arXiv:2302.00822v1 [math.PR] 2 Feb 2023

无界系数椭圆方程的定量随机均匀化

Tomohiro Aya*

2023/02/02

摘要

本文研究具有无界且非一致椭圆系数的椭圆方程的随机均匀化。通过推广 [4, 5], 中引入的次可加论证，我们得到了狄利克雷问题的解的收敛速率估计，条件是单位立方体内的系数具有一定的指数可积性。对于本文中的系数场 $\mathbf{a}$，我们仅假设最大相关性在某个常数距离处以常数速率衰减，以此作为遍历性条件；此外，还假设其关于 $\mathbb{Z}^d$ 平移具有平稳性。

1 引言

本文研究以下线性椭圆方程的随机均匀化

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \left(\mathbf{a}\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right) \nabla u_\varepsilon \right) = 0 & (\text{in } U), \\ u_\varepsilon = f & (\text{on } \partial U), \end{cases} \tag{1.1}$$

在有界开子集 $U \subset \mathbb{R}^d$ 中。系数 $\mathbf{a}(\cdot) \in \mathbb{R}^{d\times d}$ 是一个取值于正定矩阵的随机场，其在概率测度 $\mathbb{P}$ 下的分布对 $\mathbb{Z}^d$ 平移具有平稳性和遍历性。在系数 $\mathbf{a}(\cdot)$ 一致椭圆的情形下，Kozlov [17] 以及 Papanicolaou 和 Varadhan [20] 得出了定性随机均匀化结果：方程 (1.1) 的唯一解 u_ε 在 $\varepsilon \to +0$ 时收敛于一个常系数方程的解 u

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\bar{\mathbf{a}} \nabla u) = 0 & (\text{in } U), \\ u = f & (\text{on } \partial U). \end{cases}$$

定量随机均匀化旨在研究在遍历性满足定量混合条件的假设下，u_ε 到 u 的收敛速率。Yurinskiĭ [21] 运用概率论方法得到了首个定量结果。Gloria 和 Otto [15],、Fischer 和 Neukamm [12] 以及 Gloria、Neukamm 和 Otto [14], 的研究发展了椭圆方程随机均匀化的定量理论，并在谱隙不等式 或多尺度对数 *Sobolev* 不等式 成立为混合条件时，得到了最优估计。他们论证的核心是将谱隙不等式与线性椭圆方程相关的不等式（如迈耶斯估计和 Caccioppoli 不等式）结合起来，从而精确估计校正子的梯度矩；校正子是线性椭圆方程随机均匀化中的核心对象。此外，还有一种理论

*京都大学理学研究科数学系，日本京都市左京区北白川追分町，邮编 606-8502。电子邮箱：aya.tomohiro.42z@st.kyoto-u.ac.jp

在有限程依赖 等不同混合条件假设下，定量随机均匀化和大尺度正则性理论由 Armstrong 和 Smart [5]以及 Armstrong、Kuusi 和 Mourrat [3, 4]建立。他们通过引入另一种次可加量，成功获得了定量结果；这种量与次可加能量量相对应，而后者在 Maso 和 Modica [10, 11]提出的定性理论中发挥了核心作用。

我们关注将随机均匀化的定量理论推广到无界且非一致椭圆系数情形。在离散情形中，这类尝试已有先例。例如，Lamacz、Neukamm 和 Otto [18] 给出了随机均匀化的误差估计，Andress 和 Neukamm [2] 在满足谱隙估计和矩条件的格点 $\mathbb{Z}^d$ 随机导电模型上给出了 Berry–Esseen 型估计。此外，在连续情形中，Bella 和 Schäffner [7] 将校正子的几乎处处 L^∞-次线性性作为定性随机均匀化的结果予以证明。另一方面，为了获得定量随机均匀化，人们尚不知道系数 a(·) 的椭圆性需要具有什么程度的可积性，其中 a(·) 定义在 $\mathbb{R}^d$ 的单位空间内。最近，Bella 和 Kniely [6] 将 [14] 关于校正子梯度衰减、校正子增长以及定量双尺度展开的结果推广到了无界情形；在该情形下，单位球中 $\mathsf{a}|^p$ 的平均值和 $\mathsf{a}^{-1}|^q$ 的平均值分别具有拉伸指数矩界。然而，出于技术原因，他们要求系数场集合在 $\mathbb{R}^d$-变换下保持不变，并满足谱隙条件。

本文将 [4] 的定量理论推广到系数无界且椭圆性不一致的情形。这种方法的一个优点是，无需假设谱隙条件或其他庞加莱型不等式，也能获得估计。本文仅假设最大相关性 ρ 均匀递减，并将其作为混合条件。此外，对于平稳性假设，我们假设系统相对于 $\mathbb{Z}^d$-转移具有平稳性。我们尝试通过将有界利普希茨区域上系数椭圆性的最大值和最小值视为随机变量，来推广次可加论证。推广到系数仅满足局部有界性的情形时，困难在于随着区域扩张，区域内 $|\mathsf{a}|$ 和 $|\mathsf{a}^{-1}|$ 的最大值会增大。我们证明，当单位区域内 $|\mathsf{a}|$ 和 $|\mathsf{a}^{-1}|$ 的最大值具有指数可积性时，次可加量收敛得足够快；并获得了狄利克雷问题中椭圆方程的解的收敛速率估计。

1.1 假设与示例

Let Ω d记 a(·) 为从 $\mathbb{R}^d$ 到正定 $d\times d$ 矩阵集合的可测映射
satisfyi满足以下条件。

- （局部有界性）。对于每个有界域 $U \subset \mathbb{R}^d$,

$$\sup_{x\in U} |\mathbf{a}(x)| + \sup_{x\in U} \left|\mathbf{a}(x)^{-1}\right| < \infty. \tag{1.2}$$

For 对于一个博雷尔子集 $U \subseteq \mathbb{R}^d$, $\mathcal{F}_U$ 表示由以下映射族生成的 σ 代数 s,

$$\left\{\mathbf{a} \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} e_i \cdot \mathbf{a}(x) e_j \varphi(x) dx : i,j \in \{1,2,\dots,d\}, \varphi \in C_c^\infty(U)\right\}.$$

$\mathcal{F}_U$ 表示 U 中系数 a(·) 的信息。记 $\mathcal{F} := \mathcal{F}_{\mathbb{R}^d}$。对于每个 $y \in \mathbb{R}^d$，令 $T_y : \Omega \to \Omega$ 为满足以下条件的移位算子

$$(T_y\mathbf{a})(x) := \mathbf{a}(x+y).$$

沿用相同的记号，我们令 $T_y : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ 表示由 $T_y(A) := \{T_y\mathsf{a} : \mathsf{a} \in A\}$给出的映射。我们令$d_\infty$ 表示两个区域之间的 l^∞-距离：对于 $U, V \subset \mathbb{R}^d$,

$$d_\infty(U,V) := \inf\left\{\|u-v\|_\infty = \max_{1\le i\le d} |u_i - v_i| : u \in U, v \in V\right\}.$$

我们用 $\mathbb{P}$ 表示可测空间 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的一个概率测度。我们将关于 $\mathbb{P}$ 的期望记为 $\mathbb{E}$ 。对于任意 σ-代数 $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$，记 $\mathcal{L}^2(\mathcal{A})$ 为平方可积且 $\mathcal{A}$-可测的实值随机变量空间。我们假设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 满足以下与平稳性和遍历性相对应的性质。

- （关于 $\mathbb{Z}^d$ 平移的平稳性）。对于所有 $z \in \mathbb{Z}^d$ 和 $A \in \mathcal{F}$，
$$\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[T_z A]. \tag{1.3}$$
- （最大相关性一致递减 ρ）。固定 $r \in (0,1)$。对于每一对博雷尔子集 $U, V \subset \mathbb{R}^d$，若 $d_\infty(U,V) \geq 1$，
$$\rho(\mathcal{F}_U, \mathcal{F}_V) := \sup_{\substack{f \in \mathcal{L}^2(\mathcal{F}_U) \\ g \in \mathcal{L}^2(\mathcal{F}_V)}} \frac{\mathrm{Cov}[f,g]}{\mathrm{Var}[f]^{1/2}\mathrm{Var}[g]^{1/2}} \leq r. \tag{1.4}$$

注 1.1. 平稳性假设中的平移量等于遍历性假设中两个集合之间的距离，并非必要。事实上，最大相关性一致递减假设 ρ 可以改写如下。

- 固定 $R < \infty$ 和 $r \in (0,1)$。对于每一对博雷尔子集 $U, V \subset \mathbb{R}^d$，
$$d_\infty(U,V) \geq R \quad \Rightarrow \quad \rho(\mathcal{F}_U, \mathcal{F}_V) \leq r.$$

若将上述条件替换为此条件，本文中的常数 C, c 将依赖于 R。

最大相关性 $\rho(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 是一种距离，用于衡量 σ-代数 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$之间的依赖程度；它最早在论文 [13, 16] 中从统计学背景出发进行了研究。对于随机场，已知在一定条件下，ρ-混合条件等价于α-混合条件，而后者是最弱的强混合条件，详情见 [8, 9] 。在首个定量结果 [21], 中，研究者基于最大相关性的多项式衰减假设获得了定量估计。本文只需假设 ρ 在一定距离处按某一比率衰减。

我们如下引入用于描述空间局部有界性的随机变量：对于有界利普希茨区域 $U \subseteq \mathbb{R}^d$，

$$\begin{aligned} \Lambda(U) &:= \operatorname*{ess\,sup}_{x \in U} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d, |\xi|=1} \xi \cdot \mathbf{a}(x)\xi, \\ \lambda(U) &:= \operatorname*{ess\,inf}_{x \in U} \inf_{\xi \in \mathbb{R}^d, |\xi|=1} \xi \cdot \mathbf{a}(x)\xi. \end{aligned} \tag{1.5}$$

$\Lambda(U)$ 和 $\lambda(U)$ 分别表示区域 U内系数的最大值和最小值。注意，局部有界性意味着，对于每个有界域 U，

$$0 < \lambda(U) \leq \Lambda(U) < \infty. \tag{1.6}$$

一个满足局部有界性（1.2）、平稳性（1.3）和混合条件（1.4）假设的例子是随机棋盘模型。我们将 $\mathbb{R}^d$划分为边长为 1 的立方体，并在每个立方体上赋予独立同分布的随机变量作为系数，从而得到该模型。具体而言，设 $\{b(z)\}_{z \in \mathbb{Z}^d}$ 为独立同分布随机变量。我们准备一个映射 $\mathbb{R} \ni r \mapsto \mathbf{a}_r \in \mathbb{R}^{d \times d}$，其定义域为 $\mathbb{R}$，值域为正定矩阵集合。于是，对每个 $z \in \mathbb{Z}^d$ 和 $x \in z + [-1/2, 1/2)^d$，通过如下设定，可以定义满足（1.2）、（1.3）和（1.4）的随机场 $\mathbf{a}(\cdot) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d \times d}$

$$\mathbf{a}(x) := \mathbf{a}_{b(z)}.$$

在随机棋盘模型中，当 $|\mathbf{a}^{b(0)}|$ 和 $|\mathbf{a}_{b\ 0\ ()}^{-1}|$ 中至少有一个是无界随机变量时，即对于每个 $C < \infty$，

$$\mathbb{P}\left[|\mathbf{a}_{b(0)}| + |\mathbf{a}_{b(0)}^{-1}| > C \right] > 0,$$

该模型不满足系数的一致椭圆性。

1.2 主要结果

本文的主要定理是关于具有无界且非一致椭圆系数的线性椭圆方程的定量随机均匀化。我们考虑这样一种情形：系数及其逆在单位立方体$\square_0 := (-1/2,1/2)^d$ 上的算子范数最大值是无界随机变量。在以下结果中，当这些随机变量具有指数可积性时，我们得到了均匀化速率。这是对狄利克雷问题均匀化误差的估计。

定理 1.2。设第 *1.1* 节中的假设成立。设 β，$\gamma \in (3,\infty]$ 满足 $0<\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}<\frac{1}{3}$。假设存在满足以下条件的 $M<\infty$

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\Lambda(\square_0)^{\beta}\right)\right]+\mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda(\square_0)^{-\gamma}\right)\right]\le M.$$

那么，对于有界利普希茨区域 $U\subseteq\square_0$，$\delta>0$，$\alpha\in\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma},\frac{1}{3}\right)$ 以及 $p\in(0,4)$，存在一个对称矩阵 $\bar{\mathbf{a}}$ 和常数 $c=c(d,r,\beta,\gamma,M,U,\delta,\alpha,p)>0$，$C=C(d,r,\beta,\gamma,M,U,\delta,\alpha,p)<\infty$，使得以下结论成立：对于每个 $\varepsilon\in(0,1]$，$f\in W^{1,2+\delta}(U)$，以及狄利克雷问题的唯一解 u^ε，$u\in f+H_0^1(U)$

$$\begin{aligned}-\nabla\cdot\mathbf{a}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)\nabla u^\varepsilon=0\quad(\text{in } U),\qquad u^\varepsilon=f\quad(\text{on } \partial U),\\ -\nabla\cdot\bar{\mathbf{a}}\nabla u=0\quad(\text{in } U),\qquad u=f\quad(\text{on } \partial U),\end{aligned}$$

在分布意义下，我们有

$$\mathbb{E}\left[\|u-u^\varepsilon\|_{L^2(U)}^p\right]^{\frac{1}{p}}\le C\|\nabla f\|_{L^{2+\delta}(U)}\exp\left(-c\left(-\log\varepsilon\right)^{1-3\alpha}\right).\tag{1.7}$$

在此定理中，我们仅假设最大相关性 ρ 均匀衰减，并以此作为遍历性条件。该条件弱于 [3, 4, 5] 中出现的有限程依赖。我们在不假设多尺度对数 Sobolev 不等式和谱隙不等式的情况下，针对系数无界且非一致椭圆的情形得到了定量结果；Bella 和 Kniely [6] 中则假设了这两个不等式。此外，我们仅假设相对于 $\mathbb{Z}^d$-跃迁的平稳性。也就是说，对于任意 $x\in\mathbb{R}^d$，$\mathsf{a}(\cdot)$ 和 $\mathsf{a}(\cdot+x)$ 的分布不必相同。

本文的组织结构如下。第 2.1 节中，我们介绍 [10], [11] 和 [5], 中引入的次可加量，并验证其基本性质在我们的情形下成立。随后，我们利用这些量的次可加性刻画均匀化系数，并估计其大小。第 2.2 节是本文的核心部分。我们得到了关于系数收敛的定量结果。通过引入控制系数无界性影响的概念，我们推广了先前的迭代论证。在第 3 节的前半部分，我们通过对偏微分方程进行逐点讨论，证明了一个估计，该估计将系数的收敛性与狄利克雷问题解的收敛性联系起来。最后，我们在第 3.3 节证明定理 1.2。

1.3 记号

我们引入一些贯穿全文使用的记号。非负整数集合记为 $\mathbb{N}:=\{0,1,2,\dots\}$。空间维数记为 d。$\mathbb{R}^d$ 的标准基记为 $\{e_1,e_2,\dots,e_d\}$，以 $x\in\mathbb{R}^d$ 为中心、半径为 $r>0$ 的开球记为 $B_r(x):=\{y\in\mathbb{R}^d:|y-x|<r\}$。为简便起见，记 $B_1:=B_1(0)$。对于 $r>0$ 和 $U\subseteq\mathbb{R}^d$，定义 $U_r:=\{x\in U:\operatorname{dist}(x,\partial U)>r\}$。对于每个 $n\in\mathbb{N}$，我们将三进立方体记为

$$\square_n:=\left(-\frac{1}{2}\cdot 3^n,\frac{1}{2}\cdot 3^n\right)^d.$$

对于 $k\in\mathbb{N}$ 和 $f\colon U\to\mathbb{R}^d$，$\nabla^k f$ 是 f的 k阶偏导数张量：

$$\nabla^k f:=\left(\partial_{x_{i_1}}\dots\partial_{x_{i_k}}f\right)_{i_1,i_2,\dots,i_k\in\{1,2,\dots,d\}}.$$

