arXiv:2302.00818v1 [math.AP] 2 Feb 2023

Rd+1 中近似超球形区域上斯捷克洛夫特征值的解析性

CHEE HAN TAN 和 ROBERT VIATOR

Abstract. 我们研究维数大于 3 的近似超球形区域上的狄利克雷-诺伊曼算子（DNO）。将这类区域视为球的扰动后，我们证明，对于固定的扰动函数，DNO 关于形状扰动参数解析依赖。因此，我们得出斯捷克洛夫特征值也关于形状扰动参数解析依赖。为获得这些结果，我们采用 Nicholls and Nigam（2004年）以及 Viator and Osting（2020年）的方法：将扰动区域上的拉普拉斯—狄利克雷问题变换为球上一个更复杂、依赖参数的方程，然后对变换后的 DNO 的诺伊曼展开进行几何界定。这些结果将 Viator and Osting（2020年）关于维数 2 和 3 的工作推广到了更高维数。

1. Introduction

对于任意整数 $d \geq 3$，若 $\Omega_\varepsilon \subset \mathbb{R}^{d+1}$ 是单位（$d+1$）维球 B 在 $\mathbb{R}^{d+1}$中的一个小扰动，则称其为近超球形区域，具体由下式给出

$$\Omega_\varepsilon = \left\{ (r, \hat{\theta}) : 0 \leq r \leq 1 + \varepsilon\rho(\hat{\theta}),\, \hat{\theta} \in S^d \right\}.$$

这里，$\rho \in C^{s+2}(S^d)$ 是某个 $s \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$的区域扰动函数，$S^d$是 d中单位 $\mathbb{R}^{d+1}$维球面，而 $\varepsilon \geq 0$ 是扰动参数，我们假定其绝对值很小。

对于固定的 $\rho \in C^{s+2}(S^d)$，我们考虑近超球形区域 Ω_ε上的斯捷克洛夫特征值问题：

$$\begin{aligned} \Delta u_\varepsilon &= 0 && \text{in } \Omega_\varepsilon, \\ \partial_{\mathbf{n}_{\rho,\varepsilon}} u_\varepsilon &= \sigma_\varepsilon u_\varepsilon && \text{on } \partial\Omega_\varepsilon, \end{aligned} \tag{1}$$

其中 $\partial_{\mathbf{n}_{\rho,\,\varepsilon}} = \mathbf{n}_{\rho,\,\varepsilon} \cdot \nabla$ 是扰动区域 $\partial\Omega_\varepsilon$ 的边界 $_\varepsilon\Omega$ 上的单位外法向导数。众所周知，[GP17] 斯捷克洛夫谱是离散的、实的且非负的，我们将其按非递减顺序排列

$$0 = \sigma_0(\Omega_\varepsilon) < \sigma_1(\Omega_\varepsilon) \leq \sigma_2(\Omega_\varepsilon) \leq \dots,$$

趋于无穷大。斯捷克洛夫谱与狄利克雷-诺伊曼算子（DNO）的谱相同，$G_{\rho,\varepsilon}$：$H^{s+\frac{1}{2}}(\partial\Omega_\varepsilon)$ $\to H^{s-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_\varepsilon)$，其定义为

$$\xi \mapsto G_{\rho,\varepsilon}\xi = \mathbf{n}_{\rho,\varepsilon} \cdot \nabla v_\varepsilon|_{r=1+\varepsilon\rho},$$

Department of Mathematics, Wake Forest University, Winston-Salem, NC
Department of Mathematics and Statistics, Swarthmore College, Swarthmore, PA*E-mail addresses*: tanch@wfu.edu, rviator1@swarthmore.edu。
Date：2023年2月3日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 26 E05, 35C20, 35P05, 41A58。*Key words and phrases.* 狄利克雷到诺伊曼算子、斯捷克洛夫特征值、扰动理论、超球坐标。

其中 v_ε 是 ξ 在 Ω_ε上的调和延拓，满足

$$\begin{aligned} \Delta v_\varepsilon &= 0 \qquad \text{in } \Omega_\varepsilon, \\ v_\varepsilon &= \xi \qquad \text{on } \partial\Omega_\varepsilon. \end{aligned} \tag{2}$$

在先前的工作中，[VO20]，已证明 σ_ε 关于扰动参数 $\varepsilon > 0$ 对于近圆形区域（$d = 1$）和近球形区域（$d = 2$）是解析的。本文旨在证明，对于 $d \geq 3$，同样的结论也成立。

定理 1.1。设 $d \geq 3$ 且 $s \in \mathbb{N}$。若 $\rho \in C^{s+2}(S^d)$，则狄利克雷-诺伊曼算子，$G_{\rho,\,\varepsilon}$： $H^{s+\frac{3}{2}}(\partial\Omega_\varepsilon) \to H^{s+\frac{1}{2}}(\partial\Omega_\varepsilon)$，关于扰动参数 ε是解析的。更确切地说，若$\rho \in C^{s+2}(S^d)$，则存在一个诺伊曼级数

$$G_{\rho,\varepsilon}(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n G_{\rho,n}(\xi)$$

该级数作为从 $H^{s+\frac{3}{2}}(S^d)$ 到 $H^{s+\frac{1}{2}}(S^d)$ 的算子强收敛。也就是说，存在常数$K_1 = K_1(B, d, s) > 0$ 和 $\alpha = \alpha(d) > 1$ 使得

$$\|G_{\rho,n}\xi\|_{H^{s+\frac{1}{2}}(S^d)} \leq K_1 \|\xi\|_{H^{s+\frac{3}{2}}(S^d)} A^n$$

对 $A > \alpha \max\{2K_0C_0\,|\rho|_{C^{s+2}}, M\,|\rho|_{C^{s+2}}\}$。

我们同时对所有 $d \geq 3$ 证明定理 1.1：证明见第 5 节。证明遵循 [NN04; VO20] 的策略。我们首先证明调和延拓的解析性，即对于固定的 $\xi : \partial\Omega_\varepsilon \to \mathbb{C}$，方程 (2) 的解 v_ε 关于 $\varepsilon > 0$ 是解析的；见第 4 节。利用这一点以及 Dirichlet-to-Neumann 算子的递归公式 $G_{\rho,\varepsilon}$，我们进而证明 $G_{\rho,\varepsilon}$ 也关于 $\varepsilon > 0$ 解析，从而证明定理 1.1。

下一个推论由 [Kat13] 和定理 1.1得出，证明了 ε 对斯捷克洛夫特征值 σ_ε （1）的解析依赖性，且其收敛圆盘与定理 1.1中的相同：

推论 1.2. 斯捷克洛夫特征值 σ_ε 的(1)由一个或多个解析函数的分支构成，这些函数在 $\varepsilon = 0$附近至多具有代数奇点。相应的特征投影也具有同样的性质。

本文旨在为 $\mathbb{R}^{d+1}$ 中 $d \geq 3$的近似超球形区域的斯捷克洛夫特征值渐近研究奠定基础。渐近与微扰方法已在二维和三维斯捷克洛夫形状优化研究中取得了有意义的成果 [VO18；VO22]。在相关研究中，作者从 $\mathbb{R}^2$中的近圆形区域，或 $\mathbb{R}^3$ 中的近球形区域出发，并利用[VO20], 中证明的解析性结果，证明对于一大类斯捷克洛夫特征值，球并非形状优化体；同时还得到了一组由球局部优化的斯捷克洛夫特征值。本文为未来在高于三维的空间中，对近似超球形区域采用类似技术开展研究奠定了基础。

