arXiv:2302.00809v1 [math.DG] 2 Feb 2023

# 黎曼流形中的凸超曲面综述

RONALDO FREIRE DE LIMA

谨以此文献给 *Renato Tribuzy* 教授，祝
贺他 *75* 岁寿辰

Abstract. 本文综述了经典的 Hadamard、Liebmann 和 Cohn-Vossen 凸曲面刚性定理从三维欧几里得空间推广到黎曼流形中凸超曲面的主要成果。我们介绍的结果包括 Renato Tribuzy 教授与 H. Rosenberg 合作得出的关于齐性三维流形中凸曲面刚性的结果。

## 1. Introduction

凸性是空间子集的一种古老而基本的几何概念。阿基米德在其著名著作《论球与圆柱》中首次探讨了这一概念；该书出版于公元前225年。有趣的是，书名中就包含了两种最经典的凸曲面。

在欧几里得空间 $\mathbb{R}^3$中，若一个非空子集 $\Omega$ 包含其中任意两点的连线段，则称其为凸集。凸集的一项重要性质是，可以通过其边界的几何特征来刻画。更确切地说，$\mathbb{R}^3$ 中的一个闭真子集 $\Omega$ 是凸集，当且仅当其边界 $\partial\Omega$上的每一点 $p$ 处至少存在一个支撑平面 $\Pi$，也就是说，$\Omega$位于 $\Pi \ni p$ 所确定的某个半空间内（见 [34], 第 137–140 页）。

根据凸集的这一刻画，$\mathbb{R}^3$中的一个光滑嵌入曲面 $\Sigma$ 若是某个开凸集 $\Omega$ 的边界，则称其为凸曲面；该开凸集 $\mathbb{R}^3$中，称为凸体。平面、球面和正圆柱面是凸曲面的典型例子。函数 $z = x^2 - y^2$的图像，所构成的马鞍面，是 $\mathbb{R}^3$.中嵌入的非凸曲面的典型例子。

显然，若 $\Sigma = \partial\Omega$ 是凸曲面，则 $\Omega$ 的支撑平面恰好是 $\Sigma$. 的切平面。特别地，对于任意 $p \in \Sigma$，经过 $\Sigma' \subset \Sigma$ 的局部图形$p$ ——定义在 $T_p\Sigma$ 的一个开集上——必然包含在由 $T_p\Sigma$.确定的某个闭半空间内。这一性质是局部性质，因此也适用于浸入曲面（可能存在自交），称为局部凸性。

图像的高斯曲率公式直接表明，局部凸曲面 $\Sigma$ 具有非负高斯曲率。（反之则不成立，下一节将对此进行说明。）此外，$\Sigma$ 在点 $p$ 处的高斯曲率为正，当且仅当如上所述的局部图形 $\Sigma'$, 仅在 $p$. 处与 $T_p\Sigma$ 相交。如果是这样，我们称 $p$ 为一个椭圆点，并且称 $\Sigma$ 是

(A1) Departamento de Matemática - Universidade Federal do Rio Grande do Norte
*E-mail address*: ronaldo.freire@ufrn.br。
2010 *Mathematics Subject Classification.* 53 B02（主要）。*Key words and phrases.* 凸超曲面 – 黎曼流形。

严格凸于 $p$. 因此，球面处处严格凸，而直圆柱面则处处不严格凸。

在 [22], J. Hadamard 证实了这一引人注目的事实： $\mathbb{R}^3$ 中的紧致局部严格凸曲面必然是嵌入的、凸的，并且与单位球面 $\mathbb{S}^2$. 微分同胚。精确表述如下。

**Hadamard定理**。 设 $\Sigma$ 是浸入欧几里得空间 $\mathbb{R}^3$ 中的紧致连通光滑曲面，且具有正高斯曲率。那么， $\Sigma$ 是可定向的、嵌入的，并且是凸的。此外，其高斯映射 $N$： $\Sigma \to \mathbb{S}^2$ 是一个微分同胚。

J. Stoker [44] 通过证明以下事实推广了Hadamard定理：如果 $\Sigma$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中具有正高斯曲率的完备非紧浸入曲面，那么它是 $\mathbb{R}^2$. 中某个凸开集上的图像。通常，这两个结果合称为Hadamard–Stoker定理。

具有正高斯曲率的 $\mathbb{R}^3$ 紧致连通曲面称为卵形体。因此，Hadamard定理告诉我们，卵形体是嵌入的、凸的，并且与 $\mathbb{S}^2$. 微分同胚。鉴于这一事实，自然会问：在什么条件下，卵形体必然是 $\mathbb{R}^3$.中的圆形（即全脐）球面?

H. Liebmann [32] 通过证明具有常平均曲率或常高斯曲率的卵形体是全脐球面，回答了这个问题。在平均曲率的情形下，J. Jellett [28], 更早得出了一个名气较小——但结论更强——的结果：他假设曲面是星形的，而非卵形体。因此，这一Liebmann定理常被称为Liebmann–Jellett定理。在高斯曲率的情形下，D. Hilbert给出的证明（参见 [26, 附录 5]）随着时间推移逐渐成为公认的证明，因此这一结果也以他的名字与Liebmann的名字共同命名。

关于卵形体，最深刻的定理大概是S. Cohn- Vossen [7], 提出的定理，该定理断言这类曲面是刚性的。这意味着，如果 $\Sigma_1$ 和$\Sigma_2$ 是等距卵形体，那么它们就是全等的，也就是说，它们只相差一个 $\mathbb{R}^3$. 的刚性运动。事实上，Cohn-Vossen证明该定理时假设 $\Sigma_1$ 和 $\Sigma_2$是解析的。之后，G. Herglotz [25] 在较弱的假设下给出了一个简洁的替代证明，即假设 $\Sigma_1$ 和 $\Sigma_2$ 属于 $C^2$.类。

自问世以来，Hadamard、Liebmann 和 Cohn-Vossen 关于凸曲面的这些经典刚性定理，已在许多方面推广到更一般的黎曼流形超曲面情形。下文将综述这一领域取得的主要成果，其中巴西数学家——尤其是 Manfredo do Carmo——作出了重要贡献，这一点我们随后将会看到。

我们也借此机会在最后一节介绍 Renato Tribuzy 教授与 H. Rosenberg 合作的一项关于齐性三维流形中凸曲面刚性的成果。

## 2. Preliminaries

除非另有说明，本文所讨论的黎曼流形均为可定向的、光滑的（属于 $C^\infty$ 类），且维数至少为 2。 给定一个黎曼流形 $M^{n+1}$， 我们主要将其超曲面视为等距浸入 $f\colon M^n \to M^{n+1}$， 其中 $M^n$ 是某个 $n$ 维黎曼流形。

有时，我们将考虑余维为 $p \geq 1$. 的等距浸入 $f\colon M^n \to M^{n+p}$ 。在这种情形下，我们用 $TM$ 和 $TM^\perp$ 分别表示其切丛

和法丛,

$$\alpha_f : TM \times TM \to TM^{\perp}$$

对于其第二基本形式，也就是说,

$$\alpha_f(X,Y) = \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y,$$

其中， $\overline{\nabla}$ 和 $\nabla$ 分别表示 $M$ 和 $M$上的黎曼联络，此外，给定 $\xi \in TM^{\perp}$，我们定义 $A_\xi$: $TM \to TM$为

$$A_\xi X = -(\text{tangential component of } \overline{\nabla}_X \xi)$$

并称其为 $f$ 在法向方向 $\xi$.上的形算子

众所周知， $A_\xi$ 是自伴的，因此，对于每个 $x \in M$，都存在一组正交归一基 $\{X_1, \ldots, X_n\} \subset T_x M$，由 $A_\xi$.的特征向量构成。每个向量 $X_i$都称为 $f$ 在 $x$ 处（相对于法向 $\xi$）的主方向，相应的特征值 $\lambda_i$ 称为 $f$ 在 $x$ 处（相对于法向 $\xi$）的主曲率。因此，我们有

$$A_\xi X_i = \lambda_i X_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

以下等号给出了第二基本形式 $\alpha_f$ 与形算子 $A_\xi$ 之间的关系:

$$\langle \alpha_f(X,Y), \xi \rangle = \langle A_\xi X, Y \rangle \quad \forall\, X, Y \in TM,\ \xi \in TM^{\perp},$$

其中， $\langle , \rangle$表示 $M$和 $M$.的黎曼度量

等距浸入 $f$: $M^n \to M^{n+p}$的第二基本形式 $\alpha_f$称为半定的，若对所有 $\xi \in TM^{\perp}$, 这个二次型

$$(X,Y) \in TM \times TM \mapsto \langle \alpha_f(X,Y), \xi \rangle$$

在 $M$.上是半定的（即形算子 $A_\xi$ 的非零特征值全都同号）。此外，若 $A_\xi$的非零特征值在 $M$.上全为正（分别为负），我们称 $\alpha_f$ 在法向方向 $\xi \in TM^{\perp}$ 上是正（分别是负）半定的

我们指出，在上述设定下，第二基本形式 $\alpha_f$ 的半定性并不意味着它在给定的法向方向 $\xi \in TM^{\perp}$.上是正半定或负半定。对于超曲面的情形，考虑一条光滑平面曲线 $\gamma$： $I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$，并将以 $\gamma$ 为底的圆柱面定义为如下浸入

$$\begin{array}{rccc} f\colon & I \times \mathbb{R}^{n-1} & \to & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{n-1} \\ & (t,x) & \mapsto & (\gamma(t), x), \end{array}$$

