生成，其中的圆分别标记为 v_+或 v_-。CKh($P(L)$) 也是双分次的，其中 $\mathrm{CKh}^{i,\ j}(P(L))$ 中的一个元素被称为具有同调分次 i 和量子分次 j。这些分次的公式见 [16]和 [12]。

加入基点 X 后，CKh($P(L)$) 便具有第三分次 k，称为k分次或绕数分次。对于一个固定的生成元，其相应的 Kauffman 状态是一组定向圆圈，而 k分次定义为这组圆圈与一条从 X 到 O、且避开 $P(L)$ 所有交叉的定向弧之间的代数

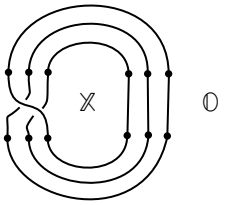


FIGURE 1. 环带链环的一幅图 $P(L) \subset S^2 - \{\text{X、O}\}$，其中 X 和 O 分别表示环带的内边界和外边界。

交数。计算 k分次的另一种方法是，统计正标记的非平凡圆的数量，再减去负标记的非平凡圆的数量；非平凡圆是指将 X 与 O 分隔开的圆。在 [12], 中证明了，Khovanov 微分 ∂ 不会增加 k分次，因此在 CKh($P(L)$) 上得到一个滤过。环形 Khovanov 同调 AKh($P(L)$) 是相伴分次对象的同调。换言之，我们可以将 Khovanov 微分分解为$\partial = \partial_0 + \partial_-$，其中 ∂_0 和 ∂_- 分别是 ∂中保持 k和降低 k的部分。AKh($P(L)$) 是三重分次链复形 (CKh($P(L)$) ∂_0) 的同调。此外，在同构意义下，环形 Khovanov 同调不依赖于表示 L的图 $P(L)$，因此记作 AKh(L) 是合理的。

了解环带 Khovanov 复形的微分 ∂_0 与通常的 Khovanov 微分 ∂有何不同颇有启发。为此，我们需要考察生成元的 k-分次在合并映射和分裂映射作用下如何变化。用 T 表示平凡圆、用 N 表示非平凡圆，共有三种情形：TT $\leftrightarrow$ T、NT $\leftrightarrow$ N 和 NN $\leftrightarrow$ T；见图 2。

微分 ∂_0 的公式取决于所涉及圆的类型，下面列出各情形的具体公式。回想一下，平凡圆标记为 w_+或 w_-，非平凡圆标记为 v_+ 或 v_-。

(1) 两个平凡圆合并为一个平凡圆，或一个平凡圆分裂为两个平凡圆时：

合并	分裂
$\mathbf{W}_+ \otimes \mathbf{W}_+ \mapsto \mathbf{W}+$	$\mathbf{W}_+ \mapsto \mathbf{W}_+ \otimes \mathbf{W}_- + \mathbf{W}_- \otimes \mathbf{W}+$
$\mathbf{W}_+ \otimes \mathbf{W}_- \mapsto \mathbf{W}_-$	$\mathbf{W}_- \mapsto \mathbf{W}_- \otimes \mathbf{W}_-$
$\mathbf{W}_- \otimes \mathbf{W}_+ \mapsto \mathbf{W}_-$	
$\mathbf{W}_- \otimes \mathbf{W}_- \mapsto 0$	

(2) 当一个平凡圆与一个非平凡圆合并成一个非平凡圆，或一个非平凡圆分裂成一个平凡圆和一个非平凡圆时：

合并	分裂
$\mathbf{W}_+ \otimes \mathbf{V}_+ \mapsto \mathbf{V}_+$	$\mathbf{V}_+ \mapsto \mathbf{W}_- \otimes \mathbf{V}+$
$\mathbf{W}_+ \otimes \mathbf{V}_- \mapsto \mathbf{V}_-$	$\mathbf{V}_- \mapsto \mathbf{W}_- \otimes \mathbf{V}_-$
$\mathbf{W}_- \otimes \mathbf{V}_+ \mapsto 0$	
$\mathbf{W}_- \otimes \mathbf{V}_- \mapsto 0$	

(3) 当两个非平凡圆合并成一个平凡圆，或一个平凡圆分裂成两个非平凡圆时：

Merge

$$\mathbf{v}_+ \otimes \mathbf{v}_+ \mapsto 0$$
$$\mathbf{v}_+ \otimes \mathbf{v}_- \mapsto \mathbf{w}_-$$
$$\mathbf{v}_- \otimes \mathbf{v}_+ \mapsto \mathbf{w}_-$$
$$\mathbf{v}_- \otimes \mathbf{v}_- \mapsto 0$$

分裂

$$\mathbf{W}_+ \mapsto \mathbf{v}_+ \otimes \mathbf{v}_- + \mathbf{v}_- \otimes \mathbf{v}+$$
$$\mathbf{w}_- \mapsto 0$$

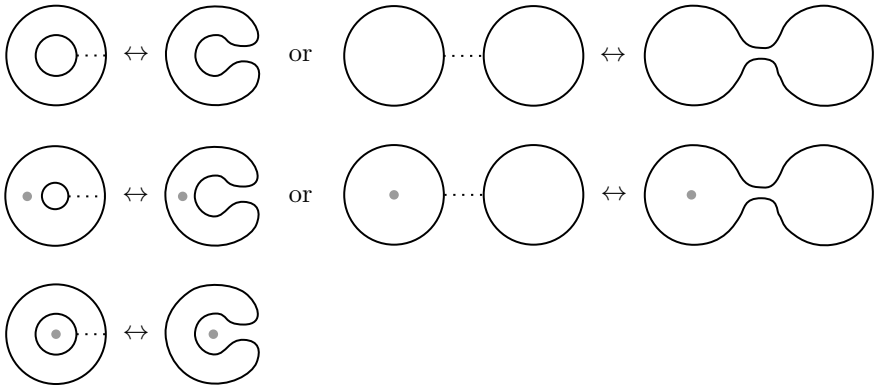


FIGURE 2. 沿交叉（以虚线表示）进行的合并与分裂操作与基点相互作用的各种方式。顶部展示了两个平凡圆合并为一个平凡圆的情况（或一个平凡圆分裂为两个平凡圆）。中部展示了一个平凡圆与一个非平凡圆合并为一个非平凡圆的情况（或一个非平凡圆分裂为一个平凡圆和一个非平凡圆）。底部展示了非平凡圆合并为一个平凡圆的情况（或一个平凡圆分裂为两个非平凡圆）。

本节最后，我们简要介绍 AKh(L) 上的 $\mathfrak{sl}_2$ 表示结构，详细内容请参阅 [7] 。固定 P(L) 的一个分辨。相对于基 $\{v_+, v_-\}$，非平凡圆被赋予 $\mathfrak{sl}_2$ 的二维定义表示，其定义为

$$h \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ e \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ f \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

平凡圆赋予二维平凡表示。随后，分辨赋予这些表示的张量积。我们将所有这些表示作直和，从而在 CKh(P(L)) 上得到 $\mathfrak{sl}_2$-表示结构。这个作用下降为同调 AKh(L) 上的作用，Grigsby-Licata-Wehrli 随后将其提升为 $\mathfrak{sl}_2(\wedge)$ 的作用。他们证明，环形边界映射与 $\mathfrak{sl}_2$-作用可交换，这意味着 $\mathfrak{sl}_2$-作用在链级成立。相比之下， $\mathfrak{sl}_2(\wedge)$-作用在 AKh(L) 上定义良好，但在链级上，它仅在同伦 [7] 意义下成立。这一观察促使我们从 L_∞-代数和模的角度来考察这种情形。

4. L_∞-ALGEBRAS AND MODULES

为方便读者，我们回顾一下 L_∞-代数和模理论中的一些基本定义。更多细节可参见 Stasheff 在 [13] 中撰写的综述文章。 [9] 中也对该主题作了很好的概述。若想以更图示化的方式了解本节的定义和结果，请参见 [6]。

4.1. 预备知识。

定义 4.1. 设 $\sigma \in S_n$ 为一个置换。若 X 是一个集合，则 σ 诱导一个映射$\sigma^\bullet\colon X^n \to X^n$，定义为 $\sigma^\bullet(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$。若 X是一个向量空间，则 σ在 n重张量积 $\sigma^\bullet\colon X^{\otimes n} \to X^{\otimes n}$上诱导一个类似定义的映射。

定义 4.2. 设 $i_1, i_2, \dots, i_r$为非负整数，且 $i_1 + i_2 + \cdots + i_r = n$。若置换 $\sigma \in S_n$满足：对于所有 $0 \le l \le r-1$，其在区间 $[i_1 + \cdots + i_l + 1, i_l + \cdots + i_{l+1}]$内整数上的限制保持顺序，则称其为一个（$i_1, i_2, \dots, i_r$）**-非交错置换**。我们将 S_n中所有（$i_1, i_2, \dots, i_r$）-非交错置换组成的集合记为 $S(i_1, \dots, i_r)$。

定义 4.3. 我们用 $S'(i_1, \dots, i_r)$ 表示满足 $i_1 \le i_2 \le \cdots \le i_r$ 且当 $i_l = i_{l+1}$时 $\sigma($ $i_1 + \cdots + i_{l-1} + 1) < \sigma(i_1 + \cdots + i_l + 1)$ 的 $(i_1, i_2, \dots, i_r)$-非交错置换 σ在 S_n中构成的集合。

定义 4.4. 我们用 $S(i_1, \dots, i_r)$ 表示满足 $\overline{\sigma}(1) = 1$ 的 $(i_1, i_2, \dots, i_r)$-非交错置换 σ在$S'(i_1, \dots, i_r)$中构成的集合。

定义 4.5. 设 V 是一个分次向量空间。对于 $\sigma \in S^n$ 和 $v_i \in V$，令 $\epsilon(\sigma) := \epsilon(\sigma, v_1, \dots, v_n)$为 σ 的总 Koszul 符号。计算 $\epsilon(\sigma)$ 时，每当两个次数分别为 x 和 y 的元素交换位置，我们记下一个符号 $(-1)^{xy}$； $\epsilon(\sigma)$ 即为这些符号的乘积。定义 $\chi(\sigma) := \epsilon(\sigma)\operatorname{sgn}(\sigma)$ 为 Koszul 符号与置换 σ 的符号之积。

注。 设 $f\colon A \to B$ 和 $g\colon C \to D$ 是分次代数的分次映射。我们也将遵循 Kozsul 符号约定，在映射 $f \otimes g$的求值中加入一个符号。也就是说，对于元素 $x \otimes y \in A \otimes C$，

$$(f \otimes g)(x \otimes y) = (-1)^{|x||g|} f(x) \otimes g(y).$$

定义 4.6。 设 V 是一个分次向量空间。 V 上的 L_∞**-代数结构** 是一组斜对称多重线性映射 $\{l_k\colon V^{\otimes k} \to V\}$，其次数为 $k-2$。也就是说，每个 l_k 都是斜对称的，即

$$l_k \circ \sigma^\bullet(x_1, x_2, \dots, x_k) = \chi(\sigma) l_k(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

对所有 $\sigma \in S_k$ 和 $x_i \in V$均成立。这些映射还必须满足广义 Jacobi 恒等式：

$$\sum_{i+j=n+1} \sum_{\sigma} \chi(\sigma)(-1)^{i(j-1)} l_j \circ (l_i \otimes \mathrm{Id}) \circ \sigma^\bullet = 0$$

这里， $i \ge 1$、 $j \ge 1$、 $n \ge 1$，内层求和遍历所有 $(i,\ n-i)$-非交错置换。

注。 此定义遵循链复形约定。如果我们的 L_∞-代数是余链复形，则要求每个 l_k 的次数为 $2-k$。以下定义也有类似的余链复形约定。

定义 4.7。 设 (L, l_i) 和 (L', l_i') 是 L_∞-代数。一个从 L 到 L' 的 L_∞**-代数同态**是由一列斜对称多重线性映射 $\{f_n : L^{\otimes n} \to L'\}$ 构成的序列，其次数为 $n-1$，并满足

$$\sum_{j+k=n+1} \sum_{\sigma \in S(k, n-k)} \epsilon_1 \cdot f_j \circ (l_k \otimes \mathrm{Id}) \circ \sigma^\bullet + \sum_{\substack{\tau \in S'(i_1, \dots, i_r) \\ i_1 + \dots + i_r = n}} \epsilon_2 \cdot l_r' \circ (f_{i_1} \otimes \cdots \otimes f_{i_r}) \circ \tau^\bullet = 0$$

where $\epsilon_1 = \chi(\sigma)(-1)^{k(j-1)+1}$ and $\epsilon_2 = \chi(\tau)(-1)^{\frac{r(r-1)}{2}+\sum_{s=1}^{r-1} i_s(t-s)}$.

定义 4.8。 设 (L, l_k) 是一个 L_∞-代数。一个 L_∞**-模**在 L 上的数据由一个分次向量空间 M 以及一列斜对称多重线性映射 $\{k_n\colon L^{\otimes n-1}\otimes M \to M \mid 1 \le n < \infty\}$ 组成，其次数为 $n-2$，并满足:

$$\sum_{\substack{p+q=n+1\\ p<n}} \sum_{\sigma(n)=n} \epsilon_1 \cdot k_q \circ (l_p \otimes \mathrm{Id}) \circ \sigma^\bullet + \sum_{p+q=n+1} \sum_{\sigma(p)=n} \epsilon_2\epsilon_3 \cdot k_q \circ \delta^\bullet \circ (k_p \otimes \mathrm{Id}) \circ \sigma^\bullet = 0$$

其中 $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \chi(\sigma)(-1)^{p(q-1)}$ 且 σ 是 S_n中的一个 p-非交错置换。在 $\sigma(p) = n$的情形下，我们利用了 k_q 的斜对称性，并引入 $\delta^\bullet$，将 k_p 项置换到其余元素之后，以确保 $k_q\colon L^{\otimes q-1}\otimes M \to M$。具体而言，

$$\begin{aligned} k_q\big(\underbrace{k_p(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(p)})}_{\in M}, x_{\sigma(p+1)},\dots,x_{\sigma(n)}\big) &= \epsilon_3 \cdot k_q\Big(\delta^\bullet\big(\underbrace{k_p(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(p)})}_{\in M}, x_{\sigma(p+1)},\dots,x_{\sigma(n)}\big)\Big) \\ &= \epsilon_3 \cdot k_q\big(x_{\sigma(p+1)},\dots,x_{\sigma(n)}, \underbrace{k_p(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(p)})}_{\in M}\big) \end{aligned}$$

其中 $\epsilon_3 = \chi(\delta) = (-1)^{q-1}(-1)^{(p+\sum_{s=1}^{p}|x_{\sigma(s)}|)(\sum_{s=p+1}^{n}|x_{\sigma(s)}|)}$。

定义 4.9。 根据 [2],，设 (L, l_i) 是一个 L_∞-代数，并设 (M, k_i) 和 (M', k_i') 是 L上的L_∞-模。从 M 到 M' 的 L_∞**-模同态** 是一族斜对称多重线性映射 $\{h_n\colon L^{\otimes(n-1)}\otimes M \to M'\}$，其次数为 $n-1$，并满足:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{i+j=n+1\\ i<n}} \sum_{\sigma(n)=n} \epsilon_1 \cdot h_j \circ (l_i \otimes \mathrm{Id}) \circ \sigma^\bullet + \sum_{i+j=n+1} \sum_{\sigma(i)=n} \epsilon_2 \cdot h_j \circ \delta^\bullet \circ (k_i \otimes \mathrm{Id}) \circ \sigma^\bullet \\ + \sum_{r+s=n+1} \sum_{\tau} \epsilon_3 \cdot k_r' \circ (\mathrm{Id} \otimes h_s) \circ (\tau^\bullet \otimes \mathrm{Id}) = 0 \end{aligned}$$

其中 $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \chi(\sigma)(-1)^{i(j-1)+1}$ 和 $\epsilon_3 = \chi(\tau)(-1)^{(s-1)(\sum_{t=1}^{n-s} x_{\tau(t)})}$，$\sigma$ 是 S_n中的 i-非交错置换，而 τ是 S_{n-1}中的 $(n-s)$-非交错置换。与 L_∞-模的定义类似，我们加入置换 δ，以确保模元素位于正确的位置。

4.2. 结构迁移。 可以利用已有的 L_∞-代数或 L_∞-模，在特定链复形上得到新的 L_∞-结构。本文将使用链收缩来迁移 L_∞-结构，同时也会用到标量限制函子。

定义 4.10。 设 (A, d_A) 和 (B, d_B) 是链复形。从A 到 B 的**链收缩** 由两个次数为 0 的链映射 $q\colon A \to B$ 和 $i\colon B \to A$，以及一个次数为 1 的同伦 $K\colon A \to A$ 组成。也就是说，我们有如下图。

$$K \circlearrowright A \underset{i}{\overset{q}{\rightleftarrows}} B$$

这些映射 q, i 和 K 必须满足以下条件:

$$\begin{aligned} &q \circ i = \mathrm{Id}_B \quad \text{and} \quad \mathrm{Id}_A - i \circ q = K \circ d_A + d_A \circ K \\ &K^2 = K \circ i = q \circ K = 0 \end{aligned}$$

我们将链收缩记作 (A, B, i, q, K)。

注。 如果 $(A,\ d_A)$ 和 $(B,\ d_B)$ 是上链复形，我们要求 $|K| = -1$。

如果 L 是一个 L_∞-代数，而 L' 是一个链复形，那么文献中已有公式说明，给定一个链收缩 $(L,\ L',\ i,\ q,\ K)$，如何将 L_∞-代数结构从 L 转移到 L'。根据 [10, 定理 1]，，链映射 i 和 q 也可以扩展为 L_∞-代数同态 $I\colon\ L' \to L$ 和 $Q\colon\ L \to L'$，使得 $Q \circ I = \mathrm{Id}_{L'}$。$L'$ 上转移得到的 L_∞-代数结构在拟同构意义下唯一，而转移括号 $\{l'_k\}$ 的公式可以如下归纳给出。设 $K\theta_1 = -i$，并定义$\theta_n : (L')^{\otimes n} \to L$，其中 $n \geq 2$，方法如下

$$\theta_n(x_1,\dots,x_n) = \sum_{k=2}^{n} \sum_{\substack{\sigma\in\overline{S}(i_1,\dots,i_k)\\ i_1+\cdots+i_k=n\\ i_1\leq\cdots\leq i_k}} \epsilon_1 \cdot l_k(I_{i_1}\otimes\cdots\otimes I_{i_k})\circ\sigma^\bullet(x_1,\dots,x_n)$$

其中 ϵ_1 由 Koszul 符号约定给出。接着，对于所有 $n \geq 2$，我们定义 $l'_n = q \circ \theta_n$和 $I_n = K \circ \theta_n$。

我们还可以利用链收缩来转移一个 L_∞-模结构。在证明 $\mathfrak{sl}_2(\wedge)_{dg}$ L_∞-模结构在 Reidemeister 变换下的不变性时，我们将运用这一技巧。

定理 4.11。设 L 是一个 L_∞-代数，且 M 是 L_∞上的一个 L-模。给定一个链收缩

$$T \circlearrowright M \underset{i}{\overset{q}{\rightleftarrows}} M'$$

then M' 继承了一个 L_∞上的 L-模结构，其转移括号定义为 y

$$k'_n := \sum_{\substack{\tau\in S(i_1,\dots,i_t)\\ i_1+\cdots+i_t=n-1}} q\circ A_t\circ(\tau^\bullet\otimes i)$$

