arXiv:2302.00811v2 [math.FA] 3 May 2023

一维高阶 Besov 空间上复合算子的有界性

池田雅弘、石川功和谷口浩一

Abstract. 本文旨在刻画一维欧几里得空间上高阶导数 Besov空间复合算子的有界性$B^s_{p,\ q}$。与低阶情形 $0 < s < 1$相比，关于高阶情形 $s > 1$下复合算子有界性的研究成果较少。我们证明了 Besov 空间上的复合算子与逐点乘子之间的关系，并有效运用逐点乘子的刻画。由此，我们获得了关于一般 p、 q和 s的复合算子有界性的充要条件，使得 $1 < p \leq \infty$、 $0 < q \leq \infty$和 $s > 1 + 1/p$。本文中，作为诱导复合算子的映射，我们不仅考虑实数轴上的同胚，也考虑连续映射，且任意一点的原像元素个数均有统一上界。我们还给出了 Sobolev 空间上复合算子有界性的类似刻画。

1. Introduction

本文刻画了满足以下条件的映射 $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ，使得复合算子

$$C_\varphi : f \mapsto f \circ \varphi$$

在一维非齐次 Besov 空间 $B^s_{p,q} = B^s_{p,q}(\mathbb{R})$ 上有界*。

复合算子出现在变量替换的语境中。其在各种函数空间上的有界性早已得到研究（例如参见 [1–3, 7–12,14, 16, 18, 20, 21, 24, 27, 29, 30, 32] 及其中的参考文献）。此外，它还应用于动力系统分析（见 [10, 15]）、区域上的函数空间理论（见 [17, 26, 27]）、输运方程（见 [3, 5, 10, 31]）等领域。对于 Besov空间上的复合算子，Bourdaud 和 Sickel [2] 给出了同胚 φ 使 C_φ 在低阶导数的齐次和非齐次 Besov 空间上有界的充要条件$0 < s < 1$；随后，Bourdaud [1] 放宽了对 φ 的假设，并给出了（不一定是同胚的） φ 使有界性成立的充分条件。相比之下，高阶情形 $s > 1$ 同样重要，但相关研究仍不够充分。据我们所知，这一刻画仅在以下情形中有所提及：

2020 数学主题分类。主要分类号 47B33、30H25；次要分类号 46E35；关键词。复合算子、有界性、自同构、Besov空间、索伯列夫空间、逐点乘子。

*我们将复合算子 C_φ 视为如下定义的映射：对于连续函数 f ，若 $B^s_{p,q}$ 嵌入实数集 $\mathbb{R}$ 上的连续函数空间，即满足“$s > 1/p$”或“$s = 1/p$ 和 $0 < q \leq 1$”（参见命题 2.3），则取其典范代表元 $f \mapsto f \circ \varphi$ 。否则，若 φ 非奇异（即，对于任意可测零测集 $E \subset \mathbb{R}$，均有 $|\varphi^{-1}(E)| = 0$ ），则映射 $f \mapsto f \circ \varphi$ 在几乎处处相等的等价类意义下定义良好。

$s \in \mathbb{N}$ 在索伯列夫空间框架下的 $s \geq 2$ （见 [2, 注 1.14]）。我们的目的是研究 C_φ 在非齐次贝索夫空间 $B^s_{p,\,q}$ 且满足$s > 1$时的有界性；我们的主要结果给出了情形$s > 1+1/p$下的充要条件。本文不讨论齐次Besov 空间 $\dot{B}^s_{p,\,q}$上的复合算子，因为在情形 $s > 1$ 下，这些算子仅限于平凡情形（例如见 [2,注 1.14] 和 [1, 第 6]节）。

为陈述结果，我们先给出一些记号和定义。我们采用 $B^s_{p,q}$ 的差分刻画，即 $B^s_{p,\,q}$ 是满足以下条件的所有 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}$ 的集合

$$\|f\|_{B^s_{p,q}} := \|f\|_{L^p} + \left(\int_{|h|\leq 1} |h|^{-sq} \|\Delta^m_h f\|^q_{L^p} \frac{dh}{|h|} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

（对 $q = \infty$ 作通常的相应修正），其中 $m \in \mathbb{N}$ 且 $m > s$。这里，$L^1_{\mathrm{loc}} = L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的所有可测函数构成的空间，满足对任意紧集 $K \subset \mathbb{R}$，均有 $f \in L^1(K)$；而 Δ^m_h 阶差分算子由下文的 (2.2) 定义。关于 $B^s_{p,q}$ 的细节，见第 2.1 小节。若存在常数 $L > 0$ 使得以下条件成立，则称 φ 为利普希茨函数

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq L|x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

我们记　　用 $\#A$ 表示集合 A 的基数。对于可测映射 φ，我们定义

$$U(\varphi) := \sup_{|I|=1} |\varphi^{-1}(I)| \quad \text{and} \quad \mathcal{M}(\varphi) := \sup_I |I|^{-1} |\varphi^{-1}(I)|,$$

其中，上确界取遍 $\mathbb{R}$ 中的闭有界区间。我们用 $M(X)$ 表示拟赋范空间 X 的所有逐点乘子构成的集合，即定义在 $\mathbb{R}$ 上、满足以下条件的所有可测函数 f 的集合

$$\|f\|_{M(X)} := \sup_{\|g\|_X \leq 1} \|fg\|_X < \infty.$$

关于 $0 < s < 1$ 情形下 C_φ 的有界性，已有结果总结如下：

定理 1.1（ [2] 中的定理 1.5 和 1.7，以及 [1] 中的定理 9 和 11）。设 $0 < s < 1$、$1 \leq p < \infty$ 和 $1 \leq q \leq \infty$。假设

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ is a homeomorphism.} \tag{H}$$

那么，当且仅当满足以下条件时，C_φ 在 $B^s_{p,\,q}$ 上有界

$$\begin{cases} \varphi^{-1} \text{ is Lipschitz} & \text{if } 0 < s < \dfrac{1}{p}, \\ \varphi \text{ is Lipschitz and } U(\varphi) < \infty & \text{if } \dfrac{1}{p} < s < 1. \end{cases}$$

定理 1.2（ [1]中的定理 7 和 8）。设 $0 < s < 1$、$1 \leq p < \infty$ 和 $1 \leq q \leq \infty$。假设 $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个映射，满足

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \#\varphi^{-1}(x) < \infty. \tag{F}$$

那么，当, $_q$ 时， C_φ 在 B_p^s上有界

$$\begin{cases} \varphi \text{ is locally absolutely continuous and } \mathcal{M}(\varphi) < \infty & \text{if } 0 < s < \dfrac{1}{p}, \\ \varphi \text{ is Lipschitz and } U(\varphi) < \infty & \text{if } \dfrac{1}{p} < s < 1. \end{cases}$$

这些定理通过对临界空间进行插值得到：Lebesgue空间 L^p、H¨older空间 $B^s_{\infty,\ \infty}$、索伯列夫空间 W^1_p 和Besov空间 $B^s_{1,\ 1}$，其中 $1 \leq p \leq \infty$ 和 $0 < s < 1$。定理 1.1最初由 [2], 证明，随后在 [1]中改进了关于 φ 的先验条件。此外， [1] 还在比（H）更弱的假设（F）下给出了定理 1.2。关于临界空间的结果在 [1,第 3]节中得到了系统整理。

注1.3。下面对上述定理作几点说明。

（a）容易看出，（H）蕴含（F），因为对于任意同胚 φ，有 $\sup_{x\in\mathbb{R}}\#\varphi^{-1}(x) = 1$。

（b）在定理 1.1和1.2中， q 的取值范围可以很容易地扩展到 $0 < q \leq \infty$。（c）临界情形 $s = 1/p$尚未得到充分研究（参见 $[1, 2, 14, 21, 29]$），但其中仍有一些未解决的问题。

本文讨论高阶情形 $s > 1 + 1/p$。在此情形下，不妨设 φ 在 $\mathbb{R}$ 上连续可微。事实上，若 C_φ 在 $B^s_{p,q}$ 上有界，则这是必要条件（见下文引理 2.10）。

我们的主要结果如下:

定理1.4. 设 $1 < p < \infty$、 $0 < q \leq \infty$ 和 $s > 1 + 1/p$。假设 (F) 成立。则 C_φ在 $B^s_{p,\ q}$上有界，当且仅当 $U(\varphi) < \infty$且 $\varphi' \in M(B^{s-1}_{p\ q,})$。

对于情形 $p = \infty$，我们有如下结果:

定理 1.5. 设 $0 < q \leq \infty$ 和 $s > 1$。则 C_φ 在 $B^s_{\infty,q}$ 上有界，当且仅当 $\varphi' \in M($ $B^{s-1}_{\infty\ ,q})$。

这里我们对定理1.4和1.5作一些评论。与低阶情形的主要区别 $0 < s < 1$ 在于出现了函数乘积: $C_\varphi f \in B^s_{p,\ q}$大致为

$$(C_\varphi f)' = \varphi' \cdot C_\varphi f' \in B^{s-1}_{p,q}$$

在高阶情形 $s \geq 1$ 下，这意味着 $B^s_{p,q}$ 上的复合算子 C_φ 与 $B^{s-1}_{p\ q,}$ 的逐点乘子 φ' 有关。由此，将低阶情形 $1/p < s < 1$（定理 1.2）的结果与归纳论证相结合，可得到充分条件（见引理3.1、3.7和3.10）。证明的主要部分在于证明 $\varphi' \in M(B^{s-1}_{p\ q,})$ 的必要性（见引理 3.2 和 3.9 ）。关键工具是 $M(B^{s-1}_{p\ q,})$ 的刻画。许多研究探讨了Besov空间的逐点乘子，尤其是 Nguyen 和 Sickel [19]给出了 $s > 1 + 1/p$ 的刻画:

$$M(B^{s-1}_{p,q}) = \left\{ f \in L^1_{\mathrm{loc}} \,\middle|\, \sup_{\|\{c_z\}_z\|_{\ell^p(\mathbb{Z})} \leq 1} \left\| f \sum_{z\in\mathbb{Z}} c_z \psi(\cdot - z) \right\|_{B^{s-1}_{p,q}} < \infty \right\}$$