很容易看出这是 $\mathbb{R}^{n+1}$. 中的一个可定向超曲面。此外，对于两个单位 $\xi \in T(I \times \mathbb{R})^{\perp}$, 选择中的任意一个，都有

$$A_\xi = \pm \begin{bmatrix} k & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix},$$

其中 $k$ 是 $\gamma$. 的曲率。特别地， $\alpha_f$ 具有半定第二基本形式。此外，假设存在 $t_1$, $t_2 \in I$ 满足 $k(t_1) < 0 < k(t_2)$,我们有：在任意法向方向 $\xi \in T(I \times \mathbb{R})^{\perp}$,处， $\alpha_f$在 $(t_1, x)$是半正定的，当且仅当它在 $(t_2, x)$是半负定的。 因此， $\alpha_f$在任意法向方向上既不是半正定的，也不是半负定的（图 1）。

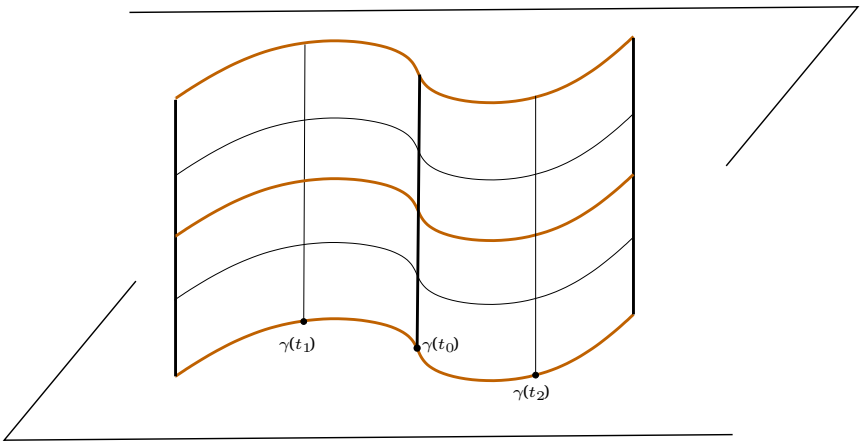


FIGURE 1. 平面曲线上的非局部凸圆柱面 $\gamma$.

还应注意，对于 $n = 2$, $\Sigma := f(I \times \mathbb{R})$在点 $f(t_0, x) \in \Sigma$处并非局部凸，其中 $k(t_0) = 0$,正如我们在引言中所讨论的；并且高斯曲率 $\Sigma$ 恒等于零（因为其主曲率之一也恒等于零）。因此，在 $\mathbb{R}^3$, 高斯曲率的非负性并不意味着局部凸性。

现在我们来明确一般可定向超曲面 $f\colon M^n \to M^{n+1}$, 的局部凸性概念，并建立它与第二基本形式 $\alpha_f$. 之间的关系。为此，首先注意，对于任意点 $x \in M$，存在 $M$中的一个开邻域 $U$，包含 $x$，使得 $\Sigma := f(U)$ 是函数 $\phi$ 的图像（通过 $M^{n+1}$ 的法向指数映射），定义在切空间 $f_*(T_xM)$的一个开集 $V \ni 0$ 上。在此背景下，如果存在一个适当的法向方向 $\xi \in TM^\perp$，使得函数 $\phi$ 在 $V$ 上非负（分别在 $V - \{0\}$ 上为正），则称 $f$ 在 $x$ 处局部凸（分别为局部严格凸）。

如果超曲面 $f\colon M^n \to M^{n+1}$ 在其任意一点 $M$. 处都局部凸（分别为局部严格凸），则称其局部凸（分别为局部严格凸）。

遵循 M. do Carmo 的建议，R. Bishop 在 [5] 中证明，局部凸性等价于第二基本形式半正定，如下所述。

**定理 1** (Bishop [5])。可定向超曲面 $f\colon M^n \to M^{n+1}$ 是局部凸的（分别是局部严格凸的），当且仅当在某个适当的法向方向$\xi \in TM^\perp$上，第二基本形式 $\alpha_f$ 是半正定的（分别是正定的）。

我们指出，凸集和凸体的概念自然地推广到任意全凸黎曼流形的子集 $M^{n+1}$. （回想一下，如果黎曼流形上任意两点之间都存在唯一的测地线，就称其为全凸的。）

**注 1.** 通过改编 J. Heijenoort [24], 的一个论证，可以证明：在任意 Hadamard 流形中（即截面曲率非负的完备单连通黎曼流形） $M^{n+1}$，一个完备嵌入超曲面 $f$: $M^n \to M^{n+1}$局部凸，当且仅当 $f(M)$是某个凸体的边界。另一方面，正如 [3, 注 3], 中所指出的，存在一些单连通黎曼流形，其测地球面是嵌入且局部凸的，但它们并不围成凸体。

我们将以 $\mathbb{Q}_\epsilon^{n+1}$ 表示具有常截面曲率 $\epsilon \in \{0, 1, -1\}$ 的（$n+1$）维单连通空间形式, 即欧几里得空间 $\mathbb{R}^{n+1}$ ($\epsilon = 0$)、单位球面 $\mathbb{S}^{n+1}$ ($\epsilon = 1$) 和双曲空间 $\mathbb{H}^{n+1}$ ($\epsilon = -1$)。

给定一个定向超曲面 $f: M \to \mathbb{Q}_\epsilon^{n+1}$，我们来看看 $M$ 的截面曲率如何影响第二基本形式 $\alpha_f$. 的半定性。为此，选取 $f$ 的主方向所构成的标准正交标架 $\{X_1, \ldots, X_n\} \subset TM$，其对应的主曲率为 $\lambda_1$、.....、$\lambda_n$.。记 $M$ 的截面曲率为 $K_M$，由空间形式中超曲面的著名高斯方程可得（例如参见 [9]）

$$K_M(X_i, X_j) = \epsilon + \lambda_i \lambda_j \ \ \forall i \neq j \in \{1, \ldots, n\}.$$

因此， $f$ 的第二基本形式: $M \to \mathbb{Q}_\epsilon^{n+1}$半定，当且仅当 $K_M \geq \epsilon$.

我们以介绍等距浸入刚性这一基本概念来结束本节预备内容。

**定义 1.** 若对任意其他等距浸入 $f$: $M^n \to M^{n+p}$，都存在一个环境等距变换$\Phi$: $M^{n+p} \to M^{n+p}$，使得 $g = \Phi \circ f$.，则称等距浸入 $f$: $M^n \to M^{n+p}$是刚性的 $g$: $\overline{M^n} \to M^{n+p}$,

## 3. Convex hypersurfaces of $\mathbb{Q}_\epsilon^{n+1}$

关于将 Hadamard、Liebmann 和 Cohn-Vossen 定理推广到更一般的环境流形，首先自然要验证这些定理对空间形式 $\mathbb{Q}_\epsilon^{n+1}$.中的超曲面是否成立。

在欧氏情形下，R. Sacksteder基于J. Heijenoort [24], 提出的Hadamard–Stoker型定理，以及R. Beez [4] 和W. Killing[30], 提出的局部刚性定理，成功将Hadamard–Stoker定理和Cohn-Vossen定理推广到 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的完备超曲面，其第二基本形式为半定，如下所述。我们强调，第二基本形式的半定性是比局部凸性更弱的条件；而在Hadamard–Stoker定理和Cohn-Vossen定理中，曲面均假设为严格凸。

**定理 2** (Sacksteder [41, 42])。设 $f$: $M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ 是一个可定向、完备且连通的超曲面，具有半定第二基本形式，并且在一点处严格凸。则有以下结论:

i) $f$ 是一个嵌入，且 $M$ 与 $\mathbb{S}^n$ 或 $\mathbb{R}^n$.同胚ii) $f(M)$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$.
中某个凸体的边界iii) $f$ 是刚性的。

这些 Sacksteder 结果的原始证明相当复杂。在 [15],M. do Carmo 和 E. Lima 借助莫尔斯

理论给出了 (i)–(ii) 的一个更简洁的证明。其主要思路是考察 $f(M)$ 在严格凸点 $f(x) \in f(M)$ 处的切空间，并沿内法向量 $\xi(x)$ 的方向移动该切空间，直至到达某个奇点（如果存在）。采用这种方法，他们证明了以下二者必居其一：要么不存在奇点，此时 $M$ 与 $\mathbb{R}^n$ 同胚（事实上，$f(M)$ 是超平面中一个凸开集上的图像，该超平面与 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的 $\xi(x)$ 正交）；要么奇异集是一个单点，此时 $f(M)$ 是一个嵌入的拓扑 $n$ 球面。$\mathbb{R}^{n+1}$. 一旦证明了 $f$ 的嵌入性，(ii) 的证明便是标准的。

