arXiv:2302.00790v1 [math.FA] 1 Feb 2023

# Dunkl 框架下有界平均振荡与 VMO 函数的奇异积分交换子注记

´Jacek Dziubanski 和 Agnieszka Hejna

ABSTRACT. 在配备根系 $R$、重数函数 $k \geq 0$ 和关联测度 $dw(\mathbf{x}) = \prod_{\alpha\in R} |\langle \mathbf{x}\ \alpha\rangle|^{k(\alpha)}\, d\mathbf{x}$ 的 $\mathbb{R}^N$ 上，我们考察一个（非径向）核 $K(\mathbf{x})$，它具有类似于奇异积分经典理论中的性质，以及与 $K$ 相关联的 Dunkl 卷积算子 $\mathrm{T}f = f * K$。假设 $b$ 属于齐次型空间 $X = (\mathbb{R}^N, \|\cdot\|, dw)$ 上的有界平均振荡空间，我们证明交换子 $[b,\mathrm{T}]f(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x})\mathrm{T}f(\mathbf{x}) - \mathrm{T}(bf)(\mathbf{x})$ 是 $L^p(dw)$ 上的有界算子，对所有$1 < p < \infty$均成立。此外，若 $b \in \mathrm{VMO}(X)$，则 $[b,\mathrm{T}]$ 在 $L^p(dw)$ 上是紧算子。本文推广了 Han、Lee、Li 和 Wick 的结果。

## 1. INTRODUCTION

**1.1.** 引言。考虑 $\mathbb{R}^N$，其配备了一个根系 $R$ 和一个非负重数函数 $k \geq 0$。令 $dw(\mathbf{x}) = \prod_{\alpha\in R} |\langle \alpha,\ \mathbf{x}\rangle|^{k(\alpha)}\, d\mathbf{x}$ 为关联测度。对于$f \in L^1_{loc}(dw)$和可测有界集 $E \subset \mathbb{R}^N$，我们记

$$f_E := \frac{1}{w(E)} \int_E f(\mathbf{x})\, dw(\mathbf{x}). \tag{1.1}$$

令 $G$ 为由反射生成的 oxeter group generated by the reflections $\sigma_\alpha$, $\alpha \in R$. 对于 $E \subset \mathbb{R}^N$，我们定义 Coxeter 群

$$\mathcal{O}(E) = \{\sigma(\mathbf{x}) : \sigma \in G,\ \mathbf{x} \in E\}.$$

在 Han、Lee、Li 和 Wick [14] 中，作者研究了 Dunkl 框架下两类有界平均振荡空间和 VMO 空间，这些空间与两种距离相关：欧几里得距离 $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$以及轨道距离 $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \min_{\sigma\in G} \|\mathbf{x} - \sigma(\mathbf{y})\|$。空间 BMO 和 $\mathrm{BMO}_d$定义如下

$$\mathrm{BMO} = \{b \in L^1_{\mathrm{loc}}(dw) : \|b\|_{\mathrm{BMO}} < \infty\},\quad \|b\|_{\mathrm{BMO}} := \sup_B \frac{1}{w(B)} \int_B |b(\mathbf{x}) - b_B|\, dw(\mathbf{x}),$$

$$\mathrm{BMO}_d = \{b \in L^1_{\mathrm{loc}}(dw) : \|b\|_d < \infty\},\quad \|b\|_d := \sup_B \frac{1}{w(\mathcal{O}(B))} \int_{\mathcal{O}(B)} |b(\mathbf{x}) - b_{\mathcal{O}(B)}|\, dw(\mathbf{x}),$$

其中，上确界取遍所有欧几里得球 $B = B(\mathbf{y}\ r) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^N\colon \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\| < r\}$。空间 $\mathrm{BMO}_d$ 是 BMO 的真子空间（见[16]），并且

$$\|b\|_{\mathrm{BMO}} \leq C\|b\|_{\mathrm{BMO}_d} \quad \text{for } b \in \mathrm{BMO}_d.$$

关于 [14] 有界平均振荡函数与有界平均振荡函数的交换子$_d$ 函数与 Dunkl-Riesz 变换 $R_j$的研究。Dunkl-Riesz 变换是 Calder´ón-Zygmund 型算子，其形式定义为 $R_j = T_{e_j}(-\Delta_k)^{-1/2}$，其中 $T_{e_j}$ 是 Dunkl 算子（见（2.6））且

2020 年数学主题分类。主要分类：44A20、42B20、42B25、47B38、35K08、33C52、39A70。关键词和短语：有理 Dunkl 理论、根系、广义平移、奇异积分、交换子、有界平均振荡空间、Riesz 变换。

$\Delta_k = \sum_{j=1}^N T_{e_j}^2$ 是 Dunkl 拉普拉斯算子。Thangavelu 和 Xu [24]（在一维和乘积情形下）以及 Amri 和 Sifi [1]（在高维情形下）对它们进行了研究，并证明了它们在 $L^p(dw)$ 空间上的有界性。[14] 的一个主要结果断言，若$b \in$有界平均振荡$_d$，则交换子 $[b, R_j]f(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x})R_j f(\mathbf{x}) - R_j(b(\cdot)f(\cdot))(\mathbf{x})$ 在 $L^p(dw)$ 上是有界算子，其中 $1 < p < \infty$ 且

$$\|[b, R_j]\|_{L^p(dw)\to L^p(dw)} \lesssim \|b\|_{\mathrm{BMO}_d}. \tag{1.2}$$

反过来，如果对于 $b \in L^1_{\mathrm{loc}}(dw)$，交换子 $[b, R_j]$ 在某个$1 < p < \infty$下有界于 $L^p(dw)$，那么 $b \in$ 属于有界平均振荡，并且

$$\|b\|_{\mathrm{BMO}} \lesssim \|[b, R_j]\|_{L^p(dw)\to L^p(dw)}. \tag{1.3}$$

文献 [14] 的作者提出了如下问题：可能的下界 $\|b\|_{\mathrm{BMO}_d} \lesssim \|[b, R_j]\|_{L^p(dw)\to L^p(dw)}$是否成立。

本文的首要目标是改进式（1.2），证明其对 $b \in$ 有界平均振荡成立，也就是说，存在常数 $C_p > 0$ 使得

$$\|[b, R_j]\|_{L^p(dw)\to L^p(dw)} \le C_p\|b\|_{\mathrm{BMO}} \tag{1.4}$$

（见定理 3.1）。

请注意，式（1.4）对上述问题给出了否定答案，否则我们就会得到 $\|b\|_{\mathrm{BMO}_d} \lesssim \|[b, R_j]\|_{L^p(dw)\to L^p(dw)} \lesssim \|b\|_{\mathrm{BMO}}$，这是不可能的（见 [16]）。

[14] 的一个重要部分致力于研究 VMO 函数与 Dunkl-Riesz 变换的交换子的紧性。VMO 和 $\mathrm{VMO}_d$ 空间分别定义为 Lipschitz 空间 $\Lambda$ 和 $\Lambda_d$ 中紧支撑函数集合在范数 $\|\cdot\|_{\mathrm{BMO}}$ 和 $\|\cdot\|_{\mathrm{BMO}_d}$下的闭包。于是 $\mathrm{VMO}_d \subset$ VMO 以及 $\|b\|_{\mathrm{VMO}} \lesssim \|b\|_{\mathrm{VMO}_d}$和，得益于[5, 定理 4.1]，，VMO 的对偶空间是 Hardy 空间 $H^1$，其定义见 [2] 和 [10]。[14] 中的定理 1.5 表明，如果 $b \in \mathrm{VMO}_d$，那么对于所有 $1 < p < \infty$，交换子 $[b, R_j]$ 都是 $L^p(dw)$ 上的紧算子。我们的第二个目标是将这一结果推广到所有 $b \in$VMO（见定理 3.2）。实际上，我们将证明（1.2），并证明有界平均振荡函数和 VMO 函数与卷积型 Dunkl 奇异积分算子 T 的交换子 [b,T] 的紧性，其中要求相关核 $K(\mathbf{x})$ 满足一定的正则性条件。Dunkl–Riesz 变换是这类算子的基本例子。

我们指出，对于黎兹变换，1.3中证明的下界 [14]与上界（1.4）（见定理 3.1）共同将 Coifman、Rochberg 和 Weiss [4] 以及 Janson [15] 在欧几里得空间（$\mathbb{R}^N$，$d\mathbf{x}$）上得到的经典结果推广到了 Dunkl 框架。关于紧性，必要性结果 [14, 定理 1。5]与充分性结果（见定理 3.2）将 Uchiyama [26]关于通过黎兹变换的交换子刻画 VMO 函数的经典定理推广到了 Dunkl 理论。

## 2. Preliminaries

2.1. Dunkl 理论。本节介绍关于 Dunkl 算子理论的基本事实。更多细节请参阅 [7], [18], [19], 和 [20]。

我们考虑欧几里得空间 $\mathbb{R}^N$，其标量积为 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \sum_{j=1}^N x_j y_j$，其中 $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_N)$，$\mathbf{y} = (y_1, ..., y_N)$，范数为 $|\mathbf{x}|^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle$。