2. Laplacian in Hyperspherical Coordinates in $\mathbb{R}^{d+1}$

给定 $d \geq 1$，令 $(x_1, x_2, \ldots, x_{d+1})$ 表示 $(d + 1)$ 维笛卡尔坐标。我们定义 $(d + 1)$ 维超球坐标 $(r, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_d)$ 如下：

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \ldots \sin\theta_d, \\ x_2 &= r\sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \ldots \sin\theta_d, \\ x_j &= r\cos\theta_{j-1} \sin\theta_j \sin\theta_{j+1} \ldots \sin\theta_d, \quad j = 3, 4, \ldots, d, \\ x_{d+1} &= r\cos\theta_d, \end{aligned}$$

其中 $r \geq 0$ 是 $(d+1)$ 维球体的半径，$0 \leq \theta_1 \leq 2\pi$ 是方位角，而 $0 \leq \theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_d \leq \pi$ 是倾角。特别地，当 $d = 1$ 时，它们对应于极坐标 $(x_1, x_2) = (r\cos\theta_1, r\sin\theta_1)$；当 $d = 2$ 时，对应于球坐标 $(x_1, x_2, x_3) = (r\cos\theta_1 \sin\theta_2, r\sin\theta_1 \sin\theta_2, r\cos\theta_2)$。

超球坐标是 $\mathbb{R}^{d+1}$ 中的一种正交曲线坐标系。因此，相应的度量张量 g 为对角矩阵，其分量为

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^{d+1} \frac{\partial x_k}{\partial \theta_i} \frac{\partial x_k}{\partial \theta_j} = h_i^2 \delta_{ij}, \quad 0 \leq i, j \leq d,$$

其中 $\theta_0 = r$，尺度因子定义为 $h_0 = 1$，且对于 $i = 1$、2、……、d，有 $h_i = r\prod_{k=i+1}^{d} \sin\theta_k$；后者包含空积，结果为 $h_d = r$。超球坐标中的体积元 dV 表示为

$$dV = \sqrt{|\det g|}\, dr\, d\theta_1 \ldots d\theta_d = \left(r^d \prod_{k=2}^{d} \sin^{k-1}\theta_k \right) dr\, d\theta_1 \ldots d\theta_d. \tag{3}$$

为方便记号，对于 $i = 1$、2、……、d，我们引入新变量 $\eta_i = h_i/r$，并令 $h = \sqrt{|\det g|}$。超球坐标中的梯度算子定义为

$$\nabla = \sum_{i=0}^{d} \frac{1}{h_i} \frac{\partial}{\partial \theta_i} \hat{\boldsymbol{\theta}}_i = \frac{\partial}{\partial r}\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{d} \frac{1}{\eta_i} \frac{\partial}{\partial \theta_i}\hat{\boldsymbol{\theta}}_i = \frac{\partial}{\partial r}\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r}\nabla_{S^d}, \tag{4}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{r}}$、$\hat{\boldsymbol{\theta}}_1$、$\hat{\boldsymbol{\theta}}_2$、……、$\hat{\boldsymbol{\theta}}_d$ 为正交归一超球基向量。拉普拉斯算子可用度量张量表示为

$$\Delta = \frac{1}{h} \sum_{i=0}^{d} \frac{\partial}{\partial \theta_i} \left(\frac{h}{h_i^2} \frac{\partial}{\partial \theta_i} \right). \tag{5}$$

由于 h_i 与 θ_i 无关，且 $h = h_0 h_1 \ldots h_d$ 在超球坐标中可分离，因此可简化为

$$\Delta = \sum_{i=0}^{d} \frac{1}{h_i^2} \cdot \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial \theta_i} \left(h \frac{\partial}{\partial \theta_i} \right) = \frac{1}{r^d} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^d \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{S^d},$$

其中 Δ_{S^d} 是单位 d 球面上的球面拉普拉斯算子 S^d，其定义为

$$\Delta_{S^d} = \sum_{i=1}^{d} \frac{1}{\eta_i^2 \sin^{i-1}\theta_i} \frac{\partial}{\partial \theta_i} \left(\sin^{i-1}\theta_i \frac{\partial}{\partial \theta_i} \right). \tag{6}$$

对于 $d = 2$，我们得到球坐标中的拉普拉斯算子 $(r,\ \theta_1,\ \theta_2) = (r,\ \phi,\ \theta)$：

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right].$$

3. Change of Variables

为方便记号，对于 $i = 1$、2、……、d，令 ∂_r 和 ∂_i 分别表示对 r 和 θ_i 的偏导数。我们首先考虑将函数 $\hat{\xi}(\theta)$ 从 $\partial\Omega_\varepsilon$ 调和延拓至 Ω_ε 的问题：

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^d}\partial_r \left(r^d \partial_r v \right) + \frac{1}{r^2}\Delta_{S^d} v &= 0 \qquad && \text{in } \Omega_\varepsilon, \\ v &= \xi \qquad && \text{on } \partial\Omega_\varepsilon. \end{aligned} \tag{7}$$

根据 [NR01；NN04；VO20], 我们引入变量替换

$$(r',\theta')=\left(\frac{r}{1+\varepsilon\rho(\hat{\theta})},\hat{\theta}\right) \tag{8}$$

将 Ω_ε 映射到单位（$d+1$）球 $B:=\Omega_0$。新坐标下的偏导数为

$$\partial_r=\frac{1}{1+\varepsilon\rho(\theta')}\partial_{r'},\qquad \partial_i=\partial_{i'}-\frac{\varepsilon r'\partial_{i'}\rho(\theta')}{1+\varepsilon\rho(\theta')}\partial_{r'},\quad i=1,2,\ldots,d.$$

调和延拓 v 变换为

$$u_\varepsilon(r',\theta')=v\left((1+\varepsilon\rho(\theta'))r',\theta'\right).$$

拉普拉斯算子的径向分量变换为

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^d}\partial_r\left(r^d\partial_r v\right)&=\frac{1}{(1+\varepsilon\rho)^d(r')^d}\cdot\frac{1}{1+\varepsilon\rho}\partial_{r'}\left((1+\varepsilon\rho)^d(r')^d\cdot\frac{1}{1+\varepsilon\rho}\partial_{r'}u_\varepsilon\right)\\&=\frac{1}{(1+\varepsilon\rho)^2(r')^d}\partial_{r'}\left((r')^d\partial_{r'}u_\varepsilon\right).\end{aligned}$$