证明定理 2 的刚性断言 (iii)，可以作如下论证。由于 $f$ 具有半定第二基本形式，高斯方程表明 $M$具有非负截面曲率。因此，任意超曲面 $g: M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ 均具有半定第二基本形式。假设 $n \geq 3$，并回想 $f$在某一点严格凸，则第二基本形式 $\alpha_f$ 的秩至少为 3 的 $f$ 上的点集 $M' \subset M$ 非空。在这种情况下，我们前面提到的 Beez–Killing 定理断言 $f|_{M'}$ 是刚性的。由此，结合 $\alpha_f$ 和 $\alpha_g$的半定性，可知 $M'$.上要么有 $\alpha_f = \alpha_g$，要么有 $\alpha_f = -\alpha_g$。根据 Herglotz 的一个结果 [25]，在 $n = 2$ 的情况下也有相同结论。接着，Sacksteder 的主要结果 [42] 保证，这两个等式之一可延拓至整个 $M$.。于是，根据欧氏空间超曲面的基本定理，可得 $f$的刚性。

曲线上的柱面（见第 2 节）表明，Sacksteder 定理中关于存在椭圆点的假设是必要的。我们来看看完备性方面是否也如此。事实上，函数 $z = x^3(1 + y^2)$ $|y| < 1/2$ 的图像很容易看出沿直线 $x = 0$. 非凸。然而，直接计算可验证，其第二基本形式处处半定。因此，根据 Sacksteder 定理，该图像不可能是具有半定第二基本形式的完备曲面的一部分。

受 Sacksteder 结果的启发，M. do Carmo 和 F. Warner 研究了关于 $\mathbb{S}^{n+1}$ 和 $\mathbb{H}^{n+1}$ 的紧超曲面的类似问题，并得到了以下结果

**定理 3** (do Carmo – Warner [16])。设 $f: M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ 是一个具有半定第二基本形式的非全测地超曲面，其中 $M^n$ 是一个紧致、连通且可定向的黎曼流形。则有以下结论：

i) $f$ 是一个嵌入，且 $M$ 与 $\mathbb{S}^n$.同胚ii) $f(M)$ 是包含在$\mathbb{S}^{n+1}$.的一个开半球内的凸体的边界iii) $f$ 是刚性的。

此外，若将球面 $\mathbb{S}^{n+1}$ 替换为双曲空间 $\mathbb{H}^{n+1}$.，断言(i) 以及(ii) 中的凸性仍然成立

do Carmo–Warner 定理的证明依赖于所谓的贝尔特拉米映射的性质；它们是将 $\mathbb{S}^{n+1}$ 的开半球（分别为双曲空间 $\mathbb{H}^{n+1}$）中心投影到欧几里得空间 $\mathbb{R}^{n+2}$（分别为洛伦兹空间 $\mathbb{L}^{n+2}$）中适当超平面上的投影。

更确切地说，在球面情形中，以 $e_{n+2}:=(0,0,\ldots,0,1) \in \mathbb{R}^{n+2}$ 为中心的半球 $\mathcal{H}$ of$\mathbb{S}^{n+1}$ 的贝尔特拉米映射为

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathcal{H} & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ & x & \mapsto & \frac{x}{x_{n+2}}, \end{array} \tag{1}$$

其中， $x_{n+2}$ 表示 $\mathbb{R}^{n+2}$ 中 $x$ 的第（$n+2$）个坐标（图 2）。

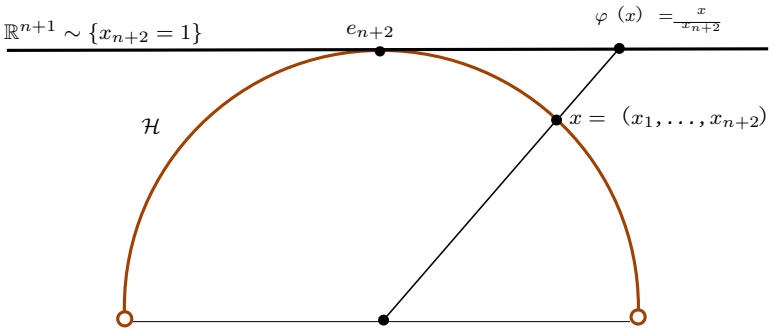


FIGURE 2. 以 $e_{n+2}$.为中心的半球 $\mathcal{H}$ 的 Beltrami 映射

类似地，在双曲情形中，Beltrami 映射为

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{H}^{n+1} & \to & B^{n+1} \\ & x & \mapsto & \frac{x}{x_{n+2}}, \end{array} \tag{2}$$

其中 $B^{n+1}$ 表示 $\mathbb{L}^{n+2}$ 中仿射子空间 $x_{n+2}=1$ 的单位球（图 3）。

很容易验证，在这两种情形下，Beltrami 映射 $\varphi$ 都是微分同胚。此外， $\varphi$ 及其逆映射都是测地映射，也就是说，它们将测地线映为测地线，特别是将凸集映为凸集。

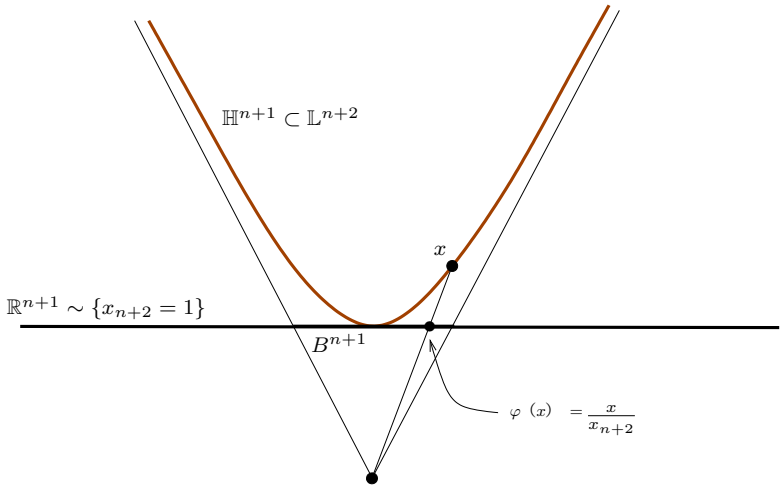


FIGURE 3. 双曲空间 $\mathbb{H}^{n+1}$的 Beltrami 映射。

在证明中，do Carmo 和 Warner 巧妙地结合使用贝尔特拉米映射与 Sacksteder 定理 2，证明了在球面情形下，存在一点 $x \in M$，使得 $f$的第二基本形式是定号的；他们还证明了 $f(M) - \{f(x)\}$包含在 $\mathbb{S}^{n+1}$的一个开半球 $\mathcal{H}'$内，且该半球的边界与 $f(M)$ 在 $f(x)$.处相交。由此，由于 $M$是紧致的，他们得出结论： $f(M)$包含在 $\mathbb{S}^{n+1}$. 的一个开半球 $\mathcal{H}$ 内。现在同时考虑球面和双曲两种情形，并以 $\varphi$ 表示 $\mathcal{H}$ 或 $\mathbb{H}^{n+1}$, 的 Beltrami 映射，正如他们所证明的， $\varphi \circ f$: $M \to \mathbb{R}^{n+1}$ 是完备且凸的。于是，根据 Sacksteder 定理， $\varphi \circ f$ 是一个嵌入，且 $\varphi(f(M))$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$,中某个凸体的体，这意味着 $f$和 $f(M)$,也分别具有同样的性质。

证明球面情形下 $f$ 的刚性时，采用了类似的思路，涉及特殊混合贝尔特拉米型映射。在论文的最后，do Carmo 和 Warner 猜想，双曲情形下 $f$ 也具有刚性。

在与 R. de Andrade 合作的 [14], 中，作者将 do Carmo 和 Warner 的定理推广到了任意余维的浸入，并且也肯定地解决了他们此前提出的猜想。更确切地说，得到了以下结果。

**定理 4** (Andrade – de Lima [14]). 设 $f\colon M^n \to \mathbb{Q}_\epsilon^{n+p}$是一个将紧致连通黎曼流形等距浸入$(n+p)$维常截面曲率空间形式的映射 $\epsilon = \pm 1$. 。假设 $f$ 不是全测地的，且其第二基本形式半定。在这些条件下，以下断言成立:

i) $f$ 是 $M$ 到一个全测地的$(n+1)$维子流形 $\mathbb{Q}_\epsilon^{n+1} \subset \mathbb{Q}_\epsilon^{n+p}$.中的嵌入ii) $f(M)$ 是 $\mathbb{Q}_\epsilon^{n+1}$. 的一个紧凸集的边界。特别地， $M$与 $\mathbb{S}^n$.同胚iii) $f$ 是刚性的。

在定理 4 的证明中，与 do Carmo–Warner定理一样，我们利用贝尔特拉米映射 $\varphi$ 来恢复欧几里得情形。使我们能够应用这一方法的一项基本结果，是我们得到的关于 $f$ 和 $g$ 的第二基本形式 $\alpha_f$和 $\alpha_g$ 之间的以下关系: $= \varphi \circ f$: $M \to \mathbb{R}^{n+1}$:

$$\langle \alpha_f(f_*X, f_*Y), \xi_f \rangle = \phi^2 \langle \alpha_g(g_*X, g_*Y), \xi_g \rangle, \quad X, Y \in T\mathcal{H}^{n+p}, \tag{3}$$

其中， $\xi_f$ 和 $\xi_g$ 分别是 $f$ 和 $g$的（互为双射对应的）法向量场，， $\mathcal{H}^{n+p}$ 表示 $\mathbb{S}^{n+p} \subset \mathbb{R}^{n+p+1}$ 的一个开半球或 $\mathbb{H}^{n+p} \subset \mathbb{L}^{n+p+1}$（具有标准度量 $\langle , \rangle$），而 $\phi$ 表示函数

$$x = (x_1, \ldots, x_{n+p+1}) \in \mathcal{H}^{n+p} \mapsto \phi(x) := 1/x_{n+p+1}\,.$$

应当指出，do Carmo 和 Warner 并未针对超曲面建立这样的关系，也就是说，对于 $p = 1$.