对于 $p \neq \infty$，以及 $M(B^{s-1}_{\infty,q}) = B^{s-1}_{\infty,q}$（另见第2.3小节）。这里，$\psi \in C^\infty_0$ 是 $\mathbb{R}$ 上由式（2.6）定义的非负函数。定理的证明分别见第3.1和第3.2小节。

注1.6. 如果“$0 < p \leq 1$, $0 < q \leq \infty$ and $s > 1 + 1/p$”或“$0 < q \leq p \leq 1$ and $s = 1 + 1/p$”，则已证明，在假设 (F) 下，条件 $U(\varphi) < \infty$ and$\varphi' \in M(B^{s-1}_{p\,q,})$ 是 C_φ 在 $B^s_{p,\,q}$ 上具有有界性的必要条件（见引理 3.2 和注 3.6）。据我们所知，这些条件是否充分仍未解决。情形 $1 \leq s \leq 1 + 1/p$ 仍未解决。

我们还提及索伯列夫空间 H^s_p 的情形。在这种情形下，我们也得到了一个与定理1.4类似的结果。该结果推广了此前关于正整数阶导数索伯列夫空间 $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 2$ 的结果，见 [2, 注1.14]。Strichartz [25] 给出了 $M(H^{s-1}_p)$ 与 $s > 1 + 1/p$ 的刻画（另见 [23]）。关于 H^s_p 的细节请参见第4节。

我们还讨论了使 φ 在$B^s_{p,\,q}$ 上成为 C_φ 自同构的同胚所需的充分必要条件。这里，自同构是指 C_φ 为双射，且 C_φ、$C^{-1}_\varphi (= C_{\varphi^{-1}})$ 在$B^s_{p,\,q}$上有界。作为定理1.4和1.5的推论，我们立即得到以下结果：

推论1.7. 设 $1 < p \leq \infty$、$0 < q \leq \infty$ 和 $s > 1 + 1/p$。假设 (H)。那么，当且仅当 φ'、$(\varphi^{-1})' \in M(B^{s-1}_{p\,q,})$时，$C_\varphi$ 在 $B^s_{p,\,q}$上是自同构。

注 1.8. 我们来介绍关于 C_φ 在Besov空间和索伯列夫空间上的自同构的评论及相关研究。

(a) 对于 $0 < s < 1$，相关刻画已在 [1, 2, 29]中得到研究。(b) 关于索伯列夫空间的类似于推论1.7的结果，也可由定理 4.1得到。

注 1.9. 对所有参数 $s \in \mathbb{R}$ 和 $0 < p, q \leq \infty$ （索伯列夫空间除外的 $p = \infty$），关于 C_φ 在 $B^s_{p,\,q}$ 和 H^s_p 上的有界性与自同构的一些充分条件，分别见 [22, 定理 4.46] 和 [27,第 4.3 小节中的定理 2]，（有界性也可参见 [22] 第 563 页对定理 4.46 的评述）。我们的结果改进了关于 $1 < p \leq \infty$、$0 < q \leq \infty$和 $s > 1+1/p$的这些结论。

致谢。本研究基于 FY2022 IMI 联合使用研究计划短期联合研究“Besov空间上的 Koopman 算子有界性及其应用”期间的讨论。第一作者获得日本学术振兴会青年科学家研究（No.19K14581）的资助。第二作者获得日本 JST ACTX Grant（No. JPMJAX2004）的资助。第一和第二作者均获得日本 JST CREST（No. JPMJCR1913）的资助。作者感谢 V. K. Nguyen 教授就 Besov空间上的逐点乘子提出了宝贵意见。

2. Preliminaries

下面介绍本文中用到的一些记号和定义。对于 a、$b \geq 0$，符号 $a \lesssim b$ 和 $b \gtrsim a$ 表示存在一个常数 $C > 0$，使得$a \leq Cb$。符号 $a \sim b$ 表示 $a \lesssim b$ 和 $b \lesssim a$ 同时成立。我们

将 χ_E 定义为 $E \subset \mathbb{R}$的示性函数。我们用记号 $\|\cdot\|_{X\to Y}$表示从拟赋范空间 X 到另一个拟赋范空间 Y的算子范数，即,

$$\|T\|_{X\to Y} := \sup_{\|f\|_X=1} \|Tf\|_Y$$

对于从 X 到 Y 的算子 T。对于拟赋范空间 X 和 Y，记号 $X \hookrightarrow Y$ 表示 X 连续嵌入于 Y，即 X 是 Y 的子集，且存在常数 $C > 0$ 使得

$$\|f\|_Y \le C\|f\|_X \quad \text{for any } f \in X.$$

我们用 $BUC = BUC(\mathbb{R})$ 表示定义在 $\mathbb{R}$ 上、赋予上确界范数的所有一致连续有界函数构成的巴拿赫空间。对于 $k \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$，我们用 $C^k = C^k(\mathbb{R})$ 表示 $\mathbb{R}$ 上 k 次连续可微函数构成的空间，用 $C_0^\infty = C_0^\infty(\mathbb{R})$ 表示 $\mathbb{R}$ 上紧支撑光滑函数构成的空间，用 $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 表示施瓦茨空间，它由 $\mathbb{R}$ 上所有快速衰减的无穷次可微函数构成；用 $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ 表示 $\mathbb{R}$ 上所有缓增分布构成的空间。空间 $\mathcal{S}'$ 是 $\mathcal{S}$ 的对偶空间。我们用 $L^p = L^p(\mathbb{R})$ 表示 Lebesgue空间，用 $W_p^k = W_p^k(\mathbb{R})$ 表示 $k \in \mathbb{N}$ 和 $0 < p \le \infty$ 对应的索伯列夫空间。

2.1. Besov空间。设 $\{\varphi_j\}_{j=0}^\infty$ 为Littlewood–Paley分解。更确切地说，设 $\varphi_0 \in C_0^\infty$为非负函数，满足 $\varphi_0(x) = 1$ 当 $|x| \le 1$ 时，且$\varphi_0(x) = 0$ 当 $|x| \ge 2$时，并定义 φ_j 为

$$\varphi_j(x) := \varphi_0(2^{-j}x) - \varphi_0(2^{-j+1}x), \quad x \in \mathbb{R}$$

当 $j \in \mathbb{N}$时。于是 $\{\varphi_j\}_{j=0}^\infty$ 是满足下列条件的单位分解:

$$\sum_{j=0}^\infty \varphi_j(x) = 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

定义 2.1. 设 $s \in \mathbb{R}$ 和 $0 < p, q \le \infty$。则Besov空间$B_{p,q}^s = B_{p,q}^s(\mathbb{R})$定义为满足下列条件的所有温和分布 $f \in \mathcal{S}'$ 的集合:

$$\|f\|_{B_{p,q,\varphi_0}^s} := \left(\sum_{j=0}^\infty 2^{jsq} \left\|\mathscr{F}^{-1}[\varphi_j \mathscr{F} f]\right\|_{L^p}^q\right)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

（当 $q = \infty$时，作通常的相应修改），其中 $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{F}^{-1}$ 分别为傅里叶变换及其逆变换。

Besov空间可用差分来刻画。

命题 2.2. 设 $0 < p, q \le \infty$ 且 $s > \max\{0, 1/p - 1\}$。则Besov空间$B_{p,q}^s$ 是满足下列条件的所有函数 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}$ 的集合:

$$\|f\|_{B_{p,q,m}^s} := \|f\|_{L^p} + \left(\int_{|h|\le 1} |h|^{-sq} \|\Delta_h^m f\|_{L^p}^q \frac{dh}{|h|}\right)^{\frac{1}{q}} < \infty \tag{2.1}$$

（对 $q = \infty$ 作通常的修正），其中 $m \in \mathbb{N}$ 满足 $m > s$。这里，Δ_h^m阶差分算子定义为

$$\Delta_h^m f(x) := \sum_{j=0}^m (-1)^{m-j} \binom{m}{j} f(x + jh), \quad x, h \in \mathbb{R} \tag{2.2}$$

而 Δ_h^0 是恒等算子。

注意，$B^s_{p,\ q}$ 与 φ_0 和 m的选取无关。我们将记号$\|f\|_{B^s_{p,\ q}}$记作（2.1），并将记号$|f|_{B^s_{p,\ q}}$记作（2.1）中的第二项:

$$|f|_{B^s_{p,q}} := \left(\int_{|h|\le 1} |h|^{-sq} \|\Delta_h^m f\|_{L^p}^q \frac{dh}{|h|} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

空间$B^s_{p,\ q}$是一个拟巴拿赫空间（若 p、 $q \ge 1$，则为巴拿赫空间）。以下结论是已知的。

命题 2.3。设 $s \in \mathbb{R}$ 且 $0 < p$、 $q \le \infty$。则以下三个命题等价:

(i) $B^s_{p,\ q} \hookrightarrow L^\infty$。 (ii) $B^s_{p,\ q} \hookrightarrow BUC$。 (iii) “$s > 1/p$”或“$s = 1/p$ 且 $q \le 1$”成立。

命题 2.4。设 $s \in \mathbb{R}$ 且 $0 < p$、 $q \le \infty$。则以下命题等价:

(i) $B^s_{p,q}$ 是一个乘法代数，即 $B^s_{p,q} \hookrightarrow M(B^s_{p,q})$。(ii) 以下条件之一成立: “$s > 1/p$”或“$s = 1/p$, $p \ne \infty$ 和 $q \le 1$”。

关于这些命题的详细内容，例如请参见 [19, 引理 2.2、注 2.3、定理 3.2、注 3.3] 。

2.2. 一些必要条件和充分条件。本小节中，我们给出一些初步引理，讨论 C_φ 在 $B^s_{p,q}$ 上有界性的必要条件和充分条件。这些引理已为人所知，但为方便读者，我们仍给出证明。