其中 $A_t\colon\ \ L^{\otimes i_1}\otimes\cdots\otimes L^{\otimes i_t}\otimes M \to M$按如下方式归纳定义。设 $A_1 = k_{i_1+1}$并定义 $A_t = A_1\circ\delta_2^\bullet\circ[(T\circ A_{t-1})\otimes\mathrm{Id}]\circ\delta_1^\bullet$，其中 i_1、.....、i_t为正整数；参见图 *3*。

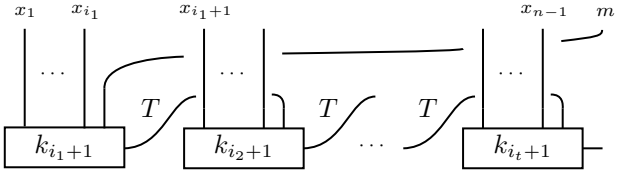


FIGURE 3. 映射 A_t的图示。

注。</style}定义 A_t 中要求使用置换 δ_i，以确保模元素是每个 k_{i_r+1} 的最后一个输入：$L^{\otimes r}\otimes M \to M$。具体而言，$\delta_i$ 是唯一的置换，使得 $\delta_i^\bullet$将模元素移至所需位置，同时保持其他元素的顺序。例如，在图 3 中，δ_1 是该置换

$$\delta_1 = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i_1 & i_1+1 & i_1+2 & \cdots & n \\ 1 & \cdots & i_1 & n & i_1+1 & \cdots & n-1 \end{pmatrix}$$

在定理 4.11 的证明过程中，我们将使用类似的置换 λ_i，以便在保持其余元素顺序不变的同时，正确放置模元素。我们不会明确写出这些置换，但只需查看附录中的图示即可轻松确定它们。

注。 提醒读者，我们在上述定理中忽略了符号，且该结果是在特征为二的域上证明的。

证明。 我们必须证明，上述关于 k'_n 的定义满足 L_∞-模关系　　：

$$\sum_{\substack{p+q=n+1\\p<n}}\sum_{\sigma(n)=n} k'_q\circ(l_p\otimes \mathrm{Id})\circ\sigma^\bullet = \sum_{p+q=n+1}\sum_{\sigma(p)=n} k'_q\circ\lambda^\bullet\circ(k'_p\otimes \mathrm{Id})\circ\sigma^\bullet$$

证明思路如下。首先，使用 k'_n的定义替换 k'_q 和 k'_p 项。接着，对左边含有 l_p 的项应用 k_n 的 L_∞-模关系。之后，利用 $\mathrm{Id}_M - i\circ q = k_1T + Tk_1$ 这一事实替换右边的项。这样，各项便会两两抵消。该证明中公式的图示表示见附录。

步骤 1。 聚焦于 L_∞-模关系的左边，我们可以使用 k'_n 的定义将其替换，从而得到以下求和式。

$$\sum_{\substack{p+q=n+1\\p<n}}\sum_{\sigma(n)=n}\sum_{\substack{\tau\in S(i_1,\dots,i_t)\\ i_1+\cdots+i_t=n-p}} q\circ A_t\circ(\tau^\bullet\otimes i)\circ(l_p\otimes \mathrm{Id})\circ\sigma^\bullet$$

步骤 2。 我们可以将 σ 和 τ 合并为 η 和 ψ。由于 τ 是一个非交错置换， l_p 项将是某个块中的第一个元素，我们将其记为 i_l。定义 $s = p + i_l - 1$，我们得到以下和式。

$$\sum_{p=1}^{n-1}\sum_{\substack{\eta\in S(i_1,\dots,p+i_l-1,\dots,i_t)\\ i_1+\cdots+i_t=n-p\\ 1\le t\le n-p\\ 1\le l\le t}}\sum_{\psi\in S(p,s-p)} q\circ A_t\circ[\mathrm{Id}\otimes((l_p\otimes \mathrm{Id})\circ\psi^\bullet)\otimes \mathrm{Id}]\circ(\eta^\bullet\otimes i)$$

步骤 3. 现在的目标是根据 A_t 的定义展开 A_t 项，以便应用 L_∞-模关系。由于 A_t 只有在 $t \ge 1$时才有意义，我们将求和拆分为几种情况。第一种情况是， l_p 项位于第一个方框中。第二种情况是， l_p 项位于中间某处，此时至少需要三个方框。第三种情况是， l_p 项位于最后一个方框中。还需注意，只有在$p = n - 1$时才可能只有一个方框。于是得到以下求和。

$$\begin{aligned}
&\sum_{p=1}^{n-2}\sum_{\substack{\eta\in S(p+i_1-1,i_2,\dots,i_t)\\ i_1+\cdots+i_t=n-p\\ 2\le t\le n-p\\ l=1}}\sum_{\psi\in S(p,s-p)} q\circ A_{t-1}\circ\lambda_3^\bullet\circ(T\otimes \mathrm{Id})\circ\left[[k_{i_l+1}\circ(l_p\otimes \mathrm{Id})\circ\psi^\bullet]\otimes \mathrm{Id}\right]\\
&\qquad\qquad\circ\lambda_1^\bullet\circ(\eta^\bullet\otimes i)\\
&+\sum_{p=1}^{n-3}\sum_{\substack{\eta\in S(i_1,\dots,p+i_l-1,\dots,i_t)\\ i_1+\cdots+i_t=n-p\\ 3\le t\le n-p\\ 2\le l\le t-1}}\sum_{\psi\in S(p,s-p)} q\circ A_{t-l}\circ\lambda_3^\bullet\circ(T\otimes \mathrm{Id})\circ\left[[k_{i_l+1}\circ(l_p\otimes \mathrm{Id})\circ\psi^\bullet]\otimes \mathrm{Id}\right]\\
&\qquad\qquad\circ\lambda_2^\bullet\circ[(T\circ A_{l-1})\otimes \mathrm{Id}]\circ\lambda_1^\bullet\circ(\eta^\bullet\otimes i)
\end{aligned}$$

$$+\sum_{p=1}^{n-2}\sum_{\substack{\eta\in S(i_1,\dots,i_{t-1},p+i_t-1)\\ i_1+\cdots+i_t=n-p\\ 2\le t\le n-p\\ l=t}}\sum_{\psi\in S(p,s-p)} q\circ\Big[[k_{i_l+1}\circ(l_p\otimes\mathrm{Id})\circ\psi^\bullet]\otimes\mathrm{Id}\Big]\circ\lambda_2^\bullet\circ[(T\circ A_{t-1})\otimes\mathrm{Id}]$$
$$\circ\lambda_1^\bullet\circ(\eta^\bullet\otimes i)$$
$$+\sum_{s=n-1}\sum_{p=1}^{s}\sum_{\psi\in S(p,s-p)} q\circ\Big[[k_{i_l+1}\circ(l_p\otimes\mathrm{Id})\circ\psi^\bullet]\otimes\mathrm{Id}\Big]\circ(\mathrm{Id}\otimes i)$$

现在我们按 $s=p+i_l-1$的大小重新编排求和指标。

$$\sum_{s=1}^{n-2}\sum_{p=1}^{s}\sum_{\substack{\eta\in S(s,i_2,\dots,i_t)\\ i_1+\cdots+i_t=n-p\\ 2\le t\le n-p\\ l=1}}\sum_{\psi\in S(p,s-p)} q\circ A_{t-1}\circ\lambda_3^\bullet\circ(T\otimes\mathrm{Id})\circ\Big[[k_{i_l+1}\circ(l_p\otimes\mathrm{Id})\circ\psi^\bullet]\otimes\mathrm{Id}\Big]$$
$$\circ\lambda_1^\bullet\circ(\eta^\bullet\otimes i)$$
$$+\sum_{s=1}^{n-3}\sum_{p=1}^{s}\sum_{\substack{\eta\in S(i_1,\dots,s,\dots,i_t)\\ i_1+\cdots+i_t=n-p\\ 3\le t\le n-p\\ 2\le l\le t-1}}\sum_{\psi\in S(p,s-p)} q\circ A_{t-l}\circ\lambda_3^\bullet\circ(T\otimes\mathrm{Id})\circ\Big[[k_{i_l+1}\circ(l_p\otimes\mathrm{Id})\circ\psi^\bullet]\otimes\mathrm{Id}\Big]$$
$$\circ\lambda_2^\bullet\circ[(T\circ A_{l-1})\otimes\mathrm{Id}]\circ\lambda_1^\bullet\circ(\eta^\bullet\otimes i)$$
$$+\sum_{s=1}^{n-2}\sum_{p=1}^{s}\sum_{\substack{\eta\in S(i_1,\dots,i_{t-1},s)\\ i_1+\cdots+i_t=n-p\\ 2\le t\le n-p\\ l=t}}\sum_{\psi\in S(p,s-p)} q\circ\Big[[k_{i_l+1}\circ(l_p\otimes\mathrm{Id})\circ\psi^\bullet]\otimes\mathrm{Id}\Big]$$
$$\circ\lambda_2^\bullet\circ[(T\circ A_{t-1})\otimes\mathrm{Id}]\circ\lambda_1^\bullet\circ(\eta^\bullet\otimes i)$$
$$+\sum_{s=n-1}\sum_{p=1}^{s}\sum_{\psi\in S(p,s-p)} q\circ\Big[[k_{i_l+1}\circ(l_p\otimes\mathrm{Id})\circ\psi^\bullet]\otimes\mathrm{Id}\Big]\circ(\mathrm{Id}\otimes i)$$

现在我们可以应用 L_∞-模关系。

$$\sum_{s=1}^{n-2}\sum_{p=1}^{s+1}\sum_{\substack{\eta\in S(s,i_2,\dots,i_t)\\ i_1+\cdots+i_t=n-p\\ 2\le t\le n-p\\ l=1}}\sum_{\psi\in S(p-1,s-p+1)} q\circ A_{t-l}\circ\lambda_3^\bullet\circ(T\otimes\mathrm{Id})\circ\Big[[k_{s-p+2}\circ(k_p\otimes\mathrm{Id})\circ\psi^\bullet]\otimes\mathrm{Id}\Big]$$
$$\circ\lambda_1^\bullet\circ(\eta^\bullet\otimes i)$$
$$+\sum_{s=1}^{n-3}\sum_{p=1}^{s+1}\sum_{\substack{\eta\in S(i_1,\dots,s,\dots,i_t)\\ i_1+\cdots+i_t=n-p\\ 3\le t\le n-p\\ 2\le l\le t-1}}\sum_{\psi\in S(p-1,s-p+1)} q\circ A_{t-l}\circ\lambda_3^\bullet\circ(T\otimes\mathrm{Id})\circ\Big[[k_{s-p+2}\circ(k_p\otimes\mathrm{Id})\circ\psi^\bullet]\otimes\mathrm{Id}\Big]$$
$$\circ\lambda_2^\bullet\circ[(T\circ A_{l-1})\otimes\mathrm{Id}]\circ\lambda_1^\bullet\circ(\eta^\bullet\otimes i)$$

$$+\sum_{s=1}^{n-2}\sum_{p=1}^{s+1}\sum_{\substack{\eta\in S(i_1,\dots,i_{t-1},s)\\ i_1+\cdots+i_t=n-p\\ 2\le t\le n-p\\ l=t}}\ \sum_{\psi\in S(p-1,s-p+1)} q\circ\lambda_3^\bullet\circ(T\otimes\mathrm{Id})\circ\Big[[k_{s-p+2}\circ(k_p\otimes\mathrm{Id})\circ\psi^\bullet]\otimes\mathrm{Id}\Big]$$
$$\circ\lambda_2^\bullet\circ[(T\circ A_{t-1})\otimes\mathrm{Id}]\circ\lambda_1^\bullet\circ(\eta^\bullet\otimes i)$$
$$+\sum_{s=n-1}^{s+1}\sum_{p=1}\ \sum_{\psi\in S(p-1,s-p+1)} q\circ\Big[[k_{s-p+2}\circ(k_p\otimes\mathrm{Id})\circ\psi^\bullet]\otimes\mathrm{Id}\Big]\circ(\mathrm{Id}\otimes i)$$

步骤 4. 将 ψ 和 η 合并为 κ，并将 A_t 重新引入记号中，分别处理$p=1$和 $p=s+1$ 两种情况。事实上，我们注意到，对于 $1<p<s+1$，可以将 k_p 项和 k_{s-p+2} 项合并为一项 A_t。否则，我们将得到一项 k_1。

$$\sum_{s=1}^{n-2}\sum_{p=1}\ \sum_{\substack{\kappa\in S(s,i_2,\dots,i_t)\\ i_1+\cdots+i_t=n-p\\ 2\le t\le n-p\\ l=1}} q\circ A_t\circ\lambda_3^\bullet\circ(k_1\otimes\mathrm{Id})\circ\lambda_1^\bullet\circ(\kappa^\bullet\otimes i)$$
$$+\sum_{s=1}^{n-2}\sum_{p=2}^{s}\ \sum_{\substack{\kappa\in S(p-1,s-p+1,i_2,\dots,i_t)\\ i_1+\cdots+i_t=n-p\\ 2\le t\le n-p\\ l=1}} q\circ A_t\circ\lambda_3^\bullet\circ(T\otimes\mathrm{Id})\circ(A_1\otimes\mathrm{Id})\circ\lambda_1^\bullet\circ(\kappa^\bullet\otimes i)$$
$$+\sum_{s=1}^{n-2}\sum_{p=s+1}\ \sum_{\substack{\kappa\in S(s,i_2,\dots,i_t)\\ i_1+\cdots+i_t=n-p\\ 2\le t\le n-p\\ l=1}} q\circ A_{t-1}\circ\lambda_3^\bullet\circ((T\circ k_1)\otimes\mathrm{Id})\circ(A_1\otimes\mathrm{Id})\circ\lambda_1^\bullet\circ(\kappa^\bullet\otimes i)$$
$$+\sum_{s=1}^{n-3}\sum_{p=1}\ \sum_{\substack{\kappa\in S(i_1,\dots,i_{l-1},s,i_{l+1},\dots,i_t)\\ i_1+\cdots+i_t=n-p\\ 3\le t\le n-p\\ 2\le l\le t}} q\circ A_{t-l+1}\circ\lambda_3^\bullet\circ((k_1\circ T)\otimes\mathrm{Id})\circ(A_{l-1}\otimes\mathrm{Id})\circ\lambda_1^\bullet\circ(\kappa^\bullet\otimes i)$$
$$+\sum_{s=1}^{n-3}\sum_{p=2}^{s}\ \sum_{\substack{\kappa\in S(i_1,\dots,i_{l-1},p-1,s-p+1,i_{l+1},\dots,i_t)\\ i_1+\cdots+i_t=n-p\\ 3\le t\le n-p\\ 2\le l\le t}} q\circ A_{t-l+1}\circ\lambda_3^\bullet\circ A_l\otimes\mathrm{Id})\circ\lambda_1^\bullet\circ(\kappa^\bullet\otimes i)$$
$$+\sum_{s=1}^{n-3}\sum_{p=s+1}\ \sum_{\substack{\kappa\in S(i_1,\dots,i_{l-1},s,i_{l+1},\dots,i_t)\\ i_1+\cdots+i_t=n-p\\ 3\le t\le n-p\\ 2\le l\le t}} q\circ A_{t-l}\circ\lambda_3^\bullet\circ((T\circ k_1)\otimes\mathrm{Id})\circ(A_l\otimes\mathrm{Id})\circ\lambda_1^\bullet\circ(\kappa^\bullet\otimes i)$$
$$+\sum_{s=1}^{n-2}\sum_{p=1}\ \sum_{\substack{\kappa\in S(i_1,\dots,i_{t-1},s)\\ i_1+\cdots+i_t=n-p\\ 2\le t\le n-p\\ l=t}} q\circ A_1\circ\lambda_3^\bullet\circ((k_1\circ T)\otimes\mathrm{Id})\circ(A_{t-1}\otimes\mathrm{Id})\circ\lambda_1^\bullet\circ(\kappa^\bullet\otimes i)$$

$$+\sum_{s=1}^{n-2}\sum_{p=2}^{s}\sum_{\substack{\kappa\in S(i_1,\dots,i_{t-1},p-1,s-p+1)\\ i_1+\cdots+i_t=n-p\\ 2\leq t\leq n-p\\ l=t}} q\circ A_1\circ\lambda_3^\bullet\circ(A_t\otimes\mathrm{Id})\circ\lambda_1^\bullet\circ(\kappa^\bullet\otimes i)$$

$$+\sum_{s=1}^{n-2}\sum_{p=s+1}\sum_{\substack{\kappa\in S(i_1,\dots,i_{t-1},s)\\ i_1+\cdots+i_t=n-p\\ 2\leq t\leq n-p\\ l=t}} q\circ k_1\circ\lambda_3^\bullet\circ(A_t\otimes\mathrm{Id})\circ\lambda_1^\bullet\circ(\kappa^\bullet\otimes i)$$

$$+\sum_{s=n-1}\sum_{p=1}\sum_{\kappa=\mathrm{Id}} q\circ k_{s+1}\circ(k_1\otimes\mathrm{Id})\circ\lambda_1^\bullet\circ(\mathrm{Id}\otimes i)$$

$$+\sum_{s=n-1}\sum_{p=2}^{s}\sum_{\kappa\in S(p-1,s-p+1)} q\circ k_{s-p+2}\circ(k_p\otimes\mathrm{Id})\circ\lambda_1^\bullet\circ(\kappa^\bullet\otimes i)$$

$$+\sum_{s=n-1}\sum_{p=s+1}\sum_{\kappa=\mathrm{Id}} q\circ k_1\circ(k_{s+1}\otimes\mathrm{Id})\circ\lambda_1^\bullet\circ(\kappa^\bullet\otimes i)$$

步骤 5. 我们可以将上述各项求和合并。第一项由合并上文第 4 项和第 7 项得到。第二项由合并上文第 3 项和第 6 项得到。第三项由合并上文第 2、5、8 和 11 项得到。第四项由合并第 1 项和第 10 项得到。最后一项由合并上文第 9 项和第 12 项得到。

$$\sum_{s=1}^{n-2}\sum_{\substack{\kappa\in S(i_1,\dots,i_{l-1},s,i_{l+1}\dots,i_t)\\ 2\leq t\leq n-1\\ 2\leq l\leq t\\ i_1+\cdots+i_t=n-1\\ i_l=s}} q\circ A_{t-l+1}\circ\lambda_2^\bullet\circ\big[(k_1\circ T\circ A_{l-1})\otimes\mathrm{Id}\big]\circ\lambda_1^\bullet\circ(\kappa^\bullet\otimes i)$$

$$+\sum_{s=1}^{n-2}\sum_{\substack{\kappa\in S(i_1,\dots,i_{l-1},s,i_{l+1}\dots,i_t)\\ 2\leq t\leq n-1-s\\ 1\leq l\leq t-1\\ i_1+\cdots+i_t=n-1-s\\ i_l=0}} q\circ A_{t-l}\circ\lambda_2^\bullet\circ\big[(T\circ k_1\circ A_l)\otimes\mathrm{Id}\big]\circ\lambda_1^\bullet\circ(\kappa^\bullet\otimes i)$$

$$+\sum_{s=1}^{n-1}\sum_{p=2}^{s}\sum_{\substack{\kappa\in S(i_1,\dots,i_{l-1},p-1,s-p+1,i_{l+1},\dots,i_t)\\ 1\leq t\leq n-p\\ 1\leq l\leq t\\ i_1+\cdots+i_t=n-p\\ i_l=s+1-p}} q\circ A_{t-l+1}\circ\lambda_2^\bullet\circ\big[(\mathrm{Id}\otimes A_l)\otimes\mathrm{Id}\big]\circ\lambda_1^\bullet\circ(\kappa^\bullet\otimes i)$$

$$+\sum_{s=1}^{n-1}\sum_{\substack{\kappa\in S(s,i_2,\dots,i_t)\\ 1\leq t\leq n-1\\ l=1\\ i_1+\cdots+i_t=n-1\\ i_l=s}} q\circ A_t\circ\lambda_3^\bullet\circ(k_1\otimes\mathrm{Id})\circ\lambda_1^\bullet\circ(\kappa^\bullet\otimes i)$$

$$+\sum_{s=1}^{n-1}\sum_{\substack{\kappa\in S(i_1,\dots,i_{t-1},s)\\1\le t\le n-1-s\\l=t\\i_1+\cdots+i_t=n-1-s\\i_l=0}} q\circ k_1\circ\lambda_3^\bullet\circ(A_t\otimes\mathrm{Id})\circ\lambda_1^\bullet\circ(\kappa^\bullet\otimes i)$$