在球面情形下，借助 Dajczer 和 Gromoll 的一个结果 [10], ，我们证明存在一点 $x \in M$ ，使得 $f$ 的第二基本形式正定。然后，考虑以 $x$为中心的 $\mathbb{S}^{n+p}$半球的 Beltrami 映射，再结合 Jonker 提出的欧几里得空间中超曲面的余维约化定理 [29], ，我们证明了 $\epsilon = 1$. 的 (i) 和 (ii)。$\epsilon = -1$ 的情形类似。

至于 $f$, 的刚性问题，我们已经看到，球面情形由 do Carmo 和 Warner 解决。对于双曲情形，我们再次使用 Beltrami 映射和恒等式 (3)

来证明 $f$ 的全脐点集不会使 $M$. 断开。在这种情况下，对于 $n>2$， $f$ 的刚性可由 Sacksteder 的另一条著名刚性定理推出 [42] （另一种证明见 [9, 定理 6.14] ）。 $n=2$这一情形由 V. Fomenko 和 G. Gajubovin 证明（参见 [20, 定理 5]）。

将贝尔特拉米映射与等号 (3) 相结合的技巧还可得到以下结果，其第一部分构成一个 Hadamard 型定理。（最后一个结论由定理 4 得出。）

**定理5** (Andrade – de Lima [14])。 设 $f\colon M^n\to\mathcal{H}^{n+1}$ 是一个紧致连通超曲面，其中 $\mathcal{H}^{n+1}$ 或者是以 $e_{n+2}:=(0,\ 0,\ \ldots\ldots 0,\ 1)$ 为中心的 $\mathbb{S}^{n+1}\subset\mathbb{R}^{n+2}$ 开半球，或者是双曲空间 $\mathbb{H}^{n+1}\subset\mathbb{L}^{n+2}$. 。那么，下列命题等价:

i) $f$ 是局部严格凸的。ii) $f$ 的高斯-克罗内克曲率处处不为零。iii) $M$ 可定向，且对于 $M$上的单位法向量场 $\xi$ ，映射

$$\begin{array}{rccc}\psi\colon & M^n & \to & \mathbb{S}^n\\ & x & \mapsto & \frac{\xi(x)-\langle\xi(x),e_{n+2}\rangle e_{n+2}}{\sqrt{1-\langle\xi(x),e_{n+2}\rangle^2}}\end{array}$$

是一个定义良好的微分同胚，其中 $\mathbb{S}^n$ 表示 $\mathbb{R}^{n+2}$.中 $e_{n+2}$ 的欧几里得正交补的 $n$维单位球面

此外，上述任一条件都意味着 $f$ 是刚性的，并将 $M$ 嵌入到 $\mathcal{H}^{n+1}$.中某个紧凸集的边界上

do Carmo–Warner定理引出了一个自然的问题：能否将定理中的紧致改为完备，同时仍得出相同的结论？在球面情形下，这个问题无关紧要，因为凸超曲面 $f\colon M\to\mathbb{S}^{n+1}$ 的任意截面曲率都至少为 1，根据高斯方程可知。因此，根据 Bonnet–迈尔斯定理，如果诱导度量完备， $M$ 必然是紧致的。在双曲情形下，已知存在完备的$\mathbb{H}^{n+1}$ 凸超曲面，它们并非嵌入的（见 [43], 第 124 页）。因此，对于上述问题，答案是否定的。

在 [8], ， J. Currier 研究了 $\mathbb{H}^{n+1}$ 的严格凸超曲面，其主曲率至少为 1。在所有主曲率都大于 1，的点处，这些超曲面局部受到 $\mathbb{H}^{n+1}$. 的乌洛球支撑。这意味着，在这样的点（记作 $x$，）处，超曲面与 $\mathbb{H}^{n+1}$ 的一个乌洛球$\Sigma$ 相切；除 $x$ 本身外，超曲面中 $x$ 的一个邻域位于 $\mathbb{H}^{n+1}-\Sigma$. 的凸连通分支内。这一几何性质使 Currier 能够像 do Carmo 和 Lima 在 [15],中所做的那样应用莫尔斯理论，从而证明这样的超曲面必定是嵌入的且具有刚性：它要么是一个围成凸体的拓扑 $n$球面，要么本身就是乌洛球。

再次利用 Beltrami 映射，我们得到了 [14]以下任意余维情形下 Currier 的结果版本，表述如下。

**定理 6** (Andrade – de Lima [14])。 设 $f\colon M^n\to\mathbb{H}^{n+p}$ 是一个可定向完备连通黎曼流形 $M^n$ 到双曲空间 $\mathbb{H}^{n+p}$. 的等距浸入。假设在$TM^{\perp}$ 中存在一个标准正交标架 $\{\xi_1,\ldots,\xi_p\}$，使得形算子 $A_{\xi_i}$ 的所有特征值都不小于1。那么，$f$ 可将余维约化为一， $f\colon M^n\to\mathbb{H}^{n+1}$. 。由此可得以下结论:

i) $f$是一个嵌入，且 $f(M)$是 $\mathbb{H}^{n+1}$.中一个凸体的边界。ii) $M$ 与 $\mathbb{S}^n$ 或 $\mathbb{R}^n$.同胚。iii) $f$是刚性的；若 $M$非紧致，则 $f(M)$是一个乌洛球。

现在让我们考虑将 Liebmann 定理推广到 $\mathbb{Q}_\epsilon^{n+1}$.

在 1956 年至 1962 年间发表的一系列杰出论文中，A. Alexandrov 研究了欧几里得空间中的常平均曲率超曲面 $\mathbb{R}^{n+1}$，并确立了这一基本结果：这样的嵌入紧超曲面是一个全脐的 $n$球面。其证明中采用的巧妙方法，如今称为***Alexandrov*** 反射法，已成为研究具有适当等距变换群的黎曼流形中一大类超曲面的最强有力工具之一。（我们将在下一节中略见这一现象。）

给定一个常平均曲率嵌入 $f\colon\ M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$，且 $M$ 紧致，Alexandrov 反射法包括考虑一个与 $\Sigma$不相交的任意超平面$\Pi\colon = f(M)$，将其向 $\Sigma$移动，直到它在一点 $p \in \Sigma$. 处与之相切。然后可以证明，存在一个与 $T_p\Sigma$ 平行的超平面，使得相对于该超平面， $\Sigma$ 具有对称性。由于 $\Pi$ 是任意的， $\Sigma$ 必定是一个圆球面。

我们回顾一下，给定整数 $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$，超曲面 $f\colon M^n \to M^{n+1}$ 的 $k$ 阶平均曲率是函数

$$H_k := \binom{n}{k}^{-1} \sigma_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

其中 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 是 $f$ 的主曲率，而 $\sigma_k$ 定义为

$$\sigma_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) := \begin{cases} 1 & \text{if } k = 0. \\ \displaystyle\sum_{i_1 < \cdots < i_r} \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_r} & \text{if } 1 \le k \le n. \end{cases}$$

特别地， $H_1$ 是平均曲率， $H_n$ 是高斯-克罗内克曲率。当 $n = 2$ 时，$H_2 = k_1 k_2$ 也称为外在曲率或高斯曲率。本文后续在 $n = 2$. 的情形下将采用后一种称谓

**定义 2**。当 $f\colon M^n \to M^{n+1}$ 的 $k$ 阶平均曲率为常数 $H_k$ 时，我们称 $f$ 为 $H_k$-超曲面。

在 [31]，中，N. Korevaar 证明 Alexandrov 反射法适用于双曲空间 $\mathbb{H}^{n+1}$ 中的 $H_k$-超曲面，也适用于 $\mathbb{S}^{n+1}$. 的开半球中的情形。结合他的结果与 Sacksteder 和 do Car mo-Warner 定理，可以很容易地将 Liebmann 定理推广到 $\mathbb{Q}_\epsilon^{n+1}$，如下所示（另见 [35]）。

**定理 7** (广义 Liebmann 定理)。 设 $M^n$ 是一个紧致可定向黎曼流形。若 $f\colon M \to \mathbb{Q}_\epsilon^{n+1}$是某个 $k \in \{1, \ldots, n\}$的局部严格凸 $H_k$超曲面，则 $f(M)$是 $\mathbb{Q}_\epsilon^{n+1}$.的一个测地球面

在欧几里得空间 $\mathbb{R}^3$， Liebmann 定理也可以借助著名的闵可夫斯基公式 加以证明（例如参见 [36]）。事实上，这种方法也可以用于证明定理 7。由于我们没有找到这类证明的参考文献，现将证明列于此处。

我们将用到一个众所周知的事实：平均曲率函数 $H_k$ 满足不等式（参见例如 [23] 第 52 页）

$$H_k^{1/k} \ge H_{k+1}^{1/(k+1)} \ \ \forall k \in \{1, \ldots, n-1\}, \tag{4}$$