参见（6），拉普拉斯算子的角向分量变换为

$$\begin{aligned}\partial_i\left(\sin^{i-1}\theta_i\,\partial_i v\right)&=\partial_{i'}\left(\sin^{i-1}\theta_i'\,\partial_{i'}u_\varepsilon\right)-\frac{\varepsilon r'\sin^{i-1}\theta_i'\,\partial_{i'}\rho}{1+\varepsilon\rho}\partial_{r'}\partial_{i'}u_\varepsilon\\&\quad-\varepsilon r'\partial_{i'}\left(\frac{\sin^{i-1}\theta_i'\,\partial_{i'}\rho}{1+\varepsilon\rho}\partial_{r'}u_\varepsilon\right)+\frac{\varepsilon^2\sin^{i-1}\theta_i'\,(\partial_{i'}\rho)^2}{(1+\varepsilon\rho)^2}r'\partial_{r'}\left(r'\partial_{r'}u_\varepsilon\right)\\&=\partial_{i'}\left(\sin^{i-1}\theta_i'\,\partial_{i'}u_\varepsilon\right)-\frac{\varepsilon r'\sin^{i-1}\theta_i'\,\partial_{i'}\rho}{1+\varepsilon\rho}\partial_{r'}\partial_{i'}u_\varepsilon\\&\quad-\varepsilon r'\left[\frac{\sin^{i-1}\theta_i'\,\partial_{i'}\rho}{1+\varepsilon\rho}\partial_{i'}\partial_{r'}u_\varepsilon+\left[\frac{\partial_{i'}\left(\sin^{i-1}\theta_i'\,\partial_{i'}\rho\right)}{1+\varepsilon\rho}-\frac{\varepsilon\sin^{i-1}\theta_i'\,(\partial_{i'}\rho)^2}{(1+\varepsilon\rho)^2}\right]\partial_{r'}u_\varepsilon\right]\\&\quad+\frac{\varepsilon^2\sin^{i-1}\theta_i'\,(\partial_{i'}\rho)^2}{(1+\varepsilon\rho)^2}\left[(r')^2\partial_{r'}^2u_\varepsilon+r'\partial_{r'}u_\varepsilon\right]\\&=\partial_{i'}\left(\sin^{i-1}\theta_i'\,\partial_{i'}u_\varepsilon\right)-\frac{\varepsilon r'\partial_{i'}\left(\sin^{i-1}\theta_i'\,\partial_{i'}\rho\right)}{1+\varepsilon\rho}\partial_{r'}u_\varepsilon\\&\quad-\frac{2\varepsilon r'\sin^{i-1}\theta_i'\,\partial_{i'}\rho}{1+\varepsilon\rho}\partial_{i'}\partial_{r'}u_\varepsilon+\frac{\varepsilon^2(r')^2\sin^{i-1}\theta_i'\,(\partial_{i'}\rho)^2}{(1+\varepsilon\rho)^2}\left[\partial_{r'}^2u_\varepsilon+\frac{2}{r'}\partial_{r'}u_\varepsilon\right].\end{aligned}$$

将变换后的径向分量和角向分量代入拉普拉斯方程（7），将 $r^{-2}=(r')^{-2}(1+\varepsilon\rho)^{-2}$ 代入 Δ_{S^d}, 乘以 $(1+\varepsilon\rho)^4$, 并去掉变换后变量上的撇号，可得

$$\begin{aligned}0&=(1+\varepsilon\rho)^4\Delta v\\&=(1+\varepsilon\rho)^2\Delta u_\varepsilon-\frac{\varepsilon(1+\varepsilon\rho)}{r}(\Delta_{S^d}\rho)\partial_r u_\varepsilon-\frac{2\varepsilon(1+\varepsilon\rho)}{r}\sum_{i=1}^d\frac{\partial_i\rho}{\eta_i^2}\partial_i\partial_r u_\varepsilon\\&\quad+\varepsilon^2\sum_{i=1}^d\frac{(\partial_i\rho)^2}{\eta_i^2}\left[\partial_r^2u_\varepsilon+\frac{2}{r}\partial_r u_\varepsilon\right].\end{aligned}$$

最后，合并 ε 和 ε^2 阶的各项，可知 u_ε 满足以下变换后的调和延拓问题：

$$
\begin{aligned}
\Delta u_\varepsilon &= \varepsilon L_1 u_\varepsilon + \varepsilon^2 L_2 u_\varepsilon && \text{in } B,\\
u_\varepsilon(1,\theta) &= \xi(\theta) && \text{on } S^d,
\end{aligned} \tag{9}
$$

其中 $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_d)$ 和

$$
\begin{aligned}
L_1 u_\varepsilon &= -2\rho \Delta u_\varepsilon + (\Delta_{S^d}\rho) r^{-1}\partial_r u_\varepsilon + 2\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial_i \rho}{\eta_i^2} r^{-1}\partial_i \partial_r u_\varepsilon,\\
L_2 u_\varepsilon &= -\rho^2 \Delta u_\varepsilon + (\rho \Delta_{S^d}\rho) r^{-1}\partial_r u_\varepsilon + 2\rho \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial_i \rho}{\eta_i^2} r^{-1}\partial_i \partial_r u_\varepsilon - \sum_{i=1}^{d} \frac{(\partial_i \rho)^2}{\eta_i^2}\left[\partial_r^2 u_\varepsilon + 2r^{-1}\partial_r u_\varepsilon\right]\\
&= \rho^2 \Delta u_\varepsilon + \rho L_1 u_\varepsilon - \sum_{i=1}^{d} \frac{(\partial_i \rho)^2}{\eta_i^2}\left[\partial_r^2 u_\varepsilon + 2r^{-1}\partial_r u_\varepsilon\right].
\end{aligned}
$$

4. Analyticity of Harmonic Extension

本节将证明， u_ε 变换后的调和延拓问题（9）的解关于 ε 是解析的。我们首先将 u_ε 形式展开为关于 ε的幂级数：

$$
u_\varepsilon(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r,\theta)\varepsilon^n. \tag{10}
$$

将（10）代入（9），并收集 ε 的各次幂项，我们看到 u_0 满足

$$
\begin{aligned}
\Delta u_0 &= 0 && \text{in } B,\\
u_0(1,\theta) &= \xi(\theta) && \text{在 } S^d \text{ 上},
\end{aligned} \tag{11}
$$

并且当 $n = 1,2,\ldots$ 时， u_n 满足以下递归公式：

$$
\begin{aligned}
\Delta u_n &= L_1 u_{n-1} + L_2 u_{n-2} && \text{in } B,\\
u_n(1,\theta) &= 0 && \text{on } S^d.
\end{aligned} \tag{12}
$$

我们的第一个引理为具有狄利克雷边界数据的泊松方程建立了一个椭圆估计，这与 [VO20，引理 31]类似。现在我们先回顾一些关于超球谐函数的基本事实，再陈述引理 4.1；更多详情请参见 [Ave12] 。

对于 $\ell = 0$， 1， 2， ....., 在 S^d 上， ℓ 阶超球谐函数是 ℓ 次齐次调和多项式在 S^d 上的限制。令 H_ℓ^d 表示 S^d 上所有 ℓ 阶超球谐函数构成的空间。空间 H_ℓ^d 关于 S^d 上的 L^2 内积有一组标准正交基 $\{Y_\ell^m(\theta)\}_{m=1}^{N(d,\ell)}$ ，其中 $N(d,\ell)$ 是 H_ℓ^d 的维数。众所周知，每个 Y_ℓ^m 都是 $-\Delta_{S^d}$ 的特征函数，其对应特征值为 $\ell(\ell+d-1)$，即：

$$
-\Delta_{S^d} Y_\ell^m(\theta) = \ell(\ell+d-1) Y_\ell^m(\theta), \quad 1 \le m \le N(d,\ell). \tag{13}
$$