步骤 6。更改记号。在第一个求和中，令 $c_1,\dots,c_w$ 为 $i_1,\dots,i_{l-1}$，令 $d_1,\dots,d_x$ 为 $s,i_{l+1},\dots,i_t$。条件 $t\ge 2$ 和 $2\le l\le t$ 蕴含 $w,x\ge 1$。对其他求和作类似更改。在第二个求和中，令 $c_1,\dots,c_w$ 为 $i_1,\dots,i_{l-1},s$，令 $d_1,\dots,d_x$ 为 $i_{l+1},\dots,i_t$；在第三个求和中，令 $c_1,\dots,c_w$ 为 $i_1,\dots,i_{l-1},p-1$，令 $d_1,\dots,d_x$ 为 $s-p+1,i_{l+1},\dots,i_t$。

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{\kappa\in S(c_1,\dots,c_w,d_1\dots,d_x)\\c_1+\cdots+c_w+d_1+\cdots+d_x=n-1\\w,x\ge 1}} q\circ A_x\circ\lambda_2^\bullet\circ\big[(k_1\circ T\circ A_w)\otimes\mathrm{Id}\big]\circ\lambda_1^\bullet\circ(\kappa^\bullet\otimes i)\\
+&\sum_{\substack{\kappa\in S(c_1,\dots,c_w,d_1\dots,d_x)\\c_1+\cdots+c_w+d_1+\cdots+d_x=n-1\\w,x\ge 1}} q\circ A_x\circ\lambda_2^\bullet\circ\big[(T\circ k_1\circ A_w)\otimes\mathrm{Id}\big]\circ\lambda_1^\bullet\circ(\kappa^\bullet\otimes i)\\
+&\sum_{\substack{\kappa\in S(c_1,\dots,c_w,d_1\dots,d_x)\\c_1+\cdots+c_w+d_1+\cdots+d_x=n-1\\w,x\ge 1}} q\circ A_x\circ\lambda_2^\bullet\circ\big[(\mathrm{Id}\otimes A_w)\otimes\mathrm{Id}\big]\circ\lambda_1^\bullet\circ(\kappa^\bullet\otimes i)\\
+&\sum_{\substack{\kappa\in S(d_1\dots,d_x)\\d_1+\cdots+d_x=n-1\\x\ge 1}} q\circ A_x\circ\lambda_3^\bullet\circ(k_1\otimes\mathrm{Id})\circ\lambda_1^\bullet\circ(\kappa^\bullet\otimes i)\\
+&\sum_{\substack{\kappa\in S(c_1,\dots,c_w)\\c_1+\cdots+c_w=n-1\\w\ge 1}} q\circ k_1\circ\lambda_3^\bullet\circ(A_w\otimes\mathrm{Id})\circ\lambda_1^\bullet\circ(\kappa^\bullet\otimes i)
\end{aligned}$$

步骤 7。现在关注右侧，我们根据定义代入 k'_n。我们分别考虑 $p=1$ 和 $q=1$ 这两种情况，并利用 i 和 q 是链映射这一事实，因为 $k'_1\circ q=q\circ k_1$ 和$k_1\circ i=i\circ k'_1$。

$$\begin{aligned}
&\sum_{p=2}^{n-1}\sum_{\sigma(p)=n}\sum_{\substack{\alpha\in S(a_1,\dots,a_r)\\a_1+\cdots+a_r=p-1}}\sum_{\substack{\beta\in S(b_1,\dots,b_s)\\b_1+\cdots+b_s=q-1}} q\circ A_s\circ(\beta^\bullet\otimes i)\circ\lambda^\bullet\circ[(q\circ A_r\circ(\alpha^\bullet\otimes i))\otimes\mathrm{Id}]\circ\sigma^\bullet\\
+&\sum_{p=1}\sum_{\sigma(p)=n}\sum_{\substack{\beta\in S(b_1,\dots,b_s)\\b_1+\cdots+b_s=n-1}} q\circ A_s\circ(\beta^\bullet\otimes i)\circ\lambda^\bullet\circ[(k_1\circ i)\otimes\mathrm{Id}]\circ\sigma^\bullet\\
+&\sum_{p=n}\sum_{\sigma(p)=n}\sum_{\substack{\alpha\in S(a_1,\dots,a_r)\\a_1+\cdots+a_r=n-1}} q\circ k_1\circ(\beta^\bullet\otimes i)\circ\lambda^\bullet\circ[q\circ A_r\circ(\alpha^\bullet\otimes i)\otimes\mathrm{Id}]\circ\sigma^\bullet
\end{aligned}$$

步骤 8. 我们可以将 σ, α 和 β 合并为一个非交错置换 θ。

$$\sum_{p=2}^{n-1} \sum_{\substack{\theta \in S(a_1,\dots,a_r,b_1,\dots,b_s) \\ a_1+\cdots+a_r=p-1 \\ b_1+\cdots+b_s=q-1}} q \circ A_s \circ \lambda_2^\bullet \circ [(i \circ q \circ A_r) \otimes \mathrm{Id}] \circ \lambda_1^\bullet \circ (\theta^\bullet \otimes i)$$
$$+ \sum_{p=1} \sum_{\substack{\theta \in S(b_1,\dots,b_s) \\ b_1+\cdots+b_s=n-1}} q \circ A_s \circ \lambda_2^\bullet \circ (k_1 \otimes \mathrm{Id}) \circ \lambda_1^\bullet \circ (\theta^\bullet \otimes i)$$
$$+ \sum_{p=n} \sum_{\substack{\theta \in S(a_1,\dots,a_r) \\ a_1+\cdots+a_r=n-1}} q \circ k_1 \circ \lambda_2^\bullet \circ (A_r \otimes \mathrm{Id}) \circ \lambda_1^\bullet \circ (\theta^\bullet \otimes i)$$

步骤 9. 利用 $\mathrm{Id}_M - i \circ q = k_1 \circ T + T \circ k_1$ 这一事实。

$$\sum_{p=2}^{n-1} \sum_{\substack{\theta \in S(a_1,\dots,a_r,b_1,\dots,b_s) \\ a_1+\cdots+a_r=p-1 \\ b_1+\cdots+b_s=q-1}} q \circ A_s \circ \lambda_2^\bullet \circ [(k_1 \circ T \circ A_r) \otimes \mathrm{Id}] \circ \lambda_1^\bullet \circ (\theta^\bullet \otimes i)$$
$$+ \sum_{p=2}^{n-1} \sum_{\substack{\theta \in S(a_1,\dots,a_r,b_1,\dots,b_s) \\ a_1+\cdots+a_r=p-1 \\ b_1+\cdots+b_s=q-1}} q \circ A_s \circ \lambda_2^\bullet \circ [(T \circ k_1 \circ A_r) \otimes \mathrm{Id}] \circ \lambda_1^\bullet \circ (\theta^\bullet \otimes i)$$
$$+ \sum_{p=2}^{n-1} \sum_{\substack{\theta \in S(a_1,\dots,a_r,b_1,\dots,b_s) \\ a_1+\cdots+a_r=p-1 \\ b_1+\cdots+b_s=q-1}} q \circ A_s \circ \lambda_2^\bullet \circ [(\mathrm{Id} \circ A_r) \otimes \mathrm{Id}] \circ \lambda_1^\bullet \circ (\theta^\bullet \otimes i)$$
$$+ \sum_{p=1} \sum_{\substack{\theta \in S(b_1,\dots,b_s) \\ b_1+\cdots+b_s=n-1}} q \circ A_s \circ \lambda_2^\bullet \circ (k_1 \otimes \mathrm{Id}) \circ \lambda_1^\bullet \circ (\theta^\bullet \otimes i)$$
$$+ \sum_{p=n} \sum_{\substack{\theta \in S(a_1,\dots,a_r) \\ a_1+\cdots+a_r=n-1}} q \circ k_1 \circ \lambda_2^\bullet \circ (A_r \otimes \mathrm{Id}) \circ \lambda_1^\bullet \circ (\theta^\bullet \otimes i)$$

这些项恰好就是步骤 6 中的项，因此它们两两抵消。于是，L_∞-模关系对 k'_n 成立。□

引理 4.12. 在定理 *4.11* 的条件下，如果 M' 具有由链收缩诱导的 L_∞-模结构，那么映射 $i : M' \to M$ 可以扩展为一个 L_∞-模同态，其中 $I_1 = i$，并且对于 $n \geq 2$，我们定义 I_n 为

$$I_n := \sum_{\substack{\tau \in S(i_1,\dots,i_t) \\ i_1+\cdots+i_t=n-1}} T \circ A_t \circ (\tau^\bullet \otimes i)$$

映射 $A_t \colon L^{\otimes i_1} \otimes \cdots \otimes L^{\otimes i_t} \otimes M \to M$ 按照定理 *4.11* 的陈述定义；参见图 *3*。

证明。（略述）。我们将证明，I 满足 L_∞-模同态关系（适用于$n = 2$）。事实上，对于 $x \in L$ 和 $m \in M'$，我们必须证明

$$I_2(l_1(x), m) + I_2(x, k'_1(m)) + I_1(k'_2(x, m)) = k_2(x_1, I_1(m)) + k_1(I_2(x, m)) \tag{1}$$

计算等式左边，并代入 I 和 k'的定义，可得

$$T \circ k_2(l_1(x), i(m)) + T \circ k_2(x_1, i \circ k_1'(m)) + i \circ q \circ k_2(x, i(m)) \tag{2}$$

接下来，我们利用 i 是一个链映射且 $i \circ q = T \circ k_1 + k_1 \circ T + \mathrm{Id}_M$ 这一事实，得到 (2) 等于

$$T \circ k_2(l_1(x), i(m)) + T \circ k_2(x_1, k_1(i(m))) + T \circ k_1 \circ k_2(x, i(m)) + k_1 \circ T \circ k_2(x, i(m)) + k_2(x, i(m)) \tag{3}$$

将 L_∞-模关系应用于 (3) 中的前两项，我们得到

$$T \circ k_1 \circ k_2(x, i(m)) + T \circ k_1 \circ k_2(x, i(m)) + k_1 \circ T \circ k_2(x, i(m)) + k_2(x, i(m)) \tag{4}$$

现在，前两项相互抵消，剩下的是 $k_2(x_1, I_1(m)) + k_1(I_2(x, m))$，正如所需。一般情形的证明与定理 4.11 $\square$ 的证明类似。

获得新的 L_∞-模结构的另一种方法是使用标量限制函子；这是一个关联两个 L_∞-代数的模范畴的函子。

定理 4.13。 [6, 定理 1]. 设 L, L' 是 $\mathbb{F}_2$ 上的 L_∞-代数，且 $I\colon L' \to L$ 是一个L_∞-代数同态。则存在一个标量限制函子 $I^*\colon L$-模 $\to L'$-模。

特别地，如果 (M, k) 是一个 L-模，那么 $I^*M := (M, k')$ 是一个 L'-模，其诱导括号 $k_n'\colon L^{\otimes n-1} \otimes M \to M$ 定义如下

$$k_n' = \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{\substack{\tau \in S'(i_1,\dots,i_r) \\ i_1+\dots+i_r=n-1}} k_{r+1} \circ (I_{i_1} \otimes \cdots \otimes I_{i_r} \otimes \mathrm{Id}) \circ (\tau^\bullet \otimes \mathrm{Id})$$

此外，如果 $f\colon M \to N$ 是 L_∞-模同态，则 $(I^*f)_1 = f_1$。因此，如果M 和 N 准同构，那么 I^*M 和 I^*N也准同构。

5. The L_∞-algebra structure on $\mathfrak{sl}_2(\wedge)$

由于 $\mathfrak{sl}_2(\wedge)^{dg}$ 是李超代数，因此它是一个不含高阶运算的 L_∞-代数。在本节中，我们将使用上链收缩，将 L_∞-代数结构从 $\mathfrak{sl}_2(\wedge)^{dg}$ 传递到 $\mathfrak{sl}_2(\wedge)$，然后证明 L_∞-代数结构中$\mathfrak{sl}_2(\wedge)$ 的所有高阶运算都为零。

引理 5.1. 存在映射 i 和 q，使得这些数据

$$K \circlearrowright \mathfrak{sl}_2(\wedge)_{dg} \underset{i}{\overset{q}{\rightleftarrows}} H(\mathfrak{sl}_2(\wedge)_{dg}) \tag{$*$}$$

满足上链收缩的定义。

证明. 由引理 2.3, $H(\mathfrak{sl}_2(\wedge)^{dg}) \cong \mathfrak{sl}_2(\wedge) \oplus Z$，其基为 $\{v_2, v_{-2}, v_0, d, e, f, h\}$。将 $\mathfrak{sl}_2(\wedge)^{dg}$ 和 $H(\mathfrak{sl}_2(\wedge)^{dg})$的基元素及其次数写出，可得

	2	1	0
$\mathfrak{sl}_2(\wedge)_{dg}$	x	$v_2, v_{-2}, \tilde{v}_0, d, D$	e, f, h
$H(\mathfrak{sl}_2(\wedge)_{dg})$	0	$v_2, v_{-2}, \tilde{v}_0, d$	e, f, h

映射 i 和 q 很容易定义。令 i 将每个元素提升到 $\mathfrak{sl}_2(\wedge)^{dg}$中与之对应的元素，并令 q 为向下的投影，将 x 和 D 映为 0。定义链同伦 K：除 x外，对每个元素都取 0；对于 x，定义 $K(x) = -D$。

很容易验证， i 和 q 是链映射。 $\mathfrak{sl}_2(\wedge)$中的微分为 0，因此 $i\partial = 0$。此外， $\partial i = 0$成立，因为 i 的像中的元素都属于 $[d, \cdot]$的核，

这就是 $\mathfrak{sl}_2(\wedge)^{dg}$中的微分。另一方面， $\partial q = 0$。此外， $q\partial = 0$成立，因为 $[d, \cdot]$ 的像中唯一的元素是 x，而 q将其映为 0。验证所有链收缩条件也很容易满足。□

引理 5.2。 李超代数 $H(\mathfrak{sl}_2(\wedge)^{dg})$ 继承了由 $(*)$ 诱导的 L_∞-代数结构，而且这一 L_∞-代数结构没有高阶运算。

证明。 根据第 4.2 节，迁移括号的公式告诉我们

$$I_n = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{\sigma \in \overline{S}(j,n-j)} \epsilon(\sigma) \cdot K \circ l_2 \circ (I_j \otimes I_{n-j}) \circ \sigma_\bullet$$

$$l'_n = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{\sigma \in \overline{S}(j,n-j)} \epsilon(\sigma) \cdot q \circ l_2 \circ (I_j \otimes I_{n-j}) \circ \sigma_\bullet$$

回想一下， $I_1 = -i$。对于 $n = 2$， $S(1,1)$ 中唯一的非交错置换是恒等置换。因此， $I_2(x_1, x_2) = K(l_2(I_1(x_1)\ I_1(x_2)))$。由于 $K(x) = -D$，而在其他情况下为 0，

$$\begin{aligned} I_2(v_2, v_{-2}) &= K(x) = -D \\ I_2(v_{-2}, v_2) &= K(x) = -D \\ I_2(\tilde{v}_0, \tilde{v}_0) &= K(2x) = -2D \\ I_2(x_1, x_2) &= 0 \text{ otherwise} \end{aligned}$$

此外， $l'_2(x_1, x_2) = q(l_2(I_1(x_1)\ I_1(x_2)))$，因此，要计算 $H(\mathfrak{sl}_2(\wedge)^{dg})$ 中两个元素的括号，我们将它们提升到 $\mathfrak{sl}_2(\wedge)^{dg}$，在 $\mathfrak{sl}_2(\wedge)^{dg}$ 中取它们的括号，然后再商回到 $H(\mathfrak{sl}_2(\wedge)^{dg})$。

现在，令 $n \geq 3$。对于所有 $m \geq 2$, I_m， K 都在像中，因此 $I_m(x_1、\ldots\ldots、x_m) = cD$ 等于某个标量 c。但对于任意 $1 \leq j \leq n-1$ 和 $\sigma \in S(j,\ n-j)$， $q \circ l_2 \circ (I_j \otimes I_{n-j}) \circ \sigma_\bullet$ 都是 0，因为要么 $l_2 \circ (I_j \otimes I_{n-j}) \circ \sigma_\bullet$ 项为 0（对所有 $y \in \{e, f, h, v_2, v_{-2}, \tilde{v}_0, D\}$, $[D, y] = 0$），要么 q 会将该项映为 0，因为涉及 D 的唯一非零括号是 $[d, D] = -x$，且 $q(x) = 0$。因此， $l'_n = 0$ 对于 $n \geq 3$ 成立，所以李超代数 $H(\mathfrak{sl}_2(\wedge)^{dg})$ 没有高阶运算。□

定理 5.3。 李超代数 $\mathfrak{sl}_2(\wedge)$ 作为 $H(\mathfrak{sl}_2(\wedge)^{dg})$的子代数，继承了一个 L_∞-代数结构，并且该 L_∞-代数结构没有高阶运算。

证明。映射 $H(\mathfrak{sl}_2(\wedge)^{dg}) \to \mathfrak{sl}_2(\wedge)$ 将 $e, f, h, v_2, v_{-2}, \tilde{v}_0, d$ 分别映射到 $e, f, h, v_2, v_{-2}, v_0, 0$，是满射，且核是一维的。因此， $H(\mathfrak{sl}_2(\wedge)^{dg}) \cong \mathfrak{sl}_2(\wedge) \oplus \mathbb{Z}$，其中 $\mathbb{Z}$ 这一项由元素 d生成。但 d 与 $\mathfrak{sl}_2(\wedge)$这一项中的所有元素的括号均为 0，因此 $\mathfrak{sl}_2(\wedge)$不仅作为向量空间是直和，同时作为 L_∞-代数也是直和。因此， $\mathfrak{sl}_2(\wedge)$作为 $H(\mathfrak{sl}_2(\wedge)^{dg})$ 的子代数，是一个 L_∞-代数。□