$\mathbb{R}^N$ 中的归一化根系是一个有限集 $R \subset \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$，满足 $R \cap \alpha\mathbb{R} = \{\pm\alpha\}$,$\sigma_\alpha(R) = R$, 并且对所有 $\alpha \in R$, $\|\alpha\| = \sqrt{2}$，其中 $\sigma_\alpha$ 定义为

$$\sigma_\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - 2\frac{\langle \mathbf{x}, \alpha\rangle}{\|\alpha\|^2}\alpha. \tag{2.1}$$

由反射 $\sigma_\alpha$, $\alpha \in R$ 生成的有限群 $G$ 称为根系的 Coxeter 群（反射群）。

重数函数是一个 $G$-不变函数 $k : R \to \mathbb{C}$，本文中将固定并 $\geq 0$。

关联测度 $dw$ 定义为 $dw(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$，其中

$$w(\mathbf{x}) = \prod_{\alpha\in R} |\langle \mathbf{x}, \alpha\rangle|^{k(\alpha)}. \tag{2.2}$$

设 $\mathbf{N} = N + \sum_{\alpha\in R} k(\alpha)$。那么，

$$w(B(t\mathbf{x}, tr)) = t^{\mathbf{N}} w(B(\mathbf{x}, r)) \ \text{ for all } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N,\ t, r > 0. \tag{2.3}$$

注意到　存在一个常数 $C > 0$，使得对所有 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ 和 $r > 0$，都有

$$C^{-1} w(B(\mathbf{x}, r)) \leq r^N \prod_{\alpha\in R} (|\langle \mathbf{x}, \alpha\rangle| + r)^{k(\alpha)} \leq C w(B(\mathbf{x}, r)), \tag{2.4}$$

因此 $dw(\mathbf{x})$ 是倍增的。此外，存在一个常数 $C \geq 1$，使得对每个 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ 以及所有 $r_2 \geq r_1 > 0$,

$$C^{-1}\Big(\frac{r_2}{r_1}\Big)^N \leq \frac{w(B(\mathbf{x}, r_2))}{w(B(\mathbf{x}, r_1))} \leq C\Big(\frac{r_2}{r_1}\Big)^{\mathbf{N}}. \tag{2.5}$$

对于 $\xi \in \mathbb{R}^N$，Dunkl 算子 $T_\xi$ 是方向导数 $\partial_\xi$ 的下列 $k$-变形，由差分算子给出:

$$T_\xi f(\mathbf{x}) = \partial_\xi f(\mathbf{x}) + \sum_{\alpha\in R} \frac{k(\alpha)}{2}\langle \alpha, \xi\rangle \frac{f(\mathbf{x}) - f(\sigma_\alpha(\mathbf{x}))}{\langle \alpha, \mathbf{x}\rangle}. \tag{2.6}$$

Dunkl 算子 $T_\xi$，由 [7], 引入，它们彼此可交换，并且相对于 $G$-不变测度 $dw$是斜对称的。

连通分支的闭包

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \ :\ \langle \mathbf{x}, \alpha\rangle \neq 0 \text{ for all } \alpha \in R\}$$

称为（闭）Weyl 室。我们注意到，$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 当且仅当 $\mathbf{x}$、$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$ 属于同一个闭 Weyl 室。

Let

$$Mf(\mathbf{x}) = \sup_{B\ni\mathbf{x}} \frac{1}{w(B)} \int_B |f(\mathbf{y})|\, dw(\mathbf{y}), \tag{2.7}$$

记作 $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|, dw)$ 上的（非中心）Hardy–Littlewood 极大函数 .

2.2. Dunkl 变换。对于固定的 y $\in \mathbb{R}^N$，Dunkl 核 x $\longmapsto E(x, y)$ 是该系统的唯一解

$$T_\xi f = \langle \xi, \mathbf{y} \rangle f, \quad f(0) = 1.$$

函数 $E(x,y)$ 是指数函数 $e^{\langle x,y\rangle}$ 的推广，它可以唯一延拓为 $\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N$ 上的全纯函数 $E(z, w)$。令 $f \in L^1(dw)$。我们将 $f$ 的 Dunkl 变换 $\mathcal{F}f$ 定义为

$$\mathcal{F}f(\xi) = \mathbf{c}_k^{-1} \int_{\mathbb{R}^N} f(\mathbf{x}) E(\mathbf{x}, -i\xi)\, dw(\mathbf{x}), \quad \mathbf{c}_k = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{2}}\, dw(\mathbf{x}) > 0 \tag{2.8}$$

Dunkl 变换是 $\mathbb{R}^N$ 上傅里叶变换的推广。它最初在 [8] 中针对 $k \geq 0$ 引入，并在更一般的背景下于 [6] 中进一步研究。已在 [8, 推论 2.7]（另见 [6, 定理 4.26]）中证明，它可以唯一延拓为 $L^2(dw)$ 上的等距映射。我们还有以下反演定理（[6, 定理 4.20]）：对于所有满足 $\mathcal{F}f \in L^1(dw)$ 的 $f \in L^1(dw)$，几乎处处于 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ 都有 $f(x) = (\mathcal{F})^2 f(-x)$。$\mathcal{F}$ 的逆变换 $\mathcal{F}^{-1}$ 具有如下形式

$$\mathcal{F}^{-1} f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_k^{-1} \int_{\mathbb{R}^N} f(\xi) E(i\xi, \mathbf{x})\, dw(\xi) = \mathcal{F}f(-\mathbf{x}) \quad \text{for } f \in L^1(dw). \tag{2.9}$$

2.3. Dunkl 平移。设 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$（定义在$\mathbb{R}^N$上的施瓦茨空间函数），且 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$。我们将 $f$ 的 Dunkl平移 $\tau_\mathbf{x} f$ 定义为

$$\tau_\mathbf{x} f(-\mathbf{y}) = \mathbf{c}_k^{-1} \int_{\mathbb{R}^N} E(i\xi, \mathbf{x})\, E(-i\xi, \mathbf{y})\, \mathcal{F}f(\xi)\, dw(\xi) = \mathcal{F}^{-1}(E(i\cdot, \mathbf{x}) \mathcal{F}f)(-\mathbf{y}). \tag{2.10}$$

Dunkl 平移最初由 [17]引入。该定义可以推广到不一定属于 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$的函数。例如，借助帕塞瓦尔定理，可以将 $L^2(dw)$函数 $f$ 的 Dunkl平移定义为

$$\tau_\mathbf{x} f(-\mathbf{y}) = \mathcal{F}^{-1}(E(i\cdot, \mathbf{x}) \mathcal{F}f(\cdot))(-\mathbf{y}) \tag{2.11}$$

（参见 [23, 定义 3.1]的 [17] ）。特别地，算子 $f \mapsto \tau_\mathbf{x} f$ 在$L^2(dw)$上是压缩映射。下文中，对于适当的函数 $g(x)$，我们记 $g(x, y) := \tau_\mathbf{x} g(-y)$。

我们需要以下关于紧支集函数的 Dunkl 平移支集的结果。

定理 2.1 ([9, 定理 1.7])。设 $f \in L^2(dw)$，supp $f \subseteq B(0, r)$，且 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$。那么

$$\operatorname{supp} \tau_\mathbf{x} f(-\cdot) \subseteq \mathcal{O}(B(\mathbf{x}, r)). \tag{2.12}$$

2.4. Dunkl卷积。假设 $f$、$g \in L^2(dw)$。广义卷积（或 Dunkl卷积）$f * g$ 定义为以下公式

$$f * g(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_k \mathcal{F}^{-1}\big((\mathcal{F}f)(\mathcal{F}g)\big)(\mathbf{x}), \tag{2.13}$$

等价地，可表示为

$$(f * g)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^N} f(\mathbf{y})\, \tau_\mathbf{x} g(-\mathbf{y})\, dw(\mathbf{y}) = \int_{\mathbb{R}^N} g(\mathbf{y})\, \tau_\mathbf{x} f(-\mathbf{y})\, dw(\mathbf{y}). \tag{2.14}$$

$f$、$g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ 的广义卷积在 [17] 中被研究，而在 [23]中，该定义被扩展到 $f$、$g \in L^2(dw)$。

2.5. 奇异积分核。考虑一个具有类似于经典理论中那些性质的（非径向）核 $K(\mathbf{x})$。具体而言，设 $s_0$ 为一个大于N的偶正整数，并在全文中固定不变。考虑一个函数 $K \in C^{s_0}$（$\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$），使得

$$\sup_{0<a<b<\infty} \left| \int_{a<\|\mathbf{x}\|<b} K(\mathbf{x})\, dw(\mathbf{x}) \right| < \infty, \tag{A}$$

$$\left| \frac{\partial^\beta}{\partial \mathbf{x}^\beta} K(\mathbf{x}) \right| \le C_\beta \|\mathbf{x}\|^{-\mathbf{N}-|\beta|} \quad \text{for all } |\beta| \le s_0, \tag{D}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon<\|\mathbf{x}\|<1} K(\mathbf{x})\, dw(\mathbf{x}) = L \text{ for some } L \in \mathbb{C}. \tag{L}$$