对于可测集 $E \subseteq \mathbb{N}^d$，我们用 $|E|$表示 E 的勒贝格测度。为简化记号，我们将可积函数 f 在 $U \to \mathbb{R}$ 上的积分记为

$$\int_U f := \int_U f(x)dx.$$

当 $0 < |U| < \infty$ 和 $f \in L^1(U)$ 时，我们记作

$$\fint_U f := \frac{1}{|U|}\int_U f.$$

We 我们常使用归一化的 L^p 范数：对于每个 $p \in [1,\infty)$， $0 < |U| < \infty$ 和 $f \in L^p(U)$，我们设 t

$$\|f\|_{\underline{L}^p(U)} := \left(\fint_U |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |U|^{-\frac{1}{p}}\|f\|_{L^p(U)}.$$

若 F，则记 $F \in L^p(U)$： $U \to \mathbb{R}^m$ 是一个向量场，使得 $|F| \in L^p(U)$，并定义

$$\|F\|_{L^p(U)} := \||F|\|_{L^p(U)} \quad \text{and} \quad \|F\|_{\underline{L}^p(U)} := \||F|\|_{\underline{L}^p(U)}.$$

对于 $p \in \mathbb{R}^d$，我们将经过原点且斜率为 p 的仿射函数记为 $l_p(x) := p \cdot x$。我们用 $H^1(U) = W^{1,2}(U)$ 表示索博列夫空间，并用 $H_0^1(U)$ 表示 $C_c^\infty(U)$ 在 $H^1(U)$ 中的闭包。我们将 $u \in H^1(U)$ 的归一化 $H^1(U)$ 范数定义为

$$\|u\|_{\underline{H}^1(U)} := |U|^{-\frac{1}{d}}\|u\|_{\underline{L}^2(U)} + \|\nabla u\|_{\underline{L}^2(U)}.$$

注意，对于每个 $a > 0$,

$$\left\|u\left(\frac{\cdot}{a}\right)\right\|_{\underline{H}^1(aU)} = \frac{1}{a}\|u\|_{\underline{H}^1(U)}.$$

对于每个分布 u，负阶索博列夫范数定义为

$$\|u\|_{H^{-1}(U)} := \sup\left\{\int_U uv : v \in H_0^1(U), \|v\|_{H^1(U)} \le 1\right\}.$$

本文采用两种不同的归一化 $H^{-1}(U)$ 范数。定义如下 :

$$\|u\|_{\underline{H}^{-1}(U)} := \sup\left\{\fint_U uv : v \in H_0^1(U), \|v\|_{\underline{H}^1(U)} \le 1\right\},$$
$$\|u\|_{\widehat{\underline{H}}^{-1}(U)} := \sup\left\{\fint_U uv : v \in H^1(U), \|v\|_{\underline{H}^1(U)} \le 1\right\}.$$

请注意，我们用 $\int_U uv$ 表示 u 与 v 之间的对偶配对，并在上述定义中将其理解为 ffl $_U uv = |U|^{-1}\int_U uv$。注意到

$$\left\|u\left(\frac{\cdot}{a}\right)\right\|_{\underline{H}^{-1}(aU)} = a\|u\|_{\underline{H}^{-1}(U)} \quad \text{and} \quad \left\|u\left(\frac{\cdot}{a}\right)\right\|_{\widehat{\underline{H}}^{-1}(aU)} = a\|u\|_{\widehat{\underline{H}}^{-1}(U)}.$$

H^1_{lo}c(U) 表示定义在 U 上的函数集合；当 V 有界时，这些函数属于 $H^1(V)$ nd $\overline{V} \subset U$。我们将该方程的弱解集合记为

$$-\nabla \cdot (\mathbf{a}\nabla u) = 0 \quad \text{in } U$$

由 $\mathcal{A}(U) \subseteq H^1_{\mathrm{loc}}(U)$ 给出。注意， $\mathcal{A}(U)$ 是满足 $-\nabla\cdot(\mathbf{a}\nabla u) = 0$ 的弱解集合，且该方程在分布意义下成立。这等价于以下条件

$$\int_U \nabla\phi \cdot \mathbf{a}\nabla u = 0 \quad \text{for every } \phi \in H_0^1(U).$$

我们将记号 $\mathrm{Var}[X]$ 和 $\mathrm{Cov}[X,Y]$ 扩展到随机向量 $X, Y\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$，定义为

$$\mathrm{Var}[X] := \mathbb{E}\left[|X - \mathbb{E}[X]|^2\right] \quad \text{and} \quad \mathrm{Cov}[X,Y] := \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X]) \cdot (Y - \mathbb{E}[Y])\right].$$

Th单位矩阵记作 Id。对于 $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$，令 $|A|$ 为 A 的算子范数，定义如下 by

$$|A| := \sup_{\xi\in\mathbb{R}^d, |\xi|=1} |A\xi|.$$

我们在正定 $d \times d$ 矩阵集合中定义偏序关系 $\leq$，如下所示：

$$A \leq B \quad \Leftrightarrow \quad p \cdot (B - A)p \geq 0 \ \text{ for every } p \in \mathbb{R}^d.$$

注意，该偏序关系对于逆矩阵具有以下性质：设 A、$B \in \mathbb{R}^{d\times d}$ 为正定矩阵，则

$$A^{-1} \leq B^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad A \geq B.$$

证明参见 [19, 定理 2.2.5.]。全文中，c 和 C 表示正数常量，这些常量可能在不同段落之间以及同一行的多个表达式之间发生变化，且不另行说明。

2 次可加量的收敛

2.1 次可加量 μ、μ_* 和 J

我们回顾 [4] 中的次可加量，它们在本文中发挥着关键作用。对于有界利普希茨区域 $U \subset \mathbb{R}^d$ 和 $p \in \mathbb{R}^d$，记 $l_p(x) := p \cdot x$，并定义

$$\mu(U,p) := \inf_{v\in l_p + H_0^1(U)} \fint_U \frac{1}{2}\nabla v \cdot \mathbf{a}\nabla v = \inf_{w\in H_0^1(U)} \fint_U \frac{1}{2}(p + \nabla w) \cdot \mathbf{a}(p + \nabla w). \tag{2.1}$$

我们将 $v(\cdot, U, p)$ 记为使 $\fint_U \frac{1}{2}\nabla v \cdot \mathbf{a}\nabla v$ 达到极小的唯一 $v \in l_p + H_0^1(U)$。由 (1.6) 可得，下文 (2.3) 中的 $v(\cdot, U, p)$ 的存在性与唯一性，或最大化子的存在性。我们指出，$v(\cdot, U, p)$ 可刻画为狄利克雷问题的唯一弱解

$$-\nabla \cdot \mathbf{a}\nabla v = 0 \quad (\text{in } U), \qquad v = l_p \quad (\text{on } \partial U), \tag{2.2}$$

在分布意义下。换言之，$v(\cdot, U, p) \in l_p + H_0^1(U)$ 满足，对于每个 $w \in H_0^1(U)$，

$$\fint_U \nabla w \cdot \mathbf{a}\nabla v(\cdot, U, p) = 0.$$

对于有界利普希茨区域 $U \subseteq \mathbb{R}^d$ 和 $p \in \mathbb{R}^d$，我们还定义对偶次可加量$\mu_*(U, q)$，如下：

$$\mu_*(U,q) := \sup_{u\in\mathcal{A}(U)} \left(\fint_U -\frac{1}{2}\nabla u \cdot \mathbf{a}\nabla u + q \cdot \nabla u \right). \tag{2.3}$$

回忆一下，$\mathcal{A}(U)$ 是 $-\nabla \cdot (\mathbf{a}\nabla u) = 0$ 的弱解线性空间。我们定义 $J(U, p, q)$ 如下：

$$J(U,p,q) := \mu(U,p) + \mu_*(U,q) - p \cdot q. \tag{2.4}$$

我们的目标是证明 $J(\square_n, p, {}^-\mathbf{a}p)$ 收敛到 0。首先，我们在以下引理中给出 J 的另一种刻画。

引理 2.1. 对于每个有界利普希茨区域 $U \in \mathbb{R}^d$ 和 p，$q \in \mathbb{R}^d$，

$$J(U,p,q) = \sup_{w\in\mathcal{A}(U)} \fint_U \left(-\frac{1}{2}\nabla w \cdot \mathbf{a}\nabla w - p \cdot \mathbf{a}\nabla w + q \cdot \nabla w \right). \tag{2.5}$$

此外，$(v\cdot, U, p, q)$ 是(2.5) 的最大化子，等于(2.3) 中 $\mu_*(U, q)$ 的最大化子与$v(\cdot, U, p)$之差。

证明。 见 [4, 引理 2.1]。 □

容易看出， $v(\cdot, U, p, q)$在相差加性常数的意义下是唯一的。为方便起见，我们选取此加性常数，使得 $\fint_U v(\cdot, U, 0, q) = 0$ 且 $v(\cdot, U, p, 0) = -v(\cdot, U, p)$。

在 (2.5) 的右端取测试函数 0，可知对任意 $p, q \in \mathbb{R}^d$,

$$\mu(U, p) + \mu_*(U, q) - p \cdot q = J(U, p, q) \geq 0. \tag{2.6}$$

下面的引理给出了 $J(U, p, q)$ 和 $v(\cdot, U, p, q)$ 的一些基本性质。

引理 2.2 (J的性质**).** 设 $U \subseteq \mathbb{R}^d$ 是一个有界 *Lipschitz* 区域。 $J(U, p, q)$ 和 $v(\cdot, U, p, q)$满足以下性质：

- (表示为二次型) 映射 $(p, q) \mapsto J(U, p, q)$ 是一个二次型，并且存在对称矩阵 $\mathbf{a}(U)$ 和 $\mathbf{a}_*(U)$ ，使得

$$\lambda(U)\mathsf{Id} \leq \mathbf{a}_*(U) \leq \mathbf{a}(U) \leq \Lambda(U)\mathsf{Id} \tag{2.7}$$

and

$$J(U, p, q) = \frac{1}{2} p \cdot \mathbf{a}(U) p + \frac{1}{2} q \cdot \mathbf{a}_*^{-1}(U) q - p \cdot q \tag{2.8}$$

此外，$\mathbf{a}(U)$ 和 $\mathbf{a}_*(U)$ 由以下关系刻画，对任意 $p, q \in \mathbb{R}^d$:

$$\mathbf{a}(U) p = -\fint_U \mathbf{a} \nabla v(\cdot, U, p, 0), \tag{2.9}$$

$$\mathbf{a}_*^{-1}(U) q = \fint_U \nabla v(\cdot, U, 0, q). \tag{2.10}$$

- (次可加性) 设 $U_1, U_2, \ldots, U_N \subseteq U$是有界利普希茨区域，构成 U 的一个划分，即

$$U_i \cap U_j = \emptyset \ \text{ if } i \neq j, \quad \text{and} \quad \left| U \setminus \bigcup_{i=1}^N U_i \right| = 0. \tag{2.11}$$

那么，对任意 $p, q \in \mathbb{R}^d$,

$$J(U, p, q) \leq \sum_{i=1}^N \frac{|U_i|}{|U|} J(U_i, p, q). \tag{2.12}$$

- (J的一阶变分) 对于 $p, q \in \mathbb{R}^d$, $v(\cdot, U, p, q)$ 被刻画为 $\mathcal{A}(U)$ 中的唯一函数，它满足对任意 $w \in \mathcal{A}(U)$,

$$\fint_U \nabla w \cdot \mathbf{a} \nabla v(\cdot, U, p, q) = \fint_U \left(-p \cdot \mathbf{a} \nabla w + q \cdot \nabla w \right). \tag{2.13}$$

- (二次响应) 若 $U_1, U_2, \ldots, U_N \subseteq U$是有界利普希茨区域，且按照(2.11)的意义构成 U 的一个划分，则

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^N \frac{|U_i|}{|U|} \fint_{U_i} \frac{1}{2} \left(\nabla v(\cdot, U, p, q) - \nabla v(\cdot, U_i, p, q) \right) \cdot \mathbf{a} \left(\nabla v(\cdot, U, p, q) - \nabla v(\cdot, U_i, p, q) \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{|U_i|}{|U|} \left(J(U_i, p, q) - J(U, p, q) \right). \end{aligned} \tag{2.14}$$

证明。 由 (1.5) 和 (1.6)，采用与 [4, 引理 2.2 和 2.12],的证明类似的论证，可得 (2.12)、(2.13) 和 (2.14)。为了证明 $\mathsf{a}_*(U)$ 的存在性，并给出 $\mathsf{a}(U)$ 和 $\mathsf{a}_*(U)$ 的界，我们将证明其可表示为二次型。由 (2.13)，我们有

$$(p,q)\mapsto v(\cdot,U,p,q) \text{ is linear.} \tag{2.15}$$

我们注意到，有如下恒等式：

$$J(U,p,q)=\fint_U \frac{1}{2}\nabla v(\cdot,U,p,q)\cdot\mathbf{a}\nabla v(\cdot,U,p,q). \tag{2.16}$$

事实上，这可直接由 (2.5) 和 (2.13) 得出。结合 (2.15)，可推出

$$(p,q)\mapsto J(U,p,q) \text{ is quadratic.} \tag{2.17}$$

由 (2.1) 和 (2.3) 可得 $\mu(U,0)=0$ 且 $\mu_*(U,0)=0$。结合公式 (2.4) 和 (2.16)，特别可得

$$p\mapsto\mu(U,p) \text{ and } q\mapsto\mu_*(U,q) \text{ are quadratic.} \tag{2.18}$$

我们定义 $\mathsf{a}(U)$、$\hat{}\mathsf{a}_*(U)$ 为对称矩阵，使得对任意 p、$q\in\mathbb{R}^d$，

$$\mu(U,p)=\frac{1}{2}p\cdot\mathbf{a}(U)p, \tag{2.19}$$

$$\mu_*(U,q)=\frac{1}{2}q\cdot\hat{\mathbf{a}}_*(U)q. \tag{2.20}$$

由 (2.16) 和 (2.4)，可得

$$p\cdot\mathbf{a}(U)p=\fint_U\nabla v(\cdot,U,p,0)\cdot\mathbf{a}\nabla v(\cdot,U,p,0),$$
$$q\cdot\hat{\mathbf{a}}_*(U)q=\fint_U\nabla v(\cdot,U,0,q)\cdot\mathbf{a}\nabla v(\cdot,U,0,q).$$

结合 (2.15)，可知对任意 p、$q\in\mathbb{R}^d$，

$$q\cdot\mathbf{a}(U)p=\fint_U\nabla v(\cdot,U,p,0)\cdot\mathbf{a}\nabla v(\cdot,U,q,0),$$
$$p\cdot\hat{\mathbf{a}}_*(U)q=\fint_U\nabla v(\cdot,U,0,q)\cdot\mathbf{a}\nabla v(\cdot,U,0,p).$$

由 (2.13)，我们得到

$$q\cdot\mathbf{a}(U)p=-\fint_U q\cdot\mathbf{a}\nabla v(\cdot,U,p,0),$$
$$p\cdot\hat{\mathbf{a}}_*(U)q=\fint_U p\cdot\nabla v(\cdot,U,0,q).$$

这些意味着

$$\mathbf{a}(U)p=-\fint_U\nabla v(\cdot,U,p,0) \tag{2.21}$$

$$\hat{\mathbf{a}}_*(U)q=\fint_U\nabla v(\cdot,U,0,q). \tag{2.22}$$

我们证明了 $\mathsf{a}(U)$ 和 $\hat{}\mathsf{a}_*(U)$ 的界，以及 $\hat{}\mathsf{a}_*(U)$ 的逆矩阵的存在性。通过在 $\mu(U,p)$ 的定义中取 l_p 作为检验函数，可立即得到 $\mathsf{a}(U)$ 的上界：

$$p\cdot\mathbf{a}(U)p=2\mu(U,p)\le\fint_U\nabla l_p\cdot\mathbf{a}\nabla l_p=\fint_U p\cdot\mathbf{a}p\le\Lambda(U)|p|^2. \tag{2.23}$$

这意味着 $\mathbf{a}(U) \leq \Lambda(U)\mathrm{Id}$。利用詹森不等式可得 $\mathbf{a}(U)$ 的下界：对于每个 $w \in H_0^1(U)$,

$$\fint_U \frac{1}{2}(p+\nabla w)\cdot \mathbf{a}(p+\nabla w) \geq \fint_U \frac{\lambda(U)}{2}|p+\nabla w|^2 \geq \frac{\lambda(U)}{2}\left|p+\fint_U \nabla w\right|^2 = \frac{\lambda(U)}{2}|p|^2.$$

