arXiv:2302.00792v1 [math.NA] 1 Feb 2023

采用分层模型降阶对具有平滑轮廓的矩形波导器件进行高级建模

Gines Garcia-Contreras[†]、Juan C´orcoles[†]、JorgeA. Ruiz-Cruz[†]、Matteo Oldoni[◇]、Gian Guido Gentili[◇]、Stefano Micheletti[#]、Simona Perotto[#]

2023年2月3日

[†] 马德里自治大学高等理工学院通信与电子技术系，西班牙马德里 28049{gines.garcia,juan.corcoles,jorge.ruizcruz}@uam.es[◇] 米兰理工大学电子、信息与生物工程系，意大利米兰达芬奇广场 32 号，邮编 I-20133 {gianguido.gentili,matteo.oldoni}@polimi.it

[#] MOX - 米兰理工大学数学系，意大利米兰达芬奇广场 32 号，邮编 I-20133 {stefano.micheletti,simona.perotto}@polimi.it

摘要

我们提出了一种用于分析矩形波导中平滑变化的渐变结构、过渡段和滤波器的新方法。为此，我们将层次模型（HiMod）降阶应用于矢量亥姆霍兹方程。我们利用适当的坐标变换，随后采用波导模式作为 HiMod 展开的基。我们表明，与基于三维有限元离散的标准商业代码相比，该方法能够以显著更快的速度获得高精度结果。

关键词 波导器件、模态分析、分层模型降阶、有限元法。

1 引言

分层模型（HiMod）降阶是一种强大的数值工具，可加速对具有方向性特征的复杂结构进行分析。HiMod降阶已成功应用于众多不同的领域，例如线性声学 [1], 、对流-扩散-反应现象 [2, 3, 4, 5, 6, 7], 、血流建模 [8], 以及患者特异性动脉段 [9]。与典型的模型降阶技术不同，例如 [10, 11], ，HiMod方法的核心优势在于，通过采用不同的

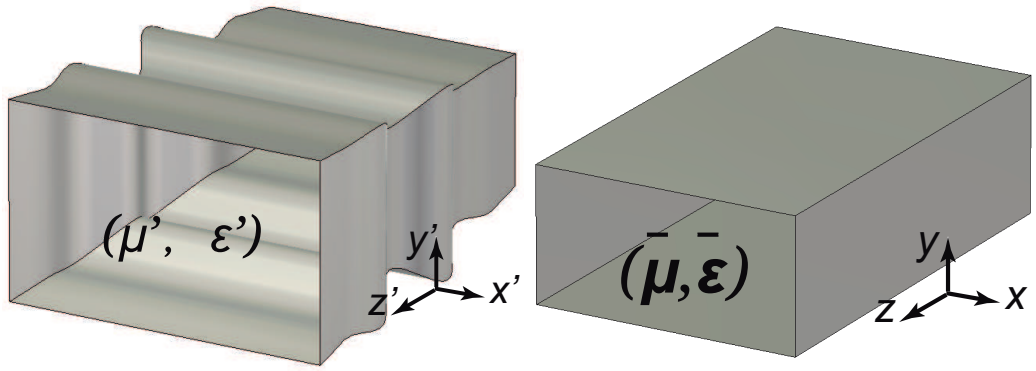
离散化方式，依据分离变量原理，分别沿主方向和次方向进行离散。该策略能够准确表征问题动力学，同时避免对模型进行大幅简化。具体而言，谨慎选择支撑不同离散化的基底，可以大幅节省计算机资源，包括处理时间和内存存储。因此，HiMod降阶面临的主要挑战是找到合适的基底，以沿两个方向对问题进行离散。

结构主要沿空间单一方向延伸的传播系统，例如波导渐变段、平滑过渡段、扭转结构和弯曲结构 [12], ，是应用 HiMod 方法的理想场景。具体而言，得益于模态展开在垂直于传播方向 [13]的横向平面上的完备性，模式为寻找适用于横向动力学建模的降阶基提供了直接途径。此外，鉴于横向场可用数量较少的模式进行良好近似，模态表示极为有效。若满足这一条件，模态谱便是用于横向动力学 HiMod 近似的天然且极具吸引力的降阶基。然而，我们注意到，直接应用模态展开可能并不实用，因为器件在横向平面上的轮廓可能发生变化，导致模态场成为形状本身的函数。

本文提出的方法通过引入坐标变换克服了这一局限，该变换将实际结构转换为横向平面内形状恒定、沿传播方向保持不变的几何结构。这一方法使我们能够采用一组唯一的模式来表示整个区域内场的横向特征。当然，为了使这种表示与原问题等效，必须将波导内部的材料替换为一种新的人工介质，该介质可直接通过坐标变换获得。这种方法通常称为变换光学或变换电磁学，在无源元件、天线、超表面和隐身的建模与设计中有着多种应用 [14, 15, 16, 17]。

本文提出的 HiMod 技术应用于矩形波导中的渐变结构、平滑过渡段和滤波器。文中通过不同矩形波导之间的宽带匹配过渡段 [18, 19] 展示了渐变结构这一主要研究重点。其他常见应用还包括模式转换器 [20, 21] 和金字塔形喇叭 [22, 23]。

经典论文介绍了基于模式匹配（MM）求解与渐变段相关的三维（3D）问题的设计与分析流程[22]。近年来，人们通过使用知名商业软件 [21]应用有限元法（FEM）。对于光滑壁渐变段，效率极高的MM技术可能不那么适用，因为需要用大量阶梯来表示几何形状，从而增加计算时间，并引入不理想的几何离散化与近似。因此，迄今为止，三维版本的FEM仍是首选，尽管在处理较长的渐变段时，计算时间可能成为问题。



(a) (b)

图1：几何变换。(a) 具有标量介电常数和磁导率的原始区域。波导沿 z' 轴方向的宽度和高度略有变化。(b) 具有张量介电常数和磁导率的变换域。此时，轮廓沿 z 轴方向保持恒定。

本文提出的方法提供了一种全新的思路：它将强大且广为人知的模态展开用于描述横向动力学，并结合标准的一维（1D）有限元离散，以模拟沿传播方向的现象。该方法对问题的表示效率极高，因此，对于横截面平滑变化且相对于波长而言较长的结构，HiMod降阶是理想的选择。本文讨论的应用示例仅展示了该技术巨大潜力的一斑。

问题的理论层面，尤其是坐标变换，将在第2节中讨论。第3节介绍 HiMod 降阶。我们将讨论有关函数空间的一些问题，并详细分析坐标变换对输出端口及其对应模态函数的影响。事实上，这项分析的最终目的是计算多模广义散射矩阵（GSM） [24]。为此，我们在 HiMod 模型中引入经过适当归一化的模态函数作为强迫项。第4节介绍将这一新方法应用于渐变结构所得的结果，最后一节则总结全文。

2 问题陈述

我们讨论将 HiMod降阶应用于图 1(a) 所示的结构。该过程可分为两个阶段：首先，我们进行坐标变换，将渐变几何转换为长度为 L 的均匀截面波导。完成这一步后，我们引入相应的人工材料，使电磁问题与原始渐变几何中的问题等效。

第二步中，我们采用均匀结构的标准模式作为横向平面上的基函数，并沿传播方向进行经典的一维有限元法离散化。本节重点讨论第一步。

我们在（x', y', z'）参考坐标系中考虑一个矩形波导器件，其横截面位于 $x'y'$ 平面内，轮廓平滑变化（见图1(a)）。渐变段的方向设置为：端口1位于 $z' = 0$，沿 x'方向和 y'方向的尺寸分别为 a_0 和 b_0；端口2位于 $z' = L$，沿 x'方向和y'方向的尺寸分别为 a_L 和 b_L。因此，该器件的轮廓由两个函数 $a = a(z')$和 $b = b(z')$描述，它们取决于传播方向 z'，于是

$$a(0) = a_0,\ b(0) = b_0,\ a(L) = a_L,\ b(L) = b_L. \tag{1}$$

接下来，我们定义一个几何变换

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{r}'), \tag{2}$$

其中$\mathbf{r}' = (x', y', z')$和$\mathbf{r} = (x, y, z)$满足：原器件变换为具有恒定矩形截面 $a_0 \times b_0$的波导，且对所有 z'均成立，如图1(b)所示。假设端口1由 $-a_0/2 < x' < a_0/2$ 和 $-b_0/2 < y' < b_0/2$定义，而端口2由范围 $-a_L/2 < x' < a_L/2$ 和 $-b_L/2 < y' < b_L/2$表征。渐变段几何函数 $a = a(z')$、 $b = b(z')$可以任意设定，唯一要求是满足式(1)中的端点条件。这里，我们将变换(2)选为：

$$\begin{cases} x = x' \dfrac{a_0}{a(z')}, & -a(z')/2 \le x' \le a(z')/2, \quad 0 \le z' \le L \\ y = y' \dfrac{b_0}{b(z')}, & -b(z')/2 \le y' \le b(z')/2, \quad 0 \le z' \le L \\ z = z', & 0 \le z' \le L. \end{cases} \tag{3}$$

可以很容易地验证，在新坐标系 (x, y, z) 中，渐变段的几何形状现在具有与 z 无关的恒定截面；也就是说，物理区域已变换为尺寸为 $a_0 \times b_0 \times L$ 的矩形棱柱 Ω。