直接计算 利用格林恒等式，并结合（13），可得以下积分恒等式 ：

$$
\int_{S^d} |\nabla_{S^d} Y_\ell^m(\theta)|^2 \, d\sigma_d(\theta) = \int_{S^d} \ell(\ell+d-1)\, |Y_\ell^m(\theta)|^2 \, d\sigma_d(\theta), \tag{14}
$$

其中 $d\sigma_d$ 是 S^d 在超球坐标下的面积元，满足关系式 $dV = d\sigma_d(\theta)\, r^d dr$；见（3）。$\bigoplus_\ell^d \mathbf{H}$的和在 $L^2(S^d)$ 中稠密，因此任意 $\xi \in L^2(S^d)$ 都可以展开为

超球谐函数：

$$\xi(\theta)=\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{N(d,\ell)}\hat{\xi}(\ell,m)Y_\ell^m(\theta),\quad \hat{\xi}(\ell,m):=\int_{S^d}\xi(\theta)\overline{Y_\ell^m(\theta)}\,d\sigma_d(\theta). \tag{15}$$

这引出了阶数为 $s\geq 0$ 的索博列夫空间 $H^s(S^d)$ 的定义：它是 $L^2(S^d)$ 中配备范数

$$\|\xi\|_{H^s(S^d)}^2:=\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{N(d,\ell)}(1+\ell(\ell+d-1))^s\left|\hat{\xi}(\ell,m)\right|^2.$$

引理 4.1. 给定 $d\geq 3$ 和 $s\in\mathbb{N}$，存在一个常数 $K_0>0$，使得对于任意 $F\in H^{s-1}(B)$ 和 $\xi\in H^{s+\frac{1}{2}}(S^d)$，方程的解

$$\begin{aligned}\Delta w(r,\theta)&=F(r,\theta) &&\text{in } B,\\ w(1,\theta)&=\xi(\theta) &&\text{on } S^d,\end{aligned}$$

满足以下估计：

$$\|w\|_{H^{s+1}(B)}\leq K_0\left(\|F\|_{H^{s-1}(B)}+\|\xi\|_{H^{s+\frac{1}{2}}(S^d)}\right).$$

证明。我们仅证明 $s=0$ 的情形，因为 $s=1,\ 2,\ \ldots\ldots$ 的证明类似。由于$\xi\in H^{\frac{1}{2}}(S^d)$，$\xi$ 有超球谐函数展开（15）。我们将 $w=\Phi+V$分解为，其中

$$\Phi(r,\theta)=\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{N(d,\ell)}\hat{\xi}(\ell,m)r^\ell Y_\ell^m(\theta).$$

显然，Φ 在 B 中是调和的，而 $\Phi=\xi$ 在 S^d 上，这意味着 V 满足以下边值问题：

$$\Delta V(r,\theta)=F(r,\theta) \quad \text{in } B, \tag{16a}$$

$$V(1,\theta)=0 \quad \text{on } S^d. \tag{16b}$$

将（16a）乘以 $\overline{V}$，并利用（16b）分部积分，得到

$$\|V\|_{H_0^1(B)}^2:=\|\nabla V\|_{L^2(B)}^2=-\langle F,V\rangle_{H^{-1}(B),H_0^1(B)},$$

其中后者表示 $H_0^1(B)$ 与 $H^{-1}(B)$ 之间的对偶配对。利用 Poincar´e 不等式和对偶性，存在一个常数 $C_B>0$，使得

$$\|V\|_{H^1(B)}\leq C_B\|V\|_{H_0^1(B)}\leq C_B\|F\|_{H^{-1}(B)}. \tag{17}$$

还需证明$\|\Phi\|_{H^1(B)}$受$\|\xi\|_{H^{\frac{1}{2}}(S^d)}$控制。由于 Y_ℓ^m在 $L^2(S^d)$ 中正交归一，我们得到

$$\begin{aligned}\|\Phi\|_{L^2(B)}^2&=\sum_{\ell,m}\left|\hat{\xi}(\ell,m)\right|^2\int_0^1\left(\int_{S^d}r^{2\ell}\left|Y_\ell^m(\theta)\right|^2d\sigma_d(\theta)\right)r^d dr\\ &=\sum_{\ell,m}\left|\hat{\xi}(\ell,m)\right|^2\int_0^1 r^{2\ell+d}\,dr=\sum_{\ell,m}\left[\frac{1}{2\ell+d+1}\right]\left|\hat{\xi}(\ell,m)\right|^2.\end{aligned}$$

Si类似地，利用（4）计算 $\nabla\Phi$并利用积分恒等式（14），可得

$$\|\nabla\Phi\|_{L^2(B)}^2=\sum_{\ell,m}\left|\hat{\xi}(\ell,m)\right|^2\int_0^1\left(\int_{S^d}\left(\ell^2r^{2(\ell-1)}\left|Y_\ell^m(\theta)\right|^2+\frac{r^{2\ell}}{r^2}\left|\nabla_{S^d}Y_\ell^m(\theta)\right|^2\right)d\sigma_d(\theta)\right)r^d dr$$

$$\overset{(14)}{=} \sum_{\ell,m} \left|\hat{\xi}(\ell,m)\right|^2 \int_0^1 \left(\int_{S^d} r^{2(\ell-1)} \left(\ell^2+\ell(\ell+d-1)\right) |Y_\ell^m(\theta)|^2 \, d\sigma_d(\theta) \right) r^d dr$$

$$= \sum_{\ell,m} \left|\hat{\xi}(\ell,m)\right|^2 \int_0^1 r^{2(\ell-1)+d} \left(\ell^2+\ell(\ell+d-1)\right) dr$$

$$= \sum_{\ell,m} \left[\frac{\ell^2+\ell(\ell+d-1)}{2\ell+d-1} \right] \left|\hat{\xi}(\ell,m)\right|^2 .$$

由此我们可以估计 $\|\Phi\|^2_{H^1(B)} = \|\Phi\|^2_{L^2(B)} + \|\nabla\Phi\|^2_{L^2(B)}$ 为

$$\|\Phi\|^2_{H^1(B)} = \sum_{\ell,m} \left[\frac{1}{2\ell+d+1} + \frac{\ell^2+\ell(\ell+d-1)}{2\ell+d-1} \right] \left|\hat{\xi}(\ell,m)\right|^2 \le C_{\frac{1}{2}}^2 \|\xi\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(S^d)}, \tag{18}$$

对某个常数 $C_{\frac{1}{2}} > 0$。最后，利用 $w = \Phi + V$，通过取 $s = 0 \max\ K_0 = \left\{ C_B, C_{\frac{1}{2}} \right\}$。，由（17）和（18）可得所需的 ■