引理 2.5. 设 $0 < p < \infty$, $0 < q \le \infty$ 和 $s > \max\{0, 1/p - 1\}$。那么，如果 C_φ 在 $B^s_{p,q}$ 上有界，则 $U(\varphi) < \infty$ 且

$$U(\varphi)^{\frac{1}{p}} \lesssim \|C_\varphi\|_{B^s_{p,q} \to B^s_{p,q}}. \tag{2.3}$$

证明。证明与 [2, 第 2.3]小节中的证明相同。设非负函数 $f \in C_0^\infty$满足 $f \equiv 1$，并定义 $f_a(x) := f(x - a)$，其中 $a \in \mathbb{R}$。由假设可知， C_φ 在$B^s_{p,\ q}$上有界，因此存在一个与 a无关的常数 $C > 0$，使得

$$\|C_\varphi f_a\|_{L^p} \le \|C_\varphi f_a\|_{B^s_{p,q}} \le \|C_\varphi\|_{B^s_{p,q} \to B^s_{p,q}} \|f_a\|_{B^s_{p,q}} = \|C_\varphi\|_{B^s_{p,q} \to B^s_{p,q}} \|f\|_{B^s_{p,q}}$$

对任意 $a \in \mathbb{R}$均成立。此外,

$$\|C_\varphi f_a\|_{L^p}^p \ge \int_{\varphi^{-1}([a,a+1])} |f_a(\varphi(x))|^p \, dx = \left|\varphi^{-1}([a, a+1])\right|$$

对任意 $a \in \mathbb{R}$均成立。结合上述两个估计，我们得到 $U(\varphi) < \infty$ 以及不等式 (2.3)。 □

引理 2.6. 设 $0 < p < \infty$、 $0 < q \le \infty$ 和 $s > 1/p$。假设 $U(\varphi) < \infty$。那么

$$\|C_\varphi f\|_{B^s_{p,q} \to L^p} \lesssim U(\varphi)^{\frac{1}{p}}.$$

证明。证明与 [1, 定理 5] 的证明相同。众所周知 t

$$\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\|f\|^p_{L^\infty([j,j+1])}\right)^{\frac{1}{p}}\le C\|f\|_{B^s_{p,q}} \tag{2.4}$$

对于 $0<p<\infty$、 $0<q\le\infty$ 和 $s>1/p$。式 (2.4) 的证明见[2,第 3.3] 小节。利用式 (2.4)，我们得到

$$\begin{aligned}\|C_\varphi f\|^p_{L^p}&=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\int_{\varphi^{-1}([j,j+1])}|f(\varphi(x))|^p\,dx\\&\le U(\varphi)\sum_{j\in\mathbb{Z}}\|f\|^p_{L^\infty([j,j+1])}\\&\le CU(\varphi)\|f\|^p_{B^s_{p,q}}\end{aligned}$$

对于任意 $f\in B^s_{p,\,q}$。 □

引理 2.7。设 $0<p<\infty$、 $0<q\le\infty$ 和 $s>\max\{1,1/p\}$。假设 C_φ 在 $B^{s-1}_{p\,q}$, 上有界。则

$$\|C_\varphi\|_{B^s_{p,q}\to L^p}\lesssim\|C_\varphi\|_{B^{s-1}_{p,q}\to B^{s-1}_{p,q}}.$$

证明。由引理2.5和引理2.6可得。 □

接下来，我们将证明以下关于 C_φ 在 $B^s_{p,\,q}$ 上有界的必要条件的结果。这是证明定理1.4中必要条件的基本引理之一。

命题 2.8。设 $0<p<\infty$ 和 $0<q\le\infty$。假设“$s>1+1/p$”或“$s>1/p$ 和 (H)”成立。那么，如果 C_φ 在 $B^s_{p,\,q}$ 上有界，则 φ 是利普希茨函数，且

$$\|\varphi'\|^{s-\frac{1}{p}}_{L^\infty}\lesssim\|C_\varphi\|_{B^s_{p,q}\to B^s_{p,q}}. \tag{2.5}$$

为证明这一点，我们先准备以下两个引理:

引理2.9（ [1] 中的命题1）。设 $\varphi:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 和 $A>0$。假设对于任意 $x_0\in\mathbb{R}$，存在 x_0 的一个邻域 V，使得

$$|\varphi(x)-\varphi(y)|\le A|x-y|$$

对于任意 x、 $y\in V$。那么 φ 是利普希茨函数，且 $\|\varphi'\|_{L^\infty}\le A$。

引理 2.10。设 $0<p<\infty$、 $0<q\le\infty$ 和 $s>1/p$。那么，如果 C_φ 在 $B^s_{p,\,q}$ 上有界，则 φ 属于 $C^{k,\,\alpha}$，其中 $s-1/p=k+\alpha$、 $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$、 $\alpha\in(0,1],$，其中 $C^{k,\,\alpha}=C^{k,\,\alpha}(\mathbb{R})$ 是所有 C^k 函数构成的空间，这些函数的 k 阶导数是 H ¨lder 连续的，阶数为 α。

证明。首先，根据 Sobolev 型嵌入可知， φ在 $\mathbb{R}$ 中连续，因为 C_φ 在$B^s_{p,\,q}$ 上有界，且 $s>1/p$。设 $I\subset\mathbb{R}$ 为一个满足$|I|<\infty$的开区间，并取 $f\in C^\infty_0$使得对于 $x\in I$， $f(x)=x$。于是，对于 $x\in\varphi^{-1}(I)$，有 $C_\varphi f(x)=\varphi(x)$，从而$\varphi\in B^s_{p,\,q}(\varphi^{-1}(I))$†。因此，Sobolev 型嵌入$B^s_{p,\,q}(\varphi^{-1}(I))\subset C^{k,\,\alpha}(\varphi^{-1}(I))$ 对于 $0<p<\infty$、 $0<q\le\infty$ 和 $s>1/p$ 表明

†例如，请参见 [4, 第 2] 节，其中给出了开集 $I\subset\mathbb{R}$上 Besov空间$B^s_{p,\,q}(I)$的定义。

$\varphi \in C^{k,\,\alpha}(\varphi^{-1}(I))$。由于 $\mathbb{R} = \bigcup \varphi^{-1}(I)$，其中并集取遍所有满足 $|I| < \infty$的开区间 $I \subset \mathbb{R}$，我们得出 $\varphi \in C^{k,\,\alpha}$。□

命题 2.8 的证明。在假设 (H) 下，$1 \le p < \infty$ 和 $1/p < s < 1$ 这一情形的证明可见 [2, 第 2.2] 小节。我们也采用相同思路证明其他情形。

情形：$s > 1 + 1/p$。我们仅给出 $1 \le s < 2$ 这一情形的证明，其他情形的证明类似。由引理 2.10 可知 $\varphi \in C^1$。于是，对于任意满足 $\varphi'(x) \neq 0$ 的 $x \in \mathbb{R}$，存在一个开区间 $J \subset \mathbb{R}$，使得 $\varphi' > 0$ 在 J 上成立，或者 $\varphi' < 0$ 在 J 上成立。因此，取满足 $\varphi'(b) \neq 0$ 的 $b \in \mathbb{R}$，只需证明存在一个与 b 无关的常数 $C > 0$，使得 $|\varphi'(b)| \le C$。我们仅证明 $\varphi' > 0$ 在 J 上成立的情形，另一情形的证明类似。对于 $\varepsilon > 0$，取一个非负函数 $\eta_\varepsilon \in C_0^\infty$，使得

$$\eta_\varepsilon' = \frac{1}{\varepsilon}(\chi_{[-1-\varepsilon,-1]} - \chi_{[1,1+\varepsilon]}).$$

那么，对于 $x \in [-1, 1]$，$\eta_\varepsilon(x) = 1$，$\operatorname{supp} \eta_\varepsilon \subset [-1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$，且 $|\eta_\varepsilon|_{B^s_{p,\,q}} \le C\varepsilon^{1/p-s}$，其中常数 C 与 ε 无关。取 a、b、$c \in J$，使得 $a < b < c$ 且 $b - 1 \le c \le a + 1$ 且

$$\varphi(c) - \varphi(b) \le \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{2} \le 1,$$

并定义

$$r := \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{2}, \quad x_0 := \frac{\varphi(b) + \varphi(a)}{2}, \quad \varepsilon := \frac{\varphi(c) - \varphi(b)}{2}$$

and

$$f(x) := \eta_\varepsilon\left(\frac{x - x_0}{r}\right).$$

那么，

$$\|f\|_{L^p} = C\left(\varphi(c) - \varphi(b)\right)^{\frac{1}{p}}$$

and

$$|f|_{B^s_{p,q}} = r^{-\frac{1}{p}+s}|\eta_\varepsilon|_{B^s_{p,q}} \le Cr^{-\frac{1}{p}+s}\varepsilon^{\frac{1}{p}-s} = C\left(\varphi(c) - \varphi(b)\right)^{\frac{1}{p}-s}.$$

由有界性的假设，

$$\begin{aligned}|C_\varphi f|_{B^s_{p,q}} &\le \|C_\varphi\|_{B^s_{p,q}\to B^s_{p,q}}\|f\|_{B^s_{p,q}} \\ &\le C\|C_\varphi\|_{B^s_{p,q}\to B^s_{p,q}}\left(\left(\varphi(c) - \varphi(b)\right)^{\frac{1}{p}-s} + \left(\varphi(c) - \varphi(b)\right)^{\frac{1}{p}}\right).\end{aligned}$$

注意到

$$f(\varphi(x + 2h)) - 2f(\varphi(x + h)) + f(\varphi(x)) = 1$$

对于任意 $x \in [c - h, b]$ 和 $h \in [c - b, c - a]$，我们从下方估计

$$\begin{aligned}|C_\varphi f|^q_{B^s_{p,q}} &\ge \int_{c-b}^{c-a}\left(\int_{c-h}^{b} 1\,dx\right)^{\frac{q}{p}}\frac{dh}{h^{1+sq}} \\ &\ge \int_{c-b}^{c-a}(b - c + h)^{\frac{q}{p}}\frac{dt}{h^{1+sq}} \ge C(c - b)^{q(\frac{1}{p}-s)}.\end{aligned}$$