为了确保原始几何与变换后几何中的电磁问题等效，我们必须定义一种填充波导的各向异性、非均匀人工材料，并使其具有以下特性：

$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_r = \epsilon_r' \frac{\bar{\mathbf{J}}\,\bar{\mathbf{J}}^T}{\det(\bar{\mathbf{J}})} = \epsilon_r' \bar{\boldsymbol{\Lambda}}, \tag{4}$$

$$\bar{\boldsymbol{\mu}}_r = \mu_r' \frac{\bar{\mathbf{J}}\,\bar{\mathbf{J}}^T}{\det(\bar{\mathbf{J}})} = \mu_r' \bar{\boldsymbol{\Lambda}}, \tag{5}$$

其中， ϵ_r'、 μ_r' 分别为原参考坐标系中的均匀相对介电常数和磁导率，

$$\bar{\mathbf{J}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{r}'} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial x'} & \frac{\partial x}{\partial y'} & \frac{\partial x}{\partial z'} \\ \frac{\partial y}{\partial x'} & \frac{\partial y}{\partial y'} & \frac{\partial y}{\partial z'} \\ \frac{\partial z}{\partial x'} & \frac{\partial z}{\partial y'} & \frac{\partial z}{\partial z'} \end{bmatrix}, \tag{6}$$

为变换的雅可比矩阵，而 $\bar{\mathbf{\Lambda}} = \bar{\mathbf{J}}\ \bar{\mathbf{J}}^T / \det(\bar{\mathbf{J}})$ 表示由坐标变换产生的材料各向异性贡献。将 (3) 代入 (6)，得到：

$$\bar{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} \frac{a_0}{a(z')} & 0 & -\frac{x}{a(z')}\frac{da(z')}{dz'} \\ 0 & \frac{b_0}{b(z')} & -\frac{y}{b(z')}\frac{db(z')}{dz'} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

在均匀波导段中求解具有非均匀各向异性介电常数和磁导率的等效电磁问题，可得变换后的电场和磁场，分别记为 E 和 H；它们与原问题中的对应场 E′、H′ 之间满足以下关系：

$$\mathbf{E} = \bar{\mathbf{J}}^T \mathbf{E}', \quad \mathbf{H} = \bar{\mathbf{J}}^T \mathbf{H}'. \tag{8}$$

上述技术颇为常用，在复杂结构的分析中可带来显著的计算优势 [1]。在本文的问题中，坐标变换 (3) 只是构建我们所需降阶模型的第一步，具体讨论见下一节。

3 HiMod 离散化

3.1 降阶基

为应用 HiMod，在变换几何中，采用横电（TE）和横磁（TM）模式构成一组合适的基，用于表示横向平面内的电磁场。这些模式描述均匀填充矩形波导中的电场。对于图 2 所示的构型，模态基可根据端口 1 的几何形状唯一确定；借助式 (3) 中的几何变换，还可用于表示波导轮廓中任意位置的电场。

我们强调，模态函数能够精确表示端口1处的模式，因为根据定义，端口所在平面不会发生形状变化。因此，出于同样的原因，这些模态函数通常既不能表示端口2处的模式，也不能表示变换几何内部任一横截面处的模式。更重要的是，横电和横磁模式为满足麦克斯韦方程组的任意场提供了完备的基，包括当前所研究的非均匀等效波导。因此，横电和横磁模态函数为HiMod近似提供了自然且便捷的降阶基。

将电场分解为横向（下标 t）和纵向（下 -

标 z）分量后，我们可以将 E 重写为 $\mathbf{E}(x,y,z) = \mathbf{E}_t(x,y,z) + \mathbf{E}_z(x,y,z)$，其 ith

$$\mathbf{E}_t(x,y,z) = \sum_{n=1}^{N_{\mathrm{TE}}} \mathbf{e}_{t,n}^{\mathrm{TE}}(x,y)\tau_n^{\mathrm{TE}}(z) + \sum_{n=1}^{N_{\mathrm{TM}}} \mathbf{e}_{t,n}^{\mathrm{TM}}(x,y)\tau_n^{\mathrm{TM}}(z) \tag{9}$$

$$\mathbf{E}_z(x,y,z) = \sum_{n=1}^{N_{\mathrm{TM}}} \mathbf{e}_{z,n}^{\mathrm{TM}}(x,y)\zeta_n(z), \tag{10}$$

其中，$\mathbf{e}_{t\,n,}^{\mathrm{TE}}$、$\mathbf{e}_{t\,n,}^{\mathrm{TM}}$，为横向模态场，$\mathbf{e}_z^{\mathrm{TM}}$，$n$ 为纵向模态场，而函数 $\tau_n^{\mathrm{TE}}(z)$、$\tau_n^{\mathrm{TM}}(z)$ 和 $\zeta_n(z)$ 描述电场分量对 z 的依赖关系。所有模态场 $\mathbf{e}_{t\,n,}^{\mathrm{TE}}$、$\mathbf{e}_{t\,n,}^{\mathrm{TM}}$、$\mathbf{e}_z^{\mathrm{TM}}$，$n$ 均可选为实函数，并可通过矩形波导的常规模态分解获得，其中包括在渐变段 [25] 的侧表面上施加理想导体边界条件。它们作为 z 的函数的叠加，则由函数 $\tau_n^{\mathrm{TE}}(z)$、$\tau_n^{\mathrm{TM}}(z)$ 和 $\zeta_n(z)$ 决定；这些函数目前仍未知，是求解过程的目标。请注意，由于变换域内部存在人工材料，τ_n 和 ζ_n 不一定相等。表达式 (9)-(10) 表示变换几何中所有点处的电场。相应的理论无穷级数已截断为 N_{TE} 项和 N_{TM} 项，分别对应横电模式和横磁模式。后文将证明，实际上只需取相对较小的项数，便足以准确表示结构中的场 E。由于矩形波导中的模式由两个指标 p 和 q 标识，分别对应 x 和 y（见附录），因此必须定义通用指标 n 与指标 p、q 之间的对应关系，即

$$p = p(n) = p_n, \quad q = q(n) = q_n. \tag{11}$$

式（9）—（10）中的场对 z 的依赖可以通过多种方式表示。我们关注有限元离散，因为它在多项式次数方面具有所需的灵活性，精度高，而且由相关矩阵的稀疏模式所带来的效率也十分出色。因此，我们选用一维插值拉格朗日多项式来展开式（9）—（10）中依赖于 z 的函数，从而得到

$$\tau_n^{\mathrm{TE}}(z) = \sum_{l=1}^{N_{l,t}} c_{n,l}^{\mathrm{TE}}\phi_l(z) \tag{12}$$

$$\tau_n^{\mathrm{TM}}(z) = \sum_{l=1}^{N_{l,t}} c_{n,l}^{\mathrm{TM}}\phi_l(z) \tag{13}$$

$$\zeta_n(z) = \sum_{l=1}^{N_{l,z}} d_{n,l}^{\mathrm{TM}}\psi_l(z), \tag{14}$$

其中，$\{\phi_l(z)\}$ 和 $\{\psi_l(z)\}$ 分别是标准拉格朗日多项式，为一维有限元离散提供维数为 N_l、$_t$ 和 N_l、$_z$ 的基（我们使用不同的