6. The L_∞-module structure on CKh(L)

将 $\mathfrak{sl}_2(\wedge)^{dg}$ 和 $\mathfrak{sl}_2(\wedge)$ 视为 L_∞-代数，在本节中我们将展示 $\mathrm{CKh}(P(L))$ 是 $\mathfrak{sl}_2(\wedge)$ 上的一个 L_∞-模。此外，固定环带链环 L 的一个图 $P(L)$。为简化记号，我们将用 $\mathrm{CKh}(L)$ 和 $\mathrm{AKh}(L)$ 分别代替 $\mathrm{CKh}(P(L))$ 和 $\mathrm{AKh}(P(L))$。

定理 6.1. 设 L 是一个环带链环，且 $m \in CKh(L)$。那么 $CKh(L)$ 是 L_∞ 上的 L_∞-代数 $\mathfrak{sl}_2(\wedge)$ 的模结构。高阶运算之一由 *Lee*

微分给出： $k_3(v_2, v_{-2}, m) = \partial_0^{Lee}(m)$。特别地，若 ∂_0^{Lee}: $CKh(L) \to CKh(L)$ 非零，则 L_∞-模结构非平凡。

证明。 首先，CKh(L) 是一个 L_∞-模，其上的 $\mathfrak{sl}_2(\wedge)^{dg}$ 作用由通常的模作用给出，且 $k_n = 0$ 对于 $n \geq 3$。基 $\{e, f, h, v_2, v_{-2}, \tilde{v}_0, d, D, x\}$ 中各元素的模作用如下。 e, f, h 的作用已在第 3 节末尾描述，而 v_2、 v_{-2}、 d 和 D 分别通过 ∂_+^{Lee}、 ∂_-、 ∂_0 和 ∂_0^{Lee} 作用；参见 [7]。随后可由括号关系确定 $\tilde{v}_0$ 和 x 的作用。

现在，我们有一个从 $\mathfrak{sl}_2(\wedge)^{dg}$ 到其同调的上链收缩，因此可以转移 $\mathfrak{sl}_2(\wedge)^{dg}$-模结构，从而得到一个 $H(\mathfrak{sl}_2(\wedge)^{dg})$ 上的新模结构。然后，我们可以将此模结构限制到 $H(\mathfrak{sl}_2(\wedge)^{dg})$ 中的 $\mathfrak{sl}_2(\wedge)$ 副本上。

为了看出诱导的模结构非平凡，回顾引理 5.1 中的上链收缩。

$$K \circlearrowright \mathfrak{sl}_2(\wedge)_{dg} \underset{i}{\overset{q}{\rightleftarrows}} H(\mathfrak{sl}_2(\wedge)_{dg})$$

考察定理 4.13 中的标量限制公式，我们看到

$$k_3'(x_1, x_2, m) = k_3(I_1(x_1), I_1(x_2), m) - k_2(I_2(x_1, x_2), m) = -k_2(I_2(x_1, x_2), m)$$

对于 $x_1, x_2 \in H(\mathfrak{sl}_2(\wedge)^{dg})$ 和 $m \in$ CKh(L)。这里， k_n 是 L_∞-模运算，对应于$\mathfrak{sl}_2(\wedge)^{dg}$，并且回顾一下，对于 $n \geq 3$，有 $k_n = 0$ 。由于 $I_2(v_2, v_{-2}) = -D$ 且 $I_2(v_{-2}, v_2) = -D$，又由于 D 通过 ∂_0^{Lee}作用，我们得出 $k_3'(v_2, v_{-2}, m) = \partial_0^{Lee}(m)$ 且 $k_3'(v_{-2}, v_2, m) = \partial_0^{Lee}(m)$，这表明我们得到了高阶运算。□

7. Reidemeister Moves

7.1. () 的不变性模结构。本节中，我们遵循 Khovanov 的原始证明，证明 Khovanov 同调在 Reidemeister 变换下不变；参见 [8]。在该证明中，Khovanov 构造了给定的 Khovanov 复形与施行特定 Reidemeister 变换后得到的复形之间的拟同构。这里，我们将这些拟同构提升为 $\mathfrak{sl}_2(\wedge)_{dg}$ L_∞-模拟同构。

定理 7.1。 L_∞-模结构在 $CKh(L)$ 上在 *Reidemeister* 变换下不变 *I.*

证明。设 $[\![\curvearrowright]\!]$ 和 $[\![\curvearrowleft]\!]$ 分别表示施行 RI 移动之前和之后的环链复形。我们的目标是构造一个 L_∞-模之间的拟同构$\{h_n\} : [\![\curvearrowleft]\!] \to [\![\curvearrowright]\!]$。由于这些复形上的 $\mathfrak{sl}_2(\wedge)^{dg}$-模结构没有高阶运算，只需给出一个保持模作用的拟同构 $h_1 : [\![\curvearrowleft]\!] \to [\![\curvearrowright]\!]$ ，因为这样我们就可以令 $h_n = 0$ 为 $n \geq 2$。为此，设 $\mathcal{C}$ 为复形

$$\mathcal{C} := [\![\curvearrowleft]\!] = [\![\curvearrowleft]\!] \xrightarrow{m} [\![\curvearrowright]\!]\{1\}$$

并令 $\mathcal{C}'$ 为子复形

$$\mathcal{C}' := [\![\curvearrowleft]\!]_{w_+} \xrightarrow{m} [\![\curvearrowright]\!]\{1\},$$

其中， $[\![\curvearrowleft]\!]_{w_+}$ 表示额外圆被标记为 w_+。直接检验基元素 $\{e, f, h, v_{-2}, v_2, \tilde{v}_0, d, D, x\}$ 对 $\mathcal{C}'$ 的作用可知， $\mathcal{C}'$ 是一个 $sl_2(\wedge)^{dg}$-子模。此外， $\mathcal{C}'$ 是无挠的，因为我们可以将 $\mathcal{C}'$ 写成同构 m的映射锥。

$$\mathcal{C}' = [\![\curvearrowleft]\!]_{w_+} \xrightarrow{m} [\![\curvearrowright]\!]\{1\} = \begin{array}{ccc} \cdots \longrightarrow [\![\curvearrowleft]\!]_{w_+} & \xrightarrow{d} & [\![\curvearrowleft]\!]_{w_+} \longrightarrow \cdots \\ \oplus & \searrow^{m} & \oplus \\ \cdots \longrightarrow [\![\curvearrowright]\!]\{1\} & \xrightarrow{d} & [\![\curvearrowright]\!]\{1\} \longrightarrow \cdots \end{array}$$

因此，商复形 $\mathcal{C}/\mathcal{C}'$ 就是复形 $[\![\asymp]\!]/_{w_+=0} \to 0$，并且通过映射 $z \otimes w_- \mapsto z$，它与 $[\![\curlywedge]\!]$ 作为链复形同构。总之，我们构造了一个链映射 $[\![\wr]\!] \to [\![\curlywedge]\!]$，其定义为

$$y \otimes w_+ + z \otimes w_- + x \mapsto z \otimes w_- \mapsto z$$

对于 $y,\ z \in \mathcal{C}(*0)$ 和 $x \in \mathcal{C}(*1)$（我们将由 Reidemeister I 变换形成的交叉标记为链复形中的最后一个交叉），该映射在同调上诱导出同构

$$H([\![\wr]\!]) = H(\mathcal{C}) \cong H(\mathcal{C}/\mathcal{C}') \cong H([\![\curlywedge]\!])$$

为了完成证明，我们需要检查这一复合映射保持 $\mathfrak{sl}_2(\wedge)^{dg}$ 作用。当然，第一个映射满足这一点，因为它是一个 $\mathfrak{sl}_2(\wedge)^{dg}$-子模的商映射。对于第二个映射，若 $s \in \mathfrak{sl}_2(\wedge)^{dg}$，先进行映射再施加 s 作用，得到 $z \otimes w_- \mapsto sz$。另一方面，先施加 s 作用再进行映射，得到 $s(z \otimes w_-) = sz \otimes w_- \mapsto sz$。□

T定理 7.2。 *CKh(L) </style}*上的 L_∞-模结构在 *Reidemeister I* 下保持不变 *I.*

证明。 证明 RII 不变性还有一种更直接的方法，但接下来要介绍的方法将有助于证明 RIII 不变性。请看图 4 中的图示。

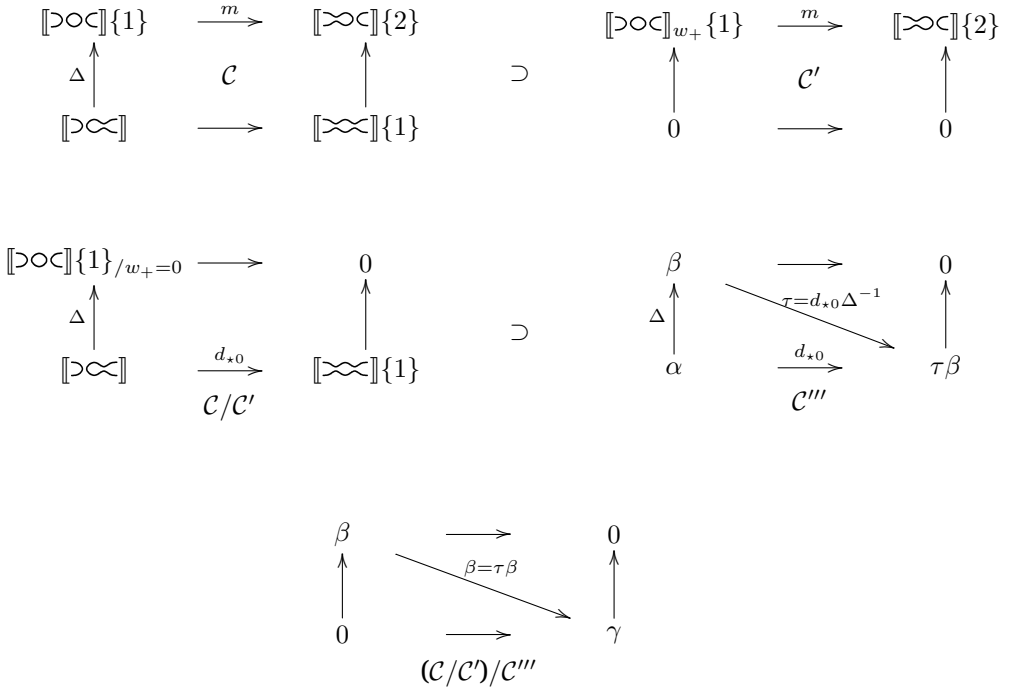


FIGURE 4. RII 不变性证明中相关的复形。 [4]中也出现了类似的图示。

作为复形，复合

$$[\![\supset\!\subset]\!] = \mathcal{C} \xrightarrow{q} \mathcal{C}/\mathcal{C}' \xrightarrow{p} (\mathcal{C}/\mathcal{C}')/\mathcal{C}''' \xrightarrow{f} [\![\asymp\!\asymp]\!]$$

是一串拟同构；参见 [4]。我们的目标是证明这些复形实际上作为 L_∞-模是准同构的。由于 $\mathcal{C}'''$ 不是一个 L_∞-子模，我们无法

立即在 $(\mathcal{C}/\mathcal{C}')/\mathcal{C}''$上赋予 L_∞-模结构。因此，我们的策略是构造从 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{C}/\mathcal{C}'$ 以及从 $\mathcal{C}/\mathcal{C}'$ 到 $(\mathcal{C}/\mathcal{C}')/\mathcal{C}''$ 的链收缩，从而为这些商空间赋予 L_∞-模结构。这样便能得到所需的 L_∞-模拟同构。为此，定义 i: $\mathcal{C}/\mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ 到 $\mathcal{C}/\mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ 的映射

$$i(z) = \begin{cases} z - m^{-1}\partial_{\mathcal{C}}(z) & \text{if } z \text{ is in the top left} \\ 0 & \text{if } z \text{ is in the top right} \\ z & \text{if } z \text{ is in the bottom left} \\ z - m^{-1}\partial_{\mathcal{C}}(z) & \text{if } z \text{ is in the bottom right} \end{cases}$$

其中，映射 $m^{-1} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 除了在右上角顶点处以外都为零。在该处，它是将一个圆与标记为 w_+ 的小圆合并所得同构的逆映射。

注。上面的映射 i 将一个元素 $z \in \mathcal{C}/\mathcal{C}'$ 视为 $\mathcal{C}$ 的元素。复形 $\mathcal{C}$ 有一组由 Khovanov 生成元构成的优选基，而 $\mathcal{C}/\mathcal{C}'$ 有一组优选基，其元素是 $\mathcal{C}$ 中不属于 $\mathcal{C}'$ 的基元素。因此，在应用 i之前，我们应先应用一个映射$i_0 : \mathcal{C}/\mathcal{C}' \to \mathcal{C}$，将其视为 F_2 向量空间中的映射；为简洁起见，我们省略这一步。

现在，若 $K : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 是映射

$$K(z) = \begin{cases} 0 & \text{if } z \text{ is in the top left} \\ m^{-1}(z) & \text{if } z \text{ is in the top right} \\ 0 & \text{if } z \text{ is in the bottom left} \\ 0 & \text{if } z \text{ is in the bottom right} \end{cases}$$

这些数据

$$K \circlearrowright \mathcal{C} \underset{i}{\overset{q}{\rightleftarrows}} \mathcal{C}/\mathcal{C}'$$

满足链收缩的要求，因此我们可以用它将 L_∞-模结构从 $\mathcal{C}$ 传递到 $\mathcal{C}/\mathcal{C}'$。特别地，由于 i 是链复形之间的拟同构，我们得到一个 L_∞-模之间的拟同构 $I_n : \mathcal{C}/\mathcal{C}' \to \mathcal{C}$，其中 $\mathcal{C}/\mathcal{C}'$ 带有诱导的 L_∞-模结构。事实上，$\mathcal{C}/\mathcal{C}'$上没有高阶运算。考察诱导运算的公式后可知，这是因为 $\mathcal{C}$ 本身没有高阶运算，K 的像位于 $\mathcal{C}'$中，并且 $\mathcal{C}'$ 是 $\mathcal{C}$的一个 L_∞-子模。

接下来，由于 $(\mathcal{C}/\mathcal{C}')/\mathcal{C}''$ 的每个非零元素都等价于右下方的某个元素 γ，我们可以定义 $j(\gamma) := \gamma$，并将其视为 $\mathcal{C}/\mathcal{C}'$的一个元素。于是，若 $H : \mathcal{C}/\mathcal{C}' \to \mathcal{C}/\mathcal{C}'$ 是映射

$$H(z) = \begin{cases} \Delta^{-1}(z) & \text{if } z \text{ is in the top left} \\ 0 & \text{if } z \text{ is in the top right} \\ 0 & \text{if } z \text{ is in the bottom left} \\ 0 & \text{if } z \text{ is in the bottom right} \end{cases}$$

这些数据

$$H \circlearrowright \mathcal{C}/\mathcal{C}' \underset{j}{\overset{p}{\rightleftarrows}} (\mathcal{C}/\mathcal{C}')/\mathcal{C}''$$

也满足链收缩的要求。我们得到一个拟同构L_∞-模 J_n： $\mathcal{C}/\mathcal{C}' \to \mathcal{C}$，其中（$\mathcal{C}/\mathcal{C}'$）$/\mathcal{C}''$ 具有由 L_∞诱导的$\mathcal{C}/\mathcal{C}'$-模结构。并且（$\mathcal{C}/\mathcal{C}'$）$/\mathcal{C}''$ 上也没有高阶运算。要看出这一点，注意到由于 $\mathcal{C}/\mathcal{C}'$ 没有高阶运算，诱导在（$\mathcal{C}/\mathcal{C}'$）$/\mathcal{C}''$ 上的模运算具有如下形式$k'_n = \sum_{\tau \in S(1,\ \ldots,\ 1)}$

$_{i_1=\cdots=i_{n-1}=1}\, q \circ A_{n-1} \circ (\tau^\bullet \otimes i)$；参见图5。

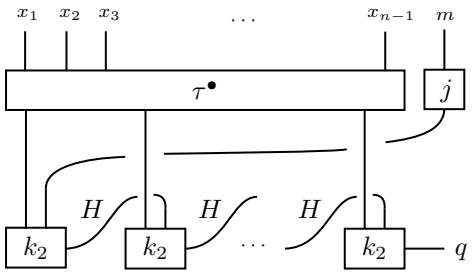


FIGURE 5.在 $(\mathcal{C}/\mathcal{C}')/\mathcal{C}'''$ 上的转移括号。这里，标记边表示应用相应的映射。例如，$k_3'(x_1,\ x_2,\ m) = q\circ k_2(x_1,\ H\circ k_2(x_2,\ j(m))) + q\circ k_2(x_2,\ H\circ k_2(x_1,\ j(m)))$

.