对 $w \in H_0^1(U)$ 取下确界，并结合（2.1），得到下界 $\lambda(U)\mathrm{Id} \leq \mathbf{a}(U)$。根据 $\mathbf{a}(U)$ 的界，我们可知存在一个正定的 $\mathbf{a}^{-1}(U)$。由（2.6）、（2.19）和（2.20），可得

$$\frac{1}{2}p\cdot \mathbf{a}(U)p + \frac{1}{2}q\cdot \hat{\mathbf{a}}_*(U)q \geq p\cdot q$$

将 $p = \mathbf{a}^{-1}(U)q$ 代入该不等式，可得 $\mathbf{a}^{-1}(U) \leq \hat{\mathbf{a}}_*(U)$，且 $\hat{\mathbf{a}}_*(U)$ 也是正定的。我们通过满足以下条件的正定矩阵定义 $\mathbf{a}_*(U)$:

$$\mathbf{a}_*(U) := \hat{\mathbf{a}}_*^{-1}(U). \tag{2.24}$$

由（2.4）、（2.21）、（2.22）和（2.24），可得（2.8）、（2.9）和（2.10）。由于 $\mathbf{a}^{-1}(U)$ 和 $\mathbf{a}_*^{-1}(U)$ 为正，故不等式 $\mathbf{a}^{-1}(U) \leq \mathbf{a}_*^{-1}(U)$ 导出界 $\mathbf{a}_*(U) \leq \mathbf{a}(U)$。为获得 $\mathbf{a}_*(U)$ 的下界，我们首先利用（2.10）写出

$$\frac{1}{2}q\cdot \mathbf{a}_*^{-1}(U)q = \frac{1}{2}\fint_U q\cdot \nabla v(\cdot,U,0,q).$$

由杨氏不等式,

$$\fint_U q\cdot\nabla v(\cdot,U,0,q) \leq \fint_U \left(\frac{1}{2}q\cdot \mathbf{a}^{-1}q + \frac{1}{2}\nabla v(\cdot,U,0,q)\cdot \mathbf{a}\nabla v(\cdot,U,0,q)\right),$$

因此，由 (2.8) 和 (2.16),

$$q\cdot \mathbf{a}_*^{-1}(U)q \leq \fint_U q\cdot \mathbf{a}^{-1}q \leq \frac{1}{\lambda(U)}|q|^2,$$

这给出了所需的下界 $\lambda(U)\mathrm{Id} \leq \mathbf{a}_*(U)$。引理得证。 □

由 (2.20) 和 (2.24)，我们有

$$\mu_*(U,q) = \frac{1}{2}q\cdot \mathbf{a}_*^{-1}(U)q. \tag{2.25}$$

我们还注意到，(2.7)、(2.19) 和 (2.25) 导致

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\lambda(U)|p|^2 \leq \mu(U,p) \leq \frac{1}{2}\Lambda(U)|p|^2,\\
&\frac{1}{2\Lambda(U)}|q|^2 \leq \mu_*(U,q) \leq \frac{1}{2\lambda(U)}|q|^2.
\end{aligned} \tag{2.26}$$

由此不等式和 (2.4)，我们得到

$$J(U,p,q) \leq \frac{1}{2}\Lambda(U)|p|^2 + \frac{1}{2\lambda(U)}|q|^2 + |p||q|. \tag{2.27}$$

该不等式与 (2.16) 表明

$$\begin{aligned}
\fint_U |\nabla v(\cdot,U,p,q)|^2 &\leq \frac{1}{\lambda(U)}\fint_U \nabla v(\cdot,U,p,q)\cdot \mathbf{a}\nabla v(\cdot,U,p,q)\\
&= \frac{2}{\lambda(U)}J(U,p,q)\\
&\leq \frac{\Lambda(U)}{\lambda(U)}|p|^2 + \frac{1}{\lambda(U)^2}|q|^2 + \frac{1}{\lambda(U)}|p||q|.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

下面的引理是估计关于 J 的量的基础，由此可得 $\mathbf{a}(\square_n)$ 收敛到 $\bar{\mathbf{a}}$。

引理 2.3。 存在一个常数 $C<\infty$，使得对于每个对称矩阵 $\tilde{\mathbf{a}}\in\mathbb{R}^{d\times d}$以及每个有界利普希茨区域 $U\subseteq\mathbb{R}^d$，我们都有

$$|\mathbf{a}(U)-\tilde{\mathbf{a}}|\le C\Lambda(U)^{\frac{1}{2}}\sup_{p\in B_1}\left(J(U,p,\tilde{\mathbf{a}}p)\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.29}$$

证明。 由 (2.7) 和 (2.8)，对任意 p、$q\in\mathbb{R}^d$，有

$$\begin{aligned}|\mathbf{a}(U)p-q|^2\le&\Lambda(U)\left((\mathbf{a}(U)p-q)\cdot\mathbf{a}^{-1}(U)(\mathbf{a}(U)p-q)\right)\\=&\Lambda(U)\left(p\cdot\mathbf{a}(U)p+q\cdot\mathbf{a}^{-1}(U)q-2p\cdot q\right)\\\le&\Lambda(U)\left(p\cdot\mathbf{a}(U)p+q\cdot\mathbf{a}_*^{-1}(U)q-2p\cdot q\right)\\=&2\Lambda(U)J(U,p,q).\end{aligned}$$

取 $q=\tilde{\mathbf{a}}p$ 并对 $p\in B_1$ 取上确界，可得 (2.29)。 □

令均匀化系数为 $\bar{\mathbf{a}}$。次可加性和平稳性导出 $\mathbb{E}\left[\mu(\square_m,p)\right]$ 的单调性：对任意 $m\in\mathbb{N}$ 和 $p\in\mathbb{R}^d$，

$$\mathbb{E}\left[\mu(\square_{m+1},p)\right]\le\mathbb{E}\left[\mu(\square_m,p)\right]. \tag{2.30}$$

为证明这一点，我们首先对划分 $\{z+\square_m:\ z\in\{-3^m,0,3^m\}^d\}$ 应用 (2.12)，将 $\square_{m+1}$ 划分为其 3^d 个最大的三分子立方体，得到

$$\mu(\square_{m+1},p)\le 3^{-d}\sum_{z\in\{-3^m,0,3^m\}^d}\mu(z+\square_m,p).$$

由平稳性，对任意 $z\in\mathbb{Z}^d$，$\mu(z+\square_m,p)$ 的分布与 $\mu(\square_m,p)$ 的分布相同。对上式取期望，得到 (2.30)。通过类似论证，我们有：对任意 p、$q\in\mathbb{R}^d$

$$\mathbb{E}\left[\mu_*(\square_{m+1},q)\right]\le\mathbb{E}\left[\mu_*(\square_m,q)\right], \tag{2.31}$$

$$\mathbb{E}\left[J(\square_{m+1},p,q)\right]\le\mathbb{E}\left[J(\square_m,p,q)\right]. \tag{2.32}$$

利用 $\mathsf{a}(U)$ 的正性和 (2.19)，我们看到，对于每个 $p\in\mathbb{R}^d$，数列 $\{\mathbb{E}[\mu(\square_m,p)]\}_{m\in\mathbb{N}}$ 有下界且单调不增。因此它存在一个极限，记为

$$\bar{\mu}(p):=\lim_{m\to\infty}\mathbb{E}[\mu(\square_m,p)]=\inf_{m\in\mathbb{N}}\mathbb{E}[\mu(\square_m,p)]. \tag{2.33}$$

由 (2.18) 可知，$p\mapsto\mathbb{E}[\mu(U,p)]$ 也是二次型，因此

$$p\mapsto\bar{\mu}(p)\text{ is quadratic.}$$

根据这些事实，均匀化系数 $\bar{\mathbf{a}}\in\mathbb{R}^{d\times d}$ 可定义为满足下式的对称矩阵

$$\bar{\mu}(p)=\frac{1}{2}p\cdot\bar{\mathbf{a}}p\quad(p\in\mathbb{R}^d).$$

我们给出一个利用局部信息估计均匀化系数的方法。

命题 2.4. 若 $\mathbb{E}[\Lambda(\square_0)]$ 和 $\mathbb{E}[\lambda(\square_0)^{-1}]$ 均为有限值，则均匀化系数 $\bar{\mathbf{a}}$ 为正定矩阵，并且满足

$$\mathbb{E}[\lambda(\square_0)^{-1}]^{-1}\mathsf{Id}\le\bar{\mathbf{a}}\le\mathbb{E}[\Lambda(\square_0)]\mathsf{Id}. \tag{2.34}$$

证明。 由 (2.33) 和 (2.23) 可立即得到上界：对每个 $p\in\mathbb{R}^d$

$$p\cdot\bar{\mathbf{a}}p=2\bar{\mu}(p)\le\mathbb{E}[2\mu(\square_0,p)]\le\mathbb{E}[\Lambda(\square_0)]|p|^2.$$

下界由 (2.6)、(2.31) 和 (2.26) 得出：对每个 $m \in \mathbb{N}$ 以及每个 $p, q \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} 2\mathbb{E}[\mu(\square_m, p)] &\geq 2p \cdot q - 2\mathbb{E}[\mu_*(\square_m, q)] \\ &\geq 2p \cdot q - 2\mathbb{E}[\mu_*(\square_0, q)] \\ &\geq 2p \cdot q - \mathbb{E}[\lambda(\square_0)^{-1}]|q|^2. \end{aligned}$$

选取 $q = \mathbb{E}[\lambda(\square_0)^{-1}]^{-1} p$ 并对 $m \in \mathbb{N}$ 取下确界，得到

$$p \cdot \bar{\mathbf{a}} p \geq \mathbb{E}[\lambda(\square_0)^{-1}]^{-1} |p|^2.$$

因此，(2.34) 得证。 □

注 2.5。 (2.23) 中 $\mu(U, p)$ 的上界可改进为

$$\mu(U, p) \leq \fint_U \frac{1}{2} |\mathbf{a}| |p|^2.$$

根据上式并采用类似的论证，我们得到对 $\bar{\mathbf{a}}$ 的更精确估计：

$$\mathbb{E}\left[\fint_{\square_0} \left|\mathbf{a}^{-1}\right|\right]^{-1} \mathsf{Id} \leq \bar{\mathbf{a}} \leq \mathbb{E}\left[\fint_{\square_0} |\mathbf{a}|\right] \mathsf{Id}.$$

2.2 次可加量的定量收敛

本节旨在考察系数的无界性和非一致椭圆性对 $\mathsf{a}(\square_n)$ 收敛至 $\bar{\mathsf{a}}$ 的收敛速率估计的影响。我们引入以下概念，以控制系数较大或较小时事件的影响。

定义 2.6. 固定 $L < \infty$。若一对正实数序列 $(\{\delta_n\}, \{M_n\})$ 满足 $\{\delta_n\}$ 递减、$\{M_n\}$ 递增，且 $\delta_0 = M_0 = 1$ 对每个 $n \in \mathbb{N}$，则称其为抑制序列。

$$\mathbb{E}\left[\lambda(\square_n)^{-3} + \Lambda(\square_n)^3 : \{\lambda(\square_n) \leq \delta_n\} \cup \{\Lambda(\square_n) \geq M_n\}\right] \leq L e^{-n}. \tag{2.35}$$

粗略地说，如果单位立方体内的系数具有指数可积性，我们可以将多项式作为抑制序列。下面给出一个抑制序列的例子。固定β、$\gamma > 0$，并假设存在满足以下条件的 $M < \infty$

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\Lambda(\square_0)^{\beta}\right)\right] + \mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda(\square_0)^{-\gamma}\right)\right] \leq M.$$

那么，对于 $\beta' > \frac{1}{\beta}$和 $\gamma' > \frac{1}{\gamma}$，存在 $L(\beta, \gamma, M, \beta', \gamma') < \infty$，使得

$$\delta_n := (n+1)^{-\gamma'} \quad \text{and} \quad M_n := (n+1)^{\beta'}$$

是抑制序列。该结论的证明见第 3.3 节。

注意，(2.35)给出了一个常数 $C = C(L) < \infty$，使得对于每个满足$p + q \leq 3$ 且满足 $n \in \mathbb{N}$的 p, $q \geq 0$，

$$\mathbb{E}\left[\Lambda(\square_n)^p \lambda(\square_n)^{-q} : \{\lambda(\square_n) \leq \delta_n\} \cup \{\Lambda(\square_n) \geq M_n\}\right] \leq C e^{-n}. \tag{2.36}$$

事实上，由于 $\lambda(\square_n) \leq \Lambda(\square_n)$，对于每个 $A \in \mathcal{F}$，

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\Lambda(\square_n)^p \lambda(\square_n)^{-q} : A\right] &\leq \mathbb{E}\left[\left(\Lambda(\square_n)\lambda(\square_n)^{-1}\right)^{\frac{3-p-q}{2}} \Lambda(\square_n)^p \lambda(\square_n)^{-q} : A\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\Lambda(\square_n)^{\frac{3+p-q}{2}} \lambda(\square_n)^{-\left(\frac{3-p+q}{2}\right)} : A\right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[\max\{\Lambda(\square_n), \lambda(\square_n)^{-1}\}^3 : A\right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[\lambda(\square_n)^{-3} + \Lambda(\square_n)^3 : A\right]. \end{aligned} \tag{2.37}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\Lambda(\square_n)^p\lambda(\square_n)^{-q}:\{\lambda(\square_n)\le\delta_n\}\cup\{\Lambda(\square_n)\ge M_n\}\right]\\&\le\mathbb{E}\left[\Lambda(\square_n)^3+\lambda(\square_n)^{-3}:\{\lambda(\square_n)\le\delta_n\}\cup\{\Lambda(\square_n)\ge M_n\}\right]\le Le^{-n}.\end{aligned}$$

我们还注意到，(2.35) 推出了常数 $C=C(L)<\infty$ 的存在，使得

$$\mathbb{E}[\Lambda(\square_0)]+\mathbb{E}[\lambda(\square_0)^{-1}]\le C. \tag{2.38}$$

事实上，(2.37) 和 (2.35) 表明，对于每个满足 $p+q\le 3$ 的 $p,q\ge 0$，

$$\mathbb{E}\left[\Lambda(\square_0)^p\lambda(\square_0)^{-q}\right]\le\mathbb{E}\left[\lambda(\square_0)^{-3}+\Lambda(\square_0)^3\right]\le L+2. \tag{2.39}$$

因此，由此不等式可得 (2.38)。

本节的主要结果是以下定理，它给出了定量收敛 r-gen性：a(□n) 收敛到 ¯a。

定理 2.7. 固定 $\alpha\in(0,1\,3)$。假设存在抑制序列 $(\{\delta_n\},\{M_n\})$，使得对每个 $n\in\mathbb{N}$,

$$\frac{M_n}{\delta_n}\le(n+1)^\alpha.$$

那么存在常数 $c=c(d,\ r,\ \alpha,\ L)>0$ 和 $C=C(d,\ r,\ \alpha,\ L)<\infty$，使得对于任意 $n\in\mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}\left[|\bar{\mathbf{a}}-\mathbf{a}(\square_n)|^2\right]\le C\exp\left(-cn^{1-3\alpha}\right). \tag{2.40}$$

为证明这一理论，我们将估计 $\mathbb{E}[J(\square_n,p,q)]$，其中

$$\begin{aligned}\tau_n:&=\sup_{p,q\in B_1}\left(\mathbb{E}\left[J\left(\square_n,p,q\right)\right]-\mathbb{E}\left[J\left(\square_{n+1},p,q\right)\right]\right)\\&=\sup_{p\in B_1}\left(\mathbb{E}\left[\mu\left(\square_n,p\right)\right]-\mathbb{E}\left[\mu\left(\square_{n+1},p\right)\right]\right)+\sup_{q\in B_1}\left(\mathbb{E}\left[\mu_*\left(\square_n,q\right)\right]-\mathbb{E}\left[\mu_*\left(\square_{n+1},q\right)\right]\right).\end{aligned}$$

并进行迭代。我们首先估计 J 的最大化子的梯度的空间平均的方差。

引理 2.8。设 $(\{\delta_n\},\ \{M_n\})$ 为抑制性的。则存在 $\kappa=\kappa(d,\ r)>0$ 和 $C=C(d,\ r,\ L)<\infty$，使得对于任意 $p,\ q\in B_1$ 和 $n\in\mathbb{N}$,

$$\operatorname{Var}\left[\fint_{\square_n}\nabla v(\cdot,\square_n,p,q)\right]\le Ce^{-\kappa n}+\frac{C}{\delta_n}\sum_{m=0}^{n-1}e^{-\kappa(n-m-1)}\tau_m.$$