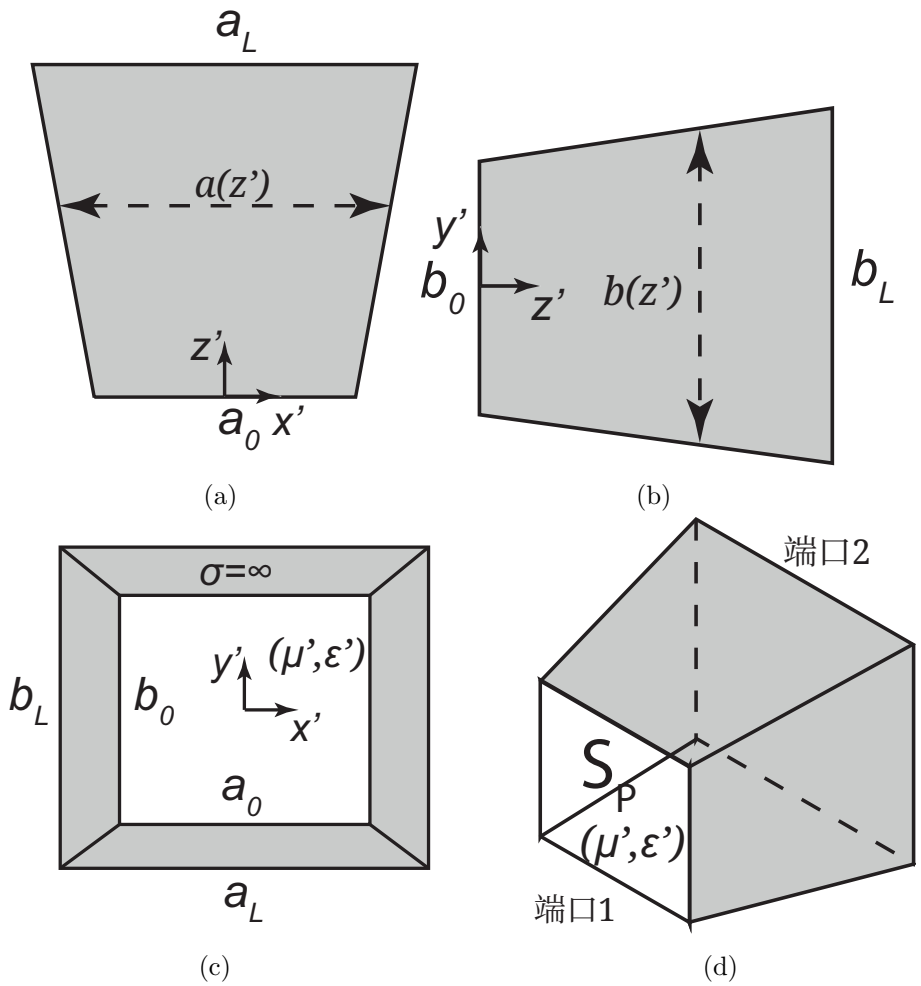


图2：原始区域中的通用渐缩结构。(a) 俯视图，(b) 右视图，(c) 正视图，(d) 等轴测图。

符号表示横向和纵向多项式，原因将在下文说明），而 $c_{n\,l}^{\mathrm{TE}}$、、 $c_{n\,l}^{\mathrm{TM}}$、和 $d_{n\,l}^{\mathrm{TM}}$、表示相应的自由度（DOFs），即实际的未知量。由式（9）—（10）和（12）—（14）可知，用于表示该结构中电场的自由度总数等于

$$N_{tot} = (N_{\mathrm{TE}} + N_{\mathrm{TM}})N_{l,t} + N_{\mathrm{TM}}N_{l,z}.$$

在第 4 节中，我们将验证，与完整的三维有限元离散相比，HiMod降阶带来的计算优势在于全局自由度数量大幅减少。

3.2 弱形式与代数 HiMod 公式

我们所降阶的模型确实符合麦克斯韦方程组，该方程组在变换域 (x, y, z) 中可表示为：

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\jmath\omega\mu_0\bar{\boldsymbol{\mu}}_r\mathbf{H}, \tag{15}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \jmath\omega\epsilon_0\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_r\mathbf{E}, \tag{16}$$

其中，ω 为角频率，$\jmath$ 表示虚数单位，ϵ_0 和 μ_0 分别为真空的绝对介电常数和磁导率。请注意人工非均匀、非各向同性材料的存在；式 (4)–(5) 中的相对介电常数和磁导率 $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_r$、$\bar{\boldsymbol{\mu}}_r$ 源自坐标变换 (2)–(3)。

由式 (15) 和 (16) 推导出的电场 E 的矢量波动方程为

$$\nabla \times \bar{\boldsymbol{\mu}}_r^{-1}\nabla \times \mathbf{E} - k_0^2\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_r\mathbf{E} = 0, \tag{17}$$

其中，$k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ 为自由空间波数。如前所述，在渐变段的侧表面 S_L 上以本质方式施加理想导体边界条件，而在器件端口 S_1 和 S_2 上将磁场指定为自然边界条件。为了进行 HiMod 离散化，我们考虑问题 (17) 的弱形式，即寻找解 $\mathbf{E} \in H_{S_L}(\mathrm{curl}, \Omega)$，使得

$$\begin{aligned}&\int_\Omega (\nabla \times \mathbf{w}) \cdot \bar{\boldsymbol{\mu}}_r^{-1}\nabla \times \mathbf{E}\, d\Omega - k_0^2\int_\Omega \mathbf{w} \cdot \bar{\boldsymbol{\epsilon}}_r\mathbf{E}\, d\Omega \\ &- \int_{S_1\cup S_2} \mathbf{w} \cdot \bar{\boldsymbol{\mu}}_r^{-1}[(\nabla \times \mathbf{E}) \times \hat{\mathbf{n}}]\, dS = 0,\end{aligned} \tag{18}$$

其中 $\hat{\mathbf{n}}$ 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向量，对于任意试验函数 $\mathbf{w} \in H_{S_L}(\mathrm{curl},\Omega)$，该空间由在 Ω 中平方可积且其旋度也平方可积的函数组成，$\nabla \times \mathbf{w}$ [26], 满足 $\nabla \times \mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{0}$ 于 S_L。

现在，为简化记号，我们不再区分 HiMod 展开式 (9) 中横电或横磁类型的横向模态场，并使用单个索引 n对模式进行排序，其取值范围为 1 到 $N_{\mathrm{M}} = N_{\mathrm{TE}} + N_{\mathrm{TM}}$。因此，考虑式 (12)–(14) 中的有限元表示后，式 (9)–(10) 中的电场展开可改写为

$$\mathbf{E}_t(x, y, z) = \sum_{l=1}^{N_{l,t}}\sum_{n=1}^{N_{\mathrm{M}}} c_{n,l}\mathbf{e}_{t,n}(x, y)\phi_l(z) \tag{19}$$

$$\mathbf{E}_z(x, y, z) = \sum_{l=1}^{N_{l,z}}\sum_{n=1}^{N_{\mathrm{TM}}} d_{n,l}\mathbf{e}_{z,n}(x, y)\psi_l(z). \tag{20}$$

随后对横向场和纵向场进行如下归一化，使得

$$\int_{S_P} \mathbf{e}_{t,n} \cdot \mathbf{e}_{t,n}\, dS = 1, \quad \int_{S_P} \mathbf{e}_{z,n} \cdot \mathbf{e}_{z,n}\, dS = 1, \tag{21}$$

wh其中 S_P 表示坐标变换后的端口表面，且 $P \in \{1,2\}$.

通过排列式 (19) 中各个模态基函数和有限元基函数，我们可以定义用于展开电场横向分量的第 i 个通用全局基函数，如下：

$$\mathbf{f}_i(x,y,z) = \mathbf{e}_{t,n_i}(x,y)\phi_{l_i}(z) \tag{22}$$

其中，排序方式为 $(n_1,l_1) = (1,1), (n_2,l_2) = (2,1) \ldots, (n_{N_\mathrm{M}},l_{N_\mathrm{M}}) = (N_\mathrm{M},1), (n_{N_\mathrm{M}+1},l_{N_\mathrm{M}+1}) = (1,2) \ldots, (n_{N_{\mathrm{M}}\cdot N_{l,\ t}},l_{N_{\mathrm{M}}\cdot N_{l,\ t}}) = (N_\mathrm{M},N_{l,\ t})$。

类似地，根据式 (20)，纵向分量场 E 的第 i 个通用全局基函数形式为：

$$\mathbf{g}_i(x,y,z) = \mathbf{e}_{z,n_i}(x,y)\psi_{l_i}(z), \tag{23}$$

此时，指标的排序方式为

$$(n_1,l_1) = (1,1), (n_2,l_2) = (2,1), \ldots, (n_{N_\mathrm{TM}},l_{N_\mathrm{TM}}) = (N_\mathrm{TM},1),$$

$$(n_{N_\mathrm{TM}+1},l_{N_\mathrm{TM}+1}) = (1,2), \ldots, (n_{N_{\mathrm{TM}}\cdot N_{l,z}},l_{N_{\mathrm{TM}}\cdot N_{l,t}}) = (N_\mathrm{TM},N_{l,z}).$$

我们指出，式 (22)–(23) 中的指标记法 n_i and l_i 旨在强调，第 i 个通用全局基函数与一个模态指标 n_i（该指标又根据式 (11) 取决于指标 p_{n_i} and q_{n_i} ）相关，该指标用于横向动力学的近似；同时，它还与一个有限元指标 l_i 相关，该指标用于沿 z 的离散化。

利用刻画函数 f_i和 g_i定义的变量分离性质，我们有

$$\nabla \times \mathbf{f}_i = \phi_{l_i}\nabla_t \times \mathbf{e}_{t,n_i} + \frac{d\phi_{l_i}}{dz}\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{e}_{t,n_i}, \tag{24}$$

$$\nabla \times \mathbf{g}_i = \psi_{l_i}\nabla_t \times \mathbf{e}_{z,n_i}, \tag{25}$$

其中， ∇_t 是算子 ∇ 在 xy平面上的横向分量，$\hat{}$z 是沿 z方向的单位向量。

为使旋度算子的横向分量表示相容，多项式 ψ_{l_i} 的次数必须比多项式ϕ_{l_i}的次数低一阶。事实上，(24) 右端项中的第二项和 (25) 右端项中的项均定义了旋度的横向分量，而多项式表示中的次数不同会导致伪解 [27, 28]。

现在，我们假设处理一个一般的激励 h，它表示施加在端口 S_1 和 S_2处的磁场。将式 (19) 和 (20) 中的 HiMod 离散化与定义 (22)-(23) 及关系式 (24)-(25) 相结合，可将问题 (18) 转化为以下矩阵形式

$$\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{tt} & \boldsymbol{A}_{tz} \\ \boldsymbol{A}_{zt} & \boldsymbol{A}_{zz} \end{bmatrix} - k_0^2 \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_{tt} & \boldsymbol{B}_{tz} \\ \boldsymbol{B}_{zt} & \boldsymbol{B}_{zz} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{d} \end{bmatrix} = -\jmath\omega\mu_0 \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_t \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}, \tag{26}$$