由于 j 的像集中在 $\mathcal{C}/\mathcal{C}'$的右下角，而 H 除左上角外处处为零，因此所有高阶运算都消失。至于模运算 k_2，元素 $s\in\mathfrak{sl}_2(\wedge)^{dg}$ 作用于 $\gamma\in(\mathcal{C}/\mathcal{C}')/\mathcal{C}'''$ 时，结果为

$$s\cdot\gamma = p(s\cdot j(\gamma)) = p(q(s\cdot(i\circ j(\gamma)))) = (p\circ q)(s\cdot\gamma - s\cdot m^{-1}\partial_{\mathcal{C}}(\gamma))$$

也就是说，我们将差值 $s\cdot\gamma - s\cdot m^{-1}\partial_{\mathcal{C}}(\gamma)$ 视为 $\mathcal{C}$ 的一个元素，然后取两次商空间。还需证明次数平移映射 $f:(\mathcal{C}/\mathcal{C}')/\mathcal{C}'''\to[\![\asymp]\!]$ 与该作用相容，即对于 $s\in\mathfrak{sl}_2(\wedge)^{dg}$ 和 $\gamma\in(\mathcal{C}/\mathcal{C}')/\mathcal{C}'''$，有 $f(s\cdot\gamma) = s\cdot f(\gamma)$。我们计算得

$$\begin{aligned} f(s\cdot\gamma) - s\cdot f(\gamma) &= f((p\circ q)(s\cdot\gamma) - (p\circ q)(s\cdot m^{-1}\partial_{\mathcal{C}}(\gamma))) - s\cdot\gamma \\ &= -(p\circ q)(s\cdot m^{-1}(\partial_{\mathcal{C}}\gamma)) \end{aligned}$$

利用这样一个事实：任意项 $m^{-1}(\partial_{\mathcal{C}}\gamma)$ 都将标记为 w_+，对该项施加任意 $s\in\mathfrak{sl}_2(\wedge)^{dg}$的作用，在 $p\circ q$下取商后都为 0。特别地，我们已经证明复合

$$[\![\asymp]\!] = \mathcal{C}\xrightarrow{q}\mathcal{C}/\mathcal{C}'\xrightarrow{p}\mathcal{C}''\xrightarrow{f}[\![\asymp]\!]$$

是由 L_∞-拟同构组成的链，因为 $[\![\asymp]\!]$ 没有高阶运算。 □

定理 7.3。 *CKh*(L) 上的 L_∞-模结构在第三 *Reidemeister* 变换下保持不变。

证明。 **步骤 1：概述**。 对于 RIII，情况总结于图6。我们先将复形 $[\![\asymp]\!]$ 和 $[\![\asymp]\!]$ 分解为 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ （它们分别是图6左上和右上方的立方体）。然后，我们将通过拟同构 $q_2\circ q_1$和 $p_2\circ p_1$把模结构转移到商复形 $(\mathcal{C}/\mathcal{C}')/C''$和 $(\mathcal{D}/\mathcal{D}')/D''$（底行），并证明这些商空间通过一个 L_∞-模映射 f构成 L_∞-拟同构。

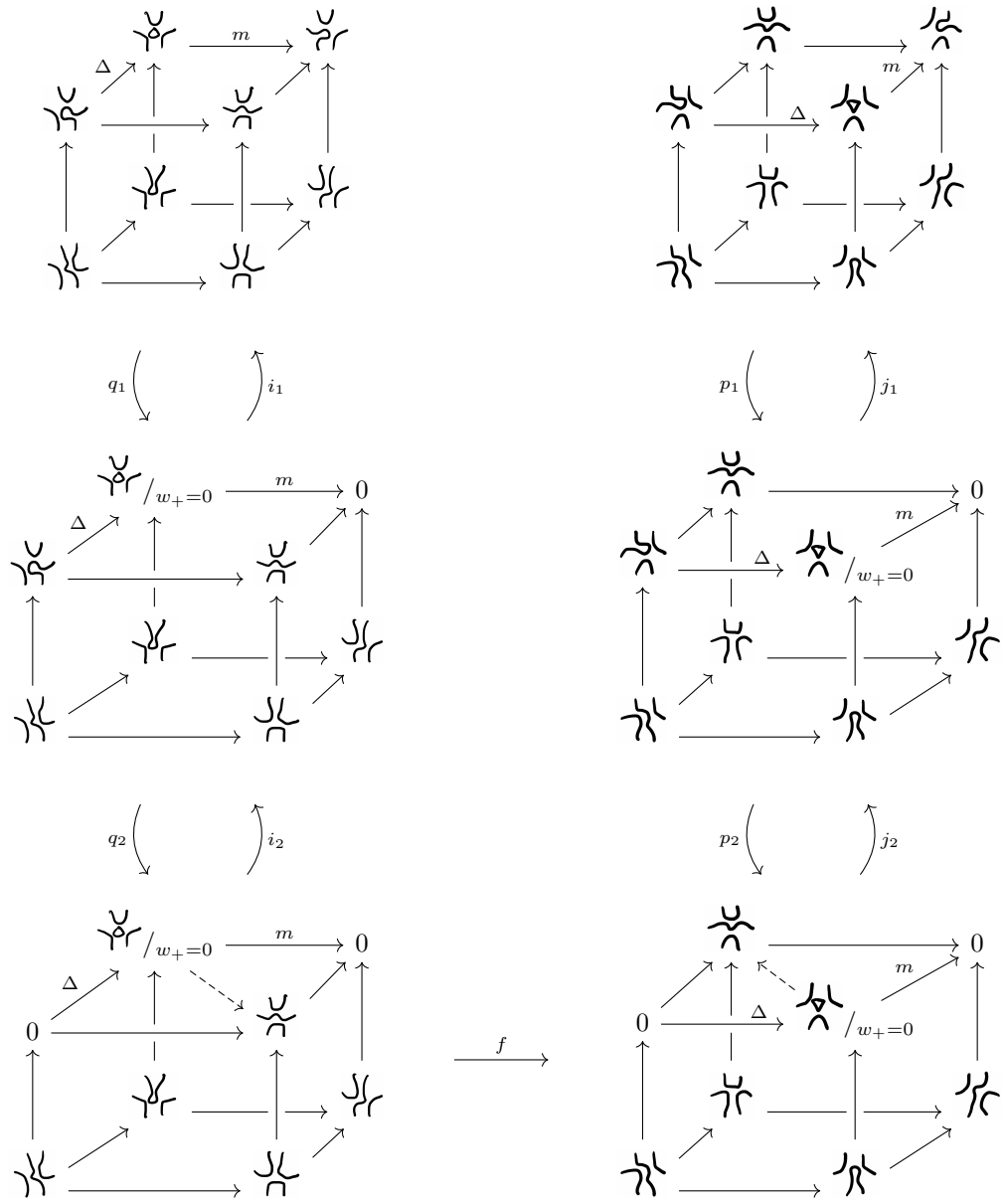


FIGURE 6. RIII 不变性中涉及的复形。我们省略了次数平移。

步骤 2：在 $\mathcal{C}/\mathcal{C}'$ 和 $\mathcal{D}/\mathcal{D}'$ 上的结构。与 RII 情形类似，我们有子复形 $C' \subset C$ 和 $D' \subset D$，它们是 L_∞-子模；见图 7。由于C' 和 D' 是子模，商空间 $\mathcal{C}/\mathcal{C}'$ 和 $\mathcal{D}/\mathcal{D}'$ 作为L_∞-模没有高阶运算。或者，这种商空间结构与通过以下方式得到的结构一致

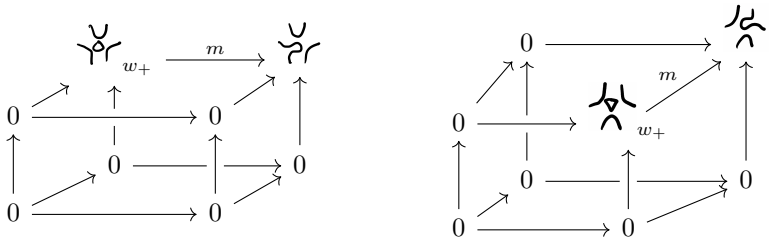


FIGURE 7. 复形 C' 和 D'。 w_+ 表示平凡圆标记为 w_+。

上链收缩

$$H \circlearrowright \mathcal{C} \underset{i_1}{\overset{q_1}{\rightleftarrows}} \mathcal{C}/\mathcal{C}' \qquad \text{and} \qquad K \circlearrowright \mathcal{D} \underset{j_1}{\overset{p_1}{\rightleftarrows}} \mathcal{D}/\mathcal{D}'$$

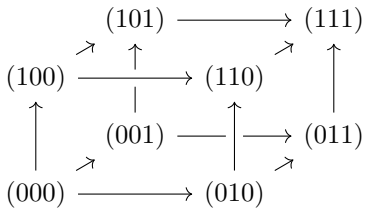
以转移该结构。这里，映射 i_1 和 i_2 是

$$i_1(z) = \begin{cases} z, & \text{if } z \in 000, 001, 010, 100 \\ z - m^{-1}(\partial_{\mathcal{C}} z), & \text{if } z \in 011, 101, 110 \\ 0, & \text{if } z \in 111 \end{cases}$$

and

$$j_1(z) = \begin{cases} z, & \text{if } z \in 000, 001, 010, 100 \\ z - m^{-1}(\partial_{\mathcal{D}} z), & \text{if } z \in 011, 101, 110 \\ 0, & \text{if } z \in 111 \end{cases}$$

上面的坐标对应立方体的不同顶点，即



步骤 3：关于 $(\mathcal{C}/\mathcal{C}')/\mathcal{C}''$ 和 $(\mathcal{D}/\mathcal{D}')/\mathcal{D}''$上的结构。为了从 $\mathcal{C}/\mathcal{C}'$ 过渡到 $(\mathcal{C}/\mathcal{C}')/\mathcal{C}''$，并从 $\mathcal{D}/\mathcal{D}'$ 过渡到 $(\mathcal{D}/\mathcal{D}')/\mathcal{D}''$，我们通过在 $(\mathcal{C}/\mathcal{C}')/\mathcal{C}''$ 中施加关系 $\beta_1 = \tau_1\beta_1$，并在 $(\mathcal{D}/\mathcal{D}')/\mathcal{D}''$中施加关系 $\beta_2 = \tau_2\beta_2$，来识别顶点 101 和 110 中的元素，这与 RII 情形类似。与之前一样，我们并非对一个子模取商，因此需要从 $\mathcal{C}/\mathcal{C}'$ 和 $\mathcal{D}/\mathcal{D}'$传递结构。为此，我们定义映射 i_2 和 j_2。令

$$i_2(z) = \begin{cases} z, & \text{if } z \in 000, 010, 011, 110 \\ z - \Delta^{-1}(\partial_{\mathcal{C}/\mathcal{C}'} z), & \text{if } z \in 001 \\ 0, & \text{if } z \in 100, 111 \end{cases}$$

注意，若 $z \in 101$，则 z 可通过 τ_1 等价于 **110** 中的某个元素。此外，令

$$j_2(z) = \begin{cases} z, & \text{if } z \in 000, 001, 011, 101 \\ z - \Delta^{-1}(\partial_{\mathcal{D}/\mathcal{D}'} z), & \text{if } z \in 010 \\ 0, & \text{if } z \in 100, 111 \end{cases}$$

我们再次注意到，如果 $z \in 110$，那么 z 通过 τ_2 等价于 **101** 中的某个元素。然后，如果我们定义 $T\colon\ \mathcal{C}/\mathcal{C}' \to \mathcal{C}/\mathcal{C}'$ 以及 $S\colon\ \mathcal{D}/\mathcal{D}' \to \mathcal{D}/\mathcal{D}'$，则

$$T(z) = \begin{cases} \Delta^{-1}(z), & \text{if } z \in 101 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \qquad \text{and} \qquad S(z) = \begin{cases} \Delta^{-1}(z), & \text{if } z \in 110 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

both

$$T \circlearrowright \mathcal{C}/\mathcal{C}' \underset{i_2}{\overset{q_2}{\rightleftarrows}} (\mathcal{C}/\mathcal{C}')/\mathcal{C}'' \qquad \text{and} \qquad S \circlearrowright \mathcal{D}/\mathcal{D}' \underset{j_2}{\overset{p_2}{\rightleftarrows}} (\mathcal{D}/\mathcal{D}')/\mathcal{D}''$$

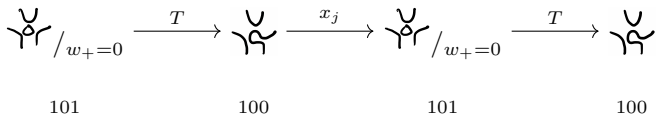
满足上链收缩的要求。特别地，这使我们能够将 $\mathcal{C}/\mathcal{C}'$ 和 $\mathcal{D}/\mathcal{D}'$ 上的 L_∞-模结构分别转移到它们各自的商复形上。

步骤 4： $(\mathcal{C}/\mathcal{C}')/\mathcal{C}''$ **和** $(\mathcal{D}/\mathcal{D}')/\mathcal{D}''$ **没有高阶运算**。接下来的目标是证明，在 $(\mathcal{C}/\mathcal{C}')/\mathcal{C}''$ 或 $(\mathcal{D}/\mathcal{D}')/\mathcal{D}''$ 上不存在高阶结构。我们将说明 $(\mathcal{C}/\mathcal{C}')/\mathcal{C}''$ 的情形。$(\mathcal{D}/\mathcal{D}')/\mathcal{D}''$ 的情形是类似的。事实上，由于 $\mathcal{C}/\mathcal{C}'$ 没有高阶 L_∞-模运算，转移后的结构为

$$k'_n(x_1, \dots, x_{n-1}, m) = \sum_{\substack{\tau \in S(1,\dots,1) \\ i_1 = \cdots = i_{n-1} = 1}} q \circ A_{n-1} \circ (\tau^\bullet \otimes i_2)$$

见图5。我们将证明，对于任意 $\tau \in S_{n-1}$，$q \circ A_{n-1} \circ (\tau^\bullet \otimes i_2) = 0$。也就是说，对于 $n \geq 3$，只需证明，对于 $x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \in \mathfrak{sl}_2(\wedge)^{dg}$的任意取值，$q \circ A_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, i_2(m)) = 0$，其中 $i_1, \dots, i_{n-1} = 1$ 出现在 A_{n-1} 的定义中。

步骤 4.1：情形 $n > 3$。我们先讨论情形 $n > 3$。由于 T 仅在顶点**101**上非零，因此若要使 $q \circ A_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, i_2(m))$ 非零，它必须包含一个非零的复合



这里，映射 x_j 表示由元素 $x_j \in \mathfrak{sl}_2(\wedge)^{dg}$作用。我们将证明，若 x_j 是基 $\{e, f, h, v_2, v_{-2}, \tilde{v}_0, d, D, x\}$中的任意元素，那么这一复合为零。事实上，$x_j$不可能是 e，f，h，因为它必须改变一个同调次数，才能在顶点**101**中有非零像。此外，模去关系 $w_+ = 0$ 后，元素v_2，v_{-2}，$\tilde{v}_0$和 D的作用全都是零映射。最后，若 $x_j = -x = [d, D]$，那么位于顶点**101**中的分支是

$$D_{101} d_{10*} + D_{10*} d_{100} + d_{101} D_{10*} + d_{10*} D_{100}$$

例如，记号 D_{101} 表示 D 中在顶点**101**处保留下来的分支，而 d_{10*} 表示沿边 $100 \to 101$ 作用后得到的 d 的分支。现在我们注意到，中间项 $D_{10*} d_{100}$ 和 $d_{101} D_{10*}$ 均为零，因为关系 $w_+ = 0$ 蕴含 D_{10*} 是零映射。此外，项 $D_{101} d_{10*}$ 和 $d_{10*} D_{100}$相互抵消，因为 d_{10*} 只是在顶点**100**处的分辨中附加一个标记为 w_- 的平凡圆。

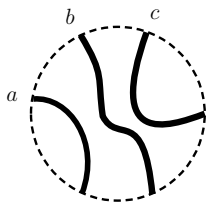


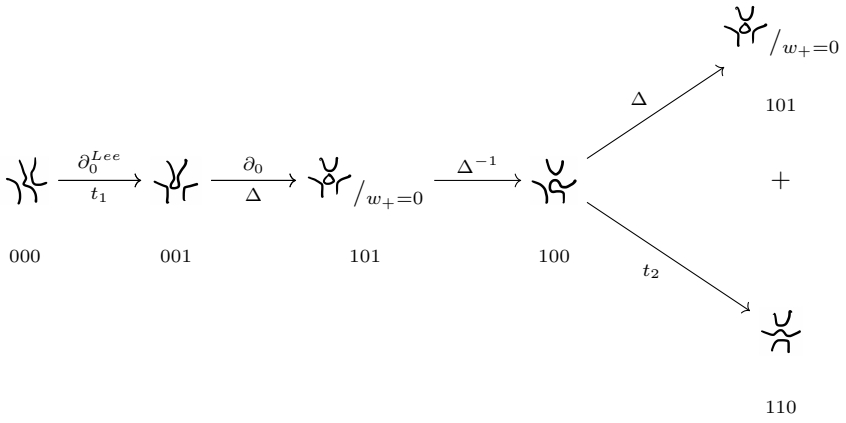
FIGURE 8. 顶点 000 中的每条弦都属于一个圆。将这些圆记为 a、 b和 c。

因此，我们已将可能非零的 $q \circ A_{n-1}(x_1,\ x_2,\ \ldots\ldots,\ x_{n-1},\ i_2(m))$ 缩减为以下两种情况之一：$q \circ A_2(x_1,\ x_2,\ i_2(m))$，或 $q \circ A_{n-1}(x_1,\ x_2,\ \ldots\ldots,\ x_{n-1},\ i_2(m))$，其中 $x_2 = \cdots = x_{n-2} = d$。

步骤 4.2：情形 $n = 3$。现在我们考察情形 $n = 3$。根据$q \circ A_2(x_1, x_2, i_2(m))$的公式，我们需要 $x_1 \cdot i_2(m)$位于顶点 101 中。这意味着 m 要么位于顶点 000 中，要么位于顶点 001 中。如果 $m \in 000$，那么 x_1 唯一的可能取值是 $x_1 = x$。但是

$$x \cdot m = -[d, D] \cdot m = \partial_0 \partial_0^{Lee} m + \partial_0^{Lee} \partial_0 m$$

由于边界映射 ∂_{*01} 是一个分裂映射，且 $w_+ = 0$ 在顶点 101 中， $\partial_0^{Lee} = 0$ 沿着这条边。因此我们只有一项 $\partial_0 \partial_0^{Lee} m$。所以，我们需要关注以下复合映射



其中 t_1， t_2可以是合并或分裂。令 a， b， c表示顶点 000 中三条股线所属的圆；参见图 8。于是有四种情况： $a = b = c$、$a = b \neq c$、 $a \neq b = c$ 或 $a \neq b \neq c$。

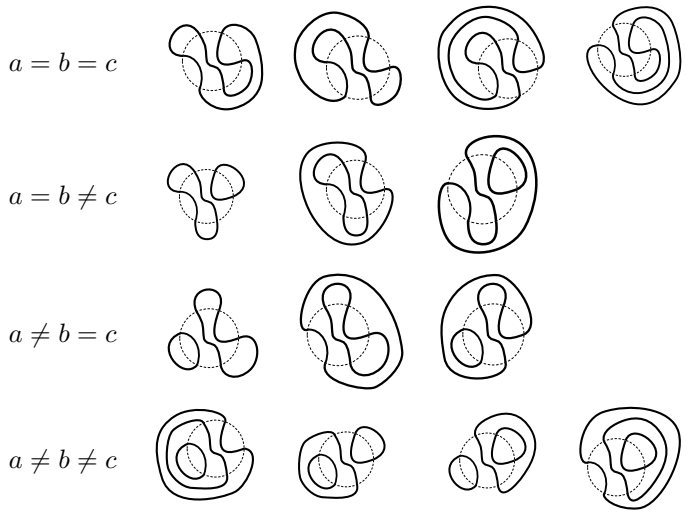


FIGURE 9. 这幅图展示了圆 a、b 和 c 的所有可能构型。

我们没有画出基点；基点可以位于虚线圆之外的任意位置 .
We 也没有画出来自其他交叉解析的其他可能圆 .