Set

$$K^{\{t\}}(\mathbf{x}) = K(\mathbf{x})(1 - \phi(t^{-1}\mathbf{x})),$$

其中 $\phi$ 是一个固定的径向 $C^\infty$-函数，其支集包含于单位球 $B(0,1)$ 中，并满足 $\phi(\mathbf{x}) = 1$对于 $\|\mathbf{x}\| < 1/2$。以下定理已在[11]中得到证明。

定理 2.2。 假设 (A) 和 (D) 成立，则

(i)（[11]中的定理 4.1 和 4.2）算子 $f \mapsto f * K^{\{t\}}$ 在 $L^p(dw)$ 上是有界的，对于 $1 < p < \infty$，且它们属于弱型 (1, 1)，其界与 $t > 0$ 无关；(ii)（[11]中的定理 3.7 和 4.3）进一步假设 (L)，则极限 $\lim_{t\to 0} f * K^{\{t\}}(\mathbf{x})$ 存在，并在 $L^p(dw)$ 上定义一个有界算子 T，对于 $1 < p < \infty$，该算子同样属于弱型 (1,1)。

## 3. Statement of the results

3.1. 交换子。为了定义交换子算子，我们回到极限算子 T 的定义。令 $0 < \varepsilon < \min(1, s_0 - \mathbf{N})$。对于任意 $t > 0$，记 $K^{\{t/2,t\}} := K^{\{t/2\}} - K^{\{t\}}$。于是 $K^{\{t/2,t\}}$ 是 $C^{s_0}(\mathbb{R}^N)$-函数，其支集包含于 $B(0,t) \setminus B(0,t/4)$ 中（参见[11, (3.1)]）。为简化记号，我们写作 $K_\ell = K^{\{2^{\ell-1},2^\ell\}}$。文献 [12, (4.24)、(4.25)] 证明，对于所有 $\mathbf{x}$、$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$ 和 $\ell \in \mathbb{Z}$，有

$$|K_\ell(\mathbf{x},\mathbf{y})| \le C \left(1 + \frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}{2^\ell}\right)^{-\varepsilon} w(B(\mathbf{x},2^\ell))^{-1/2} w(B(\mathbf{y},2^\ell))^{-1/2}, \tag{3.1}$$

(3.2)

$$\begin{aligned} &|K_\ell(\mathbf{x},\mathbf{y}) - K_\ell(\mathbf{x},\mathbf{y}')| \\ &\le C \frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{y}'\|^\varepsilon}{2^{\varepsilon\ell}} \left(1 + \frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}{2^\ell}\right)^{-\varepsilon} w(B(\mathbf{x},2^\ell))^{-1/2} \left(w(B(\mathbf{y},2^\ell))^{-1/2} + w(B(\mathbf{y}',2^\ell))^{-1/2}\right). \end{aligned}$$

此外，$K_\ell(\mathbf{x},\mathbf{y}) = K_\ell(-\mathbf{y}, -\mathbf{x})$，根据定理 4.6], 的证明

$$\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} |K_\ell(\mathbf{x},\mathbf{y})| \le C w(B(\mathbf{x}, d(\mathbf{x},\mathbf{y})))^{-1} \frac{d(\mathbf{x},\mathbf{y})^\varepsilon}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^\varepsilon} \tag{3.3}$$

对所有满足 $d(\mathbf{x},\mathbf{y})\neq 0$ 的 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^N$，以及

$$\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}|K_\ell(\mathbf{x},\mathbf{y})-K_\ell(\mathbf{x},\mathbf{y}')|\leq C\frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{y}'\|^\varepsilon}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^\varepsilon}w(B(\mathbf{x},d(\mathbf{x},\mathbf{y})))^{-1} \tag{3.4}$$

对于所有 $\mathbf{x}$、$\mathbf{y}$，$\mathbf{y}'\in\mathbb{R}^N$ 使得 $\|\mathbf{y}-\mathbf{y}'\|<\frac{d(\mathbf{x},\mathbf{y})}{2}$。数值 $\varepsilon>0$ 将在全文中固定。由 (3.3) 可知，函数

$$K(\mathbf{x},\mathbf{y})=\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}K_\ell(\mathbf{x},\mathbf{y}) \tag{3.5}$$

在 $d(\mathbf{x},\mathbf{y})>0$ 上定义良好，并且根据定理 2.2，它是算子 $\mathbf{T}$ 的关联核，即

$$\mathbf{T}f(\mathbf{x})=\int_{\mathbb{R}^N}K(\mathbf{x},\mathbf{y})f(\mathbf{y})\,dw(\mathbf{y}) \tag{3.6}$$

对于 $f\in L^p(dw)$ 且 $\mathbf{x}\notin\operatorname{supp} f$。

需要强调的是，由 $K(\mathbf{x},\mathbf{y})$ 得出的估计以及 (3.3) 和 (3.4) 在处理 Dunkl 框架中的一些调和分析问题时非常有用（参见 [22]）。

从现在起，我们固定一个核 $K\in C^{s_0}(\mathbb{R}^N\setminus\{0\})$，它满足 (A)、(L) 和 (D)，其中某个$s_0>\mathbf{N}$。设 $b\in$ 有界平均振荡。对于任意紧支撑的 $f\in L^p(dw)$，其中某个 $p>1$，我们定义

$$\mathcal{C}f(\mathbf{x})=[b,\mathbf{T}]f(\mathbf{x})=\lim_{m\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}(b(\mathbf{x})-b(\mathbf{y}))\sum_{\ell=-m}^{m}K_\ell(\mathbf{x},\mathbf{y})f(\mathbf{y})\,dw(\mathbf{y})=\lim_{m\to\infty}\mathcal{C}_mf(\mathbf{x}) \tag{3.7}$$

在任意 $L^{p_0}(dw$-范数下，式 (3.7) 中极限的存在性（假设 $1<p_0<p$）由引理 4.2证明。随后，定理 3.1 及其证明使得定义可扩展到所有$f\in L^p(dw)$。

3.2. 主要定理的陈述。我们的主要结果是以下两个定理。

定理 3.1。设 $p>1$。假设核 $K\in C^{s_0}(\mathbb{R}^N\setminus\{0\})$ 满足 (A)、(L)、(D)，其中 $s_0>\mathbf{N}$是某个偶整数，并且 $b\in$ 有界平均振荡。则存在常数 $C>0$，与 $b$ 无关，使得对所有 $f\in L^p(dw)$，都有

$$\|\mathcal{C}f\|_{L^p(dw)}\leq C\|b\|_{\mathrm{BMO}}\|f\|_{L^p(dw)}. \tag{3.8}$$

为了表述第二个定理，回顾一下：VMO 是紧支撑 Lipschitz 函数在 BMO 中的闭包，即满足以下条件的函数 $f$：$\sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{y}}\frac{|f(\mathbf{x})-f(\mathbf{y})|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}<\infty$。

定理 3.2。假设 $b\in$ VMO。对于 $1<p<\infty$，交换子 $\mathcal{C}$ 是 $L^p(dw)$ 上的紧算子。

为了证明这些定理，我们改编经典证明的思路（例如参见 [13]），以应用关于算子积分核的估计，这些积分核用轨道距离$d(\mathbf{x},\mathbf{y})$ 和欧几里得度量表示，见 (3.3) 和 (3.4)（另参见 [14]）。在某些地方，这些证明需要相当细致的分析。例如，我们利用 Coxeter 群对 $L^p(dw)$- 函数进行分解（见 (4.9)），或者将 $\mathbb{R}^N$ 上的积分拆分到各个 Weyl 室上（见 (4.10)）。

## 4. Proof of Theorem 3.1

Let 我们先从下面的引理开始。回忆一下， $b_{B(\mathbf{x},r)}$ 由 (1.1) 定义 .