其中向量

$$\begin{aligned}\boldsymbol{c} &= \left[c_{n_1,l_1},\ldots,c_{n_{N_{\mathrm{M}}\cdot N_{l,t}},l_{N_{\mathrm{M}}\cdot N_{l,t}}}\right]^T,\\ \boldsymbol{d} &= \left[d_{n_1,l_1},\ldots,d_{n_{N_{\mathrm{TM}}\cdot N_{l,z}},l_{N_{\mathrm{TM}}\cdot N_{l,t}}}\right]^T\end{aligned}$$

收集式（19）–（20）中的（未知）HiMod 系数，而通用矩阵元素由下式给出

$$\boldsymbol{A}_{tt}(i,j)=\int_\Omega \nabla\times\mathbf{f}_i\cdot\bar{\boldsymbol{\mu}}_r^{-1}\nabla\times\mathbf{f}_j\,d\Omega, \tag{27}$$

$$\boldsymbol{A}_{tz}(i,j)=\int_\Omega \nabla\times\mathbf{f}_i\cdot\bar{\boldsymbol{\mu}}_r^{-1}\nabla\times\mathbf{g}_j\,d\Omega, \tag{28}$$

$$\boldsymbol{A}_{zt}(i,j)=\int_\Omega \nabla\times\mathbf{g}_i\cdot\bar{\boldsymbol{\mu}}_r^{-1}\nabla\times\mathbf{f}_j\,d\Omega, \tag{29}$$

$$\boldsymbol{A}_{zz}(i,j)=\int_\Omega \nabla\times\mathbf{g}_i\cdot\bar{\boldsymbol{\mu}}_r^{-1}\nabla\times\mathbf{g}_j\,d\Omega, \tag{30}$$

and

$$\boldsymbol{B}_{tt}(i,j)=\int_\Omega \mathbf{f}_i\cdot\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_r\mathbf{f}_j\,d\Omega, \tag{31}$$

$$\boldsymbol{B}_{tz}(i,j)=\int_\Omega \mathbf{f}_i\cdot\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_r\mathbf{g}_j\,d\Omega, \tag{32}$$

$$\boldsymbol{B}_{zt}(i,j)=\int_\Omega \mathbf{g}_i\cdot\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_r\mathbf{f}_j\,d\Omega, \tag{33}$$

$$\boldsymbol{B}_{zz}(i,j)=\int_\Omega \mathbf{g}_i\cdot\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_r\mathbf{g}_j\,d\Omega. \tag{34}$$

最后，式（26）右端项中的向量 $\boldsymbol{C}_t$ 定义如下

$$\boldsymbol{C}_t(i)=\int_{S_1\cup S_2}\mathbf{f}_i\cdot(\mathbf{h}\times\hat{\mathbf{n}})\,dS, \tag{35}$$

其中，令 $\bar{\boldsymbol{\mu}}_r^{-1}\nabla\times\mathrm{E}=-\jmath\omega\mu_0\mathbf{h}$。将式（26）中的矩阵和向量汇总为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{tt} & \boldsymbol{A}_{tz}\\ \boldsymbol{A}_{zt} & \boldsymbol{A}_{zz}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_{tt} & \boldsymbol{B}_{tz}\\ \boldsymbol{B}_{zt} & \boldsymbol{B}_{zz}\end{bmatrix}, \tag{36}$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_t\\ \mathbf{0}\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{d}\end{bmatrix}, \tag{37}$$

得到 HiMod 解

$$\boldsymbol{v}=-\jmath\omega\mu_0(\boldsymbol{A}-k_0^2\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{C} \tag{38}$$

至公式 (18)。

3.3 广义散射矩阵计算

端口1和端口2处的磁场 h 分别由不同的表达式描述。事实上，按照构造，端口2经过式 (3) 中的映射变换，而端口1则没有。现在，我们从归一化广义阻抗矩阵（GIM）出发，计算广义散射矩阵（GSM）。我们将端口$P \in \{1,2\}$处索引为 n的 z-传播模式的电模态函数和磁模态函数分别记为 $\mathbf{e}_n^{(P)}$、$\mathbf{h}_n^{(P)}$，并将其归一化为

$$\int_{S_P} \mathbf{e}_n^{(P)} \times \mathbf{h}_n^{(P)} \cdot \hat{\mathbf{z}}\, dS = \pm 1, \tag{39}$$

其中，符号 '+' 和 '–' 分别指端口1和端口2（相对于 z 轴的方向相反）。关系式 (39) 是功率波中采用的标准归一化，通常用于定义散射矩阵。

现在我们分别给出两个端口处模态函数 $\mathbf{e}_n^{(P)}$ 和 $\mathbf{h}_n^{(P)}$ 的具体表达式。

3.3.1 端口1

对于此端口，模式与用于展开电场的函数相同。因此，利用 (21) 并满足 (39)，可得

$$\mathbf{e}_n^{(1)} = \frac{\mathbf{e}_{t,n}}{\sqrt{Y_n^{(1)}}} \tag{40}$$

$$\mathbf{h}_n^{(1)} = \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{e}_{t,n} \sqrt{Y_n^{(1)}}, \tag{41}$$

其中

$$Y_n^{(1)} = \begin{cases} \dfrac{\gamma_n^{(1)}}{\jmath\omega\mu'} & \text{for TE modes} \\ \dfrac{\jmath\omega\epsilon'}{\gamma_n^{(1)}} & \text{for TM modes} \end{cases} \tag{42}$$

端口1处的模态波导纳，其中 $\gamma_n^{(1)} = \sqrt{[k_n^{(1)}]^2 - k^2}$ 为模态传播常数， $k_n^{(1)}$为模式特征值（可通过矩形波导的标准模态分解获得）， $k = \omega\sqrt{\mu'\epsilon'}$ 为波数，即 ε'， μ' 为端口1处波导的绝对介电常数和磁导率。

3.3.2 端口2

该端口经过式 (3) 中的几何变换，使长度为 a_L、b_L 的边变换为长度为 a_0、 b_0 的边。模态函数经过

式 (3) 中针对 $z'=L$ 的变换，即:

$$x=x'\frac{a_0}{a_L},\quad y=y'\frac{b_0}{b_L},\quad z=z', \tag{43}$$

因此，影响输出端口的相应雅可比矩阵 J_L 为

$$\bar{\mathbf{J}}_L=\begin{bmatrix}\frac{a_0}{a_L} & 0 & 0\\ 0 & \frac{b_0}{b_L} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}. \tag{44}$$

可以证明，端口2处模式的传播常数 $\gamma_n^{(2)}$ 不受变换影响，而模态函数则会发生变换，即有

$$\mathbf{e}_n^{(2)}=A_n\,\bar{\mathbf{j}}_L^{-1}\mathbf{e}_{t,n}, \tag{45}$$

$$\mathbf{h}_n^{(2)}=-A_nY_n^{(2)}\,\bar{\mathbf{j}}_L^{-1}(\hat{\mathbf{z}}\times\mathbf{e}_{t,n}), \tag{46}$$

其中

$$\bar{\mathbf{j}}_L=\begin{bmatrix}\frac{a_0}{a_L} & 0\\ 0 & \frac{b_0}{b_L}\end{bmatrix}, \tag{47}$$

$$Y_n^{(2)}=\begin{cases}\dfrac{\gamma_n^{(2)}}{\jmath\omega\mu'} & \text{for TE modes}\\ \dfrac{\jmath\omega\epsilon'}{\gamma_n^{(2)}} & \text{for TM modes}\end{cases} \tag{48}$$

是端口2处的模态波导纳，其中 $\gamma_n^{(2)}=\sqrt{[k_n^{(2)}]^2-k^2}$ 为模态传播常数，$k_n^{(2)}$ 为模式特征值，k 的定义与式 (42) 相同，而 A_n 是一个需要适当设定的归一化常数。特别地，施加式 (39) 可得

$$A_n=\sqrt{\frac{a_0b_0}{Y_n^{(2)}a_Lb_L}},$$

因此，式 (45)–(46) 中的模态函数变为

$$\mathbf{e}_n^{(2)}=\sqrt{\frac{a_0b_0}{Y_n^{(2)}a_Lb_L}}\,\bar{\mathbf{j}}_L^{-1}\mathbf{e}_{t,n}, \tag{49}$$

$$\mathbf{h}_n^{(2)}=-\sqrt{\frac{Y_n^{(2)}a_0b_0}{a_Lb_L}}\,\bar{\mathbf{j}}_L^{-1}(\hat{\mathbf{z}}\times\mathbf{e}_{t,n}). \tag{50}$$

下面详细介绍 GSM 矩阵的计算方法。其思路是将式（37）中的向量 $\boldsymbol{C}$ 修改为一个矩阵，以包含两个端口处的所有模态函数，即

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_t^{(1)} & \boldsymbol{C}_t^{(2)}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}, \tag{51}$$

其中，我们再次使用上标 (P) 指代端口 $P \in \{1,2\}$，并且

$$\boldsymbol{C}_t^{(P)}(i,n) = \int_{S_P} \mathbf{f}_i \cdot [\mathbf{h}_n^{(P)} \times \hat{\mathbf{n}}]\, dS. \tag{52}$$