因此，存在一个与 b 和 c无关的常数 $C > 0$，使得 t

$$\varphi(c) - \varphi(b) \le C(c - b)$$

当 b 和 c充分接近时。由于 $\varphi \in C^1$，我们得到当 $c \to b$时 $0 < \varphi'(b) \leq C$。
情形： $s > 1/p$ 和 (H)。根据假设 (H)，不失一般性，我们可以假设 φ 在 $\mathbb{R}$上严格递增。由与上文相同的论证，对于任意b 和充分接近的 c，存在一个与 b 和 c 无关的常数 $C > 0$，使得 $\varphi(c) - \varphi(b) \leq C(c - b)$。因此，由引理2.9可知证明完成。□

在情形 $p = q = \infty$ 下，我们有如下结论：

定理 2.11（ [1]中的定理 2）。设 $0 < s < 1$。则 C_φ 在 $B^s_{\infty,\infty}$ 上有界，当且仅当 φ是利普希茨的。

作为定理 2.11 的推论，通过实插值论证，我们得到以下充分条件 $(B^{s_0}_{\infty,\infty}, B^{s_1}_{\infty,\infty})_{\theta,q} = B^s_{\infty,q}$，其中 $s = \theta s_0 + (1-\theta)s_1$, $s_0 \neq s_1$且 $\theta \in (0, 1)$。

推论 2.12. 设 $0 < s < 1$ 和 $0 < q < \infty$。那么，如果 φ 是利普希茨的，则 C_φ 在 $B^s_{\infty,\, q}$ 上有界。

2.3. $M(B^s_{p,\, q})$ 的刻画。设 $\psi \in C^\infty_0$ 为非负函数，使得

$$\sum_{z\in\mathbb{Z}} \psi(\cdot - z) \equiv 1 \text{ on } \mathbb{R} \quad \text{and} \quad \operatorname{supp}\psi = [-1, 1]. \tag{2.6}$$

我们定义

$$B^s_{p,q,\mathrm{unif}} = B^s_{p,q,\mathrm{unif}}(\mathbb{R}) := \left\{ f \in L^1_{\mathrm{loc}} \,\middle|\, \sup_{z\in\mathbb{Z}} \|f\psi(\cdot - z)\|_{B^s_{p,q}} < \infty \right\}. \tag{2.7}$$

对于 $p \neq \infty$，我们也定义

$$M^s_{p,q} = M^s_{p,q}(\mathbb{R}) := \left\{ f \in L^1_{\mathrm{loc}} \,\middle|\, \sup_{\|\{c_z\}_z\|_{\ell^p(\mathbb{Z})}\leq 1} \Big\| f \sum_{z\in\mathbb{Z}} c_z \psi(\cdot - z) \Big\|_{B^s_{p,q}} < \infty \right\}.$$

显然

$$M(B^s_{p,q}) \hookrightarrow B^s_{p,q,\mathrm{unif}}.$$

对于 $0 < p$、$q \leq \infty$ 和 $s > \max\{0, 1/p - 1\}$。此外，我们还有以下结论：

引理 2.13. 设 $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$ 和 $s > \max\{0, 1/p - 1\}$。那么

$$M(B^s_{p,q}) \hookrightarrow M^s_{p,q} \hookrightarrow B^s_{p,q,\mathrm{unif}}.$$

证明。为证明第二个嵌入，只需取 $c_z = \delta_{z,\tilde{z}}$，其中 $\tilde{z} \in \mathbb{Z}$ （另见 [19] 中定理 1.5 之前的陈述）。为证明第一个嵌入，我们证明 $\sum_{z\in\mathbb{Z}} c_z\psi(\cdot - z)$ 属于 $B^s_{p,q}$。为此，我们写作 $\psi_z := \psi(\cdot - z)$，并将 $\mathbb{Z}$ 分成 $\{\Omega_\ell\}_{\ell=1}^N$，使得

$$\operatorname{dist}(\operatorname{supp}\psi_{z_i}, \operatorname{supp}\psi_{z_j}) \geq 3m$$

对于任意 z_i、$z_j \in \Omega_l$，满足 $z_i \neq z_j$，以及对于 $\ell = 1$、.....、N。这里，我们注意到有限数 N 仅依赖于 m。于是

$$\Big\| \sum_{z\in\Omega_\ell} c_z\psi_z \Big\|^p_{L^p} = \sum_{z\in\Omega_\ell} |c_z|^p \|\psi_z\|^p_{L^p} = \|\{c_z\}_z\|^p_{\ell^p(\Omega_\ell)} \|\psi\|^p_{L^p},$$

$$\Big\| \Delta^m_h \sum_{z\in\Omega_\ell} c_z\psi_z \Big\|^p_{L^p} = \sum_{z\in\Omega_\ell} |c_z|^p \|\Delta^m_h\psi_z\|^p_{L^p} = \|\{c_z\}_z\|^p_{\ell^p(\Omega_\ell)} \|\Delta^m_h\psi\|^p_{L^p}$$

对于 $|h| \leq 1$ 和 $\ell = 1$、.....、N。因此，

$$\begin{aligned}\Big\| \sum_{z\in\Omega_\ell} c_z\psi_z \Big\|_{B^s_{p,q}} &= \Big\| \sum_{z\in\Omega_\ell} c_z\psi_z \Big\|_{L^p} + \left(\int_{|h|\leq 1} |h|^{-sq} \left(\Big\| \Delta_h^m \sum_{z\in\Omega_\ell} c_z\psi_z \Big\|_{L^p}^p \right)^{\frac{q}{p}} \frac{dh}{|h|} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \|\{c_z\}_z\|_{\ell^p(\Omega_\ell)} \|\psi\|_{L^p} \\ &\qquad + \left(\int_{|h|\leq 1} |h|^{-sq} \left(\|\{c_z\}_z\|_{\ell^p(\Omega_\ell)}^p \, \|\Delta_h^m \psi\|_{L^p}^p \right)^{\frac{q}{p}} \frac{dh}{|h|} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \|\{c_z\}_z\|_{\ell^p(\Omega_\ell)} \|\psi\|_{B^s_{p,q}}\end{aligned}$$

对于 $\ell = 1, \ldots, N$，这意味着

$$\Big\| \sum_{z\in\mathbb{Z}} c_z\psi_z \Big\|_{B^s_{p,q}} \leq \|\{c_z\}_z\|_{\ell^p(\mathbb{Z})} \|\psi\|_{B^s_{p,q}}.$$

引理 2.13 的证明完成。 □

结合命题 2.4 和引理 2.13，我们可知

$$B^s_{p,q} \hookrightarrow M(B^s_{p,q}) \hookrightarrow M^s_{p,q} \hookrightarrow B^s_{p,q,\mathrm{unif}} \tag{2.8}$$

对于“$0 < p < \infty, 0 < q \leq \infty$ 和 $s > 1/p$”或“ $0 < p < \infty, 0 < q \leq 1$ 和 $s = 1/p$”，并且

$$B^s_{\infty,q} \hookrightarrow M(B^s_{\infty,q}) \hookrightarrow B^s_{\infty,q,\mathrm{unif}}$$

对于 $0 < q \leq \infty$ 和 $s > 0$。 [19] 的结果总结如下。

定理 2.14. 设 $0 < p$、$q \leq \infty$ 和 $s > 1/p$。则以下断言成立：

(i) $M(B^s_{p,\ q}) = B^s_{p,\ q,\ \mathrm{unif}}$ 当且仅当 $p \leq q$。

(ii) 设 $p \neq \infty$。则 $M(B^s_{p,\ q}) = M^s_{p,\ q}$。 (iii) $M(B^s_{p,\ q}) = B^s_{p,\ q}$ 当且仅当 $p = \infty$。

证明。对于断言 (i)，充分性部分已由 [19, 定理 1.2]证明，必要性部分已由 [19, 推论 3.18] 证明（其中假设 p、$q \geq 1$ 成立，但证明表明，当 $s > 1/p$ 时可以去掉这一假设）。断言 (ii) 在 $q < p$ 时由 [19, 定理 1.5] 证明，在 $p \leq q$ 时则由 [19, 定理 1.2]与 (2.8) 结合证明。对于断言 (iii)，充分性部分已由[19, 定理 1.7]证明。必要性直接由以下事实得出：$1 \in B^s_{p,\ q}$当且仅当 $p = \infty$ （例如参见 [22, 例 2.7，第 241] 页），并且显然$1 \in M(B^s_{p,\ q})$。因此，若 $M(B^s_{p,\ q})$，则 $p = \infty = B^s_{p,\ q}$。 □

注 2.15. 由命题 2.4、引理 2.13 和定理 2.14，还可得出 $B^s_{p,q}$, $B^s_{p,q,\mathrm{unif}}$ 与 $M^s_{p,q}$ 在 $s > 1/p$下的以下关系：

(a) $B^s_{p,q,\mathrm{unif}} = B^s_{p,q}$ 当且仅当 $p = q = \infty$ （见 [19, 注 1.8 (ii i)]）。

(b) 设 $p \neq \infty$。则 $M^s_{p,q} = B^s_{p,q,\mathrm{unif}}$ 当且仅当 $0 < p \leq q \leq \infty$。(c) 设 $p \neq \infty$。则 $B^s_{p,q} \neq M^s_{p,q}$。

此外，对于 $s = 1/p$，还有以下结果。

定理 2.16（ [19]中的定理 1.9）。设 $0 < p \leq 1$ 和 $s = 1/p$。则以下断言成立：

(i) 若 $0 < p = q \le 1$，则 $M(B^{1/p}_{p\,p},\ ) = B^{1/p}_{p\,p}$，一致。(ii) 若 $0 < q < p \le 1$，则 $M(B^{1/p}_{p\,q},\ ) = M^{1/p}_{p\,q},$。