引理 4.1. 存在常数 $C>0$，使得对所有 $b\in L^1_{\mathrm{loc}}(dw)$、 $r_1>r>0$、$\mathbf{x}$、$\mathbf{y}\in\mathbb{R}^N$ 以及 $\sigma\in G$，都有:

$$|b_{B(\mathbf{x},r)}-b_{B(\mathbf{x},r_1)}|\le C\log(r_1/r)\|b\|_{\mathrm{BMO}}, \tag{4.1}$$

$$|b_{B(\mathbf{x},r)}-b_{B(\mathbf{y},r)}|\le C\|b\|_{\mathrm{BMO}}\quad\text{provided }\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|\le 2r, \tag{4.2}$$

$$|b_{B(\mathbf{x},r)}-b_{B(\sigma(\mathbf{x}),r)}|\le C\log\left(\frac{\|\sigma(\mathbf{x})-\mathbf{x}\|}{r}+4\right)\|b\|_{\mathrm{BMO}}, \tag{4.3}$$

（John–Nirenberg 不等式）对于任意 $1\le s<\infty$，存在 $C_s>0$，使得对所有正整数 $j$，都有

$$\left(\frac{1}{w(B(\mathbf{x},2^jr))}\int_{B(\mathbf{x},2^jr)}|b(\mathbf{y})-b_{B(\mathbf{x},r)}|^s\,dw(\mathbf{y})\right)^{1/s}\le C_sj\|b\|_{\mathrm{BMO}}. \tag{4.4}$$

证明. 不等式 (4.1)、(4.2) 和 (4.4) 是度量空间中倍增测度的经典结果的推论（例如，参见 [3], [5], ，或 Dunkl 框架下的第 4] 节 [16, ）。为证明 (4.3)，注意若 $\|\mathbf{x}-\sigma(\mathbf{x})\|\le 2r$，则由 (4.2) 可得 (4.3)。假设$\|\mathbf{x}-\sigma(\mathbf{x})\|>2r$，并令 $j$ 为满足 $\|\mathbf{x}-\sigma(\mathbf{x})\|\le 2^jr$ 的最小正整数。于是$B(\mathbf{x}\ 2^{j+2}r)\cap B(\sigma(\mathbf{x})\ 2^{j+2}r)\ne\emptyset$。因此，应用 (4.1) 和 (4.2)，得到

$$\begin{aligned}&|b_{B(\mathbf{x},r)}-b_{B(\sigma(\mathbf{x}),r)}|\\&\le|b_{B(\mathbf{x},r)}-b_{B(\mathbf{x},2^{j+2}r)}|+|b_{B(\mathbf{x},2^{j+2}r)}-b_{B(\sigma(\mathbf{x}),2^{j+2}r)}|+|b_{B(\sigma(\mathbf{x}),2^{j+2}r)}-b_{B(\sigma(\mathbf{x}),r)}|\\&\le Cj\|b\|_{\mathrm{BMO}}\le C'\log\left(\frac{\|\mathbf{x}-\sigma(\mathbf{x})\|}{r}+4\right)\|b\|_{\mathrm{BMO}}.\end{aligned}$$

□

引理 4.2. 设 $p>p_0>1$。若 $f\in L^p(dw)$ 的支集为紧集，则对所有 $m\in\mathbb{Z}$ and，有 $\mathcal{C}_mf\in L^{p_0}(dw)$

$$\lim_{m\to\infty}\mathcal{C}_mf=\mathcal{C}f\ \ in\ L^{p_0}(dw).$$

证明。令 B(0, $r$) 为任意一个满足 supp $f\subseteq B$ 的球。记

$$\mathcal{C}_mf(\mathbf{x})=(b(\mathbf{x})-b_B)\sum_{\ell=-m}^{m}K_\ell*f(\mathbf{x})+\sum_{\ell=-m}^{m}K_\ell*((b-b_B)f))(\mathbf{x}).$$

根据 H¨older 不等式 可得， $s=p/p_0$ 并利用 John-Nirenberg 不等式 (4.4)，得到

$$\left(\int_B|b(\mathbf{x})-b_B|^{p_0}|f(\mathbf{x})|^{p_0}\,dw(\mathbf{x})\right)^{1/p_0}\le Cw(B)^{1/(p_0s')}\|b\|_{\mathrm{BMO}}\|f\|_{L^p(dw)},$$

其中 $s'>1$ 满足 $s+s'=ss'$，因此 $(b-b_B)f\in L^{p_0}(dw)$。因此，根据定理 2.2 (ii),

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{\ell=-m}^{m}K_\ell*((b-b_B)f))$$

在 $L^{p_0}(dw)$-范数下存在，且等于 $\mathbf{T}((b-b_B)f) \in L^{p_0}(dw)$. 同样，根据定理 2.2 (ii), 此极限

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{\ell=-m}^{m} K_\ell * f$$

在 $L^{p_0}(dw)$ 范数和 $L^p(dw)$-范数中存在，且等于 $\mathbf{T}f$。我们记 e

$$(b(\mathbf{x})-b_B)\mathbf{T}f(\mathbf{x}) = (b(\mathbf{x})-b_B)\mathbf{T}f(\mathbf{x})\chi_{5B}(\mathbf{x}) + (b(\mathbf{x})-b_B)\mathbf{T}f(\mathbf{x})\chi_{(5B)^c}(\mathbf{x}) =: g_1(\mathbf{x}) + g_2(\mathbf{x}).$$

我们将证明 $g_1$, $g_2 \in L^{p_0}(dw)$。对于 $g_1$，由 H¨older 不等式及 $s = p/p_0$John-Nirenberg 不等式（4.4），以及 $L^p(dw)$-有界性可知 T(定理 2.2 (ii))，于是得到

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{5B} |b(\mathbf{x})-b_B|^{p_0}|\mathbf{T}f(\mathbf{x})|^{p_0}\, dw(\mathbf{x})\right)^{1/p_0} \\
&\le C\left(\int_{5B} |b(\mathbf{x})-b_B|^{p_0 s'}\, dw(\mathbf{x})\right)^{1/(p_0 s')}\left(\int_{5B} |\mathbf{T}f(\mathbf{x})|^{p}\, dw(\mathbf{x})\right)^{1/p} \\
&\le C w(B)^{1/(p_0 s')}\|b\|_{\mathrm{BMO}}\|f\|_{L^p(dw)}.
\end{aligned}$$

为了证明 $g_2 \in L^{p_0}(dw)$，注意到由 (2.3) 和 (2.4)， $w(B(\mathbf{x}\ d(\mathbf{x},\mathbf{y})))\ \sim w(B(\mathbf{0},\|\mathbf{x}\|))\ = c\|\mathbf{x}\|^{\mathbf{N}}$ 当 $\mathbf{y}\ \in B$ 且 $\mathbf{x}\ \in (5B)^c$ 时成立。利用 (3.3) 可得

$$\begin{aligned}
\chi_{(5B)^c}(\mathbf{x})|\mathbf{T}f(\mathbf{x})| &\le C\chi_{(5B)^c}(\mathbf{x})\int_B \frac{|f(\mathbf{x})|}{w(B(\mathbf{x},d(\mathbf{x},\mathbf{y})))}\, dw(\mathbf{y}) \\
&\le C\int_B \frac{|f(\mathbf{x})|}{w(B(0,\|\mathbf{x}\|)))}\, dw(\mathbf{y}) \le C\|f\|_{L^p(dw)}\frac{w(B)^{1/p'}}{w(B(0,\|\mathbf{x}\|))}.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

因此,

$$\begin{aligned}
\|g_2\|^{p_0}_{L^{p_0}(dw)} &\le C\|f\|^{p_0}_{L^p(dw)} w(B)^{p_0/p'}\int_{\|\mathbf{x}\|>5r} \frac{|b(\mathbf{x})-b_B|^{p_0}}{w(B(0,\|\mathbf{x}\|))^{p_0}}\, dw(\mathbf{x}) \\
&\le C\|f\|^{p_0}_{L^p(dw)} w(B)^{p_0/p'}\sum_{j=1}^{\infty}\int_{\|\mathbf{x}\|\le 2^j r} \frac{|b(\mathbf{x})-b_B|^{p_0}}{w(B(0,2^j r))^{p_0}}\, dw(\mathbf{x}).
\end{aligned} \tag{4.6}$$

现在，应用 John-Nirenberg 不等式（4.4）可得

$$\begin{aligned}
\|g_2\|^{p_0}_{L^{p_0}(dw)} &\le C\|f\|^{p_0}_{L^p(dw)} w(B)^{p_0/p'}\sum_{j=1}^{\infty}\|b\|^{p_0}_{\mathrm{BMO}}\frac{j^{p_0}}{(2^j r)^{(p_0-1)\mathbf{N}}} \\
&\le C'\|f\|^{p_0}_{L^p(dw)} w(B)^{p_0/p'}\|b\|^{p_0}_{\mathrm{BMO}} r^{-(p_0-1)\mathbf{N}}.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

□

定理证明 3.1。 我们将证明不等式（3.8），对于紧支撑函数$f \in L^p$（$dw$），它们在 $L^p$（$dw$）中构成稠密子空间。为此，根据引理 4.2以及 [21, 第 148 页定理 2 及其下方的注释], 只需验证

$$\|(\mathcal{C}f)^{\#}\|_{L^p(dw)} \le C\|b\|_{\mathrm{BMO}}\|f\|_{L^p(dw)}, \tag{4.8}$$

其中 $g^{\#}$ 表示锐极大函数

$$g^{\#}(\mathbf{x}) = \sup_{B\ni\mathbf{x}}\inf_{c\in\mathbb{C}}\frac{1}{w(B)}\int_B |g(\mathbf{y})-c|\, dw(\mathbf{y}).$$