证明。步骤 *1*。固定 $n\in\mathbb{N}, p,q\in B_1$ 并设 $v:=v(\cdot,\square_{n+1},p,q)$，$v_z:=v(\cdot,z+\square_n,p,q)$。我们首先证明存在 $\kappa'>0$ 和 $C=C(d,L)<\infty$，使得

$$\operatorname{Var}\left[\fint_{\square_{n+1}}\nabla v\right]^{1/2}\le\operatorname{Var}\left[3^{-d}\sum_{z\in 3^n\mathbb{Z}^d\cap\square_{n+1}}\fint_{z+\square_n}\nabla v_z\right]^{1/2}+\frac{C}{\delta_{n+1}^{1/2}}\tau_n^{1/2}+Ce^{-\kappa' n}. \tag{2.41}$$

利用柯西-施瓦茨不等式和詹森不等式，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Var}\left[\fint_{\square_{n+1}} \nabla v\right]^{1/2} \\
\leq &\operatorname{Var}\left[3^{-d} \sum_{z\in 3^n\mathbb{Z}^d\cap\square_{n+1}} \fint_{z+\square_n} (\nabla v-\nabla v_z)\right]^{1/2} + \operatorname{Var}\left[3^{-d} \sum_{z\in 3^n\mathbb{Z}^d\cap\square_{n+1}} \fint_{z+\square_n} \nabla v_z\right]^{1/2} \\
\leq &\mathbb{E}\left[3^{-2d}\left|\sum_{z\in 3^n\mathbb{Z}^d\cap\square_{n+1}} \fint_{z+\square_n} (\nabla v-\nabla v_z)\right|^2\right]^{1/2} + \operatorname{Var}\left[3^{-d} \sum_{z\in 3^n\mathbb{Z}^d\cap\square_{n+1}} \fint_{z+\square_n} \nabla v_z\right]^{1/2} \\
\leq &\mathbb{E}\left[3^{-d} \sum_{z\in 3^n\mathbb{Z}^d\cap\square_{n+1}} \fint_{z+\square_n} |\nabla v-\nabla v_z|^2\right]^{1/2} + \operatorname{Var}\left[3^{-d} \sum_{z\in 3^n\mathbb{Z}^d\cap\square_{n+1}} \fint_{z+\square_n} \nabla v_z\right]^{1/2}.
\end{aligned}
$$

由 (1.5) 和 (2.14)，可知

$$
\begin{aligned}
&\sum_{z\in 3^n\mathbb{Z}^d\cap\square_{n+1}} \fint_{z+\square_n} |\nabla v-\nabla v_z|^2 \\
&\leq \frac{1}{\lambda(\square_{n+1})} \sum_{z\in 3^n\mathbb{Z}^d\cap\square_{n+1}} \fint_{z+\square_n} (\nabla v-\nabla v_z)\cdot \mathbf{a}(\nabla v-\nabla v_z) \\
&= \frac{2}{\lambda(\square_{n+1})} \sum_{z\in 3^n\mathbb{Z}^d\cap\square_{n+1}} \left(J\left(z+\square_n,p,q\right)-J\left(\square_{n+1},p,q\right)\right). \qquad (2.42)
\end{aligned}
$$

由平稳性可得

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\frac{1}{\lambda(\square_{n+1})} \sum_{z\in 3^n\mathbb{Z}^d\cap\square_{n+1}} \left(J\left(z+\square_n,p,q\right)-J\left(\square_{n+1},p,q\right)\right) : \lambda(\square_{n+1})>\delta_{n+1}\right] \\
\leq &\frac{1}{\delta_{n+1}}\mathbb{E}\left[\sum_{z\in 3^n\mathbb{Z}^d\cap\square_{n+1}} \left(J\left(z+\square_n,p,q\right)-J\left(\square_{n+1},p,q\right)\right)\right] \leq \frac{C}{\delta_{n+1}}\tau_n
\end{aligned}
$$

由于 $(\{\delta_n\},\{M_n\})$ 具有抑制性，由 (2.27) 和 (2.36) 可得

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\frac{1}{\lambda(\square_{n+1})} \sum_{z\in 3^n\mathbb{Z}^d\cap\square_{n+1}} \left(J\left(z+\square_n,p,q\right)-J\left(\square_{n+1},p,q\right)\right) : \lambda(\square_{n+1})\leq\delta_{n+1}\right] \\
\leq &C\,\mathbb{E}\left[\frac{\Lambda(\square_{n+1})}{\lambda(\square_{n+1})}+\frac{1}{\lambda(\square_{n+1})^2}+\frac{1}{\lambda(\square_{n+1})} : \lambda(\square_{n+1})\leq\delta_{n+1}\right] \leq Ce^{-n}
\end{aligned}
$$

结合前面四个显示式可得 (2.41)。

步骤 2. 在此步骤中，我们利用最大相关性的统一衰减，并证明存在 $\theta=\theta(d,r)\in(0,1)$，使得对于任意 $p,q\in B_1$ 和 $n\in\mathbb{N}$，

$$
\operatorname{Var}\left[3^{-d} \sum_{z\in 3^n\mathbb{Z}^d\cap\square_{n+1}} \fint_{z+\square_n} \nabla v\left(\cdot,z+\square_n,p,q\right)\right]^{1/2} \leq \theta \operatorname{Var}\left[\fint_{\square_n} \nabla v\left(\cdot,\square_n,p,q\right)\right]^{1/2}. \qquad (2.43)
$$

为简便起见，对于每个 $z\in 3^n\mathbb{Z}^d$，记 $X_z := \fint_{z+\square_n} \nabla v(\cdot,z+\square_n,p,q)$。展开方差可得

$$
\operatorname{Var}\left[3^{-d} \sum_{z\in 3^n\mathbb{Z}^d\cap\square_{n+1}} X_z\right] = 3^{-2d} \sum_{z,z'\in 3^n\mathbb{Z}^d\cap\square_{n+1}} \operatorname{Cov}\left[X_z,X_{z'}\right].
$$

利用柯西-施瓦茨不等式和平稳性可得

$$|\mathrm{Cov}\left[X_z, X_{z'}\right]| \leq \mathrm{Var}\left[X_z\right]^{1/2} \mathrm{Var}\left[X_{z'}\right]^{1/2} \leq \mathrm{Var}\left[X_0\right].$$

我们看到， X_z 的每个分量都属于 $\mathcal{L}^2\left(\mathcal{F}_{z+\square_n}\right)$。当 $z+\square_n$ 和 $z'+\square_n$既不相同也不相邻时，由 (1.4) 可知

$$|\mathrm{Cov}\left[X_z, X_{z'}\right]| \leq r\mathrm{Var}\left[X_z\right]^{1/2} \mathrm{Var}\left[X_{z'}\right]^{1/2} \leq r\mathrm{Var}\left[X_0\right].$$

由于我们至少可以找到一对既不相同也不相邻的子立方体 $z+\square_n$ 和 $z'+\square_n$，因此得到

$$\mathrm{Var}\left[3^{-d} \sum_{z \in 3^n\mathbb{Z}^d \cap \square_{n+1}} X_z\right] \leq \left(1-\frac{1-r}{3^{2d}}\right) \mathrm{Var}[X_0].$$

因此，(2.43) 对 $\theta := \left(1-\frac{1-r}{3^{2d}}\right)^{1/2}$ 得证。

步骤 *3.* 通过迭代 (2.41) 和 (2.43)，我们完成证明。固定 p、$q \in B_1$，并记 e

$$\sigma_n := \mathrm{Var}\left[\fint_{\square_n} \nabla v(\cdot, \square_n, p, q)\right].$$

结合 (2.41) 和 (2.43)，可知对每个 $n \in \mathbb{N}$,

$$\sigma_{n+1} \leq \theta\sigma_n + \frac{C}{\delta_{n+1}^{1/2}} \tau_n^{1/2} + Ce^{-\kappa' n}.$$

对 $\{\delta_n\}$ 进行迭代并使其递减，可得

$$\sigma_n \leq \theta^n \sigma_0 + C\sum_{m=0}^{n-1} \theta^{n-m-1} e^{-\kappa' m} + \frac{C}{\delta_n^{1/2}} \sum_{m=0}^{n-1} \theta^{n-m-1} \tau_m^{1/2}. \tag{2.44}$$

注意到 $\sigma_0 \leq C = C(L)$。事实上，利用柯西-施瓦茨不等式，我们有

$$\sigma_0^2 \leq \mathbb{E}\left[\left|\fint_{\square_0} \nabla v(\cdot, \square_0, p, q)\right|^2\right] \leq \mathbb{E}\left[\fint_{\square_0} |\nabla v(\cdot, \square_0, p, q)|^2\right].$$

因此，由该不等式、(2.28) 和 (2.39) 可得

$$\sigma_0^2 \leq \mathbb{E}\left[\fint_{\square_0} |\nabla v(\cdot, \square_0, p, q)|^2\right] \leq \mathbb{E}\left[\frac{\Lambda(\square_0)}{\lambda(\square_0)} + \frac{1}{\lambda(\square_0)^2} + \frac{1}{\lambda(\square_0)}\right] \leq C.$$

将 (2.44) 两边平方，并令 $\kappa := \kappa' \wedge -\log\theta$，可得

$$\begin{aligned}
\sigma_n^2 &\leq 3\theta^{2n}\sigma_0^2 + 3\left(C\sum_{m=0}^{n-1} \theta^{n-m-1} e^{-\kappa' m}\right)^2 + 3\left(\frac{C}{\delta_n^{1/2}} \sum_{m=0}^{n-1} \theta^{n-m-1} \tau_m^{1/2}\right)^2 \\
&\leq Ce^{-\kappa n} + \frac{C}{\delta_n}\left(\sum_{m=0}^{n-1} e^{-\kappa(n-m-1)} \tau_m\right).
\end{aligned}$$

证明完成。 □

通过应用与命题 2.4 类似的论证，我们得到，对每个 $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}\left[\Lambda\left(\square_0\right)\right]^{-1} \mathsf{Id} \leq \mathbb{E}\left[\mathbf{a}_*^{-1}\left(\square_n\right)\right] \leq \mathbb{E}\left[\mathbf{a}_*^{-1}\left(\square_0\right)\right] \leq \mathbb{E}\left[\lambda\left(\square_0\right)^{-1}\right] \mathsf{Id}. \tag{2.45}$$

定义 2.9。 我们定义一个确定性矩阵 $\bar{\mathsf{a}}_n$ ，如下：

$$\bar{\mathbf{a}}_n := \mathbb{E}\left[\mathbf{a}_*^{-1}(\square_n)\right]^{-1}.$$

根据（2.45），我们得到 $\bar{\mathsf{a}}_n$ 的界，即对于每个 $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}[\lambda(\square_0)^{-1}]^{-1}\mathsf{Id} \le \bar{\mathbf{a}}_0 \le \bar{\mathbf{a}}_n \le \mathbb{E}[\Lambda(\square_0)]\mathsf{Id}. \tag{2.46}$$

Sin由（2.38）和（2.46）可知，抑制序列的存在性导致常数的存在 ts $c = c(L) > 0$ 和 $C = C(L) < \infty$ ，使得

$$c\,\mathsf{Id} \le \bar{\mathbf{a}}_n \le C\,\mathsf{Id}. \tag{2.47}$$

我们将证明 $\bar{\mathsf{a}}_n$ 收敛于均匀化系数 $\bar{\mathsf{a}}$。这并非显然，因为 $\bar{\mathsf{a}}_n$ 是通过 $\mathsf{a}_*(\square_n)$ 定义的，而 $\bar{\mathsf{a}}$ 是通过 $\mathsf{a}(\square_n)$ 定义的。

我们记下 $\bar{\mathsf{a}}_n$ 的一些性质。（2.10）表明，对于每个 $q \in \mathbb{R}^d$,

$$\mathbb{E}\left[\fint_{\square_n} \nabla v\left(\cdot, \square_n, 0, q\right)\right] = \bar{\mathbf{a}}_n^{-1} q.$$

另一方面，由于函数 $v(\cdot, \square_n, p, 0)$ 属于 $-l_p + H_0^1(\square_n)$，因此对于每个 $p \in \mathbb{R}^d$,

$$\fint_{\square_n} \nabla v(\cdot, \square_n, p, 0) = -p.$$

结合前两个显示式和 (2.15)，得到

$$\mathbb{E}\left[\fint_{\square_n} \nabla v\left(\cdot, \square_n, p, q\right)\right] = \bar{\mathbf{a}}_n^{-1} q - p, \tag{2.48}$$

它与引理 2.8 中出现的量有关。

我们还注意到

$$\mathbb{E}\left[J\left(\square_n, p, \bar{\mathbf{a}}_n p\right)\right] \le \mathbb{E}\left[J\left(\square_n, p, q\right)\right] \le \mathbb{E}\left[J\left(\square_n, p, \bar{\mathbf{a}}_n p\right)\right] + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\lambda\left(\square_0\right)^{-1}\right]\left|q - \bar{\mathbf{a}}_n p\right|^2. \tag{2.49}$$

事实上，由 (2.8) 可得

$$\mathbb{E}\left[J\left(\square_n, p, q\right)\right] - \mathbb{E}\left[J\left(\square_n, p, \bar{\mathbf{a}}_n p\right)\right] = \frac{1}{2}\left|\bar{\mathbf{a}}_n^{-1/2}\left(q - \bar{\mathbf{a}}_n p\right)\right|^2.$$

因此，(2.46) 推出 (2.49)。

接下来，我们利用前一个引理和多尺度庞加莱不等式，通过 $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n$ 估计 $v(\cdot, \square_{n+1}, p, , q)$ 的平坦度。

引理 2.10。 设 $(\{\delta_n\}, \{M_n\})$ 具有抑制性。则存在 $\kappa = \kappa(d, r) > 0$ 以及 $C = C(d, r, L) < \infty$ ，使得对于每个 $n \in \mathbb{N}$ 和 $p, q \in B_1$,

$$\mathbb{E}\left[\fint_{\square_{n+1}} \left|v(x, \square_{n+1}, p, q) - \left(\bar{\mathbf{a}}_n^{-1} q - p\right) \cdot x\right|^2 dx\right] \le \frac{C}{\delta_{n+1}} 3^{2n}\left(e^{-\kappa n} + \sum_{k=0}^{n} e^{-\kappa(n-k)}\tau_k\right). \tag{2.50}$$

证明。步骤 *1*。我们首先使用多尺度庞加莱不等式。由于 $v(\cdot, \square_{n+1}, p, 0)$ 属于 $-l_p + H_0^1(\square_{n+1})$，且 $v(\cdot, \square_{n+1}, 0, q)$ 的空间平均为零，多尺度庞加莱不等式

(引理 4.3) 表明

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\fint_{\square_{n+1}}\left|v(x,\square_{n+1},p,q)-\left(\bar{\mathbf{a}}_n^{-1}q-p\right)\cdot x\right|^2dx\right]\\
\le& 2\left(\mathbb{E}\left[\fint_{\square_{n+1}}\left|v(x,\square_{n+1},p,0)+p\cdot x\right|^2dx\right]+\mathbb{E}\left[\fint_{\square_{n+1}}\left|v(x,\square_{n+1},0,q)-\bar{\mathbf{a}}_n^{-1}q\cdot x\right|^2dx\right]\right)\\
\le& C\,\mathbb{E}\left[\fint_{\square_{n+1}}\left|\nabla v(\cdot,\square_{n+1},p,0)+p\right|^2\right]+C\,\mathbb{E}\left[\fint_{\square_{n+1}}\left|\nabla v(\cdot,\square_{n+1},0,q)-\bar{\mathbf{a}}_n^{-1}q\right|^2\right]\\
&+C\,\mathbb{E}\left[\left(\sum_{m=0}^{n}3^m\left(3^{-(n+1-m)d}\sum_{y\in 3^m\mathbb{Z}^d\cap\square_{n+1}}\left|\fint_{y+\square_m}\nabla v\left(\cdot,\square_{n+1},0,q\right)-\bar{\mathbf{a}}_n^{-1}q\right|^2\right)^{1/2}\right)^2\right]\\
&+C\,\mathbb{E}\left[\left(\sum_{m=0}^{n}3^m\left(3^{-(n+1-m)d}\sum_{y\in 3^m\mathbb{Z}^d\cap\square_{n+1}}\left|\fint_{y+\square_m}\nabla v\left(\cdot,\square_{n+1},p,0\right)+p\right|^2\right)^{1/2}\right)^2\right].
\end{aligned}
\tag{2.51}
$$