并且当且仅当 $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n$. 时，等号成立

在 $\mathbb{Q}_\epsilon^{n+1}, \Theta$ 的极坐标 $r$ 中，定义位置向量 $P = s_\epsilon(r)\partial_r$，其中

$$s_\epsilon(r) := \begin{cases} \sin r & \text{if} \quad \epsilon = 1. \\ r & \text{if} \quad \epsilon = 0. \\ \sinh r & \text{if} \quad \epsilon = -1. \end{cases}$$

此外，对于给定的紧致定向超曲面 $f : M \to \mathbb{Q}_\epsilon^{n+1}$，其内向单位法向量为 $\xi$，定义支撑函数 $\mu = \langle P, \xi \rangle$. 。在此情形下，以下闵可夫斯基恒等式成立（参见 [1,定理 3.2]）：

$$\int_M (c_\epsilon H_{k-1} + \mu H_k) dM = 0, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{5}$$

其中 $c_\epsilon = c_\epsilon(r) := s'_\epsilon(r)$，且 $dM$ 表示 $M$. 的体积元。（恒等式 (5) 与 [1, 定理 3.2], 中的恒等式不同，后者以负号代替了正号。这是因为 [1]中形算子的定义与我们的定义相差一个符号。更准确地说，在 [1], 中，形算子 $A_\xi$ 定义为 $A_\xi X = \nabla_X \xi$，而我们将其定义为 $A_\xi X = -\nabla_X \xi$。）

定理 7 的证明。根据 Sacksteder 和 do Carmo–Warner 定理，$f$ 是一个嵌入，且 $M$ 与 $\mathbb{S}^n$. 同胚。我们可以假设 $f$ 取向朝内，从而支撑函数 $\mu$在 $M$. 上为负。此外，对于 $\epsilon = 1$，$f(M)$位于 $\mathbb{S}^{n+1}$的一个开半球内，这意味着，对于$\mathbb{S}^{n+1}$中的适当极坐标，在 $f(M)$上有 $c_1(r) = \cos r > 0$。对于 $\epsilon \in \{0, -1\}$，显然有 $c_\epsilon > 0$.

我们首先考虑 $f$ 为一个 $H$-超曲面的情形。对于 $k = 1$ 的闵可夫斯基等式（乘以常数 $H > 0$）以及 $k = 2$的闵可夫斯基等式，我们得到

$$\int_M (c_\epsilon H + \mu H^2) dM = 0 \quad \text{and} \quad \int_M (c_\epsilon H + \mu H_2) dM = 0.$$

将这两个等式相减，得到

$$\int_M \mu(H^2 - H_2) dM = 0.$$

根据（4），最后一个积分中的被积函数非正。因此，在 $M$上有 $H^2 = H_2$，这意味着 $f$是全脐的，即 $f(M)$是$\mathbb{Q}_\epsilon^{n+1}$中的一个测地球面

现在，假设 $f$ 是一个 $H_k$-超曲面，对于 $1 < k \leq n.$，将 (5) 乘以 $1/H_k^{(k-1)/k}$，并考虑到对于 $k = 1$，等号也成立，我们得到

$$\int_M (c_\epsilon + \mu H) dM = 0 \quad \text{and} \quad \int_M \left( c_\epsilon H_{k-1} / H_k^{(k-1)/k} + \mu H_k^{1/k} \right) dM = 0.$$

与之前一样，将这些等式相减，得到

$$\int_M \left( c_\epsilon (H_k^{(k-1)/k} - H_{k-1}) / H_k^{(k-1)/k} + \mu (H - H_k^{1/k}) \right) dM = 0.$$

再次由 (4) 可知，被积函数中的每一项都非正。因此，

$$H_k^{(k-1)/k} - H_{k-1} = H - H_k^{1/k} = 0,$$

由此可知，$f$ 是全脐的。证明至此完成。 □

关于三维空间形式中希尔伯特–利布曼定理的其他证明，可参见[2, 21]。

## 4. Convex hypersurfaces of Riemannian manifolds

我们继续上一节的讨论，给出（可能具有）非恒定截面曲率的黎曼流形中局部凸超曲面的刚性结果。首先介绍 S. Alexander 提出的以下 Hadamard 型定理。（回顾一下，若黎曼流形 $M^{n+1}$ 完备、单连通且截面曲率非负，则称其为 *Hadamard* 流形 。）

**定理 8** (Alexander [3])。设 $M^{n+1}$是一个 *Hadamard* 流形。假设 $f: M^n \to \overline{M}^{n+1}$是一个定向的、紧致的、连通的局部凸超曲面。那么， $M$与 $\mathbb{S}^n$微分同胚， $f$是一个嵌入，并且 $f(M)$是 $M^{n+1}$.中一个凸体的边界

我们来概述 Alexander 为其定理给出的优雅证明。

由于 $M$是紧致的，存在一个包含 $f(M)$的开测地球 $B$，它是全凸的，因为 $M^{n+1}$是 Hadamard 流形。接着，令 $\xi \in TM^{\perp}$表示 $f$ 上的外向单位法向量，对每个 $x \in M$，从 $x$ 出发、速度为 $\xi(x)$的 $M^{n+1}$ 测地线 $\gamma_x$ 与 $\partial B$ 横截相交于一点 $P(x)$，从而定义映射 $P: M \to \partial B$。根据 Warner [45]给出的劳赫比较定理的推广，$M$ 在 $\gamma_x$上没有焦点，因此 $P$ 实际上是一个微分同胚。特别地， $M$ 与 $\mathbb{S}^n$.微分同胚。

现在，假设 $f$ 不是嵌入，考虑平行超曲面 $f_t$ 的单参数族：$M^n \to M^{n+1}$，其定义如下:

$$f_t(x) = \exp_{\overline{M}}(f(x), t\xi(x)), \ t \in [0, +\infty).$$

$f$ 的局部凸性和 Bishop 定理表明，第二基本形式 $\alpha_f$ 沿外向法向方向 $\xi$. 是半负定的。此外，直接计算可得， $f_t$ 的主曲率是 $t$的递减函数，因此，对于 $t > 0$, $f_t$ 的第二基本形式也同样是半负定的。

现在，对于满足 $f(x) = f(y)$ $x \neq y \in M$ 的适当的 $x \in M$，存在 $x$ 在 $M$ 中的一个开邻域 $U \subset M$，使得当 $t$ 足够小时， $f_t(U)$ 与 $f(M)$ 相交；而当 $t$. 足够大时，$f_t(U)$ 与 $f(M)$ 不相交。因此，对于某个 $t_0 > 0$， $f_{t_0}(U)$ 在一点 $f_{t_0}(x_0) = f(y_0)$ $x_0$ 处与 $f(M)$ 相切， $y_0 \in M$（图 4）。此外， $f_t$ 和 $f_{t_0}$ 的局部凸性表明，它们在 $x_0$ 和 $y_0$ 处的外向单位法向量重合。特别地， $P(x_0) = P(y_0)$，这与 $P$. 的双射性矛盾。因此， $f$ 是一个嵌入，且 $f(M)$ 是 $M$ 的凸体边界（参见注 1），证明至此完成。

关于齐性三维流形中凸曲面的刚性，取得的主要成果之一是 J. M. Espinar、J. A. G´alvez 和 H. Rosenberg 给出的以下 Hadamard-Stoker 型定理。（我们沿用他们的术语，将曲面视为子集，而非等距浸入。）

**定理 9** (Espinar– G´alvez – Rosenberg [18])。设 $\Sigma$ 是 $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. 中具有正高斯曲率的完备连通浸入曲面。那么， $\Sigma$ 是适当嵌入的，并且围成 $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. 中的一个凸体。此外， $\Sigma$ 同胚于

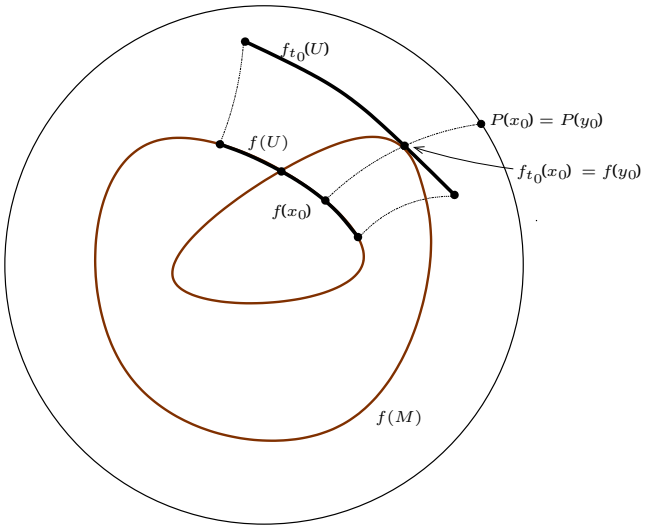


FIGURE 4. Alexander 定理的证明。

$\mathbb{S}^2$ 或 $\mathbb{R}^2$. 。在后一种情况下， $\Sigma$ 是 $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ 中某个凸区域上的图像，或者 $\Sigma$ 有一个简单端。

By $\Sigma$ 具有简单端意味着它具备以下性质：

- $\Sigma$ 在 $\mathbb{H}^2$ 上的垂直投影的渐近边界是一个单点 $\{p_\infty\}$.
- 给定 $\mathbb{H}^2$ 中的一条完备测地线 $\gamma$，其“无穷远端点”与 $p_\infty$不同，则竖直平面 $\Gamma := \gamma \times \mathbb{R}$ 与 $\Sigma$ 的交集要么为空，要么是紧致的。