我们还有如下嵌入。

命题 2.17（[28]中的定理 2.21）。设 $0 < p$、$q \le \infty$ 和 $s > \max\{0, 1/p-1\}$。则

$$B^s_{p,q,\mathrm{unif}} \hookrightarrow L^\infty$$

当且仅当“$s > 1/p$”或“$s = 1/p$ 和 $q \le 1$”时成立。

3. Proofs of main results

3.1. 定理1.4的证明。我们先证明如下结论：

引理 3.1。设 $0 < p$、$q \le \infty$ 和 $s > \max\{1, 1/p\}$。假设 C_φ 在 $B^{s-1}_{p\,q,}$ 上有界，且 $\varphi' \in M(B^{s-1}_{p\,q,}\ )$。则 C_φ 在 $B^s_{p,\ q}$上有界。

证明。由链式法则和引理 2.7 可得

$$\begin{aligned}\|C_\varphi f\|_{B^s_{p,q}} &\le \|C_\varphi f\|_{L^p} + \|\varphi' \cdot C_\varphi f'\|_{B^{s-1}_{p,q}} \\ &\le C\left(\|C_\varphi\|_{B^s_{p,q}\to L^p} + \|\varphi'\|_{M(B^{s-1}_{p,q})}\|C_\varphi\|_{B^{s-1}_{p,q}\to B^{s-1}_{p,q}}\right)\|f\|_{B^s_{p,q}} \qquad (3.1)\\ &\le C\left(1 + \|\varphi'\|_{M(B^{s-1}_{p,q})}\right)\|C_\varphi\|_{B^{s-1}_{p,q}\to B^{s-1}_{p,q}}\|f\|_{B^s_{p,q}}\end{aligned}$$

对于任意 $f \in B^s_{p,\ q}$。 □

接下来，我们证明以下结论：

引理 3.2。设 $0 < p < \infty$、$0 < q \le \infty$ 和 $s > 1 + 1/p$。假设 (F) 成立。那么，若 C_φ 在 $B^s_{p,\ q}$ 上有界，则 $U(\varphi) < \infty$ 且 $\varphi' \in M(B^{s-1}_{p\,q,}\ )$。

为此，我们给出两个辅助引理。

引理 3.3。设 $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个满足 (F) 且 $U(\varphi) < \infty$ 的连续映射。那么，对任意 $a \in \mathbb{R}$ 和 $b > 0$，闭集 $\varphi^{-1}([a-b, a+b])$ 是有限个互不相交的闭区间 J_1、$\dots J_r$ 的并。此外，我们有

$$\sum_{i=1}^{r} |J_i| \le 2\lceil b\rceil U(\varphi), \qquad (3.2)$$

$$r \le \sup_{x\in\mathbb{R}} \#\varphi^{-1}(x), \qquad (3.3)$$

其中，$\lceil x\rceil$ 是大于或等于 x的最小整数。

证明。设 $J := [a-b, a+b]$。我们证明 $\varphi^{-1}(J)$ 是有限个互不相交的闭区间的并。由 $\partial\varphi^{-1}(J)$ 包含于有限子集 $\varphi^{-1}(\partial J) = \varphi^{-1}(\{a-b, a+b\})$ 可知，$\varphi^{-1}(J)$ 必然是有限个互不相交的闭区间的并。令

$$\varphi^{-1}(J) = \bigsqcup_{j=1}^{r} J_j.$$

F首先，我们证明 (3.2)。设 $J_0 \supset J$ 是宽度为 $2\lceil b \rceil$ 的闭区间。因此，

$$\sum_{j=1}^{r} |J_i| = |\varphi^{-1}(J)| \leq |\varphi^{-1}(J_0)| \leq 2\lceil b \rceil U(\varphi).$$

接下来，我们证明 (3.3)。由于 $\partial\varphi^{-1}(J) \subset \varphi^{-1}(\partial J) = \varphi^{-1}(\{a-b, a+b\})$，不等式 (3.3) 可由下式推出：

$$2r = \#\partial\varphi^{-1}(J) \leq \#\varphi^{-1}(\partial J) \leq 2 \sup_{x\in\mathbb{R}} \#\varphi^{-1}(x).$$

□

引理 3.4。设 $\{I_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 是实数集 $\mathbb{R}$ 的一个闭区间可数序列。假设

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \#\{i : I_j \cap I_i \neq \emptyset\} < \infty. \tag{3.4}$$

那么，存在实数集 $\mathbb{N}$ 的一个有限划分 $S_1, \ldots, S_r$，使得对于任意i, $j \in S_k$，若满足 $i \neq j\,(k = 1, \ldots, r)$，则有 $I_i \cap I_j = \emptyset$。

证明。对于任意非空子集 $S \subset \mathbb{N}$，我们归纳地定义递增的有限子集$\tau_1(S) \subset \tau_2(S) \subset \cdots \subset S$如下： $\tau_0(\emptyset) := \emptyset$, $\tau_1(S) := \{\min S\}$，且对于 $n \geq 1$,

$$\tau_{n+1}(S) := \begin{cases} \tau_n(S) \cup \left\{\min\left\{j \in S \setminus \tau_n(S) : (\cup_{i\in\tau_n(S)} I_i) \cap I_j = \emptyset\right\}\right\} & (\tau_n(S) \subsetneq S), \\ \tau_n(S) & (\tau_n(S) = S). \end{cases}$$

然后，我们定义 $\tau(S) := \cup_{n\geq 0}\tau_n(S)$。根据条件 (3.4)，对于任意非空子集$S \subset \mathbb{N}$， $\tau(S) \subset S$ 也非空，并满足以下两个条件：

(i) 对任意 $i, j \in \tau(S)$， $I_i \cap I_j = \emptyset$； (ii)

对任意 $j \in S \setminus \tau(S)$，$I_j \cap \left(\cup_{i\in\tau(S)} I_i\right) \neq \emptyset$。

接着，我们递归地构造两两不相交的集合 $S_0, S_1, \cdots \subset \mathbb{N}$，如下所示：

$$S_0 := \emptyset,$$
$$S_{n+1} := \tau(\mathbb{N} \setminus \cup_{k=0}^{n} S_k)$$

对于 $n \in \mathbb{N}$。令 $L := \sup_{j\in\mathbb{N}} \#\{i : I_j \cap I_i \neq \emptyset\}$。我们断言 $S_{L+2} = \emptyset$。事实上，假设 $S_{L+2} \neq \emptyset$。固定 $j \in S_{L+2}$。根据 S_k 的构造，我们有 $j \in \mathbb{N} \setminus \cup_{k=0}^{\ell} S_k$，但对于 $\ell = 0, \ldots, L$， $j \notin \tau(\mathbb{N} \setminus \cup_{k=0}^{\ell} S_k) = S_{\ell+1}$。因此，由 (ii) 可知，对于任意 $\ell = 1, \ldots, L+1$，存在 $i \in S_\ell$ 使得 $I_j \cap I_i \neq \emptyset$，但这意味着 $\#\{i : I_j \cap I_i \neq \emptyset\} \geq L+1$，矛盾。因此，我们得出结论 $S_{L+2} = \emptyset$。接着，由于对于所有 $\ell \geq L+2$，$\mathbb{N} = \cup_{k=1}^{\infty} S_k$ 且 $S_\ell = \emptyset$，存在 $r \leq L+1$ 使得 $\mathbb{N} = \sqcup_{k=1}^{r} S_k$。 □

引理 3.2 的证明。由引理 2.5 和 2.8 可知， φ 是利普希茨函数，并满足 $U(\varphi) < \infty$。因此，只需证明 $\varphi' \in M(B^{s-1}_{p\,q},) = M^{s-1}_{p\,q},$ (见定理 2.14 (ii))。

回顾一下， $\psi \in C_0^\infty$是满足（2.6）的非负函数，令 $\psi_z := \psi(\cdot - z)$，其中 $z \in \mathbb{Z}$。定义

$$S_z := \bigcup_{j=1,\ldots,m} \bigcup_{|h|\leq 1} \operatorname{supp}\left(\Delta_h^{m-j}\psi_z(\cdot + jh)\right).$$

取一个正整数 $R>0$，使得

$$2R \geq \|\varphi'\|_{L^\infty} \cdot \max\{\mathrm{diam}(S_z), 2m\} + 2. \tag{3.5}$$

其中 $\mathrm{diam}(S) := \sup_{x,y\in S}|x-y|$ 对于集合 $S \subset \mathbb{R}$。我们注意到，(3.5) 右端与 $z \in \mathbb{Z}$ 的选取无关。

我们将 $\mathbb{Z}$划分为 $\{\Omega_\ell\}_{\ell=1}^N$，使得

$$\mathrm{dist}(S_{z_i}, S_{z_j}) \geq 12RU(\varphi) \tag{3.6}$$

对于任意满足 $z_i \neq z_j$ 和 $\ell = 1$ 的 $z_i, z_j \in \Omega_\ell$，....., N。暂且固定 $\ell \in \{1,\ldots,N\}$。由于 φ 是利普希茨的，且 (3.5) 成立，我们有

$$\mathrm{diam}\,(\varphi(S_z)) \leq \|\varphi'\|_{L^\infty}\mathrm{diam}\,(S_z) \leq 2R.$$

因此，对于 $z \in \Omega_\ell$，存在 $a_z \in \mathbb{R}$ 使得

$$S_z \subset \varphi^{-1}([a_z - R, a_z + R]), \tag{3.7}$$

特别地，对于任意 $z \in \Omega_\ell$，我们有

$$\mathrm{supp}\,\psi_z \subset \varphi^{-1}([a_z - R, a_z + R]). \tag{3.8}$$

令 $\mathcal{I}_a := [a-2R, a+2R]$。那么，我们断言

$$\#\{w \in \Omega_\ell : \mathcal{I}_{a_z} \cap \mathcal{I}_{a_w} \neq \emptyset\} \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \#\varphi^{-1}(x) < \infty \tag{3.9}$$

对任意 $z \in \Omega_\ell$均成立。事实上，根据引理 3.3 中的 (3.2) 和 (3.6)，$\varphi^{-1}([a_z - 6R, a_z + 6R])$ 的每个连通分支（闭区间）至多与一个 S_z for $z \in \Omega_\ell$ 相交。由于 $\mathcal{I}_{a_z} \cap \mathcal{I}_{a_w} \neq \emptyset$ 意味着 S_z 与 $\varphi^{-1}([a_z - 6R, a_z + 6R])$ 相交，公式 (3.9) 由 (3.3) 得出。因此，根据引理 3.4，存在 $\Omega_\ell^1, \ldots, \Omega_\ell^{r_\ell}$ 对 Ω_ℓ 的一个划分，使得 $\mathcal{I}_{a_z} \cap \mathcal{I}_{a_w} = \emptyset$ for $z, w \in \Omega_\ell^k$ for $k = 1, \ldots, r_\ell$。