设 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^N$，并令 $B=B(\mathbf{x}_0,r)$ 为任意一个包含 $\mathbf{x}$ 的球。我们将 $G\setminus\{\mathrm{id}\}$ 的所有元素依次记为 $\sigma_1$、$\sigma_2$、……、$\sigma_{|G|-1}$。我们归纳地定义集合 $U_j\subseteq\mathbb{R}^N$、$j=1$、2、……、$|G|-1$:

$$U_1:=\{\mathbf{z}\in\mathbb{R}^N\ :\ \|\mathbf{z}-\mathbf{x}_0\|>5r,\ \|\mathbf{z}-\sigma_1(\mathbf{x}_0)\|\le 5r\},$$

$$U_{j+1}:=\{\mathbf{z}\in\mathbb{R}^N\ :\ \|\mathbf{z}-\mathbf{x}_0\|>5r,\ \|\mathbf{z}-\sigma_{j+1}(\mathbf{x}_0)\|\le 5r\}\setminus\left(\bigcup_{j_1=1}^{j}U_{j_1}\right)\ \text{for } j\ge 1.$$

对于紧支撑函数 $f\in L^p(dw)$，我们将其分解为

$$f=f_1+f_2+\sum_{j=1}^{|G|-1}f_{\sigma_j},\ \text{where } f_1:=f\cdot\chi_{5B},\quad f_2:=f\cdot\chi_{(\mathcal{O}(5B))^c},\quad f_{\sigma_j}:=f\cdot\chi_{U_j}. \tag{4.9}$$

对于 $\mathbf{y}\in B$，我们定义

$$g_1(\mathbf{y}):=\mathcal{C}f_1(\mathbf{y})=(b(\mathbf{y})-b_B)\mathbf{T}f_1(\mathbf{y})+\mathbf{T}((b_B-b)f_1)(\mathbf{y})=:g_{11}(\mathbf{y})+g_{12}(\mathbf{y}),$$
$$g_2(\mathbf{y}):=\mathcal{C}f_2(\mathbf{y})=(b(\mathbf{y})-b_B)\mathbf{T}f_2(\mathbf{y})+\mathbf{T}((b_B-b)f_2)(\mathbf{y})=:g_{21}(\mathbf{y})+g_{22}(\mathbf{y}),$$
$$g_{\sigma_j}(\mathbf{y}):=\mathcal{C}f_{\sigma_j}(\mathbf{y})=(b(\mathbf{y})-b_B)\mathbf{T}f_{\sigma_j}(\mathbf{y})+\mathbf{T}((b_B-b)f_{\sigma_j})(\mathbf{y})=:g_{\sigma_j1}(\mathbf{y})+g_{\sigma_j2}(\mathbf{y}).$$

固定 $1<s<p$。此外，由于 $|(g_{11})_B|\le\frac{1}{w(B)}\int_B|g_{11}(\mathbf{y})|\,dw(\mathbf{y})$，根据 $g_{11}$ 的定义以及 Hölder 不等式，

$$\begin{aligned}\frac{1}{w(B)}\int_B|g_{11}(\mathbf{y})-(g_{11})_B|\,dw(\mathbf{y})&\le\frac{2}{w(B)}\int_B|g_{11}(\mathbf{y})|\,dw(\mathbf{y})\\&\le 2\frac{1}{w(B)}\int_B|b(\mathbf{y})-b_B|\cdot|\mathbf{T}f_1(\mathbf{y})|\,dw(\mathbf{y})\\&\le 2\Big(\frac{1}{w(B)}\int_B|b(\mathbf{y})-b_B|^{s'}dw(\mathbf{y})\Big)^{1/s'}\cdot\Big(\frac{1}{w(B)}\int_B|\mathbf{T}f_1(\mathbf{y})|^s\,dw(\mathbf{y})\Big)^{1/s},\end{aligned}$$

其中 $s'>1$ 满足 $\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=1$。应用不等式（4.4），我们得出

$$g_{11}^{\#}(\mathbf{x})\le C\|b\|_{\mathrm{BMO}}(M(|\mathbf{T}f_1|^s)(\mathbf{x}))^{1/s}.$$

同样的分析可得

$$g_{21}^{\#}(\mathbf{x})\le C\|b\|_{\mathrm{BMO}}(M(|\mathbf{T}f_2|^s)(\mathbf{x}))^{1/s},\quad g_{\sigma_j1}^{\#}(\mathbf{x})\le C\|b\|_{\mathrm{BMO}}(M(|\mathbf{T}f_{\sigma_j}|^s)(\mathbf{x}))^{1/s}.$$

为处理 $g_{12}$，我们选择 $q,v\in(1,\infty)$，使得 $1<qv<p<\infty$ 和 $s=qv$。然后，根据 Hölder 不等式以及 $\mathbf{T}$ 的 $L^q(dw)$有界性，

$$\begin{aligned}\frac{1}{w(B)}\int_B|g_{12}(\mathbf{y})-(g_{12})_B|\,dw(\mathbf{y})&\le\frac{2}{w(B)}\int_B|g_{12}(\mathbf{y})|\,dw(\mathbf{y})\\&\le 2\frac{1}{w(B)}\int_B|\mathbf{T}((b(\cdot)-b_B)\cdot f_1)(\mathbf{y})|\,dw(\mathbf{y})\\&\le 2\Big(\frac{1}{w(B)}\int_B\mathbf{T}((b(\cdot)-b_B)\cdot f_1)(\mathbf{y})|^q\,dw(\mathbf{y})\Big)^{1/q}\\&\le C\Big(\frac{1}{w(5B)}\int_{5B}|(b(\mathbf{y})-b_B)\cdot f_1(\mathbf{y})|^q\,dw(\mathbf{y})\Big)^{1/q}\\&\le C\Big(\frac{1}{w(5B)}\int_{5B}|b(\mathbf{y})-b_B|^{qv'}dw(\mathbf{y})\Big)^{1/(qv')}\cdot\Big(\frac{1}{w(5B)}\int_{5B}|f_1(\mathbf{y})|^{qv}\,dw(\mathbf{y})\Big)^{1/(qv)}.\end{aligned}$$

因此，应用 John-Nirenberg 不等式（4.4），可得

$$g_{12}^{\#}(\mathbf{x}) \le C\|b\|_{\mathrm{BMO}}(M(|f_1|^s)(\mathbf{x}))^{1/s}.$$

我们来分析 $g_{22}$。注意，对于 $\mathbf{z} \notin \mathcal{O}(5B)$ 和 $\mathbf{y} \in B$，我们有 $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}\| \le d(\mathbf{x}_0, \mathbf{z})$。设 $\Gamma$ 为一个固定的闭 Weyl 室，使得 $\mathbf{x}_0 \in \Gamma$，那么根据估计式（3.4），

(4.10)

$$\begin{aligned}
|g_{22}(\mathbf{y}) - g_{22}(\mathbf{x}_0)| &\le \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} |K_\ell(\mathbf{z},\mathbf{y}) - K_\ell(\mathbf{z},\mathbf{x}_0)||b_B - b(\mathbf{z})||f_2(\mathbf{z})|\, dw(\mathbf{z}) \\
&= \sum_{\sigma\in G}\int_{\mathbf{z}\in\sigma(\Gamma)} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} |K_\ell(\mathbf{z},\mathbf{y}) - K_\ell(\mathbf{z},\mathbf{x}_0)||b_B - b(\mathbf{z})||f_2(\mathbf{z})|\, dw(\mathbf{z}) \\
&\le C\sum_{\sigma\in G}\int_{\mathbf{z}\in\sigma(\Gamma)} \frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}_0\|^{\varepsilon}}{\|\mathbf{x}_0-\mathbf{z}\|^{\varepsilon}} \frac{1}{w(B(\mathbf{x}_0, d(\mathbf{x}_0,\mathbf{z}))}|b_B - b(\mathbf{z})||f_2(\mathbf{z})|\, dw(\mathbf{z}) \\
&=: \sum_{\sigma\in G} J_\sigma(\mathbf{y}).
\end{aligned}$$

在处理 $J_\sigma(\mathbf{y})$ 时，我们将使用以下不等式：

$\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{z}\| \ge \max(\|\mathbf{x}_0 - \sigma(\mathbf{x}_0)\|/2, r)$ 对于 $\mathbf{z} \in \sigma(\Gamma), \|\sigma(\mathbf{x}_0) - \sigma(\mathbf{x})\| \le r < 5r \le \|\sigma(\mathbf{x}_0) - \mathbf{z}\| = d(\mathbf{x}_0,\mathbf{z}) \le \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{z}\|$ 对于 $\mathbf{z} \in \sigma(\Gamma), \mathbf{z} \notin \mathcal{O}(5B)$.