$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ 中具有正高斯曲率和一个简单端的曲面 $\Sigma$ 的显式参数化见 [18, 命题 4.1]。这样的 $\Sigma$ 由水平极限圆叶状化，其在 $\mathbb{H}^2$ 上的垂直投影具有相同的中心 $p_\infty$ ，该中心位于双曲平面的渐近边界 $\partial_\infty \mathbb{H}^2$ $\mathbb{H}^2$ 上（图 5）。

[18]中给出的定理 9 的证明分为两部分。首先，假设 $\Sigma$ 没有竖直点，也就是说，不存在满足 $T_p\Sigma$平行于竖直方向 $\partial_t$. 的 $p \in \Sigma$ 。在这种情况下，竖直平面 $\Gamma = \gamma \times \mathbb{R}$ 与 $\Sigma$ 的交集是一条既不紧致也不自交的曲线，因为若出现上述任一情形， $\Sigma$ 必然会有一个竖直点。此外， $\Sigma$ 的严格凸性意味着任何这样的嵌入曲线都是严格凸的，也就是说，其测地曲率为正。

现在，固定一条测地线 $\gamma^\perp = \gamma^\perp(s)$，它与 $\gamma$ 在一点 $q \in \gamma \cap \gamma^\perp$ 处正交；再取一族与 $\gamma^\perp$ 正交的平行测地线 $\gamma_s$，其中 $\gamma_0 = \gamma$.。令 $\Gamma_s = \gamma_s \times \mathbb{R}$，则交集 $\Sigma \cap \Gamma_s$ 或为空，或是定义在 $\gamma_s$. 上的嵌入竖直图像。由此很容易得出， $\Sigma$ 是定义在 $\mathbb{H}^2$. 的一个凸开集上的图像。（注意，若对所有 $s \in \mathbb{R}$., $\Gamma_s \cap \Sigma$ 都非空，则此图像是整体的。）

在证明的第二部分，假设存在一个垂直点 $p \in \Sigma$.。在此假设下，记 $\Gamma$ 为在 $p$ 处与 $\Sigma$ 相切的竖直平面，记 $\Gamma_s$ 为满足 $\Gamma_0 = \Gamma$ 的平行竖直平面族，则当 $s > 0$ 充分小时， $C(s) := \Gamma_s \cap \Sigma$ 非空、嵌入且与 $\mathbb{S}^1$ 同胚。于是，

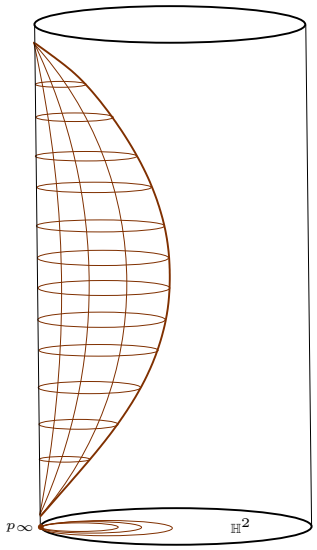


FIGURE 5. 在 $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ 中具有一个简单端的严格凸曲面。

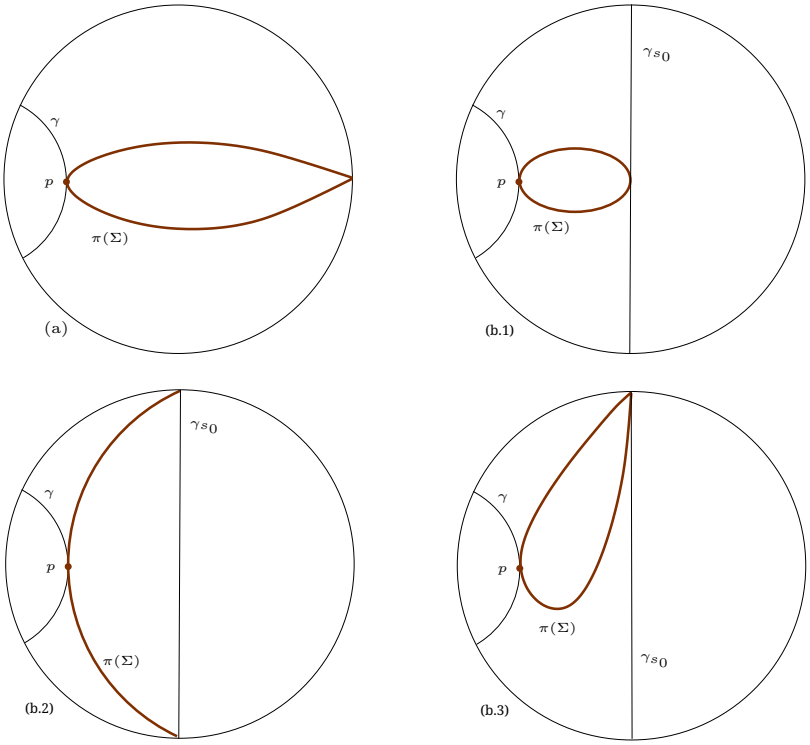


FIGURE 6. 定理 9 证明中四种情形下的投影 $\pi(\Sigma)$。

通过莫尔斯理论进行相当精细的推理，可得出结论： $s \to +\infty$ 会出现以下可能性之一（见图 6）：

a) $C(s)$ 对所有 $s > 0$ 都与 $\mathbb{S}^1$ 同胚——此时 $\Sigma$ 与 $\mathbb{R}^2$ 同胚，且有一个简单端。 b) 对所有 $s \in$ （$0, s_0$）, , $C(s)$ 非空且与 $\mathbb{S}^1$ 同胚；而当 $s > s_0$ 时为空。于是，当 $s \to s_0,$ 时，会出现以下可能性之一：b.1) 曲线 $C(s)$ 收敛到一点 $p \in \Sigma$ ——此时 $\Sigma$ 与 $\mathbb{S}^2.$ 同胚。b.2) 曲线 $C(s)$ 收敛到 $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ 的渐近边界上的一条曲线——此时 $\Sigma$ 与 $\mathbb{R}^2$ 同胚。b.3) $C(s)$ 的垂直投影 $\pi(C(s))$ 收敛到 $\partial_\infty \mathbb{H}^2$ 中的一点 —— 此时与 (a) 中一样， $\Sigma$ 与 $\mathbb{R}^2$ 同胚，且有一个简单端。

最后，由于 $\Sigma$ 是嵌入的且局部严格凸（并且 $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ 是 Hadamard 流形），它必然是 $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$中某个凸体的边界（参见注释 1）。

[18] 中的主要结果还包括：分别对边界位于竖直平面和水平平面内的常高斯曲率紧致图形，给出水平和垂直高度估计。这些估计使得我们能够证明，在 $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ 中具有正常高斯曲率的完备曲面 $\Sigma$ 不可能与 $\mathbb{R}^2.$ 同胚。结合定理 9，可知这样的 $\Sigma$ 是嵌入的，且与 $\mathbb{S}^2.$ 同胚。接着，对 $\Sigma$ 关于竖直超平面 $\Gamma = \gamma \times \mathbb{R},$ 进行 Alexandrov 反射，便可轻易得出 $\Sigma$必定是旋转球面。因此，希尔伯特–利布曼定理可推广如下，适用于 $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ 中的完备曲面（而非紧致曲面！）。

**定理 10** (Espinar – G´alvez – Rosenberg [18])。 $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$中的完备曲面若具有正常高斯曲率，则它是一个旋转球面。

关于上述定理，需要指出的是，在 [18], 中已经证明，对于任意 $K > 0.$ ，在 $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ 中都存在一个具有常高斯曲率 $K$ 的旋转球面，且在环境等距变换意义下唯一。Cheng 和 Rosenberg [6]证明，在 中也存在这样的曲面。基于这一事实，Espinar 和 Rosenberg [19] 通过 Alexandrov 反射证明，定理 10 在 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ 中同样成立。此外， [18]还给出了不使用 Alexandrov 反射的证明（适用于这两种情形）。

定理 9 的证明方法可以推广，用以在其他背景下建立 Hadamard–Stoker 型定理。基于这一点，I. Oliveira 和 S. Schweitzer 将定理 9 推广到了 $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R},$ $n \geq 2.$。在这一高维情形下，Espinar 和 Rosenberg [19] 成功证明了一个 Hadamard–Stoker 型定理，该定理适用于 $M^n \times \mathbb{R}$ 中适当浸入的局部严格凸超曲面，其中$M^n$ 是任意具有 (1/4)-针状截面曲率的紧致黎曼流形。最后，Espinar 和 Oliveira [17]为浸入在 Hadamard 曲面上的 Killing 子浸没中的某些局部严格凸曲面证明了一个 Hadamard–Stoker 型定理。

受这些工作的启发，我们得到了关于 $M^n \times \mathbb{R}$、 $n \geq 3$ 中浸入的局部严格凸超曲面的 Hadamard–Stoker型定理，其中 $M^n$或者是 Hadamard 流形，或者是单位球面 $\mathbb{S}^n.$ 在陈述该定理之前，我们先回顾一下：

超曲面 $f$的高度函数： $M^n \to M^n \times \mathbb{R}$是投影 $\pi_{\mathbb{R}}$在第二因子 $\mathbb{R}$.上的投影，限制在 $f(M)$上所得的函数，其中 $M^n \times \mathbb{R}$