步骤 4.2.1： $m \in 000$ **和** $a = b = c$。如果 $a = b = c$，那么在每种情况下， t_1 都是分裂映射，而 t_2 是合并映射。由于 ∂_0^{Lee}必须非零，我们必须将圆标记为 w_-。这迫使我们对 100 中的 $w_+ \otimes w_+$ 进行标记；见图 10。

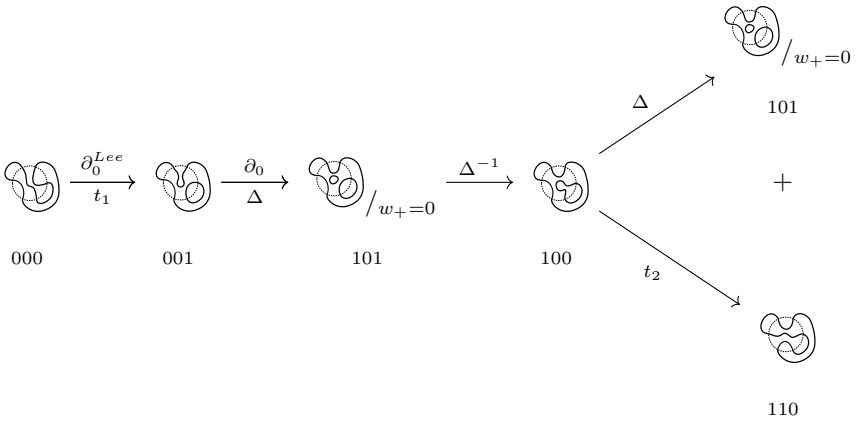


FIGURE 10. 四种情形中的第一种，其中 $a = b = c$。在每种情况下，000 中圆的标记都必须是 w_-，这迫使我们对 100 中的 $w_+ \otimes w_+$进行标记。

x_2的可能取值为 $\{e, f, h, v_2, v_{-2}, \tilde{v}_0, d, D, x\}$。它不能是 e， f， h，因为 x_2必须使同调次数改变 1。此外， v_2， v_{-2} 和 $\tilde{v}_0$ 均为零映射，因为我们只涉及平凡圆。标记 $w_+ \otimes w_+$ 意味着 D 是零

映射。最后，由 d 或 x 作用得到的项在取商空间$(\mathcal{C}/\mathcal{C}')/\mathcal{C}''$时会相互抵消。例如，若我们施加 d，则关系 $\beta_1 = \tau_1\beta_1$ 将施加 d_{10*} 和 d_{1*0}得到的项对应起来，因此它们会相互抵消。另一方面，若我们施加 x，则在顶点 101 和 110 处得到的项

$$\underbrace{d_{10*}D_{100} + d_{101}D_{10*} + D_{10*}d_{100} + D_{101}d_{10*}}_{\text{vertex } 101} + \underbrace{d_{1*0}D_{100} + d_{110}D_{1*0} + D_{1*0}d_{100} + D_{110}d_{1*0}}_{\text{vertex } 110}$$

现在，涉及 D_{10*} 和 D_{1*0} 的项为零，因为顶点101中的 $w_+ = 0$ 以及顶点100中的两个圆都标记为 w_+。剩下的是

$$d_{10*}D_{100} + D_{101}d_{10*} + d_{1*0}D_{100} + D_{110}d_{1*0}$$

由于顶点100中的 w_+ 标记， D_{101} 和 D_{110} 中唯一非零的部分来自在分辨中的其他圆之间应用 D 。因此，取商空间时 $D_{101}d_{10*}$ 和$D_{110}d_{1*0}$ 会被识别，因而彼此抵消。 $d_{10*}D_{100}$ 和$d_{1*0}D_{100}$ 项也会抵消。

步骤 4.2.2： $m \in 000$ **和** $a = b \neq c$。如果 $a = b \neq c$，那么在每种情况下， t_1 都是一个分裂映射，且 t_2 也是一个分裂映射。同样，我们需要为 t_1引入平凡圆，否则$\partial_0^{Lee} = 0$；见图 11。

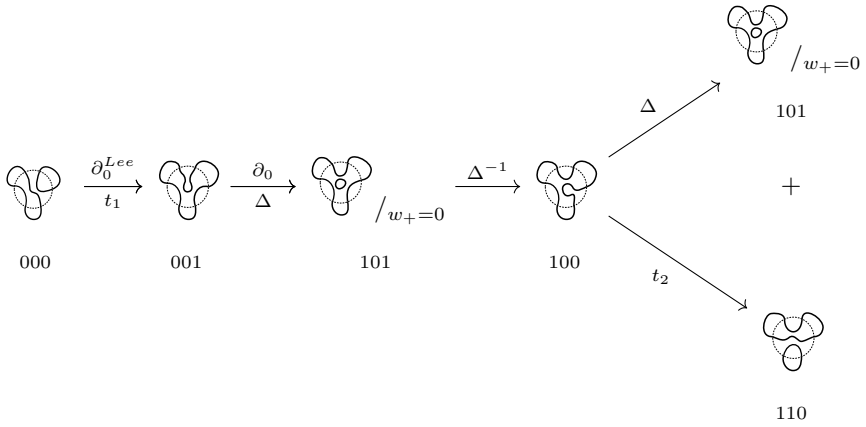


FIGURE 11. 三个情形中的第一个，涉及 $a = b \neq c$。000 中的圆的标记必须是 $w_- \otimes w_-$，这迫使 100 中的 w_+ 采用相应的标记。

由于顶点 100 中的圆必须标记为 w_+，通过与 $a = b = c$情形类似的论证， v_2、 v_{-2}、 $\tilde{v}_0$、 D 作用后的结果全都是 0，而通过d 或 x 作用得到的项在我们取$\mathcal{C}/\mathcal{C}'/\mathcal{C}''$的商空间时会相互抵消。注意到，在顶点 100 中通过 x 作用时，各项会在商空间中抵消，这一点与之前略有不同。为明确说明这一点，我们像处理 $a = b = c$ 情形那样，先考察这些项

$$\underbrace{d_{10*}D_{100} + d_{101}D_{10*} + D_{10*}d_{100} + D_{101}d_{10*}}_{\text{vertex } 101} + \underbrace{d_{1*0}D_{100} + d_{110}D_{1*0} + D_{1*0}d_{100} + D_{110}d_{1*0}}_{\text{vertex } 110}$$

现在， $d_{10*}D_{100}$ 和 $d_{1*0}D_{100}$ 将在商空间中抵消。此外，由于顶点101中的关系 $w_+ = 0$ ， D_{10*} 是零映射。 w_+ 标签表明 $d_{110}D_{1*0}$ 为零。还需要

证明这些项

$$D_{101}d_{10*} + D_{1*0}d_{100} + D_{110}d_{1*0}$$

消去。将这些圆标记为 100 到 $c_1 \otimes \cdots \otimes c_n \otimes w_+$。我们的思路是证明 $D_{110}d_{1*0}$ 的一部分（涉及 c_i 本身的部分）会与 $D_{101}d_{10*}$ 消去，而其余部分会与 $D_{1*0}d_{100}$ （涉及 w_+ 的部分）消去。事实上，我们可以将 $D_{110}d_{1*0}$ 项写为

$$\begin{aligned} D_{110}d_{1*0} &= D_{110}(c_1 \otimes \cdots \otimes c_n \otimes w_+ \otimes w_-) + D_{110}(c_1 \otimes \cdots \otimes c_n \otimes w_- \otimes w_+) \\ &= D^c_{110}(c_1 \otimes \cdots \otimes c_n \otimes w_+ \otimes w_-) + D^c_{110}(c_1 \otimes \cdots \otimes c_n \otimes w_- \otimes w_+) \\ &\quad + D^{w_+}_{110}(c_1 \otimes \cdots \otimes c_n \otimes w_+ \otimes w_-) + D^{w_+}_{110}(c_1 \otimes \cdots \otimes c_n \otimes w_- \otimes w_+) \\ &\quad + D^{w_-}_{110}(c_1 \otimes \cdots \otimes c_n \otimes w_+ \otimes w_-) + D^{w_-}_{110}(c_1 \otimes \cdots \otimes c_n \otimes w_- \otimes w_+) \end{aligned}$$

其中， D^c_{110} 是 D_{110} 中仅涉及圆 c_1、.....、 c_n 之间交叉的部分； D^{w_+} 是 D_{110} 中仅涉及与标记为 w_+ 的圆交叉的部分； D^{w_-} 是 D_{110} 中仅涉及与标记为 w_- 的圆交叉的部分。根据 Lee 微分的定义，这些标记意味着 $D^{w_+}_{110}(c_1 \otimes \cdots \otimes c_n \otimes w_+ \otimes w_-) = D^{w_+}_{110}(c_1 \otimes \cdots \otimes c_n \otimes w_- \otimes w_+) = 0$，因此

$$\begin{aligned} D_{110}d_{1*0} &= D^c_{110}(c_1 \otimes \cdots \otimes c_n \otimes w_+ \otimes w_-) + D^c_{110}(c_1 \otimes \cdots \otimes c_n \otimes w_- \otimes w_+) \\ &\quad + D^{w_-}_{110}(c_1 \otimes \cdots \otimes c_n \otimes w_- \otimes w_+) + D^{w_-}_{110}(c_1 \otimes \cdots \otimes c_n \otimes w_+ \otimes w_-) \end{aligned}$$

另一方面， $D_{101}d_{10*}$ 可以写成

$$\begin{aligned} D_{101}(c_1 \otimes \cdots \otimes c_n \otimes w_+ \otimes w_-) &= D^c_{101}(c_1 \otimes \cdots \otimes c_n \otimes w_+ \otimes w_-) \\ &\quad + D^w_{101}(c_1 \otimes \cdots \otimes c_n \otimes w_+ \otimes w_-) \end{aligned}$$

其中， D^w_{101} 是 D_{101} 中涉及与标记为w_+ 的（最外层）圆或标记为 w_-的圆发生交叉的部分。顶点101中的 w_+ 标记以及关系 $w_+ = 0$ 意味着 $D^w_{101}(c_1 \otimes \cdots \otimes c_n \otimes w_+ \otimes w_-) = 0$。在商空间（$\mathcal{C}/\mathcal{C}'$）$/\mathcal{C}''$中， $D^c_{101}(c_1 \otimes \cdots \otimes c_n \otimes w_+ \otimes w_-)$与下式等同:

$$D_{110}(c_1 \otimes \cdots \otimes c_n \otimes w_+ \otimes w_-) + D_{110}(c_1 \otimes \cdots \otimes c_n \otimes w_- \otimes w_+)$$

因此，还需要考察 $D_{1*0}d_{100}$ 项，我们可以将其写成

$$\begin{aligned} D_{1*0}d_{100}(c_1 \otimes \cdots \otimes c_n \otimes w_+) &= D_{1*0}d^c_{100}(c_1 \otimes \cdots \otimes c_n \otimes w_+) \\ &\quad + D_{1*0}d^w_{100}(c_1 \otimes \cdots \otimes c_n \otimes w_+) \end{aligned}$$

由于 w_+ 标记， $D_{1*0}d^c_{100}(c_1 \otimes \cdots \otimes c_n \otimes w_+) = 0$，因此还需证明

$$D_{1*0}d^w_{100}(c_1 \otimes \cdots c_n \otimes w_+)$$

and

$$D^{w_+}_{110}(c_1 \otimes \cdots \otimes c_n \otimes w_- \otimes w_+) + D^{w_-}_{110}(c_1 \otimes \cdots \otimes c_n \otimes w_+ \otimes w_-)$$

在 $(\mathcal{C}/\mathcal{C}')/\mathcal{C}''$ 中相消。事实确实如此，因为要计算 $D^{w_+}_{110}(c_1 \otimes \cdots \otimes c_n \otimes w_- \otimes w_+)$，我们只需考虑这样的交叉：一个标记为 w_- 的圆 c_i 与 w_- 合并，或标记为 w_- 的圆分裂。计算 $D^{w_-}_{110}(c_1 \otimes \cdots \otimes c_n \otimes w_+ \otimes w_-)$ 时也一样。另一方面，要计算 $D_{1*0}d^w_{100}(c_1 \otimes \cdots \otimes c_n \otimes w_+)$，我们同样分两种情况。第一种情况包括一个标记为 w_- 的圆 c_i 与 w_+ 合并的交叉。这些项会与上述第一种情况中的项相消。第二种情况包括 w_+ 分裂为 $w_- \otimes w_+ + w_+ \otimes w_-$ 的交叉。这些项会与上述第二种情况中的项相消。

步骤 4.2.3： $m \in 000$ **和** $a \neq b = c$。现在我们可以研究 $a \neq b = c$ 的情况。在此情形下，t_1 是分裂映射，而 t_2 是合并映射；参见图12。

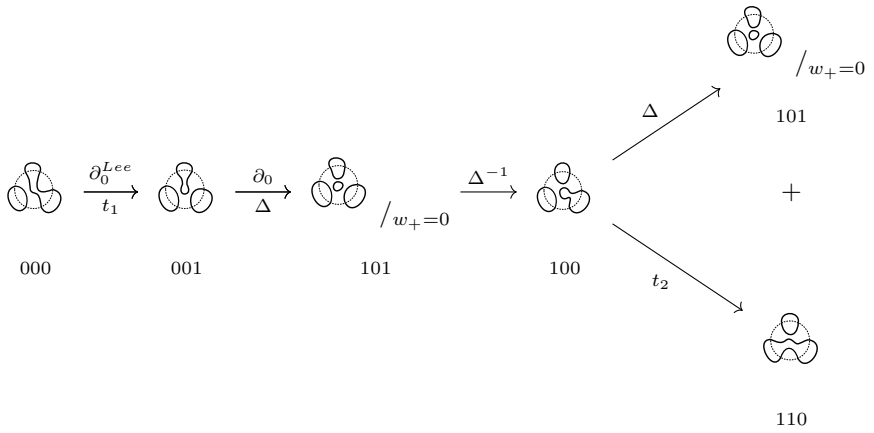


FIGURE 12. 三个 $a \neq b = c$ 情形中的第一个。000 中圆的标记必须是 $w_- \otimes w_-$，这就确定了 100 中 $w_- \otimes w_+ \otimes w_+$ 的标记。

每种情况下，000 中的标记必须是 $w_- \otimes w_-$，这会迫使 100 中的 $w_- \otimes w_+ \otimes w_+$ 在每种情况下都采用相应的标记。同样，v_2，v_{-2}，$\tilde{v}_0$，D 全都为 0；类似的论证表明，由 d 或 x 作用得到的项，在我们取商空间到 $(\mathcal{C}/\mathcal{C}')/\mathcal{C}''$ 时会相消。

步骤 4.2.4： $m \in 000$ **和** $a \neq b \neq c$。最后，如果 $a \neq b \neq c$，那么 t_1 是合并映射，而t_2 是合并映射；参见图13。

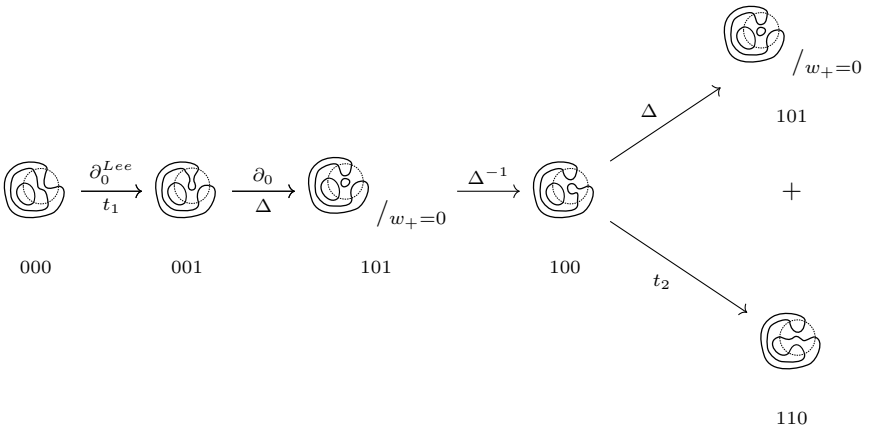


FIGURE 13. 四个 $a \neq b \neq c$ 情形中的第一个。000 中圆的标记必须是 $w_- \otimes w_- \otimes w_\bullet$，这就确定了 100 中 $w_+ \otimes w_\bullet$ 的标记。

在每种情况下，000 中的标记必须是 $w_- \otimes w_- \otimes w_\bullet$，其中 $w_\bullet$ 表示最内层圆可以标记为 w_+ 或 w_-。这迫使 100 中的标记为 $w_+ \otimes w_\bullet$

在所有情况下。最后一次验证 v_2，v_{-2}，$\tilde{v}_0$，D 都为 0；类似的论证表明，对 d 或 x 作用后得到的项，在取商空间得到 $(\mathcal{C}/\mathcal{C}')/\mathcal{C}''$时会相互抵消。总而言之，我们由此证明，对于所有 $m \in 000$ 以及 x_1，$x_2 \in \mathfrak{sl}_2(\wedge)^{dg}$，$q \circ A_2(x_1, x_2, i_2(m)) = 0$；并且对于所有 $m \in 000$ 以及x_1，$x_2 \in \mathfrak{sl}_2(\wedge)^{dg}$，我们也得出结论：$k_3'(x_1, x_2, m) = 0$。

步骤 4.2.5： $m \in 001$。接下来，我们考察 $q \circ A_2(x_1, x_2, i_2(m)) = 0$ 在 $m \in 001$的情形。RIII 立方体中相关的复合映射如图 14 所示。

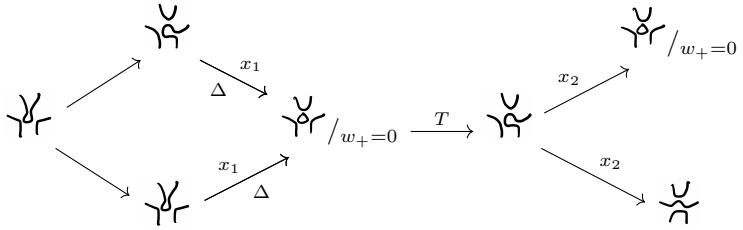


FIGURE 14. RIII 立方体的相关部分。如果我们从 001 中的一个元素开始，i_2：$(\mathcal{C}/\mathcal{C}')/\mathcal{C}'' \to \mathcal{C}/\mathcal{C}'$ 给出 001 和 100 中元素的一个和。接着我们作用 x_1，应用同伦 T，作用 x_2，然后再商回 $(\mathcal{C}/\mathcal{C}')/\mathcal{C}''$。

和之前一样，x_1的可能取值为 $\{e, f, h, v_2, v_{-2}, \tilde{v}_0, d, D, x\}$。由于 x_1需要增加 m的同调次数，因此它不能是 e、f或 h。因为我们是在模 $w_+ = 0$的意义下工作，∂^{Lee} 和 ∂_- 都是零映射，因此 D、v_2、v_{-2}和 $\tilde{v}_0$ 也都是零映射。此外，x_1 不能是 d，因为 001 和 100 中的分辨具有相同的标记，这意味着它们映射到 101 时会相互抵消。同样，两个分辨具有相同标记这一事实也意味着 $x = -[d, D]$ 中的项会相互抵消。由此得出，对于所有 $m \in 001$ 和 x_1，$q \circ A_2(x_1, x_2, i_2(m)) = 0$，且 $x_2 \in \mathfrak{sl}_2(\wedge)^{dg}$，因此我们由此证明了 $k_3'(x_1, x_2, m) = 0$ 在 $(\mathcal{C}/\mathcal{C}')/\mathcal{C}''$上成立。

步骤 4.2.6：结论。根据上述分类讨论，唯一可能的高阶运算是 k_n' for $n > 3$，其中可能包含 $q \circ A_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, i_2(m))$ 的非零项，且 $x_2 = \cdots = x_{n-2} = d$。但是，由于 d 只是链同伦 T 的逆，这会使模元素在顶点 101 和 100 之间来回循环。特别地，$q \circ A_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, i_2(m)) = q \circ A_2(x_1, x_{n-1}, i_2(m))$，而我们已经证明该式为零。由此得出，对于 $n > 3$，$(\mathcal{C}/\mathcal{C}')$ 上的 $/\mathcal{C}''$ 为 $k_n' = 0$，这就完成了 $(\mathcal{C}/\mathcal{C}')/\mathcal{C}''$ 不存在高阶运算的证明。$(\mathcal{C}/\mathcal{C}')/\mathcal{C}''$ 与 $(\mathcal{D}/\mathcal{D}')/\mathcal{D}''$ 之间的对称性意味着 $(\mathcal{D}/\mathcal{D}')/\mathcal{D}''$ 也不存在高阶运算。