接下来，我们推导（12）右侧的递归估计，这与 [VO20，引理 3。2]类似。我们将使用 [NR01中的以下不等式；NN04]：给定一个整数 $s \ge 0$和 $\delta > 0$，若 $f \in C^s(S^d)$、$u \in H^s(B)$、$g \in C^{s+\frac{1}{2}+\delta}(S^d)$ 以及 $\mu \in H^{s+\frac{1}{2}}(S^d)$，则存在一个常数$M = M(d,\ s)$ 使得

$$\|fu\|_{H^s(B)} \le M(d,s)\, |f|_{C^s}\, \|u\|_{H^s(B)}, \tag{19a}$$

$$\|g\mu\|_{H^{s+\frac{1}{2}}(S^d)} \le M(d,s)\, |g|_{C^{s+\frac{1}{2}+\delta}}\, \|\mu\|_{H^{s+\frac{1}{2}}(S^d)}. \tag{19b}$$

这里，$C^k(S^d)$ 是所有定义在 S^d 上的 C^k-函数空间，其中 $k \ge 0$ 为整数；对于非整数 k，则为 H¨lder 空间。

引理 4.2. 给定 $d \ge 3$ 和 $s \in \mathbb{N}$，令 $\rho \in C^{s+2}(S^d)$。假设 K_1 和 A 为常数，使得

$$\|u_n\|_{H^{s+2}(B)} \le K_1 A^n \qquad \text{for all } n < N. \tag{20}$$

若 $A > M(d,s)\ |\rho|_{C^{s+2}}$，则存在常数 $C_0 = C_0(d,s) > 0$，使得

$$\|L_1 u_{N-1}\|_{H^s(B)} \le C_0\, |\rho|_{C^{s+2}}\, K_1 A^{N-1},$$

$$\|L_2 u_{N-2}\|_{H^s(B)} \le C_0\, |\rho|_{C^{s+2}}\, K_1 A^{N-1}.$$

证明. 为方便记号，我们省略 M 对 d 和 s的依赖。在整个证明过程中，我们将用到这样一个事实：$|\rho|_{C^s}$ 和 $|\rho|_{C^{s+1}}$ 都被 $|\rho|_{C^{s+2}}$从上方所界。首先，仔细考察 $L_1 u_{N-1}$ 可知，作用于 u_{N-1} 的所有微分算子都是二阶的，因为我们可以将 $L_1 u_{N-1}$ 写成如下形式：

$$L_1 u_{N-1} = -2\rho \cdot \Delta u_{N-1} + (\Delta_{S^d}\rho) \cdot \frac{\partial_r u_{N-1}}{r} + 2\sum_{i=1}^d \frac{\partial_i \rho}{\eta_i} \cdot \frac{1}{h_i} \partial_i \partial_r u_{N-1}.$$

利用不等式（19a），对 $L_1 u_{N-1}$ 中的各项进行估计，并注意到 $\partial_i\rho/\eta_i$ 是作用于 S^d上的一阶偏导数，我们得到

$$\|L_1 u_{N-1}\|_{H^s(B)} \le \|2\rho\Delta u_{N-1}\|_{H^s(B)} + \|(\Delta_{S^d}\rho)\cdot r^{-1}\partial_r u_{N-1}\|_{H^s(B)}$$
$$+ 2\sum_{i=1}^d \left\| \frac{\partial_i\rho}{\eta_i} \cdot \frac{1}{h_i} \partial_i\partial_r u_{N-1} \right\|_{H^s(B)}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(19a)}{\leq} 2M\,|\rho|_{C^s}\,\|\Delta u_{N-1}\|_{H^s(B)} + M\,|\Delta_{S^d}\rho|_{C^s}\,\|r^{-1}\partial_r u_{N-1}\|_{H^s(B)} \\
&\qquad + 2\sum_{i=1}^{d} M\,\left|\eta_i^{-1}\partial_i\rho\right|_{C^s}\,\left\|(h_i)^{-1}\partial_i\partial_r u_{N-1}\right\|_{H^s(B)} \\
&\leq 2M\,|\rho|_{C^s}\,\|u_{N-1}\|_{H^{s+2}(B)} + M\,|\rho|_{C^{s+2}}\,\|u_{N-1}\|_{H^{s+2}(B)} \\
&\qquad + 2\sum_{i=1}^{d} M\,|\rho|_{C^{s+1}}\,\|u_{N-1}\|_{H^{s+2}(B)} \\
&\leq (3+2d)M\,|\rho|_{C^{s+2}}\,\|u_{N-1}\|_{H^{s+2}(B)} \\
&\overset{(20)}{\leq} (3+2d)M\,|\rho|_{C^{s+2}}\,K_1A^{N-1}.
\end{aligned}
$$

对 L_2u_{N-2} 的估计类似。利用不等式（19a）对 L_2u_{N-2} 中的第二项 ρL_1u_{N-2} 估计一次，并调整上述对 L_1u_{N-1} 的估计，我们得到

$$
\|\rho L_1u_{N-2}\|_{H^s(B)} \leq M\,|\rho|_{C^s}\,\|L_1u_{N-2}\|_{H^s(B)} \leq (3+2d)M^2\,|\rho|^2_{C^{s+2}}\,K_1A^{N-2}.
$$

估计 L_2u_{N-2} 中的其余项，两次使用不等式（19a），并注意到作用于 u_{N-2} 的所有微分算子都是二阶的，我们得到

$$
\begin{aligned}
\|L_2u_{N-2}\|_{H^s(B)} &\leq \|\rho L_1u_{N-2}\|_{H^s(B)} + \|\rho^2\Delta u_{N-2}\|_{H^s(B)} \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{d}\left\|\left(\frac{\partial_i\rho}{\eta_i}\right)^2\left[\partial_r^2u_{N-2} + 2r^{-1}\partial_r u_{N-2}\right]\right\| \\
&\overset{(19a)}{\leq} (3+2d)M^2\,|\rho|^2_{C^{s+2}}\,K_1A^{N-2} + M^2\,|\rho|^2_{C^s}\,\|\Delta u_{N-2}\|_{H^s(B)} \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{d} M^2\left|\eta_i^{-1}\partial_i\rho\right|^2_{C^s}\left(\|\partial_r^2u_{N-2}\|_{H^s(B)} + 2\|r^{-1}\partial_r u_{N-2}\|_{H^s(B)}\right) \\
&\leq (3+2d)M^2\,|\rho|^2_{C^{s+2}}\,K_1A^{N-2} + M^2\,|\rho|^2_{C^s}\,\|u_{N-2}\|_{H^{s+2}(B)} \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{d} M^2\,|\rho|^2_{C^{s+1}}\left(3\|u_{N-2}\|_{H^{s+2}(B)}\right) \\
&\leq (3+2d)M^2\,|\rho|^2_{C^{s+2}}\,K_1A^{N-2} + (1+3d)M^2\,|\rho|^2_{C^{s+2}}\,\|u_{N-2}\|_{H^{s+2}(B)} \\
&\overset{(20)}{\leq} (3+2d)M^2\,|\rho|^2_{C^{s+2}}\,K_1A^{N-2} + (1+3d)M^2\,|\rho|^2_{C^{s+2}}\,K_1A^{N-2} \\
&\leq (4+5d)M\,|\rho|_{C^{s+2}}\,K_1A^{N-1},
\end{aligned}
$$