由式（38）结合多列强迫项 $\boldsymbol{C}$，最终可得广义阻抗矩阵（GIM） $\boldsymbol{Z}$的表达式，即

$$\boldsymbol{Z} = -j\omega\mu_0 \boldsymbol{C}^T (\boldsymbol{A} - k_0^2 \boldsymbol{B})^{-1} \boldsymbol{C}. \tag{53}$$

众所周知，矩阵 $\boldsymbol{Z}$ 描述了每个端口的每个模式下，入射功率波向量 $\boldsymbol{p}^+$ 与反射功率波向量 $\boldsymbol{p}^-$ 之间的关系，即

$$\boldsymbol{p}^+ + \boldsymbol{p}^- = \boldsymbol{Z}\,(\boldsymbol{p}^+ - \boldsymbol{p}^-). \tag{54}$$

因此，令 $\boldsymbol{p}^- = \boldsymbol{S}\boldsymbol{p}^+$，即可计算

$$\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{Z} - \boldsymbol{I}), \tag{55}$$

其中 $\boldsymbol{I}$ 为 $2N_{\mathrm{M}} \times 2N_{\mathrm{M}}$ 阶单位矩阵，由此可得散射矩阵的标准表达式。

请注意，我们仅使用横向模态函数 $\mathsf{e}_{t,\ n}$，就定义了构建最终广义散射矩阵（GSM） $\boldsymbol{S}$ 所需的全部项。

4 结果

本节评估 HiMod 离散化在计算矩形波导中不同平滑过渡段实例的广义散射矩阵（GSM）时的性能。我们将所提方法与标准全三维有限元法进行比较，考察其精度和计算效率。具体而言，我们采用商业软件 CST 微波工作室（版本 18）和 HFSS（Ansys 电子桌面，2021年 R2 版）得到的结果作为参考值，并尽可能提高计算精度以获得高精度数据。具体而言，我们采用频域迭代求解器，CST 的容差为 $1\mathrm{e}{-4}$，HFSS 的容差为 $1\mathrm{e}{-5}$。

作为第一个示例，我们分析一个连接两段矩形横截面波导的线性渐变段，其变化仅发生在高度方向（见图 3）。具体而言，根据 [19], ，我们选择 $a_0 = 0.570$ mm、$b_0 = 0.570$ mm、$a_L = 0.285$ mm、$b_L = 0.570$mm、$L = 1.1$ mm $= 1.36\lambda_0$，其中 $\lambda_0 = c/f_0$，c 为光速，且 $f_0 = 372$ GHz，并遵循以下规则

$$a(z) = a_0 + (a_L - a_0)\frac{z}{L}, \quad b(z) = b_0.$$

在 [19], 中，这个简单渐变段用作 372 GHz 高次模输入耦合器的一个组件。

对于这个非常简单的滤波器，我们仅采用基于 11 个自由度的二次有限元对方向 z 进行离散化，同时使用 4 个模式（横电 $_{10}$，横电 $_{01}$，横电 $_{11}$ 和横磁 $_{11}$）来建模横向场，每个频率下总共只有 50 个未知数

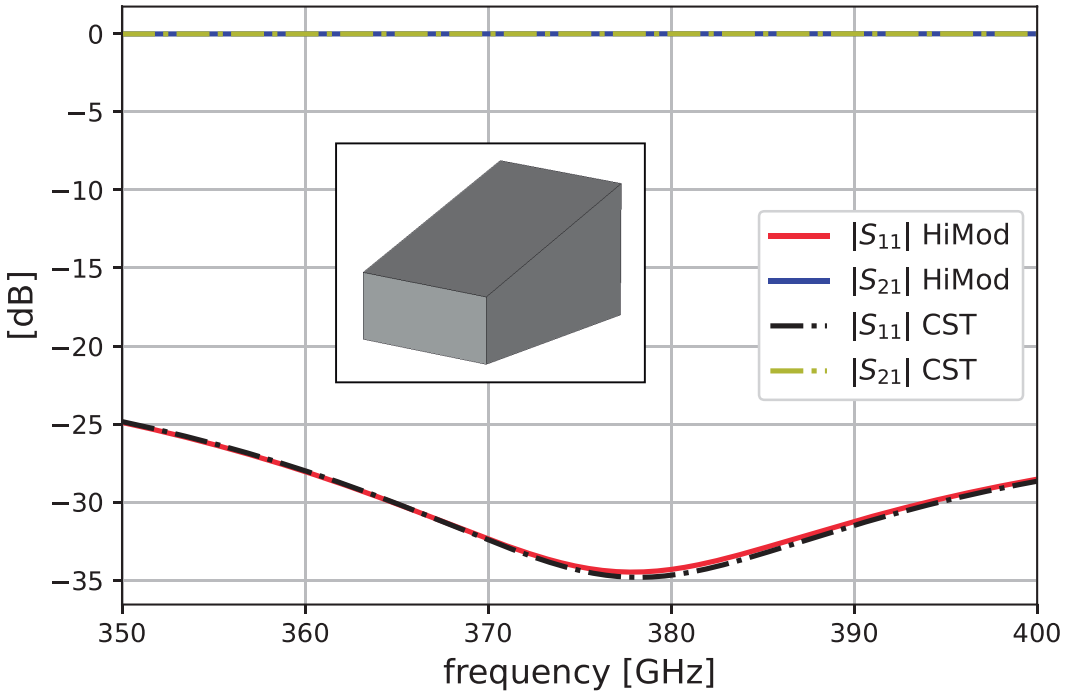


图 3：对于高度按 [19] 所示线性变化的渐变段，横电 TE_{10} 模式的散射参数幅值。比较商业软件 CST 的结果与 HiMod 降阶解。

用于求解 (53) 的点。借助变换后的渐变波导的笛卡尔几何，利用迭代积分公式计算分量 (27)-(35)。具体而言，我们沿 x、 y 和 z 使用一维高斯-勒让德求积公式，相对容差为 $1.5e{-}05$。

在图 3 中，我们比较了 CST 软件和 HiMod 方法对输入/输出波导中主导横电 TE_{10} 模式的参数 S_{11} （端口1处的反射系数）和 S_{21} （端口2处的透射系数）所给出的结果。端口处在分析带宽内还存在其他非传播模式，但为便于与一些参考数据进行比较，图中仅展示主导横电 TE_{10} 模式。

图中的曲线表明，CST 与 HiMod 解吻合良好。

作为一种更通用的配置，我们选择尺寸为 $a_0 = 22.86$mm、 $b_0 = 11.43$ mm 的波导，并通过长度为 $L = 20$ mm 的线性渐变段将其连接到尺寸更大的波导（ $a_L = 28.448$ mm、 b_L =14.224 mm），在 $f_0 = 10$GHz 下工作（见图 4）。这种设置使尺寸沿 x-和

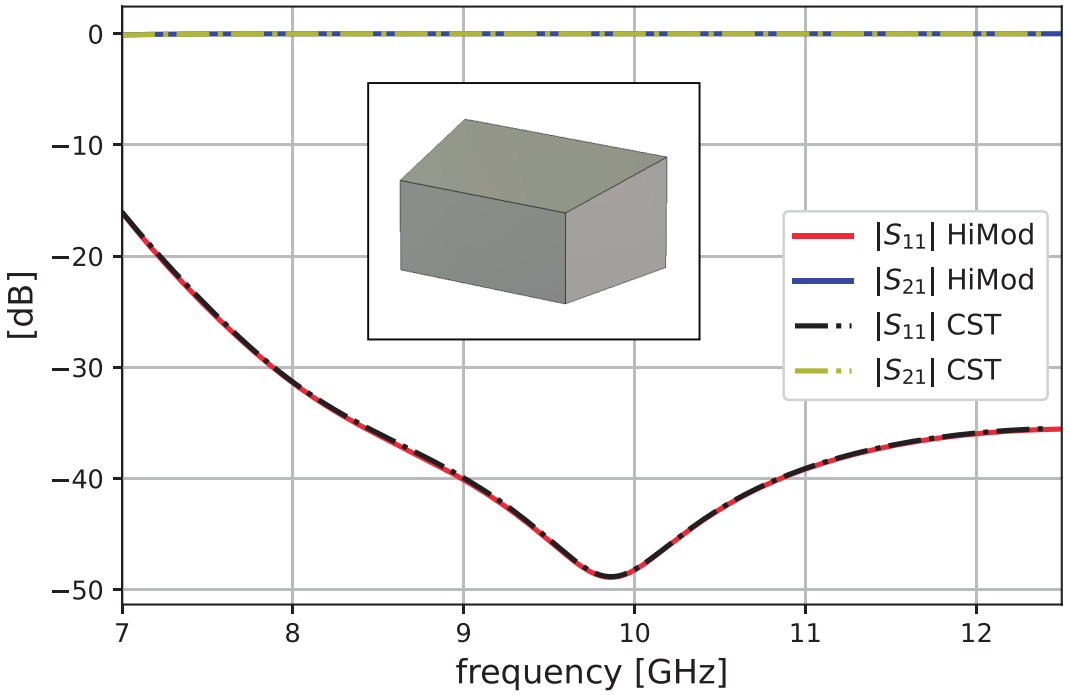


图4：线性变化高度和宽度的渐变段中横电 TE_{10} 模式的散射参数幅值。商业软件 CST 与 HiMod 降阶解的结果对比。

y-方向发生变化。该器件的轮廓由以下变换解析定义

$$a(z) = a_0 + (a_L - a_0)\frac{z}{L}, \tag{56}$$

$$b(z) = b_0 + (b_L - b_0)\frac{z}{L}. \tag{57}$$

有限元离散和模态离散经过选择，以确保 HiMod 近似具有足够的精度，从而与 CST 解相匹配。具体而言，我们在 z 方向上采用 15 个等间距点，共计 15 个线性自由度和 29 个二次自由度。对于模态展开，我们采用与前一案例相同的 4 个模式。