步骤 5：立方体 $(\mathcal{C}/\mathcal{C}')/\mathcal{C}''$ 和 $(\mathcal{D}/\mathcal{D}')/\mathcal{D}''$ 是准同构的。接下来需要构造映射 f：$(\mathcal{C}/\mathcal{C}')/\mathcal{C}'' \to (\mathcal{D}/\mathcal{D}')/\mathcal{D}''$，并证明它保持（平凡的）$L_\infty$-模结构。事实上，在 $(\mathcal{C}/\mathcal{C}')/\mathcal{C}''$ 中，每个 $\beta_1 \in 101$ 都可通过 τ_1 等价于某个$\gamma_1 \in 110$。映射 f 会将 110 中的元素映射到其自身，但视为 $(\mathcal{D}/\mathcal{D}')/\mathcal{D}''$中的 101 元素，并保持立方体的底层不变。这是空间上的一个同构，而 Bar-Natan 证明该映射是链映射；见 [4]。因此，对于 $s \in \mathfrak{sl}_2(\wedge)^{dg}$和 $x \in (\mathcal{C}/\mathcal{C}')/\mathcal{C}''$，我们需要比较 $f(s \cdot x)$ 和 $s \cdot f(x)$，其中模结构为$s \cdot x = q_2(s \cdot i_2(x)) = q_2(q_1(s \cdot i_1(i_2(x)))$。

步骤 5.1：情形 $s \in \{e, f, h\}$。假设 $s \in \{e, f, h\}$。首先考察 z 位于立方体底面的情形。如果 z 位于 000 或 010 中，那么

$$q_2(q_1(s \cdot i_1(i_2(z))) = q_2(q_1(s \cdot z))$$

Note 注意我们滥用记号，并将 z 视为右侧的 $\mathcal{C}$ 中的一个元素。如果 z 属于 001，则

$$\begin{aligned} q_2(q_1(s \cdot i_1(i_2(z))) &= q_2(q_1(s \cdot i_1(z - \Delta^{-1}(\partial_{\mathcal{C}/\mathcal{C}'} z)))) \\ &= q_2(q_1(s \cdot z - s \cdot \Delta^{-1}(\partial_{\mathcal{C}/\mathcal{C}'} z))) \\ &= q_2(q_1(s \cdot z)) - q_2 q_1(s \cdot \Delta^{-1}(\partial_{\mathcal{C}/\mathcal{C}'} z)) \\ &= q_2(q_1(s \cdot z)) \end{aligned}$$

因为 $s \cdot \Delta^{-1}(\partial_{\mathcal{C}/\mathcal{C}'} z)$属于100，而它在商空间中对应于0。如果 z 属于011，则

$$\begin{aligned} q_2(q_1(s \cdot i_1(i_2(z))) &= q_2(q_1(s \cdot i_1(z))) \\ &= q_2(q_1(s \cdot (z - m^{-1} \partial_{\mathcal{C}} z))) \\ &= q_2(q_1(s \cdot z)) - q_2 q_1(s \cdot m^{-1}(\partial_{\mathcal{C}} z)) \\ &= q_2(q_1(s \cdot z)) \end{aligned}$$

因为 $s \cdot m^{-1}(\partial_{\mathcal{C}} z)$被标记为 w_+，而它在商空间中对应于0。类似的论证表明，若将 z 视为$(\mathcal{D}/\mathcal{D}')/\mathcal{D}''$中的一个元素，则$s \cdot z = p_2(p_1(s \cdot z))$。由于 f 在底面上是恒等映射，因此对于 $z \in 000$， 010， 001， 100，有 $s \cdot f(z) = f(s \cdot z)$。

如果 z 位于顶面，我们只需考虑 $z \in 110$的情况，因为 101 中的任意元素都等价于某个 $z \in 110$。那么在 $(\mathcal{C}/\mathcal{C}')/\mathcal{C}''$ 中，

$$\begin{aligned} s \cdot z = q_2(q_1(s \cdot i_1(i_2(z))) &= q_2(q_1(s \cdot i_1(z))) \\ &= q_2(q_1(s \cdot (z - m^{-1} \partial_{\mathcal{C}} z))) \\ &= q_2(q_1(s \cdot z)) - q_2 q_1(s \cdot m^{-1}(\partial_{\mathcal{C}} z)) \\ &= q_2(q_1(s \cdot z)) \end{aligned}$$

因为 $s \cdot m^{-1}(\partial_{\mathcal{C}} z)$ 被标记为 w_+，其商空间为 0。另一方面，若我们将 z 视为 $(\mathcal{D}/\mathcal{D}')/\mathcal{D}''$ 中 101 的一个元素，

$$\begin{aligned} s \cdot z = p_2(p_1(s \cdot j_1(j_2(z))) &= p_2(p_1(s \cdot j_1(z))) \\ &= p_2(p_1(s \cdot (z - m^{-1} \partial_{\mathcal{D}} z))) \\ &= p_2(p_1(s \cdot z)) - p_2 p_1(s \cdot m^{-1}(\partial_{\mathcal{D}} z)) \\ &= p_2(p_1(s \cdot z)) \end{aligned}$$

由于 f 将 $(\mathcal{C}/\mathcal{C}')/\mathcal{C}''$ 中 110 的元素恒等映射到 $(\mathcal{D}/\mathcal{D}')/\mathcal{D}''$ 中 101 的元素，因此在顶面上有 $s \cdot f(z) = f(s \cdot z)$。

步骤 5.2：情形 $s \in \{v_2, v_{-2}, \tilde{v}_0, d, D\}$。假设 $s \in \{v_2, v_{-2}, \tilde{v}_0, d, D\}$。我们再次从 z 位于 $(\mathcal{C}/\mathcal{C}')/\mathcal{C}''$ 的底面的情形开始。情形 $z \in 000$ 和 $z \in 011$ 很容易验证，因为 f 在底面上是恒等映射。若 $z \in 001$，则在 $(\mathcal{C}/\mathcal{C}')/\mathcal{C}''$ 中，

$$\begin{aligned} q_2(q_1(s \cdot i_1(i_2(z))) &= q_2(q_1(s \cdot i_1(z - \Delta^{-1}(\partial_{\mathcal{C}/\mathcal{C}'} z)))) \\ &= q_2(q_1(s \cdot z - s \cdot \Delta^{-1}(\partial_{\mathcal{C}/\mathcal{C}'} z))) \\ &= q_2(q_1(s \cdot z)) - q_2(q_1(s \cdot \Delta^{-1}(\partial_{\mathcal{C}/\mathcal{C}'} z))) \\ &= q_2(q_1(s_0 \cdot z + s_{*01} \cdot z + s_{0*1} \cdot z)) - q_2(q_1(s_{10*} \cdot \Delta^{-1} \partial_{\mathcal{C}/\mathcal{C}'} z + s_{1*0} \cdot \Delta^{-1} \partial_{\mathcal{C}/\mathcal{C}'} z)) \end{aligned}$$

以及在 $(\mathcal{D}/\mathcal{D}')/\mathcal{D}''$ 中，

$$s \cdot f(z) = p_2(p_1(s_0 \cdot f(z) + s_{*01} \cdot f(z) + s_{0*1} \cdot f(z)))$$

并且我们必须证明 f 将前者映射到后者。事实上，在 $(\mathcal{C}/\mathcal{C}')/\mathcal{C}''$ 中，项 $q_2q_1(s_{*01} \cdot z)$ 和 $q_2q_1(s_{10*} \cdot \Delta^{-1}(\partial_{\mathcal{C}/\mathcal{C}'}z))$ 将相互抵消。这是因为 $\Delta^{-1}(\partial_{\mathcal{C}/\mathcal{C}'}z)$ 与 z具有相同的标记，并且二者到 101 的映射都是分裂映射。此外，$(\mathcal{C}/\mathcal{C}')/\mathcal{C}'''$ 中的 $q_2q_1(s_{1*0} \cdot \Delta^{-1}(\partial_{\mathcal{C}/\mathcal{C}'}z))$ 将经由 f映射到 $s_{*01} \cdot f(z)$。这是因为 $\Delta^{-1}(\partial_{\mathcal{C}/\mathcal{C}'}z)$ 与 z 具有相同的标记，并且 $(\mathcal{C}/\mathcal{C}')/\mathcal{C}''$ 中的映射 ∂_{1*0} 与 $(\mathcal{D}/\mathcal{D}')/\mathcal{D}''$ 中的映射 ∂_{*01} 属于同一类型（即二者要么都是合并，要么都是分裂），这意味着 s 在这些映射中的作用相同。$z \in 010$ 的情形类似。接下来，假设 z 位于立方体的顶面。如果 $z \in 110$，那么

$$\begin{aligned} s \cdot z = q_2(q_1(s \cdot i_1(i_2(z))) &= q_2(q_1(s \cdot i_1(z))) \\ &= q_2(q_1(s \cdot (z - m^{-1}\partial_{\mathcal{C}}z))) \\ &= q_2(q_1(s_{110} \cdot z)) - q_2q_1(s_{101} \cdot m^{-1}(\partial_{\mathcal{C}}z)) \\ &= q_2(q_1(s_{110} \cdot z)) \end{aligned}$$

其中，$s_{110} \cdot z$ 是 $s \cdot z$ 中保留在 110 中的部分，而 $s_{101} \cdot m^{-1}(\partial_{\mathcal{C}}z)$是$s \cdot m^{-1}(\partial_{\mathcal{C}}z)$中保留在 101 中的部分。但后者在取商后为 0，因为它由 w_+标记。另一方面，若将 z 视为（$(\mathcal{D}/\mathcal{D}')/\mathcal{D}''$中 101 的一个元素，

$$\begin{aligned} s \cdot z = p_2(p_1(s \cdot j_1(j_2(z))) &= p_2(p_1(s \cdot j_1(z))) \\ &= p_2(p_1(s \cdot (z - m^{-1}\partial_{\mathcal{D}}z))) \\ &= p_2(p_1(s_{101} \cdot z)) - p_2p_1(s_{110} \cdot m^{-1}(\partial_{\mathcal{D}}z)) \\ &= p_2(p_1(s_{101} \cdot z)) \end{aligned}$$

其中，$s_{101} \cdot z$ 是 $s \cdot z$ 中保留在 101 中的部分，而 $s_{110} \cdot m^{-1}(\partial_{\mathcal{D}}z)$是$s \cdot m^{-1}(\partial_{\mathcal{D}}z)$中保留在 110 中的部分。与之前类似，后者在取商后为 0，因为它由 w_+标记。由于 f 将（$(\mathcal{C}/\mathcal{C}')/\mathcal{C}''$ 中 110 的元素恒等映射到（$(\mathcal{D}/\mathcal{D}')/\mathcal{D}''$中 101 的元素，我们得出，在顶面上，$s \cdot f(z) = f(s \cdot z)$。

步骤 5.3：情形 $s = x = -[d, D]$。最后，假设 $s = x = -[d, D]$。对于$z \in (\mathcal{C}/\mathcal{C}')/\mathcal{C}''$,

$$f(s \cdot z) = f((-dD - Dd) \cdot z) = -df(D \cdot z) - Df(d \cdot z) = (-dD - Dd) \cdot f(z) = s \cdot f(z)$$

步骤 5.4：结论。总之，我们已经证明，对于 $\mathfrak{sl}_2(\wedge)^{dg}$ 的基中的每个元素 s，$f(s \cdot z) = s \cdot f(z)$。由此我们得出结论：$f : (\mathcal{C}/\mathcal{C}')/\mathcal{C}'' \to (\mathcal{D}/\mathcal{D}')/\mathcal{D}''$ 是一个 L_∞- 模拟同构，因此在拟同构意义下，CKh(L) 上的 L_∞-模结构在第三 Reidemeister 变换下保持不变。□

7.2. () 的不变性-模结构。现在我们已经证明 CKh(L) 上的 $\mathfrak{sl}_2(\wedge)_{dg}$ L_∞-模结构在 Reidemeister 变换下保持不变，也可以证明 CKh(L) 上的 $\mathfrak{sl}_2(\wedge)$ L_∞-模结构同样保持不变。

定理 7.4。在 L_∞-拟同构意义下，$\mathfrak{sl}_2(\wedge)$ L_∞-模结构在 *Reidemeister* 变换下保持不变。

证明。这是因为，CKh(L) 上的 $\mathfrak{sl}_2(\wedge)$ L_∞-模结构，是通过沿着一个 L_∞-代数同态 $I : H(\mathfrak{sl}_2(\wedge)^{dg}) \to \mathfrak{sl}_2(\wedge)^{dg}$ 限制标量，从 $\mathfrak{sl}_2(\wedge)_{dg}$ L_∞-模结构得到的。特别地，限制标量保留 L_∞-拟同构（见 [6]），因此将标量限制函子应用于

在 $\mathfrak{sl}_2(\wedge)^{dg}$ 的不变性证明中构造的拟同构，可得到这些复形作为 L_∞-模、在 $H(\mathfrak{sl}_2(\wedge))$ 上的拟同构。最后，$\mathfrak{sl}_2(\wedge)$ L_∞-模结构是不变的，因为 $\mathfrak{sl}_2(\wedge)$ 是 $H(\mathfrak{sl}_2(\wedge)^{dg})$ 的一个 L_∞-子代数。□

8. The L_∞-module structure on $\mathrm{AKh}(L)$

本节将说明，环形 Khovanov 同调 $\mathrm{AKh}(L)$ 具有一种在 Reidemeister 变换下保持不变的 L_∞-模结构。

定理 8.1。设 L 是一个环带链环。$\mathrm{AKh}(L)$ 上存在一种 L_∞-模结构，在 *Reidemeister* 变换下保持不变。它在 L_∞-拟同构意义下良定义。

证明。情形可由下图概括。

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{sl}_2(\wedge)_{dg} & \longrightarrow & \mathrm{CKh}(L) \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ \mathfrak{sl}_2(\wedge) & \dashrightarrow & \mathrm{AKh}(L) \end{array}$$

定理 7.4 证明了，$L_\infty(L)$ 上关于 $\mathfrak{sl}_2(\wedge)$ 的 L_∞-模结构在 L_∞-拟同构意义下，在 Reidemeister 变换下保持不变。根据定理 4.11，借助任意链收缩 $\mathrm{CKh}(L) \to \mathrm{AKh}(L)$，$\mathrm{AKh}(L)$ 继承了关于 $\mathfrak{sl}_2(\wedge)$ 的 L_∞-模结构。根据引理 4.12，$\mathrm{AKh}(L)$ 与 $\mathrm{CKh}(L)$ 准同构，因此，如果 L 和 L' 相差若干个 Reidemeister 变换，则有下图：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{CKh}(L) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{CKh}(L') \\ \downarrow\cong & & \downarrow\cong \\ \mathrm{AKh}(L) & \dashrightarrow & \mathrm{AKh}(L') \end{array}$$

这表明 $\mathrm{AKh}(L)$ 和 $\mathrm{AKh}(L')$ 作为 $\mathfrak{sl}_2(\wedge)$ 上的 L_∞-模是准同构的，因此，这种 L_∞-模结构在 L_∞-拟同构意义下是良定义的。□

9. Examples

本节将探讨若干纽结和链环的 L_∞-模结构。

例 9.1. 设 L 是 S^3 中任意一个链环，其中 ∂^{Lee} 在 Khovanov 同调上非零。将基点放置在远离链环的位置，我们便可将 L 视为环带链环。若以 k_n 表示 $\mathrm{AKh}(L)$ 上的 L_∞-模运算，则 ∂_0^{Lee} 将在 $\mathrm{AKh}(L)$ 上给出相应的非平凡 $k_3(v_2,\ v_{-2},\ m)$。事实上，$\mathrm{AKh}(L)$ 上的 L_∞-模结构由上链收缩 $\mathrm{CKh}(T \circlearrowright \quad L \underset{i}{\overset{q}{\leftrightarrows}} \quad L\ .)$ $\mathrm{AKh}(\ )$ 诱导而来。若 k_n' 是 $\mathrm{CKh}(L)$ 上的 L_∞-模运算，则下式给出了 $k_3(x_1,\ x_2,\ m)$ 的公式。

$$k_3(x_1,\ x_2,\ m) = k_3'(x_1,\ x_2,\ m) + q \circ k_2'(x_1,\ T \circ k_2(x_2,\ i(m))) + q \circ k_2'(x_2,\ T \circ k_2(x_1,\ i(m)))$$

这些运算消失了，因为其中涉及的所有圆都是平凡的。

例 9.2. 在上面的例子中，假设我们将一个平凡结 U 绕在基点周围。设 $w \in \mathrm{AKh}(L)$ 是一个在 ∂_0^{Lee}作用下不平凡的生成元。选取一个尊重 $\mathrm{CKh}(U \sqcup L) = V \otimes \mathrm{CKh}(L)$ 的上链收缩后，在 $\mathrm{AKh}(U \sqcup L)$ 中，生成元$v_\pm \otimes w$ 在 k_2 和 k_3 作用下都不平凡。

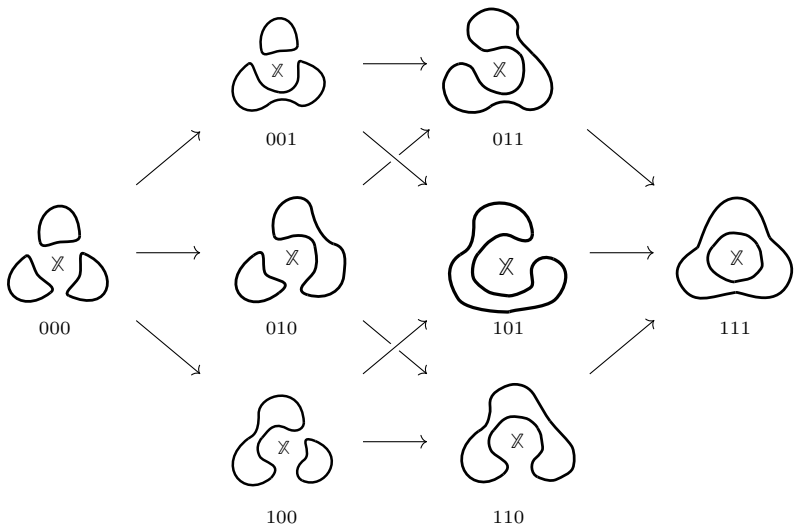


FIGURE 15. 以中心为基点的左手三叶结的分解立方体。

例 9.3. 基点位于中心的左手三叶结是一个纽结的例子，其中 K $\mathrm{AKh}(K)$ 同时具有非平凡的 k_2 和 k_3 运算；见图 15。

事实上，在分辨 000 中，$k_3(v_2,\ v_{-2},\ w_-\otimes w_-\otimes w_-) = \partial_0^{Lee}(w_-\otimes w_-\otimes w_-)$ 在同调中非零。此外，通常的模作用 $\mathfrak{sl}_2(\wedge)$ 对分辨 111 中的生成元 $v_+\otimes v_+$ 的作用非平凡。注意，镜像（右手三叶结）在最低同调次数上没有非平凡的 k_3 运算。

例 9.4。 上述例子可推广到任何以中心为基点的环面纽结或链环。如果所有来自最低同调次数的边界映射都是合并映射，那么每个圆都标记为 w_- 的分辨将具有非平凡的 k_3 运算，并且该模将在最高同调次数的某个生成元上非平凡地作用。

上述例子表明，对于环带链环 L，$\mathrm{AKh}(L)$ 可以同时具有非平凡的 k_2 和 k_3 运算。当 L 是一个分裂链环（即至少有一个分支不相交）时，某个特定生成元也可能同时具有非平凡的 k_2 和 k_3 运算。另一方面，本节最后提出一个关于非分裂链环的问题。

问题 9.5. 是否存在一个非分裂链环 $L\subset A\times I$，使得 $\mathrm{AKh}(L)$ 含有一个同调类，$\mathfrak{sl}_2(\wedge)$ 的 k_2 和 k_3 运算在该同调类上均非平凡？换言之，对于非分裂环带链环 L，是否存在 $m\in\mathrm{AKh}(L)$ 以及 x、y_1、$y_2\in\mathfrak{sl}_2(\wedge)$，使得$k_2(x,m)\neq 0$ 且 $k_3(y_1,y_2,m)\neq 0$?