我们估计右侧的第一项和第二项。由于 $(\{\delta_n\},\{M_n\})$ 具有抑制性，由 (2.32)、(2.27) 和 (2.39) 可知，对于任意 $n\in\mathbb{N}$ 以及任意 $p,q\in B_1$,

$$
\mathbb{E}\left[J(\square_n,p,q)\right]\le\mathbb{E}\left[J(\square_0,p,q)\right]\le\mathbb{E}\left[\frac{1}{2}\Lambda(\square_0)+\frac{1}{2\lambda(\square_0)}+1\right]\le C. \tag{2.52}
$$

根据 (2.28)、(2.36) 和 (2.52)，对于每个 $n\in\mathbb{N}$ 以及每个 p、$q\in B_1$，我们得到:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\fint_{\square_n}\left|\nabla v(\cdot,\square_n,p,q)\right|^2\right]\\
\le&\mathbb{E}\left[\frac{2}{\lambda(\square_n)}J(\square_n,p,q):\lambda(\square_n)\le\delta_n\right]+\mathbb{E}\left[\frac{2}{\lambda(\square_n)}J(\square_n,p,q):\lambda(\square_n)>\delta_n\right]\\
\le& C\,\mathbb{E}\left[\frac{\Lambda(\square_n)}{\lambda(\square_n)}+\frac{1}{\lambda(\square_n)^2}+\frac{1}{\lambda(\square_n)}:\lambda(\square_n)\le\delta_n\right]+\frac{C}{\delta_n}\mathbb{E}\left[J(\square_n,p,q)\right]\\
\le& Ce^{-n}+\frac{C}{\delta_n}\mathbb{E}\left[J(\square_n,p,q)\right].
\end{aligned}
\tag{2.53}
$$

结合 (2.52)、(2.53) 和 (2.47)，我们得到

$$
\mathbb{E}\left[\fint_{\square_{n+1}}\left|\nabla v(\cdot,\square_{n+1},p,0)+p\right|^2+\fint_{\square_{n+1}}\left|\nabla v(\cdot,\square_{n+1},0,q)-\bar{\mathbf{a}}_n^{-1}q\right|^2\right]\le Ce^{-n}+\frac{C}{\delta_n}. \tag{2.54}
$$

步骤 *2.* 在这一步中，我们利用 $\nabla v(\cdot,\square_n,p,q)$ 的空间平均的方差估计，得到 $\kappa'=\kappa'(d,r)$ 的存在性以及 $C=C(d,r,L)<\infty$，使得对于每个 $m\in\{1,2,\ldots,n\}$ 以及每个 p、$q\in B_1$,

$$
\begin{aligned}
&3^{-(n+1-m)d}\sum_{y\in 3^m\mathbb{Z}^d\cap\square_{n+1}}\mathbb{E}\left[\left|\fint_{y+\square_m}\nabla v(\cdot,\square_{n+1},p,q)-\bar{\mathbf{a}}_n^{-1}q+p\right|^2\right]\\
&\qquad\le\frac{C}{\delta_{n+1}}\left(e^{-\kappa' m}+\sum_{k=0}^{m-1}e^{\kappa'(k+1-m)}\tau_k+\sum_{k=m}^{n}\tau_k\right).
\end{aligned}
\tag{2.55}
$$

By 由 (2.48)、平稳性和柯西-施瓦茨不等式，对于每个 $q\in B_1$ 和 m，$n\in$ $\mathbb{N}$

其中 $m<n$,

$$
\begin{aligned}
&\left|\bar{\mathbf{a}}_n^{-1}q-\bar{\mathbf{a}}_m^{-1}q\right|^2\\
=&\left|\mathbb{E}\left[\fint_{\square_n}\nabla v(x,\square_n,0,q)\,dx-\fint_{\square_m}\nabla v(x,\square_m,0,q)\,dx\right]\right|^2\\
=&\left|\mathbb{E}\left[3^{-d(n-m)}\fint_{z+\square_m}\nabla v(x,\square_n,0,q)\,dx-3^{-d(n-m)}\sum_{z\in 3^m\mathbb{Z}^d\cap\square_n}\fint_{z+\square_n}\nabla v(x,z+\square_m,0,q)\,dx\right]\right|^2
\end{aligned}
$$

$$
\leq\mathbb{E}\left[3^{-d(n-m)}\sum_{z\in 3^m\mathbb{Z}^d\cap\square_n}\fint_{z+\square_m}\left|\nabla v(\cdot,\square_n,0,q)-\nabla v(\cdot,z+\square_m,0,q)\right|^2\right]. \tag{2.56}
$$

由 (1.5) 和 (2.14)，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[3^{-d(n-m)}\sum_{z\in 3^m\mathbb{Z}^d\cap\square_n}\fint_{z+\square_m}\left|\nabla v(\cdot,\square_n,p,q)-\nabla v(\cdot,z+\square_m,p,q)\right|^2\right]\\
\leq&\mathbb{E}\left[\frac{1}{\lambda(\square_n)}3^{-d(n-m)}\sum_{z\in 3^m\mathbb{Z}^d\cap\square_n}\fint_{z+\square_m}\left|\mathbf{a}^{\frac12}\left(\nabla v(\cdot,\square_n,p,q)-\nabla v(\cdot,z+\square_m,p,q)\right)\right|^2\right]\\
=&\mathbb{E}\left[\frac{2}{\lambda(\square_n)}3^{-d(n-m)}\sum_{z\in 3^m\mathbb{Z}^d\cap\square_n}\left(J(z+\square_m,p,q)-J(\square_n,p,q)\right)\right].
\end{aligned}\tag{2.57}
$$

由 (2.56) 和 (2.57)，可知

$$
\left|\bar{\mathbf{a}}_n^{-1}q-\bar{\mathbf{a}}_m^{-1}q\right|^2\leq\mathbb{E}\left[\frac{2}{\lambda(\square_n)}3^{-d(n-m)}\sum_{z\in 3^m\mathbb{Z}^d\cap\square_n}\left(J(z+\square_m,0,q)-J(\square_n,0,q)\right)\right]. \tag{2.58}
$$

由平稳性可知

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\frac{2}{\lambda(\square_n)}3^{-d(n-m)}\sum_{z\in 3^m\mathbb{Z}^d\cap\square_n}\left(J(z+\square_m,p,q)-J(\square_n,p,q)\right):\lambda(\square_n)>\delta_n\right]\\
\leq&\frac{2}{\delta_n}\mathbb{E}\left[3^{-d(n-m)}\sum_{z\in 3^m\mathbb{Z}^d\cap\square_n}\left(J\left(z+\square_m,p,q\right)-J\left(\square_n,p,q\right)\right)\right]\leq\frac{C}{\delta_n}\sum_{k=m}^{n-1}\tau_k.
\end{aligned}\tag{2.59}
$$

由于 $(\{\delta_n\},\{M_n\})$ 具有抑制性，由 (2.27) 和 (2.36) 可知

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\frac{2}{\lambda(\square_n)}3^{-d(n-m)}\sum_{z\in 3^m\mathbb{Z}^d\cap\square_n}\left(J\left(z+\square_m,p,q\right)-J\left(\square_n,p,q\right)\right):\lambda(\square_n)\leq\delta_n\right]\\
\leq&C\,\mathbb{E}\left[\frac{\Lambda(\square_n)}{\lambda(\square_n)}+\frac{1}{\lambda(\square_n)^2}+\frac{1}{\lambda(\square_n)}:\lambda(\square_n)\leq\delta_n\right]\leq Ce^{-n}.
\end{aligned}\tag{2.60}
$$

(2.57)、(2.58)、(2.59) 和 (2.60) 推出

$$
\mathbb{E}\left[3^{-d(n-m)}\sum_{z\in 3^m\mathbb{Z}^d\cap\square_n}\fint_{z+\square_m}\left|\nabla v(\cdot,\square_n,p,q)-\nabla v(\cdot,z+\square_m,p,q)\right|^2\right]\leq Ce^{-n}+\frac{C}{\delta_n}\sum_{k=m}^{n-1}\tau_k \tag{2.61}
$$

and

$$\left|\bar{\mathbf{a}}_n^{-1}q-\bar{\mathbf{a}}_m^{-1}q\right|^2\le Ce^{-n}+\frac{C}{\delta_n}\sum_{k=m}^{n-1}\tau_k. \tag{2.62}$$

由前两个不等式、引理 2.8 和 (2.48)，我们推得存在常数$\kappa=\kappa(d,r)\in(0,1)$ 和 $C=C(d,r,L)>0$ 使得

$$\begin{aligned}
&3^{-(n+1-m)d}\sum_{y\in 3^m\mathbb{Z}^d\cap\square_{n+1}}\mathbb{E}\left[\left|\fint_{y+\square_m}\nabla v(\cdot,\square_{n+1},p,q)-\bar{\mathbf{a}}_n^{-1}q+p\right|^2\right]\\
\le&\,3\cdot 3^{-(n+1-m)d}\sum_{y\in 3^m\mathbb{Z}^d\cap\square_{n+1}}\mathbb{E}\left[\left|\fint_{y+\square_m}\nabla v(\cdot,\square_{n+1},p,q)-\nabla v(\cdot,y+\square_m,p,q)\right|^2\right]\\
&+3\cdot 3^{-(n+1-m)d}\sum_{y\in 3^m\mathbb{Z}^d\cap\square_{n+1}}\mathbb{E}\left[\left|\fint_{y+\square_m}\nabla v(\cdot,y+\square_m,p,q)-\bar{\mathbf{a}}_m^{-1}q+p\right|^2\right]\\
&+3\left|\bar{\mathbf{a}}_m^{-1}q-\bar{\mathbf{a}}_n^{-1}q\right|^2\\
\le&\frac{C}{\delta_{n+1}}\left(e^{-\kappa m}+\sum_{k=0}^{m-1}e^{\kappa(k+1-m)}\tau_k+\sum_{k=m}^{n}\tau_k\right).
\end{aligned}$$

因此，式 (2.55) 得证。

步骤 *3.* 为简便起见，我们记

$$X_m:=3^{-(n+1-m)d}\sum_{y\in 3^m\mathbb{Z}^d\cap\square_{n+1}}\left|\fint_{y+\square_m}\nabla v(\cdot,\square_{n+1},p,q)-\bar{\mathbf{a}}_n^{-1}q+p\right|^2.$$

利用霍尔德不等式，可得

$$\left(\sum_{m=0}^n 3^mX_m^{1/2}\right)^2\le\left(\sum_{m=0}^n 3^m\right)\left(\sum_{m=0}^n 3^mX_m\right)\le\,C\,3^n\sum_{m=0}^n 3^mX_m.$$

由 (2.55) 和 $\kappa\in(0,1)$，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\sum_{m=0}^n 3^mX_m^{1/2}\right)^2\right]\le&\frac{C}{\delta_{n+1}}3^n\sum_{m=0}^n 3^m\left(e^{-\kappa m}+\sum_{k=0}^{m-1}e^{\kappa(k+1-m)}\tau_k+\sum_{k=m}^n\tau_k\right)\\
\le&\frac{C}{\delta_{n+1}}3^{2n}\left(e^{-\kappa n}+\sum_{k=0}^{n-1}e^{-\kappa(n-k)}\tau_k+\sum_{k=0}^n 3^{-(n-k)}\tau_k\right)\\
\le&\frac{C}{\delta_{n+1}}3^{2n}\left(e^{-\kappa n}+\sum_{k=0}^n e^{-\kappa(n-k)}\tau_k\right).
\end{aligned} \tag{2.63}$$

由 (2.63)、(2.51) 和 (2.54)，可得 (2.50)。 □

结合此前对 $v(\cdot,\square_{n+1},p,q)$ 平坦度的估计以及 Caccioppoli 不等式，我们现在可以用 $\tau_0,\tau_1,\dots,\tau_n$ 控制 $J(\square_n,p,\bar{\mathbf{a}}_np)$。

引理 2.11. 设$(\{\delta_n\},\{M_n\})$ 具有抑制性。则存在 $\kappa=\kappa(d,r)>0$ 以及 $C=C(d,r,L)<\infty$，使得对每个 $n\in\mathbb{N}$ 和 $p\in B_1$,

$$\mathbb{E}\left[J(\square_n,p,\bar{\mathbf{a}}_np)\right]\le C\,\frac{M_{n+1}^3}{\delta_{n+1}^3}\left(e^{-\kappa n}+\sum_{k=0}^n 3^{-\kappa(n-k)}\tau_m\right). \tag{2.64}$$

证明. 固定 $p \in B_1$。选取 $\kappa \in (0, 1-\alpha)$，使得引理 2.10 成立。

步骤 *1.* 在这一步中，我们将证明

$$\mathbb{E}\left[\fint_{\square_n} |\nabla v(\cdot, \square_{n+1}, p, \bar{\mathbf{a}}_n p)|^2\right] \leq C\frac{M_{n+1}^2}{\delta_{n+1}^3}\left(e^{-\kappa n} + \sum_{k=0}^{n} e^{-\kappa(n-k)}\tau_k\right). \tag{2.65}$$

注意，由 (2.47) 可知 $|\bar{}\mathsf{a}_n p| \leq C = C(L)$ 成立。由 (2.28) 得

$$\fint_{\square_n} |\nabla v(\cdot, \square_{n+1}, p, \bar{\mathbf{a}}_n p)|^2 \leq C \fint_{\square_{n+1}} |\nabla v(\cdot, \square_{n+1}, p, \bar{\mathbf{a}}_n p)|^2 \leq C\left(\frac{\Lambda(\square_{n+1})}{\lambda(\square_{n+1})} + \frac{1}{\lambda(\square_{n+1})^2} + \frac{1}{\lambda(\square_{n+1})}\right).$$

由此结合 (2.36)，得到

$$\mathbb{E}\left[\fint_{\square_n} |\nabla v(\cdot, \square_{n+1}, p, \bar{\mathbf{a}}_n p)|^2 : \{\lambda(\square_n) \leq \delta_n\} \cup \{\Lambda(\square_n) \geq M_n\}\right] \leq Ce^{-n}.$$

应用 Caccioppoli 不等式（引理 4.2），可得

$$\mathbb{E}\left[\fint_{\square_n} |\nabla v(\cdot, \square_{n+1}, p, \bar{\mathbf{a}}_n p)|^2 : \lambda(\square_n) > \delta_n, \Lambda(\square_n) < M_n\right] \leq \frac{C}{3^{2n}}\frac{M_{n+1}^2}{\delta_{n+1}^2}\mathbb{E}\left[\fint_{\square_{n+1}} |v(\cdot, \square_{n+1}, p, \bar{\mathbf{a}}_n p)|^2\right].$$

由于 $|\bar{}\mathsf{a}_n p| \leq C$ 成立，由引理 2.10 可得

$$\mathbb{E}\left[\fint_{\square_{n+1}} |v(\cdot, \square_{n+1}, p, \bar{\mathbf{a}}_n p)|^2\right] \leq \frac{C}{\delta_{n+1}} 3^{2n}\left(e^{-\kappa n} + \sum_{k=0}^{n} e^{-\kappa(n-k)}\tau_k\right).$$

结合上述不等式可得 (2.65)。S

$^{te}_{p}$ *2.* 取定 $p, q \in B_1$，并定义 $v := v(\cdot, \square_n, p, q)$ 和 $w := v(\cdot, \square_{n+1}, p, q)$。我们将证明

$$\mathbb{E}\left[J(\square_n, p, q)\right] \leq C\,\mathbb{E}\left[\fint_{\square_n} \nabla w \cdot \mathbf{a}\nabla w\right] + C\,\frac{M_{n+1}}{\delta_{n+1}}\left(e^{-\kappa n} + \tau_n^{1/2}\mathbb{E}\left[J(\square_n, p, q)\right]^{1/2}\right). \tag{2.66}$$

利用 (2.16)，我们得到

$$J(\square_n, p, q) = \fint_{\square_n} \frac{1}{2}\nabla v \cdot \mathbf{a}\nabla v = \fint_{\square_n} \frac{1}{2}\nabla w \cdot \mathbf{a}\nabla w - \fint_{\square_n} \frac{1}{2}(\nabla v - \nabla w) \cdot \mathbf{a}(\nabla v + \nabla w). \tag{2.67}$$

由霍尔德不等式，我们得到

$$\left|\fint_{\square_n} (\nabla v - \nabla w) \cdot \mathbf{a}(\nabla v + \nabla w)\right| \leq C\Lambda(\square_n)\|\nabla v - \nabla w\|_{\underline{L}^2(\square_n)}\left(\|\nabla v\|_{\underline{L}^2(\square_n)} + \|\nabla w\|_{\underline{L}^2(\square_n)}\right). \tag{2.68}$$