So,

$$\begin{aligned}
J_\sigma(\mathbf{y}) &\le C\int_{\mathbf{z}\in\sigma(\Gamma)} \frac{r^{\varepsilon}}{\|\mathbf{x}_0-\mathbf{z}\|^{\varepsilon}} \frac{1}{w(B(\sigma(\mathbf{x}_0), \|\sigma(\mathbf{x}_0)-\mathbf{z}\|))}|b_B - b_{\sigma(B)}||f_2(\mathbf{z})|\, dw(\mathbf{z}) \\
&+ C\int_{\mathbf{z}\in\sigma(\Gamma)} \frac{r^{\varepsilon}}{\|\mathbf{x}_0-\mathbf{z}\|^{\varepsilon}} \frac{1}{w(B(\sigma(\mathbf{x}_0), \|\sigma(\mathbf{x}_0)-\mathbf{z}\|))}|b_{\sigma(B)} - b(\mathbf{z})||f_2(\mathbf{z})|\, dw(\mathbf{z}) =: J_{\sigma,1}(\mathbf{y}) + J_{\sigma,2}(\mathbf{y}).
\end{aligned}$$

此外，由（4.3），

(4.11)

$$\begin{aligned}
J_{\sigma,1}(\mathbf{y}) &\le C\int_{\mathbf{z}\in\sigma(\Gamma)} \frac{r^{\varepsilon/2}}{\|\mathbf{x}_0-\mathbf{z}\|^{\varepsilon/2}} \frac{r^{\varepsilon/2}}{r^{\varepsilon/2} + \|\mathbf{x}_0 - \sigma(\mathbf{x}_0)\|^{\varepsilon/2}} \log\Big(\frac{\|\mathbf{x}_0-\sigma(\mathbf{x}_0)\|}{r} + 4\Big)\|b\|_{\mathrm{BMO}} \\
&\qquad \times \frac{|f_2(\mathbf{z})|}{w(B(\sigma(\mathbf{x}_0), \|\sigma(\mathbf{x}_0)-\mathbf{z}\|))}\, dw(\mathbf{z}) \\
&\le C\|b\|_{\mathrm{BMO}}\int_{\mathbf{z}\in\sigma(\Gamma)} \frac{r^{\varepsilon/2}}{\|\mathbf{x}_0-\mathbf{z}\|^{\varepsilon/2}} \cdot \frac{|f_2(\mathbf{z})|}{w(B(\sigma(\mathbf{x}_0), \|\sigma(\mathbf{x}_0)-\mathbf{z}\|))}\, dw(\mathbf{z}) \\
&\le C\|b\|_{\mathrm{BMO}}\sum_{j=2}^{\infty}\int_{\mathbf{z}\in\sigma(\Gamma), \|\sigma(\mathbf{x}_0)-\mathbf{z}\|\sim 2^j r} \frac{r^{\varepsilon/2}}{\|\mathbf{x}_0-\mathbf{z}\|^{\varepsilon/2}} \cdot \frac{|f_2(\mathbf{z})|}{w(B(\sigma(\mathbf{x}_0), \|\sigma(\mathbf{x}_0)-\mathbf{z}\|))}\, dw(\mathbf{z}) \\
&\le C\|b\|_{\mathrm{BMO}} Mf_2(\sigma(\mathbf{x})).
\end{aligned}$$

我们转而考虑 $J_{\sigma,\ 2}(\mathbf{y})$。应用 H¨older 不等式，再应用 John-Nirenberg 不等式（4.4），我们得到

$$
\begin{aligned}
J_{\sigma,2}(\mathbf{y}) &\le C\sum_{j=2}^{\infty}\int_{\mathbf{z}\in\sigma(\Gamma),\ \|\mathbf{z}-\sigma(\mathbf{x}_0)\|\sim 2^j r}\frac{r^{\varepsilon}}{2^{\varepsilon j}r^{\varepsilon}}|b_{\sigma(B)}-b(\mathbf{z})|\frac{|f_2(\mathbf{z})|}{w(B(\sigma(\mathbf{x}_0),2^j r))}\,dw(\mathbf{z})\\
&\le C\sum_{j=2}^{\infty}2^{-\varepsilon j}\Big(\int_{\|\mathbf{z}-\sigma(\mathbf{x}_0)\|\sim 2^j r}|b_{\sigma(B)}-b(\mathbf{z})|^{s'}\frac{dw(\mathbf{z})}{w(B(\sigma(\mathbf{x}_0),2^j r))}\Big)^{1/s'}\\
&\quad\times\Big(\int_{\|\mathbf{z}-\sigma(\mathbf{x}_0)\|\le 2^j r}|f_2(\mathbf{z})|^{s}\frac{dw(\mathbf{z})}{w(B(\sigma(\mathbf{x}_0),2^j r))}\Big)^{1/s}\\
&\le C\sum_{j=2}^{\infty}2^{-\varepsilon j}j\|b\|_{\mathrm{BMO}}(M(|f_2|^s)(\sigma(\mathbf{x})))^{1/s}\le C\|b\|_{\mathrm{BMO}}(M(|f_2|^s)(\sigma(\mathbf{x})))^{1/s}.
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

因此，由（4.11）和（4.12）可得

$$
g_{22}^{\#}(\mathbf{x})\le C\sum_{\sigma\in G}\Big(Mf_2(\sigma(\mathbf{x}))+(M(|f_2|^s)(\sigma(\mathbf{x})))^{1/s}\Big).
$$

最后，我们来估计 $g_{\sigma_j 2}$。为此注意到，对于 $\mathbf{z}\in U_j$ 和 $\mathbf{y}\in B$，我们有

$$
\|\mathbf{z}-\mathbf{y}\|\ge\|\mathbf{z}-\mathbf{x}_0\|-\|\mathbf{x}_0-\mathbf{y}\|\ge 5r-r=4r,
$$

$$
\|\mathbf{x}_0-\sigma_j(\mathbf{x}_0)\|\le\|\mathbf{x}_0-\mathbf{y}\|+\|\mathbf{z}-\mathbf{y}\|+\|\mathbf{z}-\sigma_j(\mathbf{x}_0)\|\le 6r+\|\mathbf{z}-\mathbf{y}\|\le\frac{5}{2}\|\mathbf{z}-\mathbf{y}\|,
$$

因此，由（3.3），

$$
\begin{aligned}
&\int_B\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}|K_\ell(\mathbf{z},\mathbf{y})|\,dw(\mathbf{y})\le C\int_B\frac{d(\mathbf{z},\mathbf{y})^{\varepsilon}}{\|\mathbf{z}-\mathbf{y}\|^{\varepsilon}}\frac{1}{w(B(\mathbf{z},d(\mathbf{z},\mathbf{y})))}\,dw(\mathbf{y})\\
&\le C\frac{r^{\varepsilon}}{(r+\|\mathbf{x}_0-\sigma_j(\mathbf{x}_0)\|)^{\varepsilon}}\int_B\frac{d(\mathbf{z},\mathbf{y})^{\varepsilon}}{r^{\varepsilon}}\frac{1}{w(B(\mathbf{z},d(\mathbf{z},\mathbf{y})))}\,dw(\mathbf{y})\\
&\le C\frac{r^{\varepsilon}}{(r+\|\mathbf{x}_0-\sigma_j(\mathbf{x}_0)\|)^{\varepsilon}}\int_{\mathcal{O}(B(\mathbf{z},16r))}\frac{d(\mathbf{z},\mathbf{y})^{\varepsilon}}{r^{\varepsilon}}\frac{1}{w(B(\mathbf{z},d(\mathbf{z},\mathbf{y})))}\,dw(\mathbf{y})\\
&\le C\frac{r^{\varepsilon}}{(r+\|\mathbf{x}_0-\sigma_j(\mathbf{x}_0)\|)^{\varepsilon}}\sum_{j=-4}^{\infty}\int_{d(\mathbf{z},\mathbf{y})\sim 2^j r}\frac{d(\mathbf{z},\mathbf{y})^{\varepsilon}}{r^{\varepsilon}}\frac{1}{w(B(\mathbf{z},d(\mathbf{z},\mathbf{y})))}\,dw(\mathbf{y})\\
&\le C\frac{r^{\varepsilon}}{(r+\|\mathbf{x}_0-\sigma_j(\mathbf{x}_0)\|)^{\varepsilon}}\sum_{j=-4}^{\infty}2^{-\varepsilon j}\int_{d(\mathbf{z},\mathbf{y})\sim 2^{-j}r}\frac{1}{w(B(\mathbf{z},2^{-j}r))}\,dw(\mathbf{y})\\
&\le C\frac{r^{\varepsilon}}{(r+\|\mathbf{x}_0-\sigma_j(\mathbf{x}_0)\|)^{\varepsilon}}.
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