假设 $A > M\,|\rho|_{C^{s+2}}$。最后，通过选取 $C_0 = (4+5d)M$，即可得到所需结果。 ■

最后，我们证明当 $\varepsilon > 0$充分小时，（10）收敛。

定理 4.3。 给定 $d \geq 3$和 $s \in \mathbb{N}$，若 $\rho \in C^{s+2}(S^d)$ 且 $\xi \in H^{s+\frac{3}{2}}(S^d)$，则存在常数$C_0$ 和 K_0，并存在唯一的解 u_ε，满足（9）以及（10），使得

$$
\|u_n\|_{H^{s+2}(B)} \leq K_0\|\xi\|_{H^{s+\frac{3}{2}}(S^d)}A^n \tag{21}
$$

对任意 $A > \max\{2K_0C_0\,|\rho|_{C^{s+2}}, M\,|\rho|_{C^{s+2}}\}$。

证明。 证明与 [VO20中的定理 3 类似。3]。我们通过归纳法进行证明。情形 $n = 0$可由将引理 4.1 应用于满足 u_0 （11）的 $F \equiv 0$得到：

$$
\|u_0\|_{H^{s+2}(B)} \leq K_0\|\xi\|_{H^{s+\frac{3}{2}}(S^d)} = K_0\|\xi\|_{H^{s+\frac{3}{2}}(S^d)}A^0.
$$

假设不等式（21）对 $n < N$成立。将引理 4.1 应用于满足 u_N （12）的 $F = L_1 u_{N-1} + L_2 u_{N-2}$，可得

$$\|u_N\|_{H^{s+2}(B)} \le K_0 \left(\|L_1 u_{N-1}\|_{H^s(B)} + \|L_2 u_{N-2}\|_{H^s(B)} \right).$$

利用引理 4.2 以及归纳假设中的 $K_1 = K_0 \|\xi\|_{H^{s+\frac{3}{2}}(S^d)}$，我们可以对 $\|L_1 u_{N-1}\|_{H^s(B)}$和 $\|L_2 u_{N-2}\|_{H^s(B)}$ 进行估计，使得

$$\begin{aligned} \|u_N\|_{H^{s+2}(B)} &\le K_0 \left(2C_0 |\rho|_{C^{s+2}} K_1 A^{N-1} \right) = 2K_0^2 C_0 |\rho|_{C^{s+2}} \|\xi\|_{H^{s+\frac{3}{2}}(S^d)} A^{N-1} \\ &\le K_0 \|\xi\|_{H^{s+\frac{3}{2}}(S^d)} A^N, \end{aligned}$$

由此，对于 $n = N$，只要 $A > 2K_0 C_0 |\rho|_{C^{s+2}}$，便可得出（21）。 ■

5. Analyticity of DNO and Steklov Eigenvalues

本节最后将证明 DNO 的解析性，并进一步证明斯捷克洛夫特征值关于扰动参数 ε 的解析性。回顾一下，DNO$G_{\rho,\varepsilon}$: $H^{s+\frac{1}{2}}(\partial\Omega_\varepsilon) \to H^{s-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_\varepsilon)$ 的定义如下:

$$G_{\rho,\varepsilon}\xi = \mathbf{n}_{\rho,\varepsilon} \cdot \nabla v|_{r=1+\varepsilon\rho},$$

其中 $\mathbf{n}_{\rho,\varepsilon}$ 是 $\partial\Omega_\varepsilon$ 的单位法向量， v 是 ξ 从 $\partial\Omega_\varepsilon$ 到 Ω 的调和延拓$_\varepsilon$，满足（7）。我们可以将超曲面 $\partial\Omega_\varepsilon$ 表示为隐函数J的零水平集，即

$$\partial\Omega_\varepsilon = \left\{ (r,\hat{\theta}) \colon J(r,\hat{\theta}) = \frac{r}{1+\varepsilon\rho(\hat{\theta})} - 1 = 0 \right\}.$$

Ω ∂_ε 的法向量由梯度 ∇J给出。利用（4），可得

$$\nabla J = \frac{1}{1+\varepsilon\rho}\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{d} \frac{1}{\eta_i} \cdot \frac{-\varepsilon r \partial_i \rho}{(1+\varepsilon\rho)^2} \hat{\boldsymbol{\theta}}_i = \frac{1}{(1+\varepsilon\rho)^2} \left[(1+\varepsilon\rho)\hat{\boldsymbol{r}} - \varepsilon \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial_i \rho}{\eta_i} \hat{\boldsymbol{\theta}}_i \right].$$

由此可得

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{\rho,\varepsilon} = \frac{\nabla J}{\|\nabla J\|_2} &= \left((1+\varepsilon\rho)^2 + \varepsilon^2 \sum_{i=1}^{d} \frac{(\partial_i \rho)^2}{\eta_i^2} \right)^{-1/2} \left[(1+\varepsilon\rho)\,\hat{\boldsymbol{r}} - \varepsilon \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial_i \rho}{\eta_i} \hat{\boldsymbol{\theta}}_i \right] \\ &= M_{\rho,\varepsilon} \left[(1+\varepsilon\rho)\,\hat{\boldsymbol{r}} - \varepsilon \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial_i \rho}{\eta_i} \hat{\boldsymbol{\theta}}_i \right] \end{aligned}$$

Dirichlet-to-Neumann 算子由下式给出

$$G_{\rho,\varepsilon}\xi = M_{\rho,\varepsilon} \left[(1+\varepsilon\rho)\partial_r v - \frac{\varepsilon}{r} \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial_i \rho}{\eta_i^2} \partial_i v \right] \Bigg|_{r=1+\varepsilon\rho}$$

接下来，我们利用变量替换（8），将 Dirichlet-to-Neumann 算子从 $\partial\Omega_\varepsilon$ 变换到 S^d。令

$$u_\varepsilon(r',\theta') = v\left((1+\varepsilon\rho(\theta'))r', \theta' \right)$$

并略去变换后变量上的撇号，我们得到

$$\begin{aligned} G_{\rho,\varepsilon}\xi &= M_{\rho,\varepsilon} \left[\partial_r u_\varepsilon - \frac{\varepsilon}{r(1+\varepsilon\rho)} \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial_i \rho}{\eta_i^2} \left(\partial_i u_\varepsilon - \frac{\varepsilon r \partial_i \rho}{(1+\varepsilon\rho)} \partial_r u_\varepsilon \right) \right] \Bigg|_{r=1} \\ &= M_{\rho,\varepsilon} \widehat{G}_{\rho,\varepsilon}\xi, \end{aligned}$$

其中

$$\widehat{G}_{\rho,\varepsilon}\xi = \partial_r u_\varepsilon(1,\theta) - \frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon\rho)}\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial_i\rho}{\eta_i^2}\partial_i u_\varepsilon(1,\theta) + \frac{\varepsilon^2}{(1+\varepsilon\rho)^2}\sum_{i=1}^{d}\frac{(\partial_i\rho)^2}{\eta_i^2}\partial_r u_\varepsilon(1,\theta). \tag{22}$$