由 (2.28)，我们有

$$\|\nabla w\|_{\underline{L}^2(\square_n)} \leq C\|\nabla w\|_{\underline{L}^2(\square_{n+1})} \leq C\left(\frac{\Lambda(\square_{n+1})}{\lambda(\square_{n+1})} + \frac{1}{\lambda(\square_{n+1})^2} + \frac{1}{\lambda(\square_{n+1})}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.69}$$

同样的估计也适用于 $\|\nabla v\|_{\underline{L}^2(\square_n)}$ 和 $\|\nabla v - \nabla w\|_{\underline{L}^2(\square_n)}$。由 (2.68)、(2.69) 和 (2.36)，我们得到

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left|\fint_{\square_n} (\nabla v - \nabla w) \cdot \mathbf{a}(\nabla v + \nabla w)\right|\right] \\
&\leq C\,\mathbb{E}\left[\Lambda(\square_n)\|\nabla v - \nabla w\|_{\underline{L}^2(\square_n)}\left(\|\nabla v\|_{\underline{L}^2(\square_n)} + \|\nabla w\|_{\underline{L}^2(\square_n)}\right); \Lambda(\square_{n+1}) < M_{n+1}\right] \\
&\quad + C\,\mathbb{E}\left[\frac{\Lambda(\square_{n+1})^2}{\lambda(\square_{n+1})} + \frac{\Lambda(\square_{n+1})}{\lambda(\square_{n+1})^2} + \frac{\Lambda(\square_{n+1})}{\lambda(\square_{n+1})} : \Lambda(\square_{n+1}) \geq M_{n+1}\right] \\
&\leq CM_{n+1}\mathbb{E}\left[\|\nabla v - \nabla w\|_{\underline{L}^2(\square_n)}^2\right]^{\frac{1}{2}}\left(\mathbb{E}\left[\|\nabla v\|_{\underline{L}^2(\square_n)}^2\right]^{\frac{1}{2}} + \mathbb{E}\left[\|\nabla w\|_{\underline{L}^2(\square_{n+1})}^2\right]^{\frac{1}{2}}\right) + Ce^{-n}.
\end{aligned}$$

由 (2.53) 和 (2.32)，可得

$$\mathbb{E}\left[\|\nabla v\|^2_{\underline{L}^2(\square_n)}\right]^{\frac12} \le Ce^{-\frac12 n} + \frac{C}{\delta_n^{1/2}}\mathbb{E}\left[J(\square_n,p,q)\right]^{\frac12} \le Ce^{-\frac12 n} + \frac{C}{\delta_{n+1}^{1/2}}\mathbb{E}\left[J(\square_n,p,q)\right]^{\frac12},$$

and

$$\mathbb{E}\left[\|\nabla w\|^2_{\underline{L}^2(\square_{n+1})}\right]^{\frac12} \le Ce^{-\frac12 n} + \frac{C}{\delta_{n+1}^{1/2}}\mathbb{E}\left[J(\square_{n+1},p,q)\right]^{\frac12} \le Ce^{-\frac12 n} + \frac{C}{\delta_{n+1}^{1/2}}\mathbb{E}\left[J(\square_n,p,q)\right]^{\frac12}.$$

应用 (2.61)，我们得到

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\|\nabla v-\nabla w\|^2_{\underline{L}^2(\square_n)}\right]\\
\le& C\,\mathbb{E}\left[3^{-d}\sum_{z\in 3^n\mathbb{Z}^d\cap\square_{n+1}}\fint_{z+\square_n}|\nabla v(\cdot,z+\square_n,p,q)-\nabla v(\cdot,\square_{n+1},p,q)|^2\right]\\
\le& Ce^{-n}+\frac{C}{\delta_{n+1}}\tau_n.
\end{aligned}$$

由 (2.52)，可得

$$\tau_n \le \sup_{p,q\in B_1}\mathbb{E}[J(\square_n,p,q)] \le C.$$

结合前面的五个不等式，得到

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left|\fint_{\square_n}(\nabla v-\nabla w)\cdot\mathbf{a}(\nabla v+\nabla w)\right|\right]\\
\le& CM_{n+1}\left(e^{-\frac12 n}+\frac{C}{\delta_{n+1}^{1/2}}\tau_n^{1/2}\right)\left(e^{-\frac12 n}+\frac{C}{\delta_{n+1}^{1/2}}\mathbb{E}\left[J(\square_n,p,q)\right]^{\frac12}\right)+Ce^{-n}\\
\le& CM_{n+1}\left(e^{-n}+\frac{C}{\delta_{n+1}^{1/2}}e^{-\frac12 n}+\frac{C}{\delta_{n+1}}\tau_n^{1/2}\mathbb{E}\left[J(\square_n,p,q)\right]^{1/2}\right)+Ce^{-n}\\
\le& C\,\frac{M_{n+1}}{\delta_{n+1}}\left(e^{-\frac12 n}+\tau_n^{1/2}\mathbb{E}\left[J(\square_n,p,q)\right]^{1/2}\right).
\end{aligned}\tag{2.70}$$

因此，由 (2.70) 和 (2.67) 可得 (2.66)。

步骤 *3.* 在这一步中，我们完成证明。由于 $|^-\mathsf{a}_n p|\le C$ 成立，由（2.65）、（2.16）、（2.27）和（2.36）可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\fint_{\square_n}\nabla v(\cdot,\square_{n+1},p,\bar{\mathbf{a}}_n p)\cdot\mathbf{a}\nabla v(\cdot,\square_{n+1},p,\bar{\mathbf{a}}_n p)\right]\\
\le&\mathbb{E}\left[\fint_{\square_n}\nabla v(\cdot,\square_{n+1},p,\bar{\mathbf{a}}_n p)\cdot\mathbf{a}\nabla v(\cdot,\square_{n+1},p,\bar{\mathbf{a}}_n p):\Lambda(\square_{n+1})<M_{n+1}\right]\\
&+C\,\mathbb{E}\left[\fint_{\square_{n+1}}\nabla v(\cdot,\square_{n+1},p,\bar{\mathbf{a}}_n p)\cdot\mathbf{a}\nabla v(\cdot,\square_{n+1},p,\bar{\mathbf{a}}_n p):\Lambda(\square_{n+1})\ge M_{n+1}\right]\\
\le& M_{n+1}\mathbb{E}\left[\fint_{\square_n}|\nabla v(\cdot,\square_{n+1},p,\bar{\mathbf{a}}_n p)|^2\right]+C\,\mathbb{E}\left[\Lambda(\square_{n+1})+\frac{1}{\lambda(\square_{n+1})}+1:\Lambda(\square_{n+1})\ge M_{n+1}\right]\\
\le& C\,\frac{M_{n+1}^3}{\delta_{n+1}^3}\left(e^{-\kappa n}+\sum_{k=0}^{n}e^{-\kappa(n-k)}\tau_k\right).
\end{aligned}$$

结合此不等式与（2.66），并使用杨氏不等式，我们得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[J(\square_n,p,\bar{\mathbf{a}}_n p)\right] &\le C\,\frac{M_{n+1}}{\delta_{n+1}}\tau_n^{\frac{1}{2}}\mathbb{E}\left[J(\square_n,p,\bar{\mathbf{a}}_n p)\right]^{\frac{1}{2}} + C\,\frac{M_{n+1}^3}{\delta_{n+1}^3}\left(e^{-\kappa n}+\sum_{k=0}^{n}e^{-\kappa(n-k)}\tau_k\right)\\ &\le \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[J(\square_n,p,\bar{\mathbf{a}}_n p)\right] + C\,\frac{M_{n+1}^2}{\delta_{n+1}^2}\tau_n + C\,\frac{M_{n+1}^3}{\delta_{n+1}^3}\left(e^{-\kappa n}+\sum_{k=0}^{n}e^{-\kappa(n-k)}\tau_k\right).\end{aligned}$$

整理后可得 (2.64)。 □

定理 *2.7* 的证明。我们定义如下量

$$F_n := \sum_{i=1}^{d}\mathbb{E}\left[J(\square_n,e_i,\bar{\mathbf{a}}_n e_i)\right].$$

注意，存在一个常数 $C=C(d)<\infty$，使得对于任意正定矩阵$A\in\mathbb{R}^{d\times d}$,

$$\sup_{p\in B_1} p\cdot Ap \le C\sum_{i=1}^{d} e_i\cdot Ae_i. \tag{2.71}$$

步骤 *1*。 我们首先证明估计

$$F_n \le C\exp\left(-cn^{1-3\alpha}\right). \tag{2.72}$$

由 (2.49) 可得

$$F_{n+1} \le \sum_{i=1}^{d}\mathbb{E}\left[J(\square_{n+1},e_i,\bar{\mathbf{a}}_n e_i)\right]. \tag{2.73}$$

由 (2.17)、(2.30) 和 (2.31) 可知，映射 $p\mapsto \mathbb{E}\left[\mu(\square_n,p)\right]-\mathbb{E}\left[\mu(\square_{n+1},p)\right]$ 以及 $p\mapsto\mathbb{E}\left[\mu_*(\square_n,\bar{\mathsf{a}}_n p)\right]-\mathbb{E}\left[\mu_*(\square_{n+1},\bar{\mathsf{a}}_n p)\right]$ 是正二次型。利用 (2.73)、(2.4)、(2.71) 和 (2.47)，可知存在 $c>0$，使得

$$\begin{aligned}F_n - F_{n+1} &\ge \sum_{i=1}^{d}\left(\mathbb{E}\left[J(\square_n,e_i,\bar{\mathbf{a}}_n e_i)\right]-\mathbb{E}\left[J(\square_{n+1},e_i,\bar{\mathbf{a}}_n e_i)\right]\right)\\ &= \sum_{i=1}^{d}\left(\mathbb{E}\left[\mu(\square_n,e_i)\right]-\mathbb{E}\left[\mu(\square_{n+1},e_i)\right]+\mathbb{E}\left[\mu_*(\square_n,\bar{\mathbf{a}}_n e_i)\right]-\mathbb{E}\left[\mu_*(\square_{n+1},\bar{\mathbf{a}}_n e_i)\right]\right)\\ &\ge c\left(\sup_{p\in B_1}\left(\mathbb{E}\left[\mu(\square_n,p)\right]-\mathbb{E}\left[\mu(\square_{n+1},p)\right]\right)+\sup_{q\in\bar{\mathbf{a}}_n B_1}\left(\mathbb{E}\left[\mu_*(\square_n,q)\right]-\mathbb{E}\left[\mu_*(\square_{n+1},q)\right]\right)\right)\\ &\ge c\left(\sup_{p\in B_1}\left(\mathbb{E}\left[\mu(\square_n,p)\right]-\mathbb{E}\left[\mu(\square_{n+1},p)\right]\right)+\sup_{q\in B_1}\left(\mathbb{E}\left[\mu_*(\square_n,q)\right]-\mathbb{E}\left[\mu_*(\square_{n+1},q)\right]\right)\right)\\ &\ge c\tau_n.\end{aligned} \tag{2.74}$$

为了控制 F_n，我们将估计以下量

$$G_n := e^{-\frac{\kappa}{2}n}\sum_{m=0}^{n} e^{\frac{\kappa}{2}m}F_m.$$

由于 $(\{\delta_n\},\{M_n\})$ 是抑制性的，由 (2.27)、(2.47) 和 (2.39) 可得 $F_0\le C$。由 (2.74) 和 $F_0\le C$ 可得

$$G_n - G_{n+1} = e^{-\frac{\kappa}{2}n}\sum_{m=0}^{n} e^{\frac{\kappa}{2}m}(F_m-F_{m+1}) - Ce^{-\frac{\kappa}{2}n}F_0 \ge c\left(e^{-\frac{\kappa}{2}n}\sum_{m=0}^{n}e^{\frac{\kappa}{2}m}\tau_m - Ce^{-\frac{\kappa}{2}n}\right).$$

由引理 2.11 和 $\frac{M_n}{\delta_n} \le (n+1)^\alpha$ 可得

$$\begin{aligned} G_n &\le C(n+1)^{3\alpha} e^{-\frac{\kappa}{2}n} \sum_{m=0}^{n} e^{\frac{\kappa}{2}m} \left(e^{-\kappa m} + \sum_{k=0}^{m} e^{-\kappa(m-k)} \tau_k \right) \\ &\le C(n+1)^{3\alpha} \left(e^{-\frac{\kappa}{2}n} + e^{-\frac{\kappa}{2}n} \sum_{k=0}^{n} \sum_{m=k}^{n} e^{\frac{\kappa}{2}(2k-m)} \tau_k \right) \\ &\le C(n+1)^{3\alpha} \left(e^{-\frac{\kappa}{2}n} + e^{-\frac{\kappa}{2}n} \sum_{k=0}^{n} e^{\frac{\kappa}{2}k} \tau_k \right). \end{aligned}$$

利用 $\tau_n \ge 0$ 并比较前两个不等式可得

$$\begin{aligned} G_{n+1} \le G_n + Ce^{-\frac{\kappa}{2}n} &\le C(n+1)^{3\alpha} \left(e^{-\frac{\kappa}{2}n} + e^{-\frac{\kappa}{2}n} \sum_{k=0}^{n} e^{\frac{\kappa}{2}k} \tau_k \right) \\ &\le C(n+1)^{3\alpha} \left((G_n - G_{n+1}) + e^{-\frac{\kappa}{2}n} \right). \end{aligned}$$

重新整理可得，对于 $\theta_n := 1 - \frac{1}{C(n+1)^{3\alpha}} (n \in \mathbb{N})$,

$$G_{n+1} \le \theta_n G_n + Ce^{-\frac{\kappa}{2}n}. \tag{2.75}$$

We m在 θ_n 的定义中取足够大的 C，使得 $e^{-\kappa/2} \le \theta_0 \le \theta_n$ 成立。对 (2.75) 可得

$$G_n \le \left(\prod_{k=0}^{n-1} \theta_k \right) G_0 + C \sum_{k=1}^{n} \left\{ \left(\prod_{l=n-k+1}^{n-1} \theta_l \right) e^{-\frac{\kappa}{2}(n-k)} \right\}. \tag{2.76}$$

由 $e^{-\kappa/2} \le \theta_l$ 和 $1 - x \le e^{-x}$可知

$$\left(\prod_{l=n-k+1}^{n-1} \theta_l \right) e^{-\frac{\kappa}{2}(n-k)} \le \prod_{k=0}^{n-1} \theta_k \le \exp\left(-\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{Ck^{3\alpha}+1} \right) \le \exp\left(-cn^{1-3\alpha} \right),$$

因此，由 (2.76) 和 $G_0 \le F_0 \le C$ 可得

$$G_n \le C(n+1) \exp\left(-cn^{1-3\alpha} \right).$$

适当减小 c 的值后，我们得出

$$G_n \le C \exp\left(-cn^{1-3\alpha} \right).$$

因此，由 $F_n \le G_n$ 可得 (2.72)。

步骤 *2.* 为完成定理的证明，还需得到一个估计，用 $|\mathsf{a}(\square_n) - \bar{}\mathsf{a}|$ 替换 (2.72) 中的 F_n。为此，我们利用上一步得到的估计证明 $\bar{}\mathsf{a}_n$ 收敛到 $\bar{}\mathsf{a}$。由 (2.62)、(2.74) 和 (2.72) 可知，对每个 $p \in B_1$ 和 $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \left| \bar{\mathbf{a}}_{n+1}^{-1} p - \bar{\mathbf{a}}_n^{-1} p \right|^2 \le Ce^{-n} + C\frac{\tau_n}{\delta_{n+1}} &\le Ce^{-n} + C(n+1)^\alpha (F_n - F_{n+1}) \\ &\le Ce^{-n} + Cn^\alpha \exp\left(-cn^{1-3\alpha} \right). \end{aligned}$$

因此，通过适当减小 c 的值，我们得到

$$\left| \bar{\mathbf{a}}_{n+1}^{-1} - \bar{\mathbf{a}}_n^{-1} \right| \le Cn^{-3\alpha} \exp\left(-cn^{1-3\alpha} \right). \tag{2.77}$$

注意到

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-3\alpha}\exp\left(-ck^{1-3\alpha}\right)\leq\int_{n}^{\infty}x^{-3\alpha}\exp\left(-cx^{1-3\alpha}\right)dx=C\exp\left(-cn^{1-3\alpha}\right). \tag{2.78}$$