因此，由（4.13）和（4.3），

$$\begin{aligned}
\frac{1}{w(B)}\int_B |g_{\sigma_j 2}(\mathbf{y})-(g_{\sigma_j 2})_B|\,dw(\mathbf{y}) &\le \frac{2}{w(B)}\int_B |g_{\sigma_j 2}(\mathbf{y})|\,dw(\mathbf{y})\\
&\le \frac{2}{w(B)}\int_B\int_{U_j}\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}|K_\ell(\mathbf{y},\mathbf{z})||b_B-b(\mathbf{z})|\cdot|f_{\sigma_j}(\mathbf{z})|\,dw(\mathbf{z})\,dw(\mathbf{y})\\
&\le C\frac{r^\varepsilon}{(r+\|\sigma_j(\mathbf{x}_0)-\mathbf{x}_0\|)^\varepsilon}\frac{1}{w(B)}\int_{U_j}|b_B-b(\mathbf{z})|\cdot|f_{\sigma_j}(\mathbf{z})|\,dw(\mathbf{z})\\
&\le C\frac{r^\varepsilon}{(r+\|\sigma_j(\mathbf{x}_0)-\mathbf{x}_0\|)^\varepsilon}\Big(\frac{1}{w(B)}\int_{U_j}|b_B-b(\mathbf{z})|^{s'}\,dw(\mathbf{z})\Big)^{1/s'}\Big(\frac{1}{w(B)}\int_{U_j}|f_{\sigma_j}(\mathbf{z})|^s\,dw(\mathbf{z})\Big)^{1/s}\\
&\le C\frac{r^\varepsilon}{(r+\|\sigma_j(\mathbf{x}_0)-\mathbf{x}_0\|)^\varepsilon}\log\Big(\frac{\|\sigma_j(\mathbf{x}_0)-\mathbf{x}_0\|}{r}+4\Big)\|b\|_{\mathrm{BMO}}(M|f_{\sigma_j}|^s(\sigma(\mathbf{x})))^{1/s},
\end{aligned}$$

so

$$|g^{\#}_{\sigma_j 2}(\mathbf{x})|\le C\|b\|_{\mathrm{BMO}}(M|f_{\sigma_j}|^s(\sigma(\mathbf{x})))^{1/s}.$$

最后，我们得到如下估计

$$\begin{aligned}
(\mathcal{C}f)^{\#}(\mathbf{x}) \le C\|b\|_{\mathrm{BMO}}\Big((M(|\mathbf{T}f_1|^s)(\mathbf{x})))^{1/s}+M(|\mathbf{T}f_2|^s(\mathbf{x})))^{1/s}\\
+\sum_{j=1}^{|G|-1}M(|\mathbf{T}f_{\sigma_j}|^s(\mathbf{x})))^{1/s}+\sum_{\sigma\in G}\big(Mf(\sigma(\mathbf{x}))+(M|f|^s(\sigma(\mathbf{x})))^{1/s}\big)\Big).
\end{aligned}\tag{4.14}$$

因此，利用 $L^{p_1}(dw)$-有界性（对 Hardy–Littlewood 极大 $M$ 函数而言，对所有$1<p_1<\infty$ 成立）以及测度 $dw$ 是 $G$-不变的这一事实，我们由（4.8）、（4.14）和（4.9）得出结论。□

## 5. Proof of Theorem 3.2

引理 5.1。设 $1<p<\infty$。假设 $b$ 是一个紧支撑 Lipschitz 函数。则

$$\lim_{m\to\infty}\|\mathcal{C}-\mathcal{C}_m\|_{L^p(dw)\longmapsto L^p(dw)}=0.\tag{5.1}$$

证明。设 $r_b>1$ 满足 $\operatorname{supp} b\subset B(0,r_b)$，并设 $L_b>0$ 满足对所有 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^N$，$|b(\mathbf{x})-b(\mathbf{y})|\le L_b|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$。由 (3.7)，只需证明存在常数 $C>0$，使得对所有满足 $2^m\ge 2r_b$ 的正整数 $m$，以及 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^N$，都有

$$\sum_{\ell=-\infty}^{-m-1}\left|\int_{\mathbb{R}^N}(b(\mathbf{x})-b(\mathbf{y}))K_\ell(\mathbf{x},\mathbf{y})f(\mathbf{y})dw(\mathbf{y})\right|\le CL_b2^{-\varepsilon m}\sum_{\sigma\in G}Mf(\sigma(\mathbf{x})),\tag{5.2}$$

$$\sum_{\ell=m+1}^{\infty}\left|b(\mathbf{x})\int_{\mathbb{R}^N}K_\ell(\mathbf{x},\mathbf{y})f(\mathbf{y})dw(\mathbf{y})\right|\le C\|b\|_{L^\infty}2^{-mN/p}\chi_{B(0,r_b)}(\mathbf{x})\|f\|_{L^p(dw)},\tag{5.3}$$

$$\sum_{\ell=m+1}^{\infty}\left|\int_{\mathbb{R}^N}K_\ell(\mathbf{x},\mathbf{y})b(\mathbf{y})f(\mathbf{y})dw(\mathbf{y})\right|\le C\|b\|_{L^\infty}\left(\chi_{B(0,2^m)}(\mathbf{x})2^{-m\mathbf{N}}+\chi_{B(0,2^m)^c}(\mathbf{x})\|\mathbf{x}\|^{-\mathbf{N}}\right)\|f\|_{L^p(dw)}.\tag{5.4}$$

注意，由定理 2.1，supp $K_\ell(\mathbf{x}\ \cdot)\ \subseteq \mathcal{O}(B(\mathbf{x}\ 2^\ell))$。因此，由 (3.1) 以及测度 $dw$ 的倍增性质（见 (2.5)），可得

$$|K_\ell(\mathbf{x},\mathbf{y})| \le C\left(1+\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}{2^\ell}\right)^{-\varepsilon} w(B(\mathbf{x},2^\ell))^{-1}. \tag{5.5}$$

为了证明（5.2），现在我们使用 $b$ 的利普希茨条件以及 ge t

$$\sum_{\ell=-\infty}^{-m-1}\left|\int_{\mathbb{R}^N}(b(\mathbf{x})-b(\mathbf{y}))K_\ell(\mathbf{x},\mathbf{y})f(\mathbf{y})dw(\mathbf{y})\right|$$

$$\le C\sum_{\ell=-\infty}^{-m-1}\frac{L_b}{w(B(\mathbf{x},2^\ell))}\int_{\mathcal{O}(B(\mathbf{x},2^\ell))}\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^\varepsilon\frac{2^{\varepsilon\ell}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^\varepsilon}|f(\mathbf{y})|\,dw(\mathbf{y}) \le CL_b2^{-\varepsilon m}\sum_{\sigma\in G}Mf(\sigma(\mathbf{x})).$$

为了证明（5.3），注意到由（2.4），$w$（$B$（$\mathbf{x}$ $2^\ell$）） $\ge c2^{\ell N}$ 对所有 $\ell \ge 0$都成立。因此，由（5.5）、H¨older 不等式，以及 supp $b \subseteq B(0,r_b)$，我们得到

$$\begin{aligned}&\sum_{\ell=m+1}^{\infty}\left|b(\mathbf{x})\int_{\mathbb{R}^N}K_\ell(\mathbf{x},\mathbf{y})f(\mathbf{y})\,dw(\mathbf{y})\right|\\ &\le C\chi_{B(0,r_b)}(\mathbf{x})\|b\|_{L^\infty}\sum_{\ell=m+1}^{\infty}\left(\int_{\mathcal{O}(B(\mathbf{x},2^\ell))}\frac{1}{w(B(\mathbf{x},2^\ell))^{p'}}\,dw(\mathbf{y})\right)^{1/p'}\|f\|_{L^p(dw)}\\ &\le C\chi_{B(0,r_b)}(\mathbf{x})\|b\|_{L^\infty}2^{-mN/p}\|f\|_{L^p(dw)}.\end{aligned} \tag{5.6}$$

最后，对于（5.4），我们分两种情况讨论。如果 $\|\mathbf{x}\| \le 2^m$，那么类似于（5.6），可得

$$\begin{aligned}&\sum_{\ell=m+1}^{\infty}\left|\int_{\mathbb{R}^N}K_\ell(\mathbf{x},\mathbf{y})b(\mathbf{y})f(\mathbf{y})dw(\mathbf{y})\right|\\ &\le C\chi_{B(0,2^m)}(\mathbf{x})\|b\|_{L^\infty}\sum_{\ell=m+1}^{\infty}\left(\int_{B(0,r_b)}\frac{1}{w(B(\mathbf{y},2^\ell))^{p'}}\,dw(\mathbf{y})\right)^{1/p'}\|f\|_{L^p(dw)}\\ &\le C\chi_{B(0,2^m)}(\mathbf{x})\|b\|_{L^\infty}2^{-m\mathbf{N}}\|f\|_{L^p(dw)}.\end{aligned} \tag{5.7}$$

现在假设 $\|\mathbf{x}\| > 2^m$。回忆一下，$2^m \ge 2r_b$。由定理2.1 以及 supp $K_\ell \subseteq B(0,2^\ell)$，我们得到

$$K_\ell(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0 \quad \text{for all } \mathbf{y}\in B(0,r_b) \text{ and } \ell \ge m \text{ such that } 2^{\ell+1} < \|\mathbf{x}\|.$$

此外，由（5.5）以及2.5）中 $dw$的倍增性质，

$$|K_\ell(\mathbf{x},\mathbf{y})| \le \frac{C}{w(B(0,2^\ell))} \quad \text{for all } \mathbf{y}\in B(0,r_b) \text{ and } \ell \ge m \text{ such that } 2^{\ell+1} \ge \|\mathbf{x}\|.$$