我们进一步固定 $k \in \{1,\ldots,r\}$。取函数 $f \in C_0^\infty$，使得对于 $x \in [-R, R]$，$f(x) = x$，且 supp $f = [-R-1, R+1]$。对于 $a \in \mathbb{R}$，定义 $f_a(x) := f(x-a)$，并且

$$I_a := \varphi^{-1}([a - R, a + R]).$$

那么，

$$(C_\varphi f_a(x))' = \varphi'(x) \tag{3.10}$$

对于 $x \in I_a$。此外，由于 $\mathrm{supp}(C_\varphi f_a) = \varphi^{-1}([a - R - 1, a + R + 1])$，我们可知，对于任意 $z, w \in \Omega_\ell^k$，满足 $z \neq w$

$$\mathrm{dist}(\mathrm{supp}\,(C_\varphi f_{a_z}), \mathrm{supp}\,(C_\varphi f_{a_w})) \geq \frac{2R-2}{\|\varphi'\|_{L^\infty}} \geq 2m. \tag{3.11}$$

Let

$$\tilde{S}_z := \bigcup_{j=1,\ldots,m} \bigcup_{|h|\leq 1} \mathrm{supp}\,(\Delta_h^j C_\varphi f_{a_z}).$$

那么，由 (3.5) 和 (3.11)，对于任意 $z, w \in \Omega_\ell^k$，满足 $z \neq w$，我们有

$$\tilde{S}_z \cap \tilde{S}_w = \emptyset \tag{3.12}$$

对于 $z, w \in \Omega_\ell^k$，其中 $z \neq w$。

那么，由 (3.6) 和 (3.12)，我们得到以下公式：

$$\Big\| \sum_{z\in\Omega_\ell^k} c_z\psi_z\varphi' \Big\|_{L^p}^p = \sum_{z\in\Omega_\ell^k} |c_z|^p \, \|\psi_z\varphi'\|_{L^p}^p \,, \tag{3.13}$$

$$\Big\|\Delta_h^{m-j} \sum_{z\in\Omega_\ell^k} c_z\psi_z(\cdot+jh)\varphi' \Big\|_{L^p}^p = \sum_{z\in\Omega_\ell^k} |c_z|^p \, \big\|\Delta_h^{m-j}\psi_z(\cdot+jh)\varphi' \big\|_{L^p}^p \,, \tag{3.14}$$

$$\Big\| \sum_{z\in\Omega_\ell^k} \left(C_\varphi(|c_z|f_{a_z})\right)' \Big\|_{L^p}^p = \sum_{z\in\Omega_\ell^k} |c_z|^p \, \|(C_\varphi f_{a_z})'\|_{L^p}^p \,, \tag{3.15}$$

$$\Big\|\Delta_h^j \sum_{z\in\Omega_\ell^k} \left(C_\varphi(|c_z|f_{a_z})\right)' \Big\|_{L^p}^p = \sum_{z\in\Omega_\ell^k} |c_z|^p \, \big\|\Delta_h^j(C_\varphi f_{a_z})'\big\|_{L^p}^p \tag{3.16}$$

对于 $|h|\le 1$, $j=1,\dots,m$, $\ell=1,\dots,N$和 $k=1,\dots,r_\ell$。

根据三角不等式，可得

$$\Big\|\varphi'\sum_{z\in\mathbb{Z}} c_z\psi_z\Big\|_{B_{p,q}^{s-1}} \le \sum_{\ell=1}^{N}\sum_{k=1}^{r_\ell} \Big\|\varphi'\sum_{z\in\Omega_\ell^k} c_z\psi_z\Big\|_{B_{p,q}^{s-1}}.$$

因此，$\varphi'\in M_{p\,q}^{s-1}$,的证明可归结为证明

$$\sup_{\|\{c_z\}_z\|_{\ell^p(\mathbb{Z})}\le 1} \Big\|\varphi'\sum_{z\in\Omega_\ell^k} c_z\psi_z\Big\|_{B_{p,q}^{s-1}} \le C\left(\|\varphi'\|_{L^\infty} + \|C_\varphi\|_{B_{p,q}^s\to B_{p,q}^s}\|f\|_{B_{p,q}^s}\right) \tag{3.17}$$

对于 $\ell=1,\dots,N$和 $k=1,\dots,r_\ell$。首先，由 (3.13)、(3.8)、(3.10) 和 (3.15) 可得

$$\begin{aligned}
\Big\|\varphi'\sum_{z\in\Omega_\ell^k} c_z\psi_z\Big\|_{L^p}^p &= \sum_{z\in\Omega_\ell^k} |c_z|^p \, \|\psi_z\varphi'\|_{L^p}^p \\
&\le C\sum_{z\in\Omega_\ell^k} |c_z|^p \, \|\varphi'\|_{L^p(I_{a_z})}^p \\
&\le C\sum_{z\in\Omega_\ell^k} |c_z|^p \, \|(C_\varphi f_{a_z})'\|_{L^p(I_{a_z})}^p \\
&\le C\Big\| \sum_{z\in\Omega_\ell^k} \left(C_\varphi(|c_z|f_{a_z})\right)' \Big\|_{L^p}^p.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

接下来，由 (3.14) 可得

$$\Big\|\Delta_h^m\varphi'\sum_{z\in\Omega_\ell^k} c_z\psi_z\Big\|_{L^p}^p = \sum_{z\in\Omega_\ell^k} |c_z|^p \, \|\Delta_h^m\psi_z\varphi'\|_{L^p}^p \,. \tag{3.19}$$

根据公式

$$\Delta_h^m(\psi_z\varphi')(x) = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \Delta_h^{m-j}\psi_z(x+jh)\Delta_h^j\varphi'(x),$$

我们有

$$\begin{aligned}\|\Delta_h^m\psi_z\varphi'\|_{L^p} \le C\Bigg(&\|\Delta_h^m\psi_z(\cdot+mh)\|_{L^p}\|\varphi'\|_{L^\infty}\\&+\sum_{j=1}^{m}\|\Delta_h^{m-j}\psi_z(\cdot+jh)\|_{L^\infty}\|\Delta_h^j\varphi'\|_{L^p(\mathrm{supp}(\Delta_h^{m-j}\psi_z(\cdot+jh)))}\Bigg).\end{aligned}\tag{3.20}$$

这里，由（3.7）和（3.10）可知

$$\|\Delta_h^j\varphi'\|_{L^p(\mathrm{supp}(\Delta_h^{m-j}\psi_z(\cdot+jh)))} \le \|\Delta_h^j\varphi'\|_{L^p(I_{a_z})} \le \|\Delta_h^j(C_\varphi f_{a_z})'\|_{L^p}.\tag{3.21}$$

结合（3.19）–（3.21），由（3.16）可得

$$\begin{aligned}\Big\|\Delta_h^m\varphi'\sum_{z\in\Omega_\ell^k}c_z\psi_z\Big\|_{L^p}^p &\le C\sum_{z\in\Omega_\ell^k}|c_z|^p\Bigg(\|\Delta_h^m\psi_z(\cdot+mh)\|_{L^p}^p\|\varphi'\|_{L^\infty}^p\\&\qquad+\sum_{j=1}^{m}\|\Delta_h^{m-j}\psi_z(\cdot+jh)\|_{L^\infty}^p\|\Delta_h^j(C_\varphi f_{a_z})'\|_{L^p}^p\Bigg)\\&\le C\Bigg(\|\{c_z\}_z\|_{\ell^p}^p\|\varphi'\|_{L^\infty}^p\|\Delta_h^m\psi\|_{L^p}^p\\&\qquad+\sum_{j=1}^{m}\|\Delta_h^{m-j}\psi\|_{L^\infty}^p\Big\|\Delta_h^j\sum_{z\in\Omega_\ell^k}\left(C_\varphi(|c_z|f_{a_z})\right)'\Big\|_{L^p}^p\Bigg).\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}\Big|\varphi'\sum_{z\in\Omega_\ell^k}c_z\psi_z\Big|_{B_{p,q}^{s-1}} &\le C\|\{c_z\}_z\|_{\ell^p}\|\varphi'\|_{L^\infty}\|\psi\|_{B_{p,q}^{s-1}}\\&\quad+\sum_{j=1}^{m}\|\psi\|_{B_{\infty,\infty}^{\frac{m-j}{m}(s-1)}}\Big\|\sum_{z\in\Omega_\ell^k}\left(C_\varphi(|c_z|f_{a_z})\right)'\Big\|_{B_{p,q}^{\frac{j}{m}(s-1)}}.\end{aligned}\tag{3.22}$$

综述（3.18）和（3.22），可得

$$\begin{aligned}\Big\|\varphi'\sum_{z\in\Omega_\ell^k}c_z\psi_z\Big\|_{B_{p,q}^{s-1}} &\le C\left(\|\{c_z\}_z\|_{\ell^p}\|\varphi'\|_{L^\infty}+\Big\|\sum_{z\in\Omega_\ell^k}\left(C_\varphi(|c_z|f_{a_z})\right)'\Big\|_{B_{p,q}^{s-1}}\right)\\&\le C\left(\|\{c_z\}_z\|_{\ell^p}\|\varphi'\|_{L^\infty}+\Big\|\sum_{z\in\Omega_\ell^k}C_\varphi(|c_z|f_{a_z})\Big\|_{B_{p,q}^{s}}\right).\end{aligned}$$

通过使用

$$\Big\|\sum_{z\in\Omega_\ell^k}|c_z|f_{a_z}\Big\|_{L^p}^p \le \sum_{z\in\Omega_\ell^k}|c_z|^p\|f_{a_z}\|_{L^p}^p$$

and

$$\Big\|\Delta_h^m\sum_{z\in\Omega_\ell^k}|c_z|f_{a_z}\Big\|_{L^p}^p \le \sum_{z\in\Omega_\ell^k}|c_z|^p\|\Delta_h^m f_{a_z}\|_{L^p}^p,$$