结合 (2.77) 和 (2.78)，我们得到，对于任意 n、$m\in\mathbb{N}$ 及满足 $n<m$ 的情形，

$$\left|\bar{\mathbf{a}}_m^{-1}-\bar{\mathbf{a}}_n^{-1}\right|\leq\sum_{k=n}^{\infty}\left|\bar{\mathbf{a}}_{k+1}^{-1}-\bar{\mathbf{a}}_k^{-1}\right|\leq\sum_{k=n}^{\infty}k^{-3\alpha}\exp\left(-ck^{1-3\alpha}\right)\leq C\exp\left(-cn^{1-3\alpha}\right).$$

由于 $|\bar{\mathbf{a}}_n|$、$|\bar{\mathbf{a}}_m|\leq C$，对于任意 n、$m\in\mathbb{N}$ 及满足 $n<m$ 的情形，我们有，

$$|\bar{\mathbf{a}}_n-\bar{\mathbf{a}}_m|=\left|\bar{\mathbf{a}}_n\left(\bar{\mathbf{a}}_m^{-1}-\bar{\mathbf{a}}_n^{-1}\right)\bar{\mathbf{a}}_m\right|\leq C\exp\left(-cn^{1-3\alpha}\right).$$

因此，$\{\bar{\mathbf{a}}_n\}$ 是一个柯西序列，并且存在一个对称矩阵 $\widetilde{\mathbf{a}}\in\mathbb{R}^{d\times d}$，使得

$$|\bar{\mathbf{a}}_n-\widetilde{\mathbf{a}}|\leq C\exp\left(-cn^{1-3\alpha}\right).$$

前面的不等式、(2.49) 和 (2.72) 导出

$$\mathbb{E}\left[J(\square_n,e_i,\widetilde{\mathbf{a}}e_i)\right]\leq\mathbb{E}\left[J(\square_n,e_i,\bar{\mathbf{a}}_ne_i)\right]+C\left|\bar{\mathbf{a}}_n-\widetilde{\mathbf{a}}\right|^2\leq C\exp\left(-cn^{1-3\alpha}\right).$$

由 (2.6)、(2.8) 和 (2.71)，我们有

$$\mathbb{E}\left[\sup_{p\in B_1}J(\square_n,p,\widetilde{\mathbf{a}}p)\right]\leq C\,\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{d}J(\square_n,e_i,\widetilde{\mathbf{a}}e_i)\right]\leq C\exp\left(-cn^{1-3\alpha}\right). \tag{2.79}$$

利用引理 2.3，我们得到

$$\mathbb{E}\left[|\mathbf{a}(\square_n)-\widetilde{\mathbf{a}}|^2\right]\leq C\,\mathbb{E}\left[\Lambda(\square_n)\sup_{p\in B_1}J(\square_n,p,\bar{\mathbf{a}}p)\right].$$

由于 $\{\bar{\mathbf{a}}_n\}$ 收敛于 $\widetilde{\mathbf{a}}$，由（2.47）可得 $|\widetilde{\mathbf{a}}|\leq C$。由此以及（2.27）和（2.37），可得

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\Lambda(\square_n)\sup_{p\in B_1}J(\square_n,p,\widetilde{\mathbf{a}}p):\Lambda(\square_n)\geq M_n\right]\\&\leq C\,\mathbb{E}\left[\Lambda(\square_n)^2+\frac{\Lambda(\square_n)}{\lambda(\square_n)}+\Lambda(\square_n):\Lambda(\square_n)\geq M_n\right]\leq Ce^{-n}.\end{aligned}$$

由于 $M_n\leq(n+1)^{\alpha}$，（2.79）给出

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\Lambda(\square_n)\sup_{p\in B_1}J(\square_n,p,\widetilde{\mathbf{a}}p):\Lambda(\square_n)<M_n\right]\\&\leq M_n\,\mathbb{E}\left[\sup_{p\in B_1}J(\square_n,p,\widetilde{\mathbf{a}}p)\right]\leq(n+1)^{\alpha}\exp\left(-cn^{1-3\alpha}\right)\leq C\exp\left(-cn^{1-3\alpha}\right).\end{aligned}$$

结合前面的三个不等式，我们得到

$$\mathbb{E}\left[|\mathbf{a}(\square_n)-\widetilde{\mathbf{a}}|^2\right]\leq C\exp\left(-cn^{1-3\alpha}\right). \tag{2.80}$$

由于 $\widetilde{\mathbf{a}}$ $-\mathbf{a}(\square_n)$ 是对称的，利用詹森不等式可得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left|\widetilde{\mathbf{a}}-\mathbf{a}(\square_n)\right|^2\right]&\geq\mathbb{E}\left[\sup_{p\in B_1}\left|p\cdot\left(\widetilde{\mathbf{a}}-\mathbf{a}(\square_n)\right)p\right|^2\right]\\&\geq\sup_{p\in B_1}\mathbb{E}\left[\left|p\cdot\left(\widetilde{\mathbf{a}}-\mathbf{a}(\square_n)\right)p\right|^2\right]\geq\sup_{p\in B_1}\left|p\cdot\widetilde{\mathbf{a}}p-\mathbb{E}\left[p\cdot\mathbf{a}(\square_n)p\right]\right|^2.\end{aligned}$$

前两个不等式和 (2.19) 表明，当 $n\to\infty$ 时，$2\mathbb{E}\left[\mu(\square_n,p)\right]$ 收敛到 $p\cdot\widetilde{\mathbf{a}}p$。另一方面，根据 $\bar{\mathbf{a}}$ 的定义，当 $n\to\infty$ 时，$2\mathbb{E}\left[\mu(\square_n,p)\right]$ 收敛到 $p\cdot\bar{\mathbf{a}}p$，由此可知，对每个 $p\in B_1$，$p\cdot\widetilde{\mathbf{a}}p=p\cdot\bar{\mathbf{a}}p$，因此 $\widetilde{\mathbf{a}}=\bar{\mathbf{a}}$。于是 (2.80) 推出 (2.40)。 □

3 狄利克雷问题的均匀化

3.1 梯度与通量的弱收敛

对于每个 $n \in \mathbb{N}$，我们定义一个随机变量 e

$$\Omega(n) := \left(\sum_{m=0}^{n} 3^{-(n-m)} \left(3^{-(n-m)d} \sum_{z \in 3^m \mathbb{Z}^d \cap \square_n} |\mathbf{a}(z+\square_m) - \bar{\mathbf{a}}| \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 .$$

现在，我们利用多尺度庞加莱不等式，考察 $v(\cdot, \square_n, p)$ 关于 $\Omega(n)$ 的通量和梯度的弱收敛。

命题 3.1. 存在 $C = C(d) < \infty$，使得对于任意 $n \in \mathbb{N}$ 和 $p \in B_1$,

$$\|\nabla v(\cdot, \square_n, p) - p\|^2_{\underline{\widehat{H}}^{-1}(\square_n)} \leq C \frac{\Lambda(\square_n)}{\lambda(\square_n)} + C 3^{2n} \frac{1}{\lambda(\square_n)} \Omega(n) \tag{3.1}$$

and

$$\|\mathbf{a}\nabla v(\cdot, \square_n, p) - \bar{\mathbf{a}} p\|^2_{\underline{\widehat{H}}^{-1}(\square_n)} \leq C \left(\frac{\Lambda(\square_n)^3}{\lambda(\square_n)} + |\bar{\mathbf{a}}|^2 \right) + C 3^{2n} \left(\frac{\Lambda(\square_n)^2}{\lambda(\square_n)} + |\bar{\mathbf{a}}| \right) \Omega(n). \tag{3.2}$$

证明. 固定 $p \in B_1$, $n \in \mathbb{N}$，并记 $v := v(\cdot, \square_n, p)$。利用多尺度庞加莱不等式（命题 4.3），我们得到

$$\begin{aligned} \|\nabla v - p\|^2_{\underline{\widehat{H}}^{-1}(\square_n)} \leq\ & C \|\nabla v - p\|^2_{\underline{L}^2(\square_n)} \\ & + C 3^{2n} \left(\sum_{m=0}^{n-1} 3^{-(n-m)} \left(3^{-(n-m)d} \sum_{z \in 3^m \mathbb{Z}^d \cap \square_n} \left| \fint_{z+\square_m} (\nabla v - p) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 \end{aligned} \tag{3.3}$$

and

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a}\nabla v - \bar{\mathbf{a}} p\|^2_{\underline{\widehat{H}}^{-1}(\square_n)} \leq\ & C \|\mathbf{a}\nabla v - \bar{\mathbf{a}} p\|^2_{\underline{L}^2(\square_n)} \\ & + C 3^{2n} \left(\sum_{m=0}^{n-1} 3^{-(n-m)} \left(3^{-(n-m)d} \sum_{z \in 3^m \mathbb{Z}^d \cap \square_n} \left| \fint_{z+\square_m} (\mathbf{a}\nabla v - \bar{\mathbf{a}} p) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 . \end{aligned} \tag{3.4}$$

由于 $v(\cdot, \square_n, p) = -v(\cdot, \square_n, p, 0)$，由 (2.28) 可得

$$\fint_{\square_n} |\nabla v|^2 \leq \frac{\Lambda(\square_n)}{\lambda(\square_n)} \quad \text{and} \quad \fint_{\square_n} |\mathbf{a}\nabla v|^2 \leq \Lambda(\square_n)^2 \fint_{\square_n} |\nabla v|^2 \leq \frac{\Lambda(\square_n)^3}{\lambda(\square_n)}.$$

因此，由三角不等式可知

$$\|\nabla v - p\|^2_{\underline{L}^2(\square_n)} \leq \frac{\Lambda(\square_n)}{\lambda(\square_n)} \quad \text{and} \quad \|\mathbf{a}\nabla v - \bar{\mathbf{a}} p\|^2_{\underline{L}^2(\square_n)} \leq \frac{\Lambda(\square_n)^3}{\lambda(\square_n)} + |\bar{\mathbf{a}}|^2. \tag{3.5}$$

接下来只需估计最后几项。对于 $m \in \{0, 1, 2 \ldots n-1\}$，我们定义一个函数 $v_m \in H^1(\square_n)$，使其对每个 $z \in 3^m \mathbb{Z}^d \cap \square_n$ 都满足

$$v_m(x) := v(x, z+\square_m, p) \quad (x \in z+\square_m).$$

由于 $v(\cdot, z+\square_m, p)$ 属于 $l_p + H^1_0(z+\square_m)$，容易验证 v_m 属于 $l_p + H^1_0(\square_n)$。因此 $\fint_{z+\square_m} \nabla v_m = p$。结合这一点和 (2.9)，我们得到

$$\fint_{z+\square_m} (\nabla v - p) = \fint_{z+\square_m} (\nabla v - \nabla v_m) \tag{3.6}$$

and

$$\fint_{z+\square_m}(\mathbf{a}\nabla v-\bar{\mathbf{a}}p)=(\mathbf{a}(z+\square_m)-\bar{\mathbf{a}})\,p+\fint_{z+\square_m}(\mathbf{a}(\nabla v-\nabla v_m))\,. \tag{3.7}$$

由 $|(\mathbf{a}(z+\square_m)-\bar{\mathbf{a}})\,p|\le\Lambda(\square_n)+|\bar{\mathbf{a}}|$，可知

$$\left(\sum_{m=0}^{n-1}3^{-(n-m)}\left(3^{-(n-m)d}\sum_{z\in 3^m\mathbb{Z}^d\cap\square_n}|(\mathbf{a}(z+\square_m)-\bar{\mathbf{a}})\,p|^2\right)^{\frac12}\right)^2\le(\Lambda(\square_n)+|\bar{\mathbf{a}}|)\,\Omega(n). \tag{3.8}$$

此外，由詹森不等式可得

$$\begin{aligned}3^{-(n-m)d}\sum_{z\in 3^m\mathbb{Z}^d\cap\square_n}\left|\fint_{z+\square_m}(\nabla v-\nabla v_m)\right|^2&\le 3^{-(n-m)d}\sum_{z\in 3^m\mathbb{Z}^d\cap\square_n}\|\nabla v-\nabla v_m\|^2_{\underline{L}^2(z+\square_m)}\\&=\|\nabla v-\nabla v_m\|^2_{\underline{L}^2(\square_n)}\end{aligned} \tag{3.9}$$

and

$$3^{-(n-m)d}\sum_{z\in 3^m\mathbb{Z}^d\cap\square_n}\left|\fint_{z+\square_m}(\mathbf{a}(\nabla v-\nabla v_m))\right|^2\le\Lambda(\square_n)^2\|\nabla v-\nabla v_m\|^2_{\underline{L}^2(\square_n)}. \tag{3.10}$$

由（2.14）和（2.8）可知

$$\begin{aligned}&\sum_{m=0}^{n-1}3^{-(n-m)}\|\nabla v-\nabla v_m\|_{\underline{L}^2(\square_n)}\\\le&\sum_{m=0}^{n-1}3^{-(n-m)}\left(\frac{2}{\lambda(\square_n)}3^{-(n-m)d}\sum_{z\in 3^m\mathbb{Z}^d\cap\square_n}(\mu(z+\square_m,p)-\mu(\square_n,p))\right)^{\frac12}\\\le&\frac{1}{\lambda(\square_n)^{\frac12}}\sum_{m=0}^{n-1}3^{-(n-m)}\left(3^{-(n-m)d}\sum_{z\in 3^m\mathbb{Z}^d\cap\square_n}|\mathbf{a}(z+\square_m)-\mathbf{a}(\square_n)|\right)^{\frac12}\\\le&\frac{1}{\lambda(\square_n)^{\frac12}}\sum_{m=0}^{n-1}3^{-(n-m)}\left(|\mathbf{a}(\square_n)-\bar{\mathbf{a}}|+3^{-(n-m)d}\sum_{z\in 3^m\mathbb{Z}^d\cap\square_n}|\mathbf{a}(z+\square_m)-\bar{\mathbf{a}}|\right)^{\frac12}\\\le&\frac{1}{\lambda(\square_n)^{\frac12}}\left(|\mathbf{a}(\square_n)-\bar{\mathbf{a}}|^{\frac12}+\sum_{m=0}^{n-1}3^{-(n-m)}\left(3^{-(n-m)d}\sum_{z\in 3^m\mathbb{Z}^d\cap\square_n}|\mathbf{a}(z+\square_m)-\bar{\mathbf{a}}|\right)^{\frac12}\right)\\=&C\left(\frac{\Omega(n)}{\lambda(\square_n)}\right)^{\frac12}.\end{aligned} \tag{3.11}$$

结合（3.6）、（3.9）和（3.11），可得

$$\left(\sum_{m=0}^{n-1}3^{-(n-m)}\left(3^{-(n-m)d}\sum_{z\in 3^m\mathbb{Z}^d\cap\square_n}\left|\fint_{z+\square_m}(\nabla v-p)\right|^2\right)^{\frac12}\right)^2\le C\frac{\Omega(n)}{\lambda(\square_n)}. \tag{3.12}$$

因此，由 (3.12)、(3.3) 和 (3.5) 可得 (3.1)。由 (3.7)、(3.8)、(3.10) 和 (3.11)，我们得到

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{m=0}^{n-1}3^{-(n-m)}\left(3^{-(n-m)d}\sum_{z\in 3^m\mathbb{Z}^d\cap\square_n}\left|\fint_{z+\square_m}(\mathbf{a}\nabla v-\bar{\mathbf{a}}p)\right|^2\right)^{\frac12}\right)^2\\\le&C\left(\frac{\Lambda(\square_n)^2}{\lambda(\square_n)}+\Lambda(\square_n)+|\bar{\mathbf{a}}|\right)\Omega(n)\le C\left(\frac{\Lambda(\square_n)^2}{\lambda(\square_n)}+|\bar{\mathbf{a}}|\right)\Omega(n).\end{aligned} \tag{3.13}$$

因此，由 (3.13)、(3.4) 和 (3.5) 可得 (3.2)，证明完毕。 □

3.2 狄利克雷问题的误差估计

下面的定理给出了使用 $\Omega(n)$ 求解狄利克雷问题时的误差估计。对于一般区域 U 和边界条件 f，我们使用截断函数和 $v(\cdot, \square_n, p)$ 来近似解，从而得到 $\Omega(n)$ 的估计。