在图4中，我们比较了主模横电 TE_{10}的 CST 解和 HiMod 解。在整个带宽范围内，两者结果基本完全一致。

第三个示例涉及图 5 所示的正弦渐变结构，其中波导尺寸仅沿 x 方向变化。现在，渐变段由以下关系描述

$$a(z) = a_0 + (a_L - a_0)\sin\left(\frac{\pi z}{2L}\right), \quad b(z) = b_0.$$

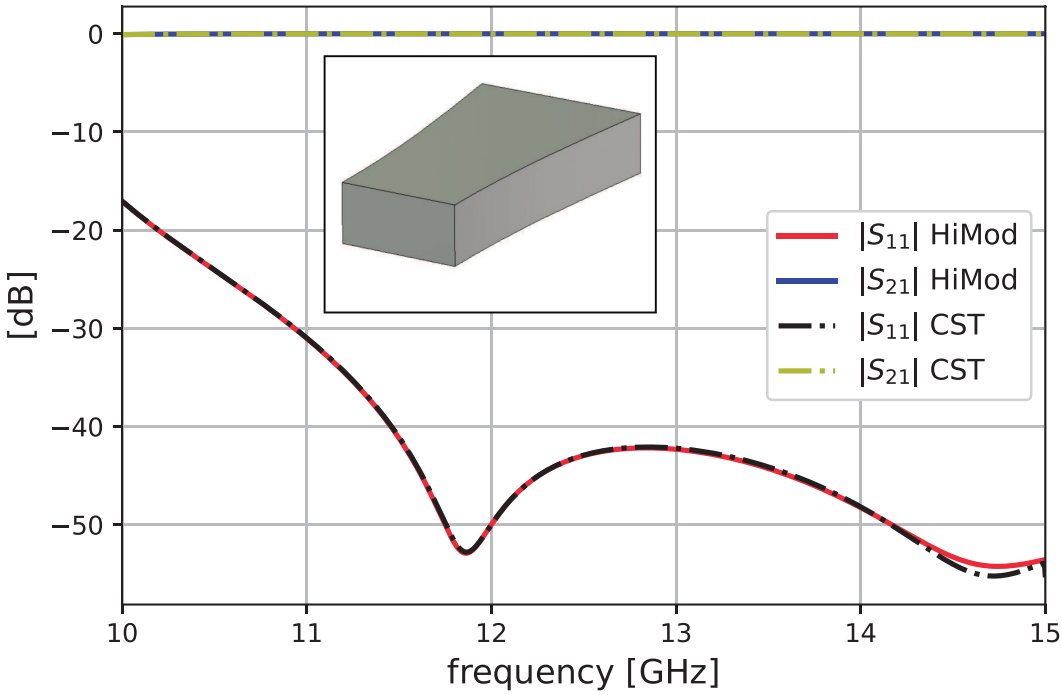


图5：沿 x方向正弦变化的渐变段中，TE_{10} 模式的散射参数幅值。比较商业软件 CST 与 HiMod 降阶解的结果。

其中，波导尺寸分别为 $a_0 = 15.79$ mm、 $b_0 = 7.889$ mm 和 $a_L = 22.86$mm、 $b_L = 7.889$ mm，长度为 $L = 40$ mm， $= 1.67\lambda_0$ 位于 $f_0 = 12.5$ GHz。HiMod降阶采用与前一案例研究相同的 z 方向离散化，而在横截面中使用四个 TE_{m0} ($m = 1, ..., 4$) 模式，不包含任何 TM模。因此，需要求解一个规模为 116 的代数系统。

图5中，与图4相比，第一传播模 TE_{10} 的响应覆盖了更高的频率。HiMod降阶模型的结果非常准确，与 CST 提供的输出高度吻合；仅在频率范围最高端存在极小偏差，而此处的反射系数值也极小。

作为一个取自文献的实际示例，我们通过设置 $a_0 = 22.86$ mm、 $b_0 = 10.16$ mm、 $a_L = 22.86$ mm、 $b_L = 5.08$ mm，以及长度 $L = 47.08$ mm $= 1.41\lambda_0$（其中 $f_0 = 10$ GHz），对图 6 所示的渐变段进行仿真。轮廓综合采用 [29] 中所述的方法，针对 Hecken渐变段 [30]，进行；该渐变段在给定输入参数组下呈现准最优响应（即在 8.2 GHz 至 12.4 GHz 的 WR90频率范围内，回波损耗低于 40 dB）。 $b(z)$ 的依赖关系并无显式形式，但可表示为

并无显式形式，但可表示为

$$b(z) = b_0 \exp\left(-2\int_0^z K_b(r)dr\right), \tag{58}$$

其中， $K_b(r)$是回波损耗、频率范围以及两个端口尺寸的函数，而 $a(z) = a_0$。定义式（58）中的积分通常通过数值方法计算。由于这一过程难以简要概述，详情请参阅 [29] 。

与前两个测试案例一样，我们保留沿 z 的离散化，并利用横电TE_{10}, TE_{12}, TE_{14} 模式和横磁TM_{12}, TM_{14} 模式对横向场进行建模，以此采用HiMod近似，未知数总数为175。

图6所示结果凸显了降阶解的良好精度，与CST输出相比表现出色。第二谐振最小值处的轻微差异可能是由于计算广义散射矩阵时采用的频率步长所致，并非关键问题。在此情境下，很难判定哪种方法更优。事实上，结果能达到 -60 dB量级已令人十分满意，这表明我们利用HiMod对渐变结构进行建模的方式并未对几何形状作出任何明显简化。

前述示例中的数值评估可视为一个基准案例，因为三维有限元法和 HiMod 离散化所涉及的自由度都较少。为检验降阶模型的精度和可扩展性，我们模拟了一个基于 WR-75波导构建的 E面低通滤波器，其输入尺寸为 $a_0 = a_L = 19.05$ mm、$b_0 = b_L = 9.525$ mm、$L = 218.025$ mm $= 5.45\lambda_0$，工作频率为 $f_0 = 12$ GHz。该滤波器由长度为 3.825 mm、最小间隙为 6 mm 的正弦单元组成，设计方案见 [31, 32]。

滤波器轮廓如图7所示，由 3 个区段组成。第一个区段包含 8 个由汉宁窗调制的单元，峰峰值高度为 $h_{min} = 1.6$mm。第二个区段由 45 个高度递增的单元组成，高度从 h_{min} 增至 $h_{max} = 8.6$mm，其中最后 4 个单元的高度设为 h_{max}，最小间隙为 $g_{min} = 6$ mm。最后一个区段由 4 个单元构成，最大高度为 h_{max}，并由汉宁窗调制（详情请参阅 [31]）。
我们注意到，器件边界的平滑变化使其特别适用于高功率应用。然而，从计算角度来看，正弦轮廓的高频变化对于三维方法而言极具挑战性。这也说明了为何采用文献 [27] 提出的 HiMod降阶模型，以及专用于矩形波导的 E 面二维有限元法公式。具体而言，该二维公式采用二次有限元来近似磁场的x分量，约有 400, 000 个自由度。HiMod降阶将传播方向离散为 451 个等间距点，将横截面离散为 7 个模式（横电$_{10}$, 横电$_{12}$, 横磁$_{12}$, 横电$_{14}$,横磁$_{14}$, 横电$_{16}$ 和横磁$_{16}$），自由度总数为 7660；频率范围 $10 - 15$ GHz 则划分为 201 个采样点（每个采样点约需 0.15 秒）。