我们估计

$$\begin{aligned}\Big\| \sum_{z\in\Omega_\ell^k} |c_z| f_{a_z} \Big\|_{B^s_{p,q}} &\le \left(\sum_{z\in\Omega_\ell^k} |c_z|^p \|f_{a_z}\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad + \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} 2^{ksq} \sup_{|h|<2^{-k}} \left(\sum_{z\in\Omega_\ell^k} |c_z|^p \|\Delta_h^m f_{a_z}\|_{L^p}^p \right)^{\frac{q}{p}} \right\}^{\frac{1}{q}} \\ &\le \|\{c_z\}_z\|_{\ell^p} \|f\|_{L^p} + \|\{c_z\}_z\|_{\ell^p} |f|_{B^s_{p,q}} \\ &= \|\{c_z\}_z\|_{\ell^p} \|f\|_{B^s_{p,q}}.\end{aligned}$$

因此，$\sum_{z\in\Omega_\ell^k} |c_z| f_{a_z}$ 是$B^s_{p,q}$中的一个定义良好的元素。根据 C_φ在$B^s_{p,q}$上有界这一假设，我们得到

$$\begin{aligned}\Big\| \sum_{z\in\Omega_\ell^k} C_\varphi(|c_z| f_{a_z}) \Big\|_{B^s_{p,q}} &= \left\| C_\varphi \left(\sum_{z\in\Omega_\ell^k} |c_z| f_{a_z} \right) \right\|_{B^s_{p,q}} \\ &\le \|C_\varphi\|_{B^s_{p,q}\to B^s_{p,q}} \Big\| \sum_{z\in\Omega_\ell^k} |c_z| f_{a_z} \Big\|_{B^s_{p,q}}.\end{aligned}$$

结合上述估计，我们得出 (3.17)。引理 3.2 的证明至此完成。□

注 3.5。当 $p \le q$时，可以去掉引理 3.2 中的假设 (F)，证明也会更简单。事实上，假设 (F) 的作用主要是为了恰当地取有限划分 $\{\Omega_\ell^k\}_{\ell,k}$；但若使用定理 2.14 (i) 中关于 $p \le q$ 的刻画 $M(B^{s-1}_{p\,q,}) = B^{s-1}_{p\,q\ ,\mathrm{unif}}$，则无需取 $\{\Omega_\ell^k\}_{\ell,k}$ 。

注 3.6。引理 3.2 的结论对于 $0 < q \le p \le 1$ 和$s = 1+1/p$也成立，因为根据定理 2.16，这些参数对应的 $M(B^{s-1}_{p\,q,})$具有相同的刻画。

最后，我们证明如下结论：

引理 3.7. 设 $1 < p < \infty, 0 < q \le \infty$ 和 $s > 1+1/p$。假设 (F)，$U(\varphi^{-1}) < \infty$且 $\varphi' \in M(B^{s-1}_{p\,q,})$。则 C_φ 在 $B^{s-1}_{p\,q,}$上有界。

此引理的证明如下。结合命题 2.17 与 (2.8)，可知 φ 是利普希茨函数。因此，当 $1 + 1/p < s < 2$时，由定理 1.2 可知，算子 C_φ 在 $B^{s-1}_{p\,q,}$上有界。由此，情形 $1 + 1/p < s < 2$ 得证。接下来，为证明情形 $2 \le s \le 2 + 1/p$，我们使用以下结论：

引理 3.8. 设 $1 < p < \infty, 0 < q \le \infty$ 和 $1 \le s \le 1 + 1/p$。假设 (F),$U(\varphi^{-1}) < \infty$且 $\varphi' \in M(B^{\tilde{s}}_{p,q})$，其中某个 $\tilde{s} > 1/p$。则 C_φ在 $B^{s-1}_{p\,q,}$上有界。

证明。引理 3.8 可由情形 $1/p < s < 1$（定理 1.2）与引理 3.7 的情形 $1 + 1/p < s < 2$ 之间的插值论证得出。□

当 $2 \le s \le 2+1/p$ 时，显然 φ 满足引理 3.8 的假设。因此， C_φ 在 $B^{s-1}_{p\,q}$, 上有界。高阶情形 $s > 2+1/p$也可以用归纳法证明。由此，引理 3.7 得证。

定理1.4的证明。结合引理 3.1、3.2 和 3.7，即可证明定理1.4。□

3.2. 定理 1.5 的证明。结合以下两个引理即可证明定理 1.5。

引理 3.9。设 $s > 1$ 和 $0 < q \le \infty$。假设 C_φ 在 $B^s_{\infty,q}$上有界。那么$\varphi' \in M(B^{s-1}_{\infty\,,q})$。

引理 3.9 的证明。由定理 2.14 (iii)，只需证明 $\varphi' \in B^{s-1}_{\infty\,,q}$。令$s > 1$ 和 $m \in \mathbb{N}$ 满足 $m > s-1$。取 $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$，使得 $f(x) = x$ 在$[0,1]$,上，并定义 $f_a(x) := f(x-a)$，其中 $a \in \mathbb{R}$。于是，由于 C_φ 在 $B^s_{\infty,q}$上有界，我们有

$$\|(C_\varphi f_a)'\|_{L^\infty} \le C\|C_\varphi f_a\|_{B^s_{\infty,q}} \le C\|C_\varphi\|_{B^s_{\infty,q}\to B^s_{\infty,q}}\|f\|_{B^s_{\infty,q}},$$

其中常数 C 与 a无关。对于任意 $a \in \mathbb{R}$，我们还有

$$\|(C_\varphi f_a)'\|_{L^\infty} = \|(C_\varphi f')\cdot\varphi'\|_{L^\infty} \ge \|\varphi'\|_{L^\infty(\varphi^{-1}([a,a+1]))}.$$

由于 $\mathbb{R} = \bigcup_{a\in\mathbb{R}} \varphi^{-1}([a,a+1])$，我们得到

$$\|\varphi'\|_{L^\infty} \le C\|C_\varphi\|_{B^s_{\infty,q}\to B^s_{\infty,q}}.$$

接下来，取 $g \in B^s_{\infty,\ q} \cap C^\infty$ 使得

$$g'(x) = (-1)^k \quad \text{for } x \in [2(4k-1)m, 2(4k+1)m]$$

对于 $k \in \mathbb{Z}$。令

$$I_m := \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [2(4k-1)m+m, 2(4k+1)m-m].$$

于是我们有

$$\sup_{x\in\varphi^{-1}(I_m)} |\Delta_h^m \varphi'(x)| = \sup_{x\in\varphi^{-1}(I_m)} |\Delta_h^m (C_\varphi g)'(x)|$$

对于 $|h| \le 1$。因此,

$$\begin{aligned}
&\int_{|h|\le 1} \sup_{x\in\varphi^{-1}(I_m)} |\Delta_h^m \varphi'(x)|^q \frac{dh}{|h|^{1+(s-1)q}} \\
&= \int_{|h|\le 1} \sup_{x\in\varphi^{-1}(I_m)} |\Delta_h^m (C_\varphi g)'(x)|^q \frac{dh}{|h|^{1+sq}} \\
&= |(C_\varphi g)'|^q_{B^{s-1}_{\infty,q}} \le \|C_\varphi g\|^q_{B^s_{\infty,q}} \le \|C_\varphi\|^q_{B^s_{\infty,q}\to B^s_{\infty,q}} \|g\|^q_{B^s_{\infty,q}}.
\end{aligned}$$

同样，如果我们将 g 平移 $2m$、 $4m$和 $6m$ ，并按上述方法论证，便可得出

$$\int_{|h|\le 1} \sup_{x\in\varphi^{-1}(I_m+2\ell m)} |\Delta_h^m \varphi'(x)|^q \frac{dh}{|h|^{1+(s-1)q}} \le \|C_\varphi\|^q_{B^s_{\infty,q}\to B^s_{\infty,q}} \|g\|^q_{B^s_{\infty,q}}$$

对于 $\ell = 1$，2、3。由于

$$\mathbb{R} = \bigcup_{\ell=0}^{3} (I_m + 2\ell m), \quad \text{i.e., } \mathbb{R} = \bigcup_{\ell=0}^{3} \varphi^{-1}(I_m + 2\ell m),$$

我们有

$$\begin{aligned}|\varphi'|^q_{B^{s-1}_{\infty,q}} &= \int_{|h|\le 1} \sup_{x\in\mathbb{R}} |\Delta_h^m \varphi'(x)|^q \frac{dh}{|h|^{1+(s-1)q}} \\ &\le \sum_{\ell=0}^{3} \int_{|h|\le 1} \sup_{x\in\varphi^{-1}(I_m+2\ell m)} |\Delta_h^m \varphi'(x)|^q \frac{dh}{|h|^{1+(s-1)q}} \\ &\le 4\|C_\varphi\|^q_{B^s_{\infty,q}\to B^s_{\infty,q}} \|g\|^q_{B^s_{\infty,q}}.\end{aligned}$$

引理 3.9 的证明至此完成。 □

引理 3.10. 设 $s>1$ 和 $0<q\le\infty$。假设 $\varphi'\in M(B^{s-1}_{\infty,\,q})$。那么 C_φ 在 $B^s_{\infty,\,q}$ 上有界。

引理 3.10 的证明。由命题 2.17 可知，φ 是利普希茨函数。根据定理 2.11 和推论 2.12，我们得到 C_φ 在 $B^{s-1}_{\infty,\,q}$ 上有界，其中 $1<s<2$。因此，证明可通过与引理 3.7 类似的归纳论证完成。 □

4. The case of Sobolev spaces

本节我们介绍索伯列夫空间 H^s_p 上的复合算子 C_φ，其定义如下:

$$H^s_p := \left\{ f\in\mathcal{S}' \,\middle|\, \|f\|_{H^s_p} = \|\mathcal{F}^{-1}[(1+|\xi|^2)^{s/2}\mathcal{F}f]\|_{L^p} < \infty \right\}$$