由于 $M_{\rho,\varepsilon}$ 在 $\varepsilon = 0$附近显然是解析的，因此我们只需证明 $G_{\rho,\varepsilon}$ 在 $\varepsilon = 0$附近的解析性。将（22）乘以 $(1+\varepsilon\rho)^2$ 并收集 ε 阶和 ε^2 阶项，我们看到 $\widehat{G}_{\rho,\varepsilon}\xi$ 满足

$$\widehat{G}_{\rho,\varepsilon}\xi = \partial_r u_\varepsilon(1,\theta) + \varepsilon\Big[(T_1u_\varepsilon)(1,\theta) - 2\rho\widehat{G}_{\rho,\varepsilon}\xi\Big] + \varepsilon^2\Big[(T_2u_\varepsilon)(1,\theta) - \rho^2\widehat{G}_{\rho,\varepsilon}\xi\Big], \tag{23}$$

其中

$$T_1u_\varepsilon = 2\rho\partial_r u_\varepsilon - \sum_{i=1}^{d}\frac{\partial_i\rho}{\eta_i^2}\partial_i u_\varepsilon,$$

$$T_2u_\varepsilon = \rho^2\partial_r u_\varepsilon - \sum_{i=1}^{d}\frac{\rho\partial_i\rho}{\eta_i^2}\partial_i u_\varepsilon + \sum_{i=1}^{d}\frac{(\partial_i\rho)^2}{\eta_i^2}\partial_r u_\varepsilon.$$

现在，我们将 $G_{\rho,\varepsilon}$ 形式地展开为关于 ε 的幂级数：

$$\widehat{G}_{\rho,\varepsilon}\xi = \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n\widehat{G}_{\rho,n}\xi. \tag{24}$$

代入（24）将（10）代入（23），并收集关于 ε 的各次幂的项，我们看到 $G_{\rho,0}$ 满足

$$\widehat{G}_{\rho,0}\xi = \partial_r u_0(1,\theta) \tag{25}$$

而且，当 $n = 1 = 2,\ldots$ 时，$G_{\rho,n}$ 满足以下递归公式：

$$\widehat{G}_{\rho,n}\xi = \partial_r u_n(1,\theta) + (T_1u_{n-1})(1,\theta) - 2\rho\widehat{G}_{\rho,n-1}\xi + (T_2u_{n-2})(1,\theta) - \rho^2\widehat{G}_{\rho,n-2}\xi. \tag{26}$$

下面的定理证明了当24中的 $\varepsilon > 0$ 足够小时，其收敛性成立，从而证明了1.1 对 $d \geq 3$成立。

定理 5.1. 给定 $d \geq 3$和 $s \in \mathbb{N}$，若 $\rho \in C^{s+2}(S^d)$ 且 $\xi \in H^{s+\frac{3}{2}}(S^d)$，则存在常数 $K_1 = K_1(B, d, s) > 0$和 $\alpha = \alpha(d) > 1$，使得

$$\|\widehat{G}_{\rho,n}\xi\|_{H^{s+\frac{1}{2}}(S^d)} \leq K_1\|\xi\|_{H^{s+\frac{3}{2}}(S^d)}A^n \tag{27}$$

当 $A > \alpha\max\{2K_0C_0\,|\rho|_{C^{s+2}}, M\,|\rho|_{C^{s+2}}\}$时。

证明。整个证明过程中，我们将使用两个事实：(1) $|\rho|_{C^s}$ 和 $|\rho|_{C^{s+1}}$ 均有上界 $|\rho|_{C^{s+2}}$；(2) 若 P 是定义在 S^d上的任意一阶微分算子，则迹算子在 $H^{s+1}(B)$ 上的连续性意味着存在常数 $C_B > 0$，使得

$$\|Pu_n\|_{H^{s+\frac{1}{2}}(S^d)} \leq C_B\|Pu_n\|_{H^{s+1}(B)} \leq C_B\|u_n\|_{H^{s+2}(B)} \leq C_BK_0\|\xi\|_{H^{s+\frac{3}{2}}(S^d)}A^n, \tag{28}$$

其中，最后一个不等式由定理 4.3得出。

我们通过归纳法进行证明。令 $K_1 = \beta C_BK_0$，其中 $\beta > 1$为某个常数。情形 $n = 0$ 可直接由（25）和（28）得出：

$$\|\widehat{G}_{\rho,0}\xi\|_{H^{s+\frac{1}{2}}(S^d)} \leq C_BK_0\|\xi\|_{H^{s+\frac{3}{2}}(S^d)}A^0 < K_1\|\xi\|_{H^{s+\frac{3}{2}}(S^d)}A^0.$$

现在假设（27）对 $n < N$成立。根据递归公式（26），我们分别估计中G_{ρ}的$N\xi$每一项。利用（28）和 $n = N$，可以估计第一项：

$$\|\partial_r u_N\|_{H^{s+\frac{1}{2}}(S^d)} \leq C_BK_0\|\xi\|_{H^{s+\frac{3}{2}}(S^d)}A^N.$$

为了估计各项$2\rho\widehat{G}_{\rho,\ N-1}\xi$和$\rho^2\widehat{G}_{\rho,\ N-2}\xi$，我们结合（19b）中的不等式以及 $\delta=1/2$ 归纳假设:

$$2\|\rho\widehat{G}_{\rho,N-1}\xi\|_{H^{s+\frac{1}{2}}(S^d)}\overset{(19b)}{\leq}2M\,|\rho|_{C^{s+1}}\,\|\widehat{G}_{\rho,N-1}\xi\|_{H^{s+\frac{1}{2}}(S^d)}\leq 2M\,|\rho|_{C^{s+2}}\,K_1\|\xi\|_{H^{s+\frac{3}{2}}(S^d)}A^{N-1}$$

$$\|\rho^2\widehat{G}_{\rho,N-2}\xi\|_{H^{s+\frac{1}{2}}(S^d)}\overset{(19b)}{\leq}M^2\,|\rho|^2_{C^{s+1}}\,\|\widehat{G}_{\rho,N-2}\xi\|_{H^{s+\frac{1}{2}}(S^d)}\leq M^2\,|\rho|^2_{C^{s+2}}\,K_1\|\xi\|_{H^{s+\frac{3}{2}}(S^d)}A^{N-2}.$$

为估计各项 $T_1u_{N-1}(1,\theta)$ 和 $T_2u_{N-1}(1,\theta)$，我们注意到，作用于 u_{N-1} 和 u_{N-2} 上的微分算子在 S^d 上是一阶的。利用不等式 (19b) 以及 $\delta=1/2$ 和 (28)，我们得到