在图8中，我们通过将 HiMod近似与商业软件HFSS（与 CST 相比，该软件简化了此配置的设置）以及二维有限元模型所得结果进行比较，对滤波器响应进行了建模。

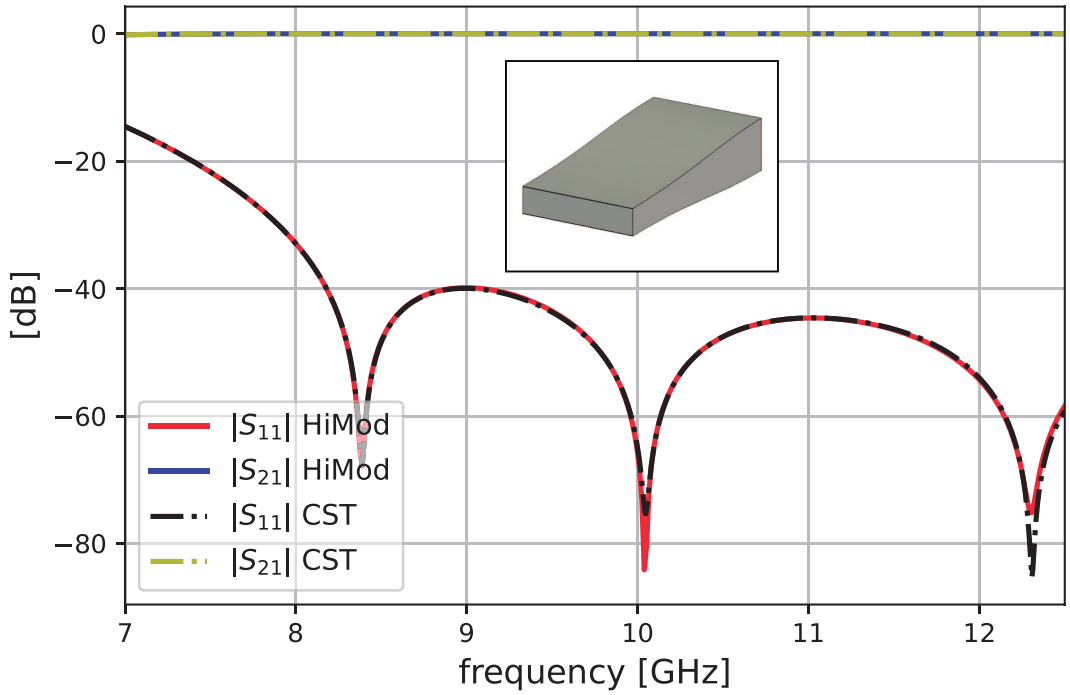


图6： [29]中一个 Hecken 锥形波导内横电$_{10}$ 模式的散射参数幅值。比较商业软件 CST 与 HiMod降阶解的结果。

我们注意到，这三种数值方法都能准确捕捉通带内的响应。然而，只有 HiMod 和二维有限元公式（在本文的背景下，其通用性不如 HiMod）能够计算出阻带内参数 S_{21} 的极低幅值，几乎实现完全抑制。此外，在这三种方法中，HiMod 所需的未知量最少，速度也最快。从更定量的角度来看，在标准 PC 上，HFSS 仿真耗时超过三小时，而二维有限元和 HiMod 仿真分别耗时三分钟和不到一分钟；整个过程未进行任何代码并行化，仅使用稀疏矩阵和开源求解器。

5 结论

本文提出了一种基于层次模型（HiMod）降阶的新方法，并将其应用于具有平滑轮廓的矩形波导锥形段和过渡段的分析。该方法基于预先进行的坐标变换，将器件转换为填充有非均匀各向异性材料的平行六面体。在

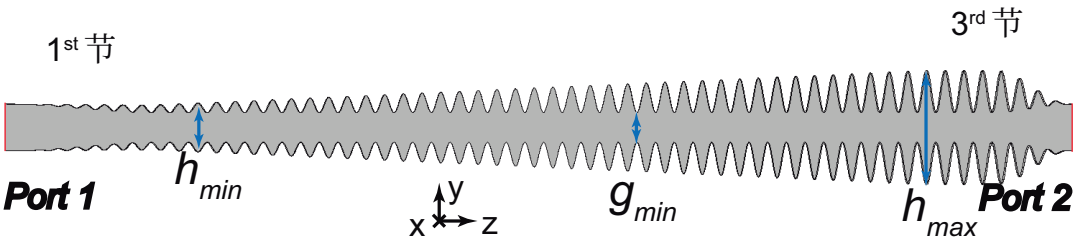


图7：矩形波导 E 面低通滤波器（y-z 视图），详见 [3 1].

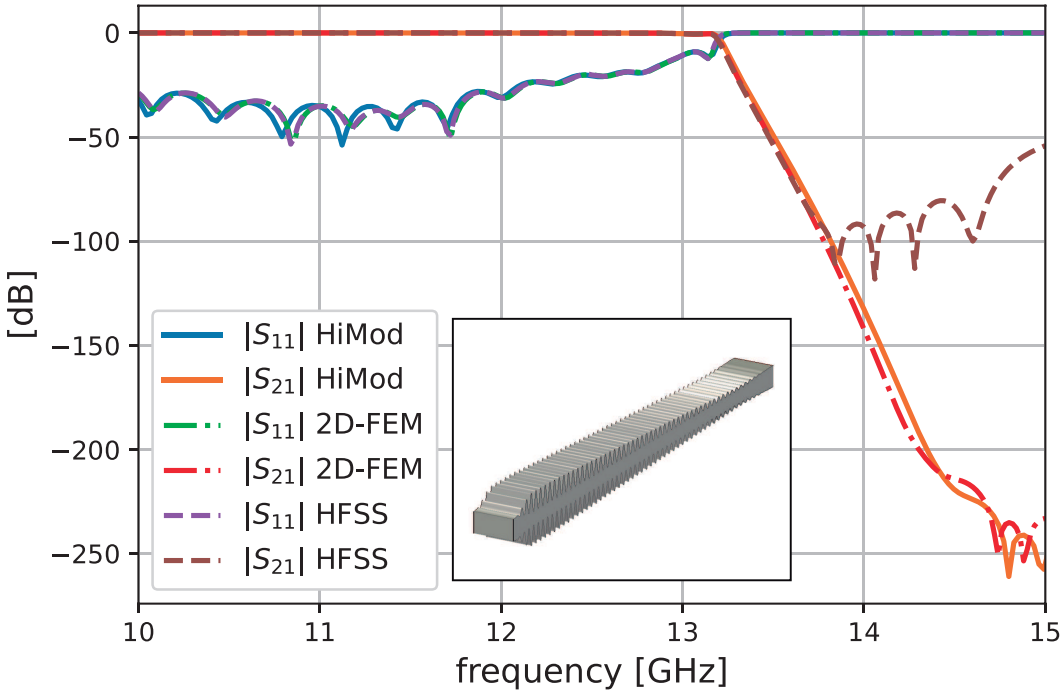


图8：HFSS、专用 E 面二维有限元法和 HiMod 对图7中滤波器的横电$_{10}$ 模式的响应。

变换后的几何结构中，采用横向平面上的模态分解，并结合沿纵向的一维有限元，对电磁波传播进行建模。

我们已经证实，HiMod降阶的实际优势在于其相关代数系统的规模非常小，同时不会牺牲精度。在所考虑的最具挑战性的配置中（见图7），仅需7个模式即可保证获得精确的降阶解，其性能优于HFSS软件提供的结果。此外，与标准三维有限元法相比，尽管尚未对降阶模型的代码进行任何优化，仍以令人印象深刻的加速比（约200倍）获得了极为精确的结果，尽管尚未进行

已应用于降阶模型的代码。

作为一种可能的未来发展方向，我们有意根据逐点 HiMod 公式（见 [33, 34]），沿 z 方向改变模式的数量。

致谢

本研究部分得到了西班牙政府资助，项目编号为 PID2020- 116968RB-C32 (DE WICOM) 和 TED2021-130650B-C21 (ANT4CLIM)，由 MCIN/ AEI/ 10.13039/501100011033（国家研究署）资助；同时也得到了欧盟（欧盟）“ NextGenerationEU”/PRTR 的资助。S. Perotto 感谢欧盟“地平线2020”研究与创新计划玛丽·斯克沃多夫斯卡-居里行动的支持，资助协议编号为 872442 (ARIA，工业应用精确降阶模型)。S. Micheletti 和 S. Perotto 感谢 PRIN 研究项目资助 n.20204LN5N5《多物理问题中异质偏微分方程的高级多面体离散》，以及 INdAM-GNCS 2022 项目《应用科学的计算降阶方法：聚焦复杂系统》的支持。

A 矩形波导中的模态函数

这里，我们定义函数 $\mathbf{e}_t^{\mathrm{TX},\,n} = \hat{\mathbf{x}} e_x^{\mathrm{TX},\,n} + \hat{\mathbf{y}} e_{y\,n}^{\mathrm{TX},}$（TX = 横电、横磁）以及 $\mathbf{e}_z^{\mathrm{TM},\,n} = \hat{\mathbf{z}}\, e_{z\,n}^{\mathrm{TM},}$ 在 (9)-(10) 中的表达式，它们分别是与一般模式 n 对应的横向和纵向模态函数。

矩形波导中的模式由两个指标 $p = p(n)$ 和 $q = q(n)$ 定义，分别对应 x 和 y 坐标（见 (11)），其取值范围分别为$p = 0,\ 1\ldots$ 和 $q = 0,\ 1, \ldots,$ 但不包括 $p = q = 0$这一选择。

如第 2 节所述，我们考虑一个横截面位于 $x - y$ 平面中心的波导，其沿 x 和 y方向的尺寸分别为 a_0 和 b_0。对于 $n = 1,\ldots, N_{\mathrm{M}}$，当$N_{\mathrm{M}} = N_{\mathrm{TE}} + N_{\mathrm{TM}}$时，如果第 n个模式为横电模式，则有

$$e_{x,n}^{\mathrm{TE}} = \frac{B_{pq}}{k_{pq}} k_{yq} \cos(k_{xp}\tilde{x}) \sin(k_{yq}\tilde{y}), \tag{59}$$

$$e_{y,n}^{\mathrm{TE}} = -\frac{B_{pq}}{k_{pq}} k_{xp} \sin(k_{xp}\tilde{x}) \cos(k_{yq}\tilde{y}), \tag{60}$$