对于 $s\in\mathbb{R}$ 和 $p>1$。与 $B^s_{p,\,q}$的情形类似，我们有如下 :

定理 4.1. 设 $1<p<\infty$ 和 $s>1+1/p$。假设 **(H)** 成立。那么，C_φ 在 H^s_p上有界，当且仅当 $U(\varphi)<\infty$且 $\varphi'\in M(H^{s-1}_p)$。

证明可通过与定理1.4类似的论证，并利用 H^s_p 的差分刻画得出

$$\|f\|_{H^s_p} \sim \|f\|_{L^p} + \left\| \left(\int_0^1 t^{-2s} \left(\frac{1}{t}\int_{|h|\le t} |\Delta_h^m f(x)|\,dh \right)^2 \frac{dt}{t} \right)^{\frac12} \right\|_{L^p}, \tag{4.1}$$

以及以下两个引理。

引理 4.2. 设 $1<p<\infty$ 和 $1/p<s<1$。假设 **(H)** 成立。那么，如果 φ 是利普希茨的，且 $U(\varphi)<\infty$，则 C_φ 在 H^s_p 上有界。

证明. 证明与 [2, 第 3.2 和 3.3] 小节类似。与引理 2.6 的证明类似，可以证明

$$\|C_\varphi f\|_{L^p} \le CU(\varphi)\|f\|_{H^s_p}$$

对于任意 $f\in H^s_p$，以及某个常数 $C>0$。对于 (4.1) 中的第二项，我们采用复插值

$$[\mathrm{BMO}, \dot{W}^1_{p_0}]_{\theta_1} = \dot{H}^{s_0}_p, \quad s_0=\theta_1, \quad \frac{1}{p}=\frac{\theta_1}{p_0}, \quad 0<\theta_1<1$$

对于 $1<p_0<\infty$，此外，复插值

$$[\dot{H}^{s_0}_p, \dot{W}^1_p]_{\theta_2} = \dot{H}^s_p, \quad s=(1-\theta_2)s_0+\theta_2, \quad 0<\theta_2<1$$

（关于复插值，参见 [6, 推论 8.3] ）。将这些插值结果与关于 C_φ 在 BMO 上的有界性（[12, 定理]）以及在 $\dot{W}_p^1$ 上的有界性（[1,定理 4]）的结果结合起来，并令 p_0 趋近于 1，我们便可得出：若 φ 满足利普希茨条件和 (H)，则对于任意 $1 < p < \infty$ 和 $1/p < s < 1$， C_φ 都是从 H_p^s 到齐次Sobolev空间 H_p^s 的有界算子。证明完成。□

引理4.3. 设 $1 < p < \infty$和 $s > 1/p$。则 $M(H_p^s) = H_{p,\ \mathrm{unif}}^s$。这里，空间$H_{p,\ \mathrm{unif}}^s$ 的定义与 (2.7) 类似。

引理4.3是一个著名结果，见 [25, 第二章第二节中的推论] （另见[13,第 1] 节中的 (1.2) 或 [23, 定理 2.5]）。

注 4.4. 定理 4.1涵盖了索伯列夫空间的先前结果 W_p^k其中 $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ 在 [2, 注 1.14], 中提及，因为 $H_p^k = W_p^k$ 对于 $k \in \mathbb{N}$ 和$1 < p < \infty$。

注 4.5. 我们在定理 4.1和引理 4.2中施加假设 (H)，因为要使用 [12,定理]关于 BMO 有界性的结果，需要 φ 的单调性。

References

[1] G. Bourdaud, 《Besov空间中的变量替换》II，数学论坛 12（2000），第5期，545–563。[2] G. Bourdaud 和 W. Sickel, 《Besov空间中的变量替换》，数学新闻 198（1999），19–39。[3] D. Chae, 《临界 Triebel-Lizorkin 空间中的 Euler 方程》，Arch. Ration. Mech. Anal. 170（2003），第3期，185–210。[4] R. A. DeVore 和 R. C. Sharpley, 《$\mathbb{R}^d$上的区域中的 Besov 空间》，美国数学会汇刊 335（1993），第2期，843–864。[5] L. C. F. Ferreira 和 D. F. Machado, 《非齐次不可压Euler方程在 Besov-Herz空间中的适定性》，arXiv:2301.07765v1（2023年）。[6] M. Frazier 和 B. Jawerth, 《分布空间的离散变换与分解》，J. Funct. Anal. 93（1990）。[7] N. Hatano、M. Ikeda、I. Ishikawa 和 Y. Sawano, 《复合算子在 Morrey空间和弱Morrey空间上的有界性》，J. Inequal. Appl. 198（2021），19–39。[8] S. Hencl、L. Kleprl´ık 和 J. Mal´y, 《复合算子与 Sobolev-Lorentz空间》 $WL^{n,\,q}$，数学研究 221（2014），197–208。[9] M. Ikeda、I. Ishikawa 和 Y. Sawano, 《具有解析正定函数的再生核Hilbert空间上的复合算子的有界性》，数学分析与应用杂志 511（2022），126048。[10] M. Ikeda、I. Ishikawa 和 C. Schlosser, 《再生核巴拿赫空间上的 Koopman 算子与 Perron-Frobenius算子》，Chaos 32（2022），123143。[11] I. Ishikawa, 《函数拟Banach空间上的有界加权复合算子与动力系统的稳定性》，数学进展 424（2023），109048。[12] P. W. Jones, 《保持 BMO 的直线同胚》，Arkiv Math. 21（1983）。[13] H. Koch 和 W. Sickel, 《零光滑度 Besov 空间与连续函数空间的逐点乘子》，Rev. Mat. Iberoamericana 18（2002）。[14] H. Koch、P. Koskela、E. Saksman 和 T. Soto, 《尺度不变Besov空间上的有界复合》，J. Funct. Anal. 266（2014），第5期，2765–2788。[15] B. O. Koopman, 《Hilbert空间中的Hamilton系统与变换》，Proc. Natl. Acad. Sci. USA 17（1931），第5期，315318。[16] P. Koskela、J. Xiao、Y. R.-Y. Zhang 和 Y. Zhou, 《关于 Q- 空间的拟共形复合问题》，J. Eur. Math. Soc. 19 （ 2017 ），第 4 期，1159–1187。

[17]V. G. Maz'ya 和 T. O. Shaposhnikova，《Sobolev 乘子理论》，数学科学基础原理丛书 [《数学科学基础原理》], 第337卷，Springer-Verlag，柏林，2009年。附有对微分算子和积分算子的应用。[18] A. Menovschikov 和 A. Ukhlov，《Hardy-Sobolev 空间上的复合算子与 BMO-拟共形映射》，数学科学杂志 258（2021），第3期，313–325。[19] V. K. Nguyen 和 W. Sickel，《关于 Jaak Peetre 提出的一个 Besov 空间逐点乘子问题》，数学研究 243（2018），第2期，207–231。[20] M. Oliva 和 M. Prats，《Sobolev 空间中拟共形映射复合的尖锐界》，数学分析与应用杂志 451（2017），第2期，1026–1044。[21] D. Y. P. Koskela 和 Y. Zhou，《Besov 空间、Triebel-Lizorkin 空间及拟共形映射的逐点刻画》，数学进展 226（2011）。[22] Y. Sawano，《Besov 空间理论》，第56卷，Springer，2018年。[23] W. Sickel，《Lizorkin-Triebel 空间的逐点乘子》，Maz'ya 纪念文集，1999年，第295–321页。[24] R. K. Singh，《有理函数诱导的复合算子》，美国数学会会刊 59（1976），第2期，329–333。[25] R. S. Strichartz，《分数阶 Sobolev 空间上的乘子》，数学与力学杂志 16（1967）。[26] H. Triebel，《函数空间理论》，数学专著，第78卷，Birkh¨auser Verlag，巴塞尔，1983年。[27] ———，《函数空间理论 II》，数学专著，Birkh¨auser Verlag，巴塞尔，1992年。[28] ———，《函数空间理论 III》，数学专著，第100卷，Birkh¨auser Verlag，巴塞尔，2006年。[29] S. K. Vodop′yanov，《齐性群的映射与函数空间嵌入》，西伯利亚数学杂志 30（1989），第5期，25–41，215（俄文）。[30] ———，《Sobolev 空间上的复合算子》，《复分析与动力系统 II》，为纪念 Lawrence Zalcman 教授六十岁生日而举行的第二届会议论文集（以色列纳哈里亚，2003年），当代数学，第382卷（Agranovsky M. 等编），美国数学会，普罗维登斯，罗得岛；巴伊兰大学，拉马特甘，2005年，第401–415页。[31] J. Xiao，《尺度不变 Besov 空间或 Ess ´en-Janson-Peng-Xiao 空间中的输运方程》，微分方程杂志 266（2019），第11期，7124–7151。[32] D. Yang、W. Yuan 和 Y. Zhou，《Triebel-Lizorkin 型空间上拟共形复合算子的尖锐有界性》，几何分析杂志 27（2017），第2期，1548–1588。

(M. Ikeda) Center for Advanced Intelligence Project, RIKEN 1-4-1, Nihonbashi,Chuo-ku, Tokyo 103-0027, Japan/ Faculty of Science and Technology, Keio Univer-sity, 3-14-1 Hiyoshi, Kohoku-ku, Yokohama, 223-8522, Japan.电子邮箱: masahiro.ikeda@riken.jp/masahiro.ikeda@keio.jp (I. Ishikawa) Center for Data Science, Ehime University, 3, Bunkyo-cho, Matsuyama,Ehime, 790-8577, Japan/ Center for Advanced Intelligence Project, RIKEN 1-4-1,Nihonbashi, Chuo-ku, Tokyo 103-0027, Japan.电子邮箱：ishikawa.isao.zx@ehime-u.ac.jp (K. Taniguchi) Advanced Institute for Materials Research, Tohoku University, 2-1-1 Katahira, Aoba-ku, Sendai, 980-8577, Japan.电子邮箱: koichi.taniguchi.b7@tohoku.ac.jp