$$\begin{aligned}
\|T_1u_{N-1}\|_{H^{s+\frac{1}{2}}(S^d)}&\leq\|2\rho\partial_ru_{N-1}\|_{H^{s+\frac{1}{2}}(S^d)}+\sum_{i=1}^d\left\|\frac{\partial_i\rho}{\eta_i}\cdot\frac{\partial_iu_{N-1}}{\eta_i}\right\|_{H^{s+\frac{1}{2}}(S^d)}\\
&\overset{(19b)}{\leq}2M\,|\rho|_{C^{s+1}}\,\|\partial_ru_{N-1}\|_{H^{s+\frac{1}{2}}(S^d)}+\sum_{i=1}^dM\,|\rho|_{C^{s+2}}\,\|\eta_i^{-1}\partial_iu_{N-1}\|_{H^{s+\frac{1}{2}}(S^d)}\\
&\overset{(28)}{\leq}(2+d)M\,|\rho|_{C^{s+2}}\,C_BK_0\|\xi\|_{H^{s+\frac{3}{2}}(S^d)}A^{N-1}\\
\|T_2u_{N-2}\|_{H^{s+\frac{1}{2}}(S^d)}&\leq\|\rho^2\partial_ru_{N-2}\|_{H^{s+\frac{1}{2}}(S^d)}+\sum_{i=1}^d\left\|\rho\cdot\frac{\partial_i\rho}{\eta_i}\cdot\frac{\partial_iu_{N-2}}{\eta_i}\right\|_{H^{s+\frac{1}{2}}(S^d)}\\
&\quad+\sum_{i=1}^d\left\|\left(\frac{\partial_i\rho}{\eta_i}\right)^2\partial_ru_{N-2}\right\|_{H^{s+\frac{1}{2}}(S^d)}\\
&\overset{(19b)}{\leq}M^2\,|\rho|^2_{C^{s+1}}\,\|\partial_ru_{N-2}\|_{H^{s+\frac{1}{2}}(S^d)}+\sum_{i=1}^dM^2\,|\rho|_{C^{s+1}}\,|\rho|_{C^{s+2}}\,\|\eta_i^{-1}\partial_iu_{N-2}\|_{H^{s+\frac{1}{2}}(S^d)}\\
&\quad+\sum_{i=1}^dM^2\,|\rho|^2_{C^{s+2}}\,\|\partial_ru_{N-2}\|_{H^{s+\frac{1}{2}}(S^d)}\\
&\overset{(28)}{\leq}(1+2d)M^2\,|\rho|^2_{C^{s+2}}\,C_BK_0\|\xi\|_{H^{s+\frac{3}{2}}(S^d)}A^{N-2}.
\end{aligned}$$

将 $\widehat{G}_{\rho,\ N}\xi$ 中五项的估计相加，并利用假设 $A>\alpha M\,|\rho|_{C^{s+2}}$（其中某个常数为 $\alpha>1$），得到

$$\begin{aligned}
\|\widehat{G}_{\rho,N}\xi\|_{H^{s+\frac{1}{2}}(S^d)}&\leq C_BK_0\|\xi\|_{H^{s+\frac{3}{2}}(S^d)}A^N\\
&\quad+(2+d)M\,|\rho|_{C^{s+2}}\,C_BK_0\|\xi\|_{H^{s+\frac{3}{2}}(S^d)}A^{N-1}\\
&\quad+2M\,|\rho|_{C^{s+2}}\,K_1\|\xi\|_{H^{s+\frac{3}{2}}(S^d)}A^{N-1}\\
&\quad+(1+2d)M^2\,|\rho|^2_{C^{s+2}}\,C_BK_0\|\xi\|_{H^{s+\frac{3}{2}}(S^d)}A^{N-2}\\
&\quad+M^2\,|\rho|^2_{C^{s+2}}\,K_1\|\xi\|_{H^{s+\frac{3}{2}}(S^d)}A^{N-2}\\
&\leq C_BK_0\left[1+\frac{2+d}{\alpha}+\frac{1+2d}{\alpha^2}\right]\|\xi\|_{H^{s+\frac{3}{2}}(S^d)}A^N+K_1\left[\frac{2}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}\right]\|\xi\|_{H^{s+\frac{3}{2}}(S^d)}A^N\\
&=C(\alpha,\beta)K_1\|\xi\|_{H^{s+\frac{3}{2}}(S^d)}A^N,
\end{aligned}$$

其中，在等式中我们对 $\beta > 1$ 使用了 $K_1 = \beta C_B K_0$，并且

$$C(\alpha,\beta) = \frac{1}{\beta}\left[1 + \frac{2+d}{\alpha} + \frac{1+2d}{\alpha^2}\right] + \frac{2}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}.$$

取 $\alpha > 1+\sqrt{2} > 1$ 和 $\beta > {}^{\alpha^2+\alpha}\!\left(\frac{2+d+2d+1}{\alpha^2-2\alpha-1}\right) > 1$，得到 $C(\alpha,\beta) \le 1$，因此

$$\|\widehat{G}_{\rho,N}\xi\|_{H^{s+\frac{1}{2}}(S^d)} \le K_1 \|\xi\|_{H^{s+\frac{3}{2}}(S^d)} A^N,$$

由此完成了关于 $n = N$ 的归纳论证。 ■

定理 1.1 和推论 1.2 的证明。证明与 [VO20，推论 1.2]，完全相同，但为完整起见，我们在此给出证明。定理 5.1 表明，式 (24) 中给出的非归一化狄利克雷-诺伊曼算子$\widehat{G}_{\rho,\varepsilon}$的展开式在 ε 充分小时一致收敛。因此，对于充分小的 ε，$G_{\rho,\varepsilon}\colon H^{s+\frac{3}{2}}(S^d) \to H^{s+\frac{1}{2}}(S^d)$ 是解析的。狄利克雷-诺伊曼算子 $G_{\rho,\varepsilon}\colon L^2(S^d) \to L^2(S^d)$ 是自伴的 [Are+14]，故为闭算子。结论现由 [Kat13，第 7 章，定理 1.8，第 370] 页得出。■

致谢。作者谨向 John Gemmer、Jason Parsley 和 Nsoki Mavinga 致谢，感谢他们提供的宝贵见解。

References

[Are+14] W. Arendt 等人：《通过隐藏紧致性研究狄利克雷-诺伊曼算子》。《函数分析杂志》266.3（2014），第 1757–1786 页。 DOI: 10.1016/j.jfa.2013.09.012.[Ave12] J. S. Avery。《超球谐函数：在量子理论中的应用》。第 5 卷。Springer Science & Business Media，2012。 DOI: 10.1007/978-94-009-2323-2.[GP17] A. Girouard 和 I. Polterovich：《Steklov 问题的谱几何（综述文章）》。《谱理论杂志》7.2（2017），第 321–359 页。 DOI: 10.4171/JST/164.[Kat13] T. Kato。《线性算子扰动理论》。第 3 版，第 132 卷。Springer Science & Business Media，2013。 DOI: 10.1007/978-3-662-12678-3.[NN04] D. P. Nicholls 和 N. Nigam：《一般区域上的精确非反射边界条件》。《计算物理学杂志》194.1（2004年），第 278–303 页。 DOI: 10.1016/j.jcp.2003.09.006.[NR01] D. P. Nicholls 和 F. Reitich：《狄利克雷-诺伊曼算子解析性的新方法》。《爱丁堡皇家学会会刊 A辑：数学》131.6（2001），第 1411–1433 页。 DOI: 10.1017/S0308210500001463.[VO18] R. Viator 和 B. Osting：《反射对称近圆形平面区域的斯捷克洛夫特征值》。《皇家学会会刊 A辑》474.2220（2018），第 20180072 页。 DOI: 10.1098/rspa.2018.007

2.

[VO20] R. Viator 和 B. Osting。“近圆形和近球形区域的斯捷克洛夫特征值的解析性”。数学科学研究7.1（2020年），第 1–18 页。 DOI: 10.1007/s40687-020-0202

-4.

[VO22] R. Viator 和 B. Osting。“近球形区域的斯捷克洛夫特征值”。SIAM控制与优化杂志60.3（2022年），第 1546–1562 页。 DOI: 10.1137/21M1411925。