而如果第 n 个模式是横磁，则有

$$e_{x,n}^{\mathrm{TM}} = \frac{B_{pq}}{k_{pq}} k_{xp} \cos(k_{xp}\tilde{x}) \sin(k_{yq}\tilde{y}), \tag{61}$$

$$e_{y,n}^{\mathrm{TM}} = \frac{B_{pq}}{k_{pq}} k_{yq} \sin(k_{xp}\tilde{x}) \cos(k_{yq}\tilde{y}). \tag{62}$$

此外，对于 TM 模，我们还必须定义

$$e_{z,m}^{\mathrm{TM}} = B_{pq} \sin(k_{xp}\tilde{x}) \sin(k_{yq}\tilde{y}), \tag{63}$$

对于 $m = 1, \ldots, N_{\mathrm{TM}}$。在 (59)-(63) 中，我们设定

$$\tilde{x} = x - a_0/2, \qquad \tilde{y} = y - b_0/2, \tag{64}$$

$$k_{xp} = \frac{p\pi}{a_0}, \qquad k_{yq} = \frac{q\pi}{b_0}, \tag{65}$$

$$k_{pq} = \sqrt{k_{xp}^2 + k_{yq}^2}, \qquad B_{pq} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{p0}\varepsilon_{q0}}{a_0 b_0}}, \tag{66}$$

其中，ε 是 p 或 q的函数，为

$$\varepsilon_{p0} = \begin{cases} 1 & \text{for } p = 0 \\ 2 & \text{for } p > 0, \end{cases} \tag{67}$$

$$\varepsilon_{q0} = \begin{cases} 1 & \text{for } q = 0 \\ 2 & \text{for } q > 0. \end{cases} \tag{68}$$

N_{M} 模式选取为对应特征值 k_{pq}按递增顺序排列的前 N_{M} 个模式。

参考文献

[1]G. G. Gentili、M. Khosronejad、G. Bernasconi、S. Perotto 和 S. Micheletti，《采用分层模型降阶高效建模变形管道中的多模导波声传播》，应用数值数学，第173卷，第329–344页，2022年。[2] A. Ern、S. Perotto 和 A. Veneziani，《对流-扩散-反应问题的分层模型降阶》，载于《数值数学与高级应用》。Springer，柏林，2008年，第703–710页。[3] S. Perotto、A. Ern 和 A. Veneziani，《椭圆问题的分层局部模型降阶：一种区域分解方法》，《多尺度建模与仿真》，第8卷，第4期，第1102–1127页，2010年。[4]M. C. Aletti、S. Perotto 和 A. Veneziani，《采用HiMod降阶处理具有一般边界条件的对流-扩散-反应问题》，《科学计算杂志》，第76卷，第1期，第89–119页，2018年。[5] S. Perotto 和 A. Veneziani，《椭圆问题分层降阶中的模型与网格耦合自适应》，《科学计算杂志》，第60卷，第3期，第505–536页，2014年。[6] M. Lupo Pasini 和 S. Perotto，《由本征正交分解驱动的参数化对流-扩散-反应问题分层模型降阶》，《数值分析电子汇刊》，第55卷，第187–212页，2022年。

[7] ——，《含噪数据条件下由机器学习驱动的参数化对流-扩散-反应问题分层模型降阶》，《科学计算杂志》，第94卷，第2期，第36号论文，2023年。[8] S. Guzzetti、S. Perotto 和 A. Veneziani，《管道中不可压缩流体的分层模型降阶》，《国际工程数值方法杂志》，第114卷，第5期，第469–500页，2018年。[9] Y. A. Brandes Costa Barbosa 和 S. Perotto，《患者特异性动脉段中斯托克斯问题的分层降阶模型》，《国际计算流体动力学杂志》，第34卷，第2期，第160–171页，2020年。[10] H. Wu 和 A. Cangellaris，《包含集总电路模型的无源电磁器件有限元近似的模型阶次降阶》，IEEE微波理论与技术汇刊，第52卷，第9期，第2305–2313页，2004年。[11] L. Kulas 和 M. Mrozowski，《多级模型阶次降阶》，IEEE《微波与无线元件快报》，第14卷，第4期，第165–167页，2004年。[12] J. Uher、J. Bornemann 和 U. Rosenberg，《天线馈电系统用波导元件：理论与计算机辅助设计》。Artech House天线丛书，1993年。[13] R. E. Collin，《微波工程基础》。John Wiley & Sons，2007年。[14] H. Chen、C. T. Chan 和 P. Sheng，《变换光学与超材料》，《自然·材料》，第9卷，第5期，第387–396页，2010年。[15] F. Sun、B. Zheng、H. Chen、W. Jiang、S. Guo、Y. Liu、Y. Ma 和 S. He，《变换光学：从经典理论与应用到新分支》，《激光与光子学评论》，第11卷，第6期，1700034，2017年。[16] R. Chen、L. Kuang、Z. Zheng 和 Q. H. Liu，《基于变换光学的时域有限差分算法：用于计算带薄介质涂层物体的散射》，IEEE Access，第7卷，第150 060–150 071页，2019年。[17] N. B. Kundtz、D. R. Smith 和 J. B. Pendry，《利用变换光学进行电磁设计》，IEEE会刊，第99卷，第10期，第1622–1633页，2011年。[18] R. S. Sangam 和 R. Singh Kshetrimayum，《线性渐变段：分析、设计与应用》，载于2018年IEEE微波理论与技术学会国际微波与射频会议（IMaRC），2018年，第1–4页。[19] J. R. Garner、L. Zhang、C. R. Donaldson、A. W. Cross 和 W. He，《372吉赫兹高次模输入耦合器的设计研究》，IEEE《电子器件汇刊》，第63卷，第8期，第3284–3290页，2016年。

[20] G. Liu、Y. Wang、Y. Pu、J. Wang、R. Yan、Y. Luo 和 S. Wang，《一种毫米波高阶 TE13 模式转换器》，IEEE《电子器件汇刊》，第 63 卷，第 7 期，第 2907–2911 页，2016年。[21] J. Ren、G. Shu、J. He、J. Liao、J. Deng、J. Lin、C. Ruan 和 W. He，《一种易于制造的圆形 TE21/TE01 模式发生器》，IEEE《电子器件汇刊》，第 68 卷，第 12 期，第 6532–6537 页，2021年。[22] J. Encinar 和 J. Rebollar，《分析波纹与非波纹矩形喇叭的混合技术》，IEEE《天线与传播汇刊》，第 34 卷，第 8 期，第 961–968 页，1986年。[23] W. J. Otter 和 S. Lucyszyn，《用于可调谐太赫兹应用的混合三维打印技术》，IEEE会刊，第 105 卷，第 4 期，第 756–767 页，2017年。[24] M. Guglielmi、R. Sorrentino 和 G. Conciauro，《高级模态分析：波导元件与滤波器的 CAD 技术》。John Wiley & Sons，1999年。[25] D. M. Pozar，《微波工程》。John Wiley & Sons，2005年。[26] J.-C. N´ed´elec，《R^3,中的混合有限元》，《数值数学》，第 35 卷，第 3 期，第 315–341 页，1980年。[27] G. G. Gentili、L. Accatino 和 G. Bertin，《用于波导元件分析的广义二维半有限元方法》，IEEE微波理论与技术汇刊，第 64 卷，第 8 期，第 2392–2400 页，2016年。[28] J.-F. Lee、D.-K. Sun 和 Z. Cendes，《使用切向矢量有限元对介质波导进行全波分析》，IEEE微波理论与技术汇刊，第 39 卷，第 8 期，第 1262–1271 页，1991年。[29] J. M. Percaz、I. Arnedo、I. Arregui、F. Teberio、P. Mart´ín-Iglesias、M. A. G. Laso 和 T. Lopetegi，《基于耦合模理论、适用于单模工作的渐变匹配段通用综合方法》，IEEE微波理论与技术汇刊，第 67 卷，第 9 期，第 3511–3526 页，2019年。[30]R. Hecken，《一种近乎最优的无不连续性匹配段》，IEEE微波理论与技术汇刊，第 20 卷，第 11 期，第 734–739 页，1972年。[31] I. Arregui、I. Arnedo、A. Lujambio、M. Chudzik、D. Benito、R. Jost、F. J. Gortz、T. Lopetegi 和 M. A. G. Laso，《一种紧凑型大功率无杂散低通波导滤波器设计》，IEEE《微波与无线元件快报》，第 20 卷，第 11 期，第 595–597 页，2010年。[32] I. Arregui、F. Teberio、I. Arnedo、A. Lujambio、M. Chudzik、D. Benito、T. Lopetegi、R. Jost、F.-J. G¨ortz、J. Gil、C. Vicente、B. Gimeno、V. E. Boria、D. Raboso 和 M. A. G. Laso，《具有宽带

高阶模抑制的耐多载波效应低通谐波滤波器》，载于《2013 IEEE MTT-S国际微波研讨会文摘（MTT）》，2013年，第 1–4 页。[33] S. Perotto 和 A. Zilio，《分层模型降阶：三种不同方法》，载于《数值数学与高级应用 2011》。Springer，海德堡，2013年，第 851–859 页。[34] ——，《用于抛物型方程的时空自适应分层模型降阶》，《工程科学高级建模与仿真》，第 2 卷：25，2015年。