10. APPENDIX

本附录包含定理 4.11 证明中所呈公式的图示表示。

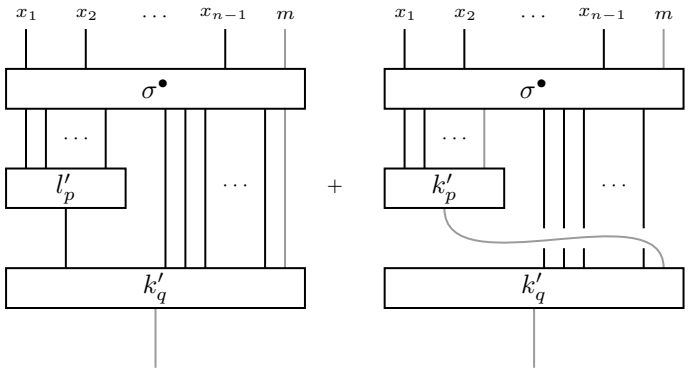
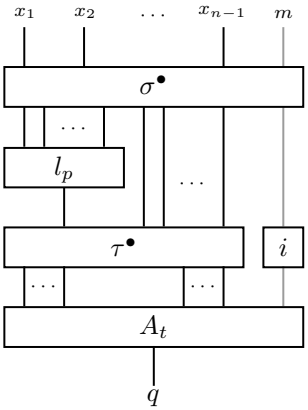
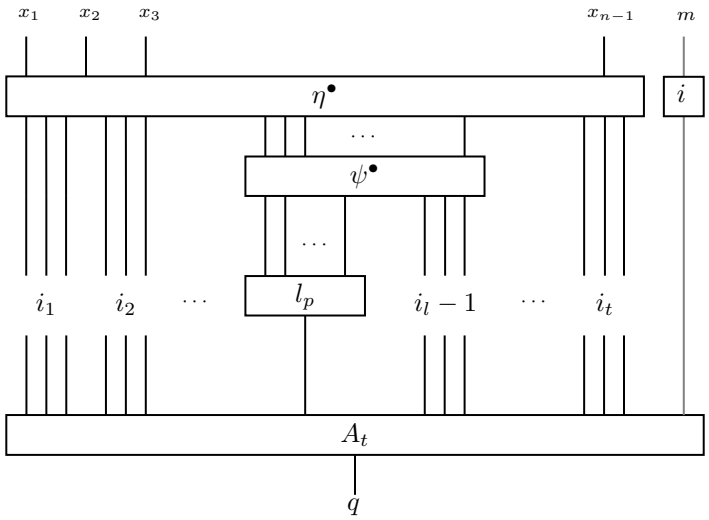


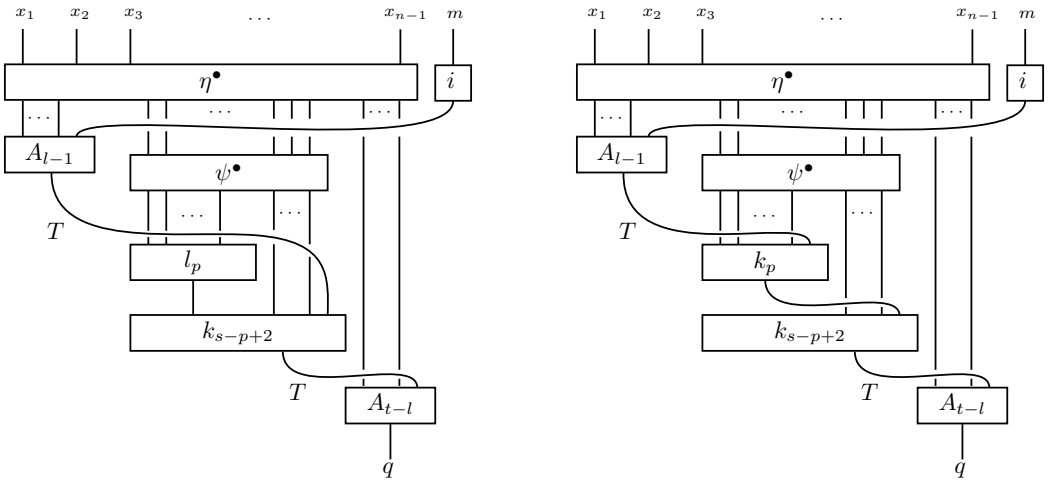
FIGURE 16. [6]中的 L_∞-模关系的图示。



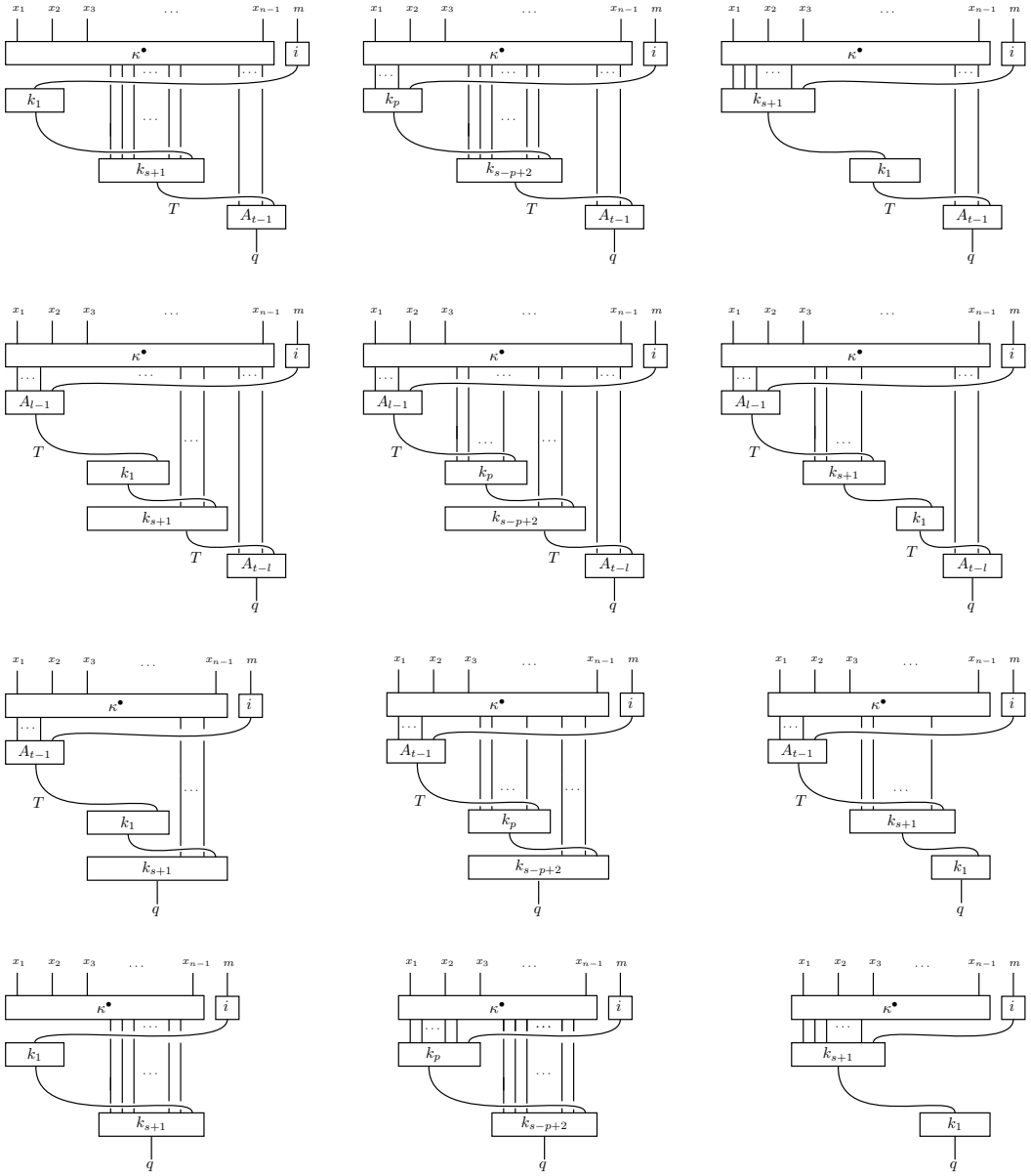
步骤 **1**。我们从 L_∞-模关系左侧的项开始，并将其替换为 k'_q 的定义。



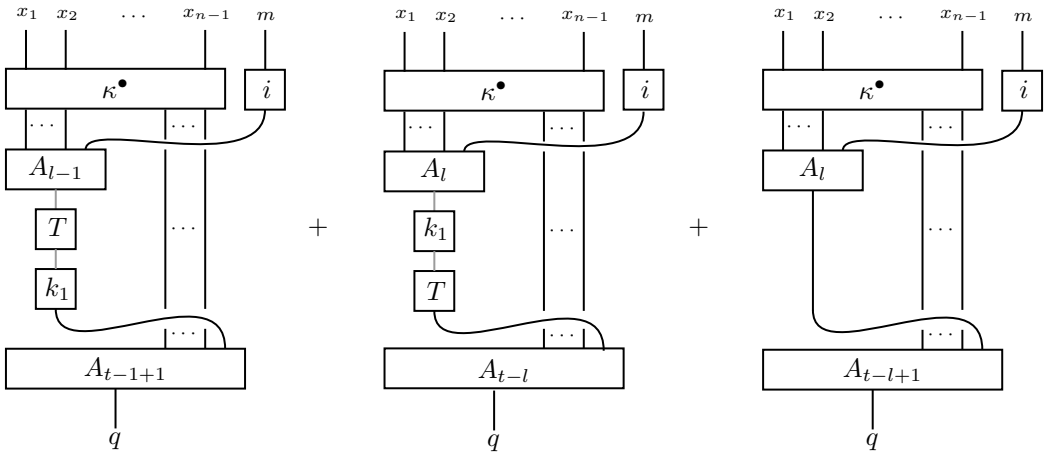
步骤 2。根据非交错置换的定义，步骤 1 中的 l_p 项会进入由 τ确定的某个大小为 i_1、.....、i_t 的盒子的第一个元素。根据这一观察，我们可以将 σ 和 τ 合并为一个非交错置换 η。



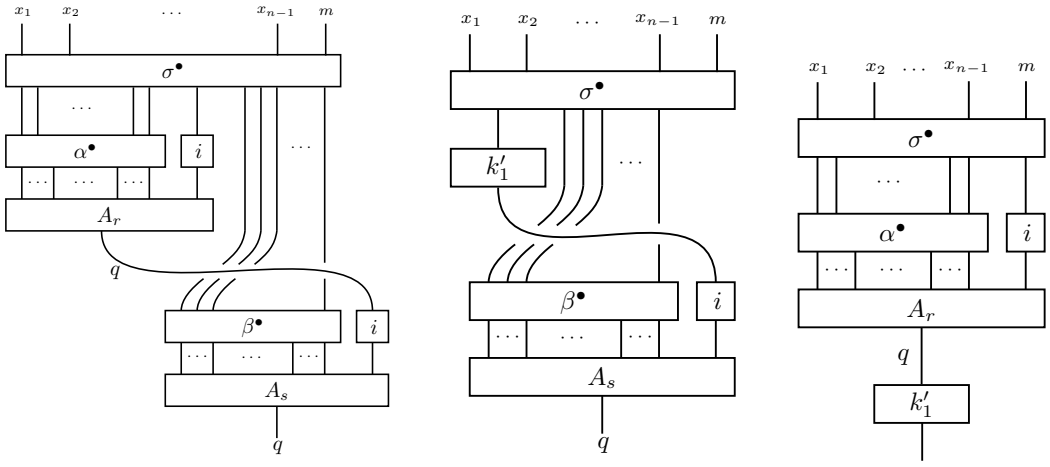
步骤 3。展开 A_t的定义后，上图左侧表示证明中的第二项。此处未画出 $l=1$、 $l=t$和 $p=n-1$ 的情形。应用 L_∞-模关系后即可得到右侧。



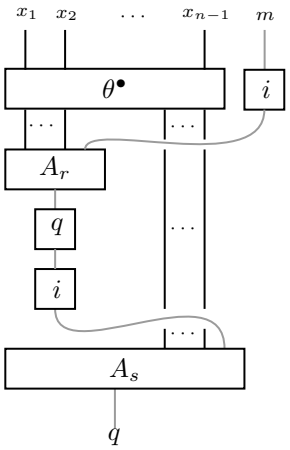
步骤 **4.** 将置换 ψ 和 η 合并为 κ。步骤三中有四项，本图中的每一行分别表示其中一项，其中分别考虑了 $p = 1$、$2 \leq p \leq s$和 $p = s + 1$ 这几种情形（从左至右排列）。对于 $1 < p < s + 1$，我们可以将 k_p 和k_{s-p+2} 运算合并为 A_t 运算，从而得到步骤 **4** 中的公式。



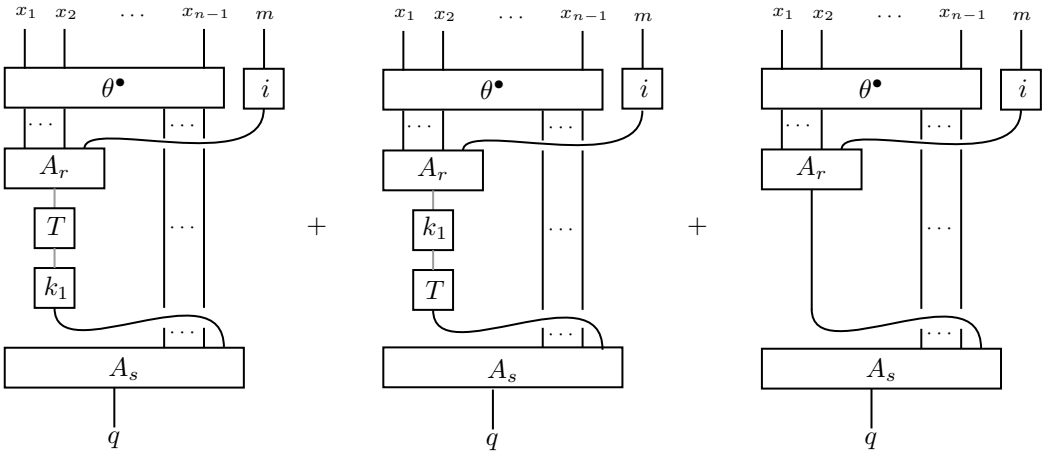
步骤 5。我们可以将步骤 4 中的一些项合并。在上方步骤 4 的图示中，将第一行的各项标记为 1、2、3，第二行的各项标记为 4、5、6，第三行的各项标记为 7、8、9，最后一行的各项标记为 10、11、12。于是，项 4 和 7 合并后得到左侧上方的第一项。中间项由项 3 和 6 合并得到。最后一项由项 2、5、8 和 11 合并得到。此外，项 1 和 10 也会合并，项 9 和 12 也一样，但这里没有画出这两种情况。



步骤 7。现在聚焦于原始 L_∞-模关系的右侧，我们根据 k_n' 的定义将其代入。左边是情形 $2 \le p \le n-1$，中间是情形 $p=1$，右边是情形 $p=n-1$。利用 $i \circ k_1' = k_1 \circ i$ 和 $k_1' \circ q = q \circ k_1$ 这一事实后，我们得到步骤 7 中的公式。



步骤 8。将 σ、 α 和 β 合并为一个非交错置换 θ。上图展示的是情形 $2 \leq p \leq n-1$。省略了情形 $p = 1$ 和 $p = n-1$。



步骤 9。在步骤 8 中，我们可以用 $\mathrm{Id}_M + k_1 \circ T + T \circ k_1$替换 $i \circ q$。结果恰好就是步骤 5 中的内容。同样，图中未包含情形 $p = 1$ 和 $p = n-1$。

References

[1] Rostislav Akhmechet、Vyacheslav Krushkal 和 Michael Willis。《关于环带Khovanov谱上的 $\mathfrak{sl}_2$ 作用》。 *Adv. Math.*，408（A 辑）：论文编号 108581，共 65 页，2022 年。[2] Michael P. Allocca。《 L_∞ 模的同态》。 *J. Homotopy Relat. Struct.*，9（2）：285–298，2014 年。[3] Marta M. Asaeda、J´ozef H. Przytycki 和 Adam S. Sikora。《曲面上 I-丛的 Kauffman括号骨架模的范畴化》。 *Algebr. Geom. Topol.*，4：1177–1210，2004 年。[4] Dror Bar-Natan。《论 Khovanov 对 Jones 多项式的范畴化》。 *Algebr. Geom. Topol.*，2：337–370，2002 年。[5] Fraser Binns 和 Gage Martin。《结 Floer 同调、链环Floer同调与链环检测》。 `arXiv:2011.02005` 2020 ，。

[6] Champ Davis。《 L_∞模的标量限制》。 `arXiv:2208.13942`，2022 年。

[7] J. Elisenda Grigsby、Anthony M. Licata 和 Stephan M. Wehrli。《环形 Khovanov 同调与打结的 Schur-Weyl 表示》。 *Compos. Math.*，154（3）：459–502，2018 年。[8] Mikhail Khovanov。《Jones 多项式的范畴化》。 *Duke Math. J.*，101（3）：359–426，2000 年。[9] Andreas Kraft 和 Jonas Schnitzer。《 L_∞代数及其同伦论导论》。arXiv:2207.01861，2022 年。[10] Jos´e Manuel Moreno Fern´andez。《有理同伦论中 L_∞ 代数的 Milnor-Moore 定理》。 *Math. Z.*，300（3）：2147–2165，2022 年。[11] Hoel Queffelec 和 David E. V. Rose。《缝合环形 Khovanov-Rozansky 同调》。

Trans. Amer. , （）：– *Math. Soc.* 370 2 1285 1319，2018 年。[12] Lawrence P. Roberts。《双重分支覆盖中的结 Floer 同调》。 *Geom. Topol.*，17 467，2013 1 413（）：–。[13] Jim Stasheff。《 *L*-无穷与 *A*-无穷结构》。 *High. Struct.*，3（1）：292–326，2019 年。[14] Matthew Stoffregen 和 Melissa Zhang。《Khovanov 同调中的局部化》。 arXiv:1810.04769，2018 年。[15] Yi Xie 和 Boyu Zhang。《含辫结的缝合流形的瞬子 floer 同调》。2019 年。[16] Melissa Zhang。《

2 *Algebr. Geom.* -周期链环 *Topol.* 18 2 1147 1194, 2018 的环形 Khovanov 同调秩不等式》。， （）：–。

University of Oregon; Department of Mathematics; 108C University Hall; Eugene, OR 9740 3
Email address: champd@uoregon.edu