**定理 11** (deLima [13])。 对于 $n \geq 3$，设 $f$： $M^n \to M^n \times \mathbb{R}$是一个具有正定第二基本形式的完备连通定向超曲面，其中$M^n$ 或者是 *Hadamard* 流形，或者是单位球面 $\mathbb{S}^n$. 。那么，如果 $f$ 的高度函数存在一个临界点， $f$ 就是一个真嵌入，且 $M$ 或者与 $\mathbb{S}^n$ 同胚，或者与 $\mathbb{R}^n$.同胚。特别地，在 $M$为 *Hadamard* 流形的情形一下， $f(M)$ 围成一个 $M^n \times \mathbb{R}$ 中的凸体。

为了证明定理 11，我们结合莫尔斯理论、do Carmo-Warner 定理和 Alexander 定理，证明在给定条件下， $f$ 的高度函数要么只有一个临界点，此时 $M$ 与 $\mathbb{R}^n$， 同胚；要么恰有两个临界点，此时 $M$ 与 $\mathbb{S}^n$. 同胚。在这两种情况下，我们都证明了 $f$ 是真嵌入。（我们的论证基于以下事实：横截相交 $\Sigma_t := f(M) \cap (M^n \times \{t\})$ 的任一连通分支都是水平超平面 $M^n \times \{t\}$.的超曲面。此外，由于 $f$. 具有正定第二基本形式，这样的超曲面也具有正定第二基本形式。因此，若 $\Sigma_t$ 是紧致的，根据 do Carmo-Warner 定理和 Alexander 定理，它是嵌入的，且与 $\mathbb{S}^{n-1}$， 同胚。）

我们还考虑了定理 11 的对偶情形，如下所述：超曲面的高度函数没有临界点。

**定理 12** (deLima [13])。 对于 $n \geq 3$，设 $f$： $M^n \to M^n \times \mathbb{R}$是一个具有半正定第二基本形式的真、连通、定向且柱状有界的超曲面，其中 $M^n$ 或者是 *Hadamard* 流形，或者是球面$\mathbb{S}^n$.。那么， $f$是一个嵌入，且 $f(M) = \Sigma \times \mathbb{R}$，其中 $\Sigma \subset M^n \times \{0\}$ 是一个与 $\mathbb{S}^{n-1}$ 同胚的子流形，它围成 $M^n \times \{0\}$.中的一个凸体 —

回顾一下，若存在一个测地球 $B \subset M^n \times \mathbb{R}$使得 $f(M) \subset B \times \mathbb{R}$.，则称超曲面 $f$： $M^n \to M^n \times \mathbb{R}$是柱状有界。注意，若 $M^n \times \mathbb{R}$是紧致的，则任意超曲面 $f$： $M^n \to M^n \times \mathbb{R}$都是柱状有界的。

我们概述定理 12 的证明。

首先注意， $f$ 的高度函数无界，因为它没有临界点，且 $f$ 是恰当映射。然后，按照定理 11 的证明，我们由 do Carmo–Warner 定理和 Alexander 定理得出， $f(M)$ 被嵌入的局部凸拓扑（$n-1$）球面叶状化，因此 $M$ 与 $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$同胚，且 $f$ 是一个嵌入。

当 $M^n$是 Hadamard 流形时， $f$的局部凸性意味着 $f(M)$是$M^n \times \mathbb{R}$中的一个凸集的边界。再结合 $f$的柱状有界性，便可轻易得出 $f(M) = \Sigma \times \mathbb{R}$，如上所述。

在球面情形下，我们需要考虑超曲面$f$ 的高斯公式： $M \to \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$：

$$K_M(X,Y) = \det A|_{\mathrm{span}\{X,Y\}} + (1 - \|T(X,Y)\|^2), \quad X, Y \in TM,$$

其中， $A$是 $f$的形算子， $T(X, Y)$是其高度函数的梯度 $T$在 span$\{X, Y\}$ 上的正交投影（参见 [12]）。此外， $T$本身是竖直单位场 $\partial_t$ 在切丛 $TM$.上的正交投影。

由上述高斯方程可知， $M$的截面曲率 $K_M$非负，因为 $\det A|_{\mathrm{span}\{X,Y\}} \geq 0$（根据第二基本

形式 $f$的半正定性），且 $\|T(X,\ Y)\| \leq 1.$。由于 $M$非紧致，对于所有 $x \in M,$，都存在满足条件 $K(X,\ Y) = 0.$ 的正交单位向量 $X,\ Y \in T_xM$。否则，T. Perelman 的著名灵魂定理 [39], 将推出 $M$ 与 $\mathbb{R}^n.$ 同胚。将高斯方程应用于 $(X,\ Y),$，可得

$$\|T(X,Y)\|^2 = 1 + \det A|_{\mathrm{span}\{X,Y\}} \geq 1.$$

因此，$\|T(X,\ Y)\| = 1,$ 由此得到 $T = \partial_t,$ 进而可知 $f(M)$ 是建立在凸超曲面 $\Sigma$ 之上的竖直柱面，该超曲面位于 $\mathbb{S}^n.$

有了定理 11 后，我们可以仿照定理 10 的证明，在乘积空间 $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R},\ \epsilon \neq 0.$ 中建立一个 Jellett–Liebmann 型定理。具体而言，我们对给定的紧超曲面 $f$: $M \to \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$关于竖直超平面 $\Gamma = \Gamma_0 \times \mathbb{R},$ 进行 Alexandrov 反射，其中 $\Gamma_0 \subset \mathbb{Q}_\epsilon^n$是 $Q_\epsilon^n$的全测地超曲面（当 $\epsilon = 1,\ \Gamma_0$ 假设位于 $\mathbb{S}^n$的某个开半球内）。结论如下。

**定理 13** (de Lima [13])。 对于 $n \geq 3$ 和 $\epsilon \in \{-1, 1\},$ 任何具有常平均曲率的紧致、连通且局部严格凸超曲面 $f\colon\ M^n \to \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ 都与一个嵌入旋转球面全等。

关于定理 13，我们补充指出，Hsiang–Hsiang [27]（分别为 R. Pedrosa[38]）在 $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ （分别在$\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$）中构造了具有常平均曲率的嵌入严格凸旋转球面。

定理 11 还可用于在$\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ 中为具有常截面曲率的超曲面建立 Hilbert–Liebmann 型定理。对于 $n \geq 3,$ F. Manfio 和 R. Tojeiro 在 [33]中构造并分类了此类超曲面。以下结果是其分类结果的一部分，我们为此给出了一个不同的证明。

**定理 14** (de Lima [13], Manfio–Tojeiro [33])。 设 $M_c^n$是一个完备、连通且可定向的 $n$ $(\geq 3)$维黎曼流形，具有常截面曲率 $c.$ 给定一个等距浸入 $f\colon\ M_c^n \to \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R},$ $\epsilon \in \{-1, 1\},$ 假设 $c > (1+\epsilon)/2.$ 那么， $f$ 与一个嵌入旋转球面全等。

在定理 14 的证明中，我们首先注意到，关于 $c,$ 的条件结合迈尔斯定理和高斯方程，可推出 $M$ 是紧致的，且其第二基本形式正定。因此，根据定理 11， $M$ 是一个常曲率 $c$ 的拓扑球面，并且 $f$ 是一个嵌入。接着，利用超曲面 $f$ 的高度函数的梯度（非零时）是其主方向之一这一事实（证明见 [33]），我们成功证明 $f(M)$是两个具有公共轴的旋转嵌入半球的连通和，从而表明 $f(M)$确实是一个旋转嵌入球面。

最后，我们介绍 H. Rosenberg 和 R. Tribuzy [40] 关于以下齐性三维流形中凸曲面刚性的一个结果：这些流形称为 $\mathbb{E}(k,\ \tau)$ 空间。

给定 $k,\ \tau \in \mathbb{R}$ 若 $k - 4\tau^2 \neq 0,$ 则用 $\mathbb{E}(k,\ \tau)$ 表示曲率为 $k$ 、纤维丛曲率为 $\tau.$ 的单连通二维空间形式上的黎曼浸没的全空间。纤维的单位切向量场是一个 Killing 场，记作 $\xi.$。 $\mathbb{E}(k,\ \tau)$ 空间包括乘积空间 $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ 和 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$、海森堡空间 $\mathrm{Nil}_3,$、伯杰球面，以及特殊线性群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 的万有覆盖。

按照 [40], 中的定义，若定向曲面 $f\colon M \to \mathbb{E}(k,\ \tau)$ 的任一主曲率都至少为 $\tau.$，则称其为严格凸。采用这一术语，Rosenberg–Tribuzy 定理表述如下。

**定理 15（*Rosenberg – Tribuzy* [40]）。设 $f(t)\colon M \to \mathbb{E}(k,\tau)$ 是一族满足 $f(0) = f.$ 的等距浸入光滑单参数族。假设 $f$ 是严格凸的，且对 $x \in M$ 和所有 $t$, $K(f_t(x)) = K(f(x))$；并且在 $M$ 的非水平点 $x$ 处， $H(f_t(x)) = H(f(x))$。那么，存在等距变换 $h(t)\colon \mathbb{E}(k,\tau) \to \mathbb{E}(k,\tau)$，使得 $h(t)f(t) = f.$**