因此，由于 $b$ 支撑在 $B(\mathbf{0},r_b)$，我们得到

$$\sum_{\ell=m+1}^{\infty}\left|\int_{\mathbb{R}^N}K_\ell(\mathbf{x},\mathbf{y})b(\mathbf{y})f(\mathbf{y})dw(\mathbf{y})\right| \le C\sum_{\ell=\lfloor\log(\|\mathbf{x}\|)\rfloor-2}^{\infty}\int_{B(0,r_b)}\frac{\|b\|_{L^\infty}}{w(B(0,2^\ell))}|f(\mathbf{y})|\,dw(\mathbf{y})$$

$$\le C\frac{\|b\|_{L^\infty}}{w(B(0,\|\mathbf{x}\|))}\int_{B(0,r_b)}|f(\mathbf{y})|\,dw(\mathbf{y}) \le Cr_b^{\mathbf{N}/p'}\|b\|_{L^\infty}\|\mathbf{x}\|^{-\mathbf{N}}\|f\|_{L^p(dw)}.$$

□

定理 3.2 的证明。回顾一下，紧支撑 Lipschitz 函数在 VMO 中构成一个稠密子空间。因此，根据定理 3.1，只需证明对于任意紧支撑 Lipschitz 函数 $b$， $\mathcal{C}$ 是 $L^p(dw)$ 上的一个紧算子。此外，由引理 5.1 可知，只需证明对于任意紧支撑 Lipschitz 函数 $b$，当正整数 $m$足够大时，交换子 $\mathcal{C}_m$ 是 $L^p(dw)$ 上的紧算子。为此，设 $r_b > 1$ 满足 supp $b \subset B(0, r_b)$。首先注意，若 $f$ 支撑在 $B(0, r_b + 2^m)^c$，则 $b \cdot f \equiv 0$。此外，由于 supp $\sum_{\ell=-m}^{m} K_\ell(\mathbf{x}\ \cdot) \subseteq \mathcal{O}(B(\mathbf{x}\ 2^m))$（参见定理 2.1），对于所有 $\mathbf{x} \in B(0, r_b)$，有 $\sum_{\ell=-m}^{m} K_\ell(\mathbf{x}\ \cdot) \cdot f(\cdot) \equiv 0$。因此，对于所有$f \in L^p(dw)$，我们有

$$\mathcal{C}_m f(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^N} (b(\mathbf{x}) - b(\mathbf{y})) \sum_{\ell=-m}^{m} K_\ell(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f(\mathbf{y})\, dw(\mathbf{y}) = \mathcal{C}_m(f \cdot \chi_{B(0, r_b+2^m)})(\mathbf{x}).$$

此外，由于 supp $\sum_{\ell=-m}^{m} K_\ell(\mathbf{x}\ \cdot) \subseteq \mathcal{O}(B(\mathbf{x}\ 2^m))$,

$$\text{supp } \mathcal{C}_m(f) = \text{supp } \mathcal{C}_m(f \cdot \chi_{B(0, r_b+2^m)}) \subseteq B(0, r_b + 2^{m+1}).$$

令 $\Omega = B(0, r_b + 2^{m+1})$。现在证明归结为说明 $\mathcal{C}_m$ 是一个紧算子$L^p(\Omega\ dw) \longmapsto L^p(\Omega\ dw)$。估计式 (3.1) 和 (3.2) 表明

$$|\mathcal{C}_m f(\mathbf{x})| \leq C_{\Omega,m} \|f\|_{L^p(\Omega, dw)},$$

$$|\mathcal{C}_m f(\mathbf{x}) - \mathcal{C}_m f(\mathbf{x}')| \leq C_{\Omega,m} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^\varepsilon \cdot \|f\|_{L^p(\Omega, dw)}$$

对所有 $\mathbf{x}$，$\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^N$。根据 Arzel´a-Ascoli 定理，集合

$$\{\mathcal{C}_m f :\ f \in L^p(\Omega, dw), \|f\|_{L^p(\Omega, dw)} \leq 1\}$$

在 $C(\Omega)$ 中关于上确界范数是相对紧的。因此，由于 $w(\Omega)$ 是有限的，它在 $L^p(\Omega\ dw)$ 中也是相对紧的。□

## References

[1] B. Amri, M. Sifi，Dunkl 变换的 Riesz 变换，Ann. Math. Blaise Pascal 19 (2012), no. 1, 247–262.[2] J.-Ph. Anker, J. Dziuba´nski, A. Hejna，有理 Dunkl 情形中的调和函数、共轭调和函数与 Hardy 空间，J. Fourier Anal. Appl. 25 (2019), 2356–2418.[3] S. M. Buckley，倍增空间中的 John-Nirenberg 型不等式，J. Anal. Math. 79 (1999), 215–240.[4] R.R. Coifman, R. Rochberg G. Weiss，多变量 Hardy 空间的因子分解定理，Ann. of Math. 103 (1976), no. 4, 511–635.[5] R.R. Coifman, G. Weiss，Hardy 空间的扩张及其在分析中的应用，Bull. Amer. Math. Soc. 83 (1977), no. 4, 569–615.[6] M.F.E. de Jeu，Dunkl 变换，Invent. Math. 113 (1993), 147–162.[7] C.F. Dunkl，与反射群相关的微分-差分算子，Trans. Amer. Math. 311 (1989), no. 1, 167–183.[8] C.F. Dunkl，与有限反射群相关的 Hankel 变换，载于：正性域上的超几何函数、Jack 多项式及其应用专题会议论文集，Proceedings, Tampa 1991, Contemp. Math. 138 (1989), 123–138.[9] J. Dziuba´nski 和 A. Hejna，Dunkl 变换的 H ¨ormander 乘子定理，Journal of Functional Analysis 277 (2019), 2133-2159.[10] J. Dziuba´nski, A. Hejna，有理 Dunkl 情形中 Hardy 空间原子分解的评注，Studia Math. 251 (2020), no. 1, 89–110.[11] J. Dziuba´nski, A. Hejna，有理 Dunkl 情形中的奇异积分，Revista Matem´atica Complutense, (2021).[12] J. Dziuba´nski, A. Hejna，关于非径向核的 Dunkl 平移的评注，arXiv:2211.02518.

[13] L. Grafakos，《现代傅里叶分析》，第 3 版，数学研究生教材，250。施普林格，纽约，2014.[14] Y. Han, M-Y. Lee, J. Li, B. D. Wick，Dunkl 框架中的 Riesz 变换与交换子，预印本 arXiv:2105.11275.[15] S. Janson，奇异积分算子的平均振荡与交换子，ARK. Math. 16 (1978), 263–270。第 412 卷，（2023）。[16] J. Jiu 和 Z. Li，Dunkl 算子相关 Hardy 空间的对偶，Advances in Mathematics, 第 412 卷，（2023）。[17] M. R¨osler，广义厄米多项式与 Dunkl 算子的热方程，Comm. Math. Phys. 192 (1998), 519–542.[18] M. R¨osler，Dunkl 交织算子的正性，Duke Math. J. 98 (1999), no. 3, 445–463.[19] M. R¨osler：Dunkl 算子（理论与应用）。载于：Koelink, E., Van Assche, W. (编)，正交多项式与特殊函数（鲁汶，2002），93–135。Lect. Notes Math. 1817, Springer-Verlag (2003).[20] M. R¨osler, M. Voit，Dunkl 理论、卷积代数及相关马尔可夫过程，载于《Dunkl 过程的调和分析与随机分析》，P. Graczyk, M. R¨osler, M. Yor (编), 1–112，Travaux en cours 71, Hermann, 巴黎，2008.[21] E.M. Stein，《调和分析（实变量方法、正交性与振荡积分）》，普林斯顿数学丛书 43，普林斯顿大学出版社，1993.[22] Ch. Tan, Y. Han, Y. Han, M-Y. Lee, J. Li，Dunkl 框架中的奇异积分算子、 $T1$ 定理、Littlewood–Paley 理论与 Hardy 空间，arXiv:2204.01886.[23] S. Thangavelu, Y. Xu，Dunkl 变换的卷积算子与极大函数，J. Anal. Math. 97 (2005), 25–55.[24] S. Thangavelu, Y. Xu，Dunkl 变换的 Riesz 变换与黎兹势，J. Comput. Appl. Math. 199 (2007), no. 1, 181–195, J. Anal. Math. 97 (2005), 25–55.[25] K. Trim`eche，Dunkl 变换与 Dunkl 平移算子的 Paley–Wiener 定理，Integral Transforms Spec. Funct. 13 (2002), no. 1, 17–38.[26] A. Uchiyama，关于 Hankel 型紧性算子，Tohoku Math. J. 30 (1978), 163–171.Jacek Dziubański, Uniwersytet Wrocławski, Instytut Matematyczny, Pl. Grunwaldzki 2,50-384 Wrocław, Poland电子邮箱：jdz iu ban@math.uni.wroc.plAgnieszka Hejna, Uniwersytet Wrocławski, Instytut Matematyczny, Pl. Grunwaldzki 2,50-384 Wrocław, Poland & Department of Mathematics, Rutgers University, Piscataway,NJ 08854-8019, USA电子邮箱：hejna@math.uni.wroc.pl