在上述表述中， $K(f(x))$ 和 $H(f(x))$ 分别表示浸入 $f$ 在点 $x \in M.$ 处的高斯曲率和平均曲率。此外，如果点 $x \in M$ 处的 $\xi$ 与 $T_xM.$ 正交（分别平行），则称该点为水平 （分别为垂直）点。

证明的思路是首先考虑单位向量场

$$e_1 := \frac{P(\xi)}{\|P(\xi)\|}$$

在 $f$ 上非水平点的开集 $U \subset M$ 中， $P$ 表示到切丛 $TU.$ 上的正交投影。于是，在 $U$ 上，存在定义良好的可微角函数 $\Theta$，使得

$$\xi = (\cos\Theta)e_1 + (\sin\Theta)N,$$

其中 $N$ 是 $f.$ 的单位法向量。此外，可以证明，由于 $f$ 的凸性，对于任意垂直点 $x \in M$， $\Theta$ 在 $x.$ 的某个邻域内是下沉。这使得我们可以选取一个与 $\Theta$ 的梯度正交的单位向量场 $v \in TU$，进而在 $U$ 上定义第二个角函数 $\phi$，如下：

$$v = (\cos\phi)e_1 + (\sin\phi)e_2,$$

其中 $e_2 = Je_1$ 和 $J$ 是正向的 $\pi/2$ 旋转。

在此设定下，一项计算（其中 $f$ 的凸性起着关键作用）表明， $\phi$ 是一个常微分方程的解，该方程涉及函数 $\Theta.$。根据满足初始条件的常微分方程解的唯一性，以及对曲率函数 $H$ e $K$ 的假设，可以得出结论：对于所有浸入 $()$，函数 和 都相同。

此外，由 $f$ 的凸性还可证明，任意 $f$（$t$）的水平点都是孤立的，且指标为一。由此并结合上述讨论可知，所有浸入 $f$（$t$）均满足 B. Daniel 的齐性三维流形浸入基本定理的假设；该定理证明了这些浸入彼此全等，正如所断言的那样。 [11],

## Acknowledgements

作者感谢两位匿名审稿人提出的更正和宝贵建议。他们的建议大大改进了本文的呈现。

## References

[1] R. Albuquerque，常截面曲率流形中超曲面的闵可夫斯基恒等式， *Differential Geom. Appl.* **67**（2019年），1–11。[2] J. Aledo L. Alias A. Romero，空间形式中曲面的 Liebmann 经典刚性定理的新证明， *Rocky Mountain J. Math.* **35**（2005年），1811–1824。

[3] S. Alexander *Proc. Am. Math.* , *Soc.* **64** 1977 321 325

负曲率空间中的局部凸超曲面。, （）, –。[4] R. Beez

¨ ¨ *Zeit.* 高阶流形

*für Math. und Physik* **21** 1876 373 401

曲率测度理论, , （）, –。[5] R. Bishop, 无穷小凸性蕴含局部凸性, *Indiana Univ. Math. J.* **24**, （1974/75）, 169–172。[6] X. Cheng H. Rosenberg, $M^m \times \mathbb{R}$中的嵌入正常数 r-平均曲率超曲面, *Anais da academia brasileira de ciências* **77**（2005年）, 183–199。[7] S. Cohn-Vossen, 整体上的曲面弯曲, *Fortschr. Math. Wiss* **1**（1936）, 33–76。[8] R. Currier, 双曲空间中由乌洛球无穷小支撑的超曲面, *Trans. Am. Math. Soc.* **313**（1989）, 419–431。[9] M. Dajczer

*Submanifolds and isometric immersions*, 基于 M. Antonucci、G. Oliveira、P. L. Filho 和 R. Tojeiro 编写的讲义。数学讲义丛书, 第13卷。Publish or Perish, Inc., 美国得克萨斯州休斯敦, 1990年。

[10] M. Dajczer

D. Gromoll *Proc. Am. Math. Soc.* , 具有零

**93** 1985 99 100

性的球面子流形, （）, –。[11] B. Daniel

3 *Comment.* , 浸入 -维

*Math. Helv.* **82** 2007 87 131

齐性流形, （）, –。[12] B. Daniel, 浸入 $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ 和 $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ 及其在极小曲面中的应用。*Trans. Amer. Math. Soc.* **361**（2009）, 6255–6282。[13] R. F. de Lima, 乘积空间中超曲面的嵌入性、凸性与刚性。*Ann. Glob. Anal. Geom.* **59**（2021）, 319–344。[14] R. F. de Lima

R. L. de Andrade, 空间形式中等距浸入的凸性、刚性与余维约化, *Bull. Braz. Math. Soc.*, 新系列, 第50卷（2019年）, 119–136。[15] M. do Carmo E. Lima, 具有非负截面曲率的流形浸入, *Bol. Soc. Brasil. Mat.* **2**（1971）, 9–22。[16] M. do Carmo

F. Warner *J. Diff.* , 球面中

*Geom.* **4** 1970 133 144

超曲面的刚性与凸性, （）, –。[17] J. M. Espinar I. de Oliveira, 浸入 Killing浸没中的局部凸曲面, *Bull. Braz. Math. Soc.*, 新系列, 第44卷（2013）, 155–171。[18] J. M. Espinar J. A. Gálvez

H. Rosenberg, 乘积空间中具有正外在曲率的完备曲面, *Comment. Math. Helv.* **84**（2009）, 351–386。[19] J. M. Espinar H. Rosenberg, 严格局部凸超曲面何时是嵌入的, *Math. Z.* **271**（2012）, 1075–1090。[20] V. T. Fomenko G. N. Gajubov, 罗巴切夫斯基空间中带边界凸曲面的唯一确定, *Math. USSR Sbornik* **17**（1972）, 第3期, 373–379。[21] J. A. Gálvez,

3 *Matemática* 维空间形

*Contemporânea* **37** 2009 01 42

式中的常曲率曲面, （）, –。[22] J. Hadamard

´ *J. Math. Pures Appl.* 关于动力

**10** 1897 387

学中轨迹的某些性质, （）, 第3期, 331– 。[23] G. Hardy G J. Littlewood G. Polya *Inequalities*, 剑桥大学出版社, 剑桥, 1989年。[24] J. Heijenoort, 关于局部凸流形, *Comm. Pure Appl. Math.* **5**（1952）, 223–242。[25] G. Herglotz, 关于椭球面的刚性, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **15**（1943）, 127–129。[26] D. Hilbert *Grundlagen der geometrie*, 第3版, 莱比锡, 1909年。

[27] W-T Hsiang W-y Hsiang, 非紧对称空间中等周解和嵌入肥皂泡的唯一性, I, *Invent. math.* **98**（1989）, 39–58。[28] J. Jellett, 平均曲率为常数的曲面, *J. Math. Pures Appl.* **18**（1853）, 163–167。

[29] L. Jonker，具有半定第二基本形式的浸入， *Can. J. Math.*，27（1975），610–617。
[30] W. Killing， *Die nicht-Euklidischen Raumformen in analytische Behandlung*，
Teubner，莱比锡，1885。[31] N. J. Korevaar，通过 Alexandrov 定理研究常魏因加滕曲率的球面
定理——A. Ros 一篇短文的附录， *J. of Diff. Geom.*，27（1988），221–223。[32] H. Liebmann，
*Math.* 论正
*Ann.* **53** 1900 81 112
曲率闭曲面的弯曲，（），–。[33] F. Manfio， R. Tojeiro， $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ 和
$\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. *Illinois J. Math.* **55** 上的常截面曲率超曲面（2011），397–415。[34] H. Minkowski，
*Gesammelte Abhandlungen*，应用数学科学丛书，Teubner，莱比锡，1911。[35] S. Montiel，
A. Ros，紧超曲面：高阶平均曲率的 Alexandrov 定理，载于： *Differential geometry*，
*Pitman Monographs Surveys Pure Appl. Math.*，第52卷，Longman Sci. Tech.，Harlow，1991，
第279–296页。[36] S. Montiel， A. Ros， *Curves and surfaces*，数学研究生丛书，第69卷，美国
数学学会—西班牙皇家数学会，普罗维登斯，罗得岛—马德里，西班牙，2009。[37] I. Oliveira，
S. Schweitzer $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. *Geom Ded-* ，浸
*icata* **188** 2017 17 32
入于（）中的局部凸超曲面，–。[38] R. Pedrosa，
*Ann. Glob. Anal. and Geom.* 球柱
**26** 2004 333 354
面中的等周问题，（），–。[39] T. Perelman，
*J. Differential Geom.*
**40** 1994 209 212

Cheeger 和 Gromoll 灵魂猜想的证明，（），–。[40] H. Rosenberg，
R. Tribuzy *Bull.* 齐性
*Sci. math.* **136** 2012 892 898
空间中凸曲面的刚性，（），–。[41] R. Sacksteder，关于没有负截面曲率的超曲面，
*Amer. J. Math.* **82**（1960），609–630。[42] R. Sacksteder，超曲面的刚性，
*J. Math. Mech.* **11**（1962），929–940。[43] M. Spivak，
*A comprehensive introduction to differential geometry*，第四卷，Publish or Perish，1979。
[44] J. Stoker， ¨论三维空间中正曲率开曲面的形状， *Compositio Math.* **3**（1936），55–88。
[45] F. Warner，
*Trans. Amer.* 将劳
*Math. Soc.* **122** 1966 341 356
赫比较定理推广到子流形，**()**，–。