定理 3.2. 假设存在满足以下条件的 $a > 0$ 和 $A < \infty$

$$a\mathrm{Id} \le \bar{\mathbf{a}} \le A\mathrm{Id}. \tag{3.14}$$

设 $U \subseteq \square_0$ 是一个有界利普希茨区域，且 $\delta > 0$。那么，存在常数 $b = b(d, a, A, U, \delta) > 0$ 和 $C = C(d, a, A, U, \delta) < \infty$，使得以下结论成立：对于每个 $\varepsilon \in (0, 1]$，$f \in W^{1,2+\delta}(U)$，$n \in [-\log_3 \varepsilon, -\log_3 \varepsilon + 1) \cap \mathbb{N}$，以及狄利克雷问题的唯一解 $u^\varepsilon, u \in f + H_0^1(U)$

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot \mathbf{a}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)\nabla u^\varepsilon = 0 \quad (in\ U), \qquad u^\varepsilon = f \quad (on\ \partial U), \\ -\nabla \cdot \bar{\mathbf{a}} \nabla u = 0 \quad (in\ U), \qquad u = f \quad (on\ \partial U), \end{aligned} \tag{3.15}$$

在分布意义下，对于每个 $r \in (0,\ 1)$，我们有

$$\begin{aligned} \|u - u^\varepsilon\|_{L^2(U)} &\le C\frac{\Lambda(\square_n) + 1}{\lambda(\square_n)} \|\nabla f\|_{L^{2+\delta}(U)} \\ &\times \left(r^b + \frac{1}{r^{2+d/2}} \left\{ \left(\frac{\Lambda(\square_n)^3 + \Lambda(\square_n)}{\lambda(\square_n)} \right)^{\frac{1}{2}} \varepsilon + \left(\left(\frac{\Lambda(\square_n)^2 + 1}{\lambda(\square_n)} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right) \Omega(n)^{\frac{1}{2}} \right\} \right). \end{aligned} \tag{3.16}$$

证明。我们记 $U_r := \{x \in U : \mathrm{dist}(x, \partial U) > r\}$。令 $\eta_r \in C_c^\infty(U)$ 为一个截断函数，使得对每个 $k \in \{1, 2, 3\}$，

$$0 \le \eta_r \le 1, \quad \eta_r = 1 \text{ in } U_{2r}, \quad \eta_r = 0 \text{ in } U \setminus U_r, \quad |\nabla^k \eta_r| \le \frac{C}{r^k} \tag{3.17}$$

并对每个 $n \in \mathbb{N}$ 和 $p \in \mathbb{R}$，定义

$$\phi_{n,p}(x) := v(x, \square_n, p) - p \cdot x.$$

注意，$-l_p + \phi_{n,\ p}$ 是 $\square_n$ 中满足边界条件 l_p 的狄利克雷问题的解，并且我们已在前一节估计了 $\phi_{n,\ p}$。证明的策略是用函数逼近 u^ε

$$w^\varepsilon(x) := u(x) + \varepsilon \eta_r(x) \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i} u(x) \phi_{n,e_i}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right). \tag{3.18}$$

本证明的大部分内容都在于证明 u 与 u^ε 之间的误差可由随机变量估计

$$\Psi(\varepsilon) := \sum_{i=1}^{d} \left(\varepsilon \left\| \phi_{n,e_i}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \right\|_{L^2(\varepsilon\square_n)} + \left\| \mathbf{a}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)\left(e_i + (\nabla \phi_{n,e_i})\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)\right) - \bar{\mathbf{a}} e_i \right\|_{H^{-1}(\varepsilon\square_n)} \right)^2.$$

步骤 *1.* 我们注意到，由于 u 是常系数微分方程的解，得到了这些估计。首先，我们使用平均值性质。由于 $u(\bar{\mathbf{a}}^{\frac{1}{2}} \cdot)$ 在 $\bar{\mathbf{a}}^{-\frac{1}{2}} U$ 中是调和的，根据平均值性质，存在常数 $c = c(a, A) \in (0, 1)$ 和 $C = C(d, a, A) < \infty$，使得对于任意 $z \in U_r$ 和 $k \in \{1, 2, 3\}$，

$$\|\nabla^k u\|_{L^\infty(B_{cr}(z))} \le \frac{C}{r^{k-1}} \|\nabla u\|_{\underline{L}^2(B_r(z))} \le \frac{C}{r^{k-1+d/2}} \|\nabla u\|_{L^2(U)}.$$

由于 u 是方程 (3.15) 的弱解，我们得到

$$\int_U \nabla u \cdot \bar{\mathbf{a}} \nabla u = \inf_{v \in f + H_0^1(U)} \int_U \nabla v \cdot \bar{\mathbf{a}} \nabla v \leq \int_U \nabla f \cdot \bar{\mathbf{a}} \nabla f. \tag{3.19}$$

由 (3.14) 和 (3.19) 可得

$$\|\nabla u\|_{L^2(U)}^2 \leq \frac{1}{a} \int_U \nabla u \cdot \bar{\mathbf{a}} \nabla u \leq \frac{1}{a} \int_U \nabla f \cdot \bar{\mathbf{a}} \nabla f \leq \frac{A}{a} \|\nabla f\|_{L^2(U)}^2.$$

结合前两个不等式可知，存在常数 $C = C(k, d, a, A) < \infty$使得

$$\|\nabla^k u\|_{L^\infty(U_r)} \leq \frac{C}{r^{k-1+d/2}} \|\nabla f\|_{L^2(U)}. \tag{3.20}$$

其次，我们使用迈耶斯估计。由引理 4.4 可知，存在常数$\delta' = \delta'(U, d, a, A) \in (0, \delta)$ 和 $C = C(U, d, a, A) < \infty$ 使得

$$\|\nabla u\|_{L^{2+\delta'}(U)} \leq C \|\nabla f\|_{L^{2+\delta'}(U)} \leq C \|\nabla f\|_{L^{2+\delta}(U)}.$$

由于 U 是一个有界利普希茨区域，根据霍尔德不等式，我们可以得到边界层中 ∇u 的估计：对 $b := \frac{\delta'}{4+2\delta'}$,

$$\|\nabla u\|_{L^2(U \setminus U_{2r})} \leq |U \setminus U_{2r}|^b \|\nabla u\|_{L^{2+\delta'}(U)} \leq C r^b \|\nabla f\|_{L^{2+\delta}(U)}. \tag{3.21}$$

步骤 *2.* 在这一步中，我们将得到估计

$$\left\| \nabla \cdot \left(\mathbf{a}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \nabla w^\varepsilon \right) \right\|_{H^{-1}(U)} \leq C \left(\Lambda(\square_n) + 1\right) \|\nabla f\|_{L^{2+\delta}(U)} \left(r^b + \frac{1}{r^{2+d/2}} \Psi(\varepsilon)^{\frac{1}{2}} \right). \tag{3.22}$$

由于 $U \subseteq \square_0 \subseteq \varepsilon \square_n$和 $(\nabla v(\cdot, \square_n, e_i))\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = e_i + (\nabla \phi_{n,e_i})\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$，由 (2.2) 可得

$$\begin{aligned}
&\nabla \cdot \left(\mathbf{a}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \eta_r (\partial_{x_i} u) \left(e_i + (\nabla \phi_{e_i})\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \right) \right) \\
=& \nabla \left(\eta_r \partial_{x_i} u\right) \cdot \left(\mathbf{a}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \left(e_i + (\nabla \phi_{n,e_i})\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \right) \right) + \eta_r (\partial_{x_i} u) \nabla \cdot \left(\mathbf{a}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \left(e_i + (\nabla \phi_{n,e_i})\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \right) \right) \\
=& \nabla \left(\eta_r \partial_{x_i} u\right) \cdot \left(\mathbf{a}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \left(e_i + (\nabla \phi_{n,e_i})\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \right) \right).
\end{aligned} \tag{3.23}$$

由 (3.18)，可得

$$\begin{aligned}
\nabla w^\varepsilon =& \nabla u + \eta_r \sum_{i=1}^d (\partial_{x_i} u)(\nabla \phi_{n,e_i})\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) + \varepsilon \sum_{i=1}^d \nabla \left(\eta_r \partial_{x_i} u\right) \phi_{n,e_i}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \\
=& \sum_{i=1}^d \left(\eta_r (\partial_{x_i} u) \left(e_i + (\nabla \phi_{n,e_i})\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \right) + (1 - \eta_r) (\partial_{x_i} u) e_i + \varepsilon \nabla \left(\eta_r \partial_{x_i} u\right) \phi_{n,e_i}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \right).
\end{aligned} \tag{3.24}$$

结合 (3.23) 和 (3.24)，可得

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \left(\mathbf{a}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \nabla w^\varepsilon \right) =& \sum_{i=1}^d \nabla \left(\eta_r \partial_{x_i} u\right) \cdot \mathbf{a}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \left(e_i + (\nabla \phi_{n,e_i})\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \right) \\
&+ \nabla \cdot \left(\mathbf{a}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \left((1 - \eta_r) \nabla u + \varepsilon \sum_{i=1}^d \phi_{n,e_i}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \nabla (\eta_r \partial_{x_i} u) \right) \right).
\end{aligned} \tag{3.25}$$

于是，由 (3.15) 得到

$$\sum_{i=1}^d \nabla (\eta_r \partial_{x_i} u) \cdot \bar{\mathbf{a}} e_i = \nabla \cdot (\eta_r \bar{\mathbf{a}} \nabla u) = -\nabla \cdot \left((1 - \eta_r) \bar{\mathbf{a}} \nabla u \right). \tag{3.26}$$

由 (3.25) 和 (3.26)，我们有

$$\nabla\cdot\left(\mathbf{a}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)\nabla w^{\varepsilon}\right)=\sum_{i=1}^{d}\nabla\left(\eta_r\partial_{x_i}u\right)\cdot\left(\mathbf{a}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)\left(e_i+\left(\nabla\phi_{n,e_i}\right)\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)\right)-\bar{\mathbf{a}}e_i\right)$$
$$+\nabla\cdot\left(\left(1-\eta_r\right)\left(\mathbf{a}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)-\bar{\mathbf{a}}\right)\nabla u\right)+\nabla\cdot\left(\varepsilon\sum_{i=1}^{d}\phi_{e_i}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)\mathbf{a}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)\nabla(\eta_r\partial_{x_i}u)\right).$$

由此可知，对于每个 $F\colon\ U\to\mathbb{R}^d$，其各项均属于 $H^1(U)$，

$$\begin{aligned}\|\nabla\cdot F\|_{H^{-1}(U)}&=\sup\left\{\int_U(\nabla\cdot F)\,v:v\in H_0^1(U),\|v\|_{H^1(U)}\le 1\right\}\\&=\sup\left\{\int_U F\cdot\nabla v:v\in H_0^1(U),\|v\|_{H^1(U)}\le 1\right\}\le C\|F\|_{L^2(U)}.\end{aligned}$$

结合前两个不等式，我们得到

$$\begin{aligned}&\|\nabla\cdot\left(\mathbf{a}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)\nabla w^{\varepsilon}\right)\|_{H^{-1}(U)}\\&\le\sum_{i=1}^{d}\|\nabla\left(\eta_r\partial_{x_i}u\right)\|_{W^{1,\infty}(U)}\left\|\mathbf{a}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)\left(e_i+\left(\nabla\phi_{n,e_i}\right)\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)\right)-\bar{\mathbf{a}}e_i\right\|_{H^{-1}(\varepsilon\square_n)}\\&+C\left\|\left(1-\eta_r\right)\left(\mathbf{a}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)-\bar{\mathbf{a}}\right)\nabla u\right\|_{L^2(U)}+C\sum_{i=1}^{d}\left\|\varepsilon\phi_{n,e_i}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)\mathbf{a}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)\nabla(\eta_r\partial_{x_i}u)\right\|_{L^2(U)}.\end{aligned}$$

对于右侧的第二项，我们利用 (3.21) 以及 $1-\eta_r=0$ 属于 U_{2r} 这一事实，得到

$$\begin{aligned}\left\|\left(1-\eta_r\right)\left(\mathbf{a}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)-\bar{\mathbf{a}}\right)\nabla u\right\|_{L^2(U)}&\le\left(\Lambda(\square_n)+|\bar{\mathbf{a}}|\right)\|(1-\eta_r)\nabla u\|_{L^2(U)}\\&\le C\left(\Lambda(\square_n)+1\right)r^b\|\nabla f\|_{L^{2+\delta}(U)}.\end{aligned}$$

另一方面，由 (3.17) 和 (3.20) 可得

$$\|\nabla(\eta_r\partial_{x_i}u)\|_{W^{1,\infty}(U)}\le\frac{C}{r^{2+d/2}}\|\nabla f\|_{L^2(U)}.$$

结合前面三个不等式以及 $\Psi(\varepsilon)$ 的定义，即得 (3.22)。

步骤 *3.* 在这一步中，我们断言

$$\|\nabla u^{\varepsilon}-\nabla w^{\varepsilon}\|_{\widehat{H}^{-1}(U)}\le C\frac{\Lambda(\square_n)+1}{\lambda(\square_n)}\|\nabla f\|_{L^{2+\delta}(U)}\left(r^b+\frac{1}{r^{2+d/2}}\Psi(\varepsilon)^{\frac{1}{2}}\right).\tag{3.27}$$

由于 $u^{\varepsilon}-w^{\varepsilon}\in H_0^1(U)$，因此可得

$$\left|\int_U\nabla(u^{\varepsilon}-w^{\varepsilon})\cdot\mathbf{a}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)\nabla w^{\varepsilon}\right|\le\|u^{\varepsilon}-w^{\varepsilon}\|_{H^1(U)}\left\|\nabla\cdot\left(\mathbf{a}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)\nabla w^{\varepsilon}\right)\right\|_{H^{-1}(U)}.\tag{3.28}$$

将 $u^{\varepsilon}-w^{\varepsilon}\in H_0^1(U)$ 代入 u^{ε} 的方程进行检验，可得

$$\int_U\nabla(u^{\varepsilon}-w^{\varepsilon})\cdot\mathbf{a}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)\nabla u^{\varepsilon}=0.\tag{3.29}$$

结合 (3.28) 和 (3.29)，并利用庞加莱不等式，我们得到

$$\begin{aligned}\|\nabla u^{\varepsilon}-\nabla w^{\varepsilon}\|_{L^2(U)}^2&\le\frac{1}{\lambda(\square_n)}\int_U\nabla(u^{\varepsilon}-w^{\varepsilon})\cdot\mathbf{a}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)\nabla(u^{\varepsilon}-w^{\varepsilon})\\&\le\frac{1}{\lambda(\square_n)}\|u^{\varepsilon}-w^{\varepsilon}\|_{H^1(U)}\left\|\nabla\cdot\left(\mathbf{a}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)\nabla w^{\varepsilon}\right)\right\|_{H^{-1}(U)}\\&\le\frac{C}{\lambda(\square_n)}\|\nabla u^{\varepsilon}-\nabla w^{\varepsilon}\|_{L^2(U)}\left\|\nabla\cdot\left(\mathbf{a}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)\nabla w^{\varepsilon}\right)\right\|_{H^{-1}(U)},\end{aligned}$$

因此

$$\|\nabla u^\varepsilon - \nabla w^\varepsilon\|_{L^2(U)} \leq \frac{C}{\lambda(\square_n)} \left\|\nabla \cdot \left(\mathbf{a}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)\nabla w^\varepsilon\right)\right\|_{H^{-1}(U)}.$$

由于 $u_\varepsilon - w_\varepsilon \in H_0^1(U)$ 和庞加莱不等式可得

$$\|\nabla u^\varepsilon - \nabla w^\varepsilon\|_{\widehat{H}^{-1}(U)} \leq C\|u^\varepsilon - w^\varepsilon\|_{L^2(U)} \leq C\|\nabla u^\varepsilon - \nabla w^\varepsilon\|_{L^2(U)}.$$

因此，利用（3.22）可证明（3.27）。S

that ^{te}p *4.* 我们利用 $\Psi(\varepsilon)$ 估计 u^ε 与 u 之差的 L^2-范数。结论为

$$\|u - u^\varepsilon\|_{L^2(U)} \leq C\frac{\Lambda(\square_n)+1}{\lambda(\square_n)}\|\nabla f\|_{L^{2+\delta}(U)}\left(r^b + \frac{1}{r^{2+d/2}}\Psi(\varepsilon)^{\frac{1}{2}}\right). \tag{3.30}$$

由于

$$w^\varepsilon - u = \varepsilon\eta_r \sum_{i=1}^d \partial_{x_i} u \phi_{n,e_i}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)$$

属于 $H_0^1(U)$，我们有

$$\|\nabla w^\varepsilon - \nabla u\|_{\widehat{H}^{-1}(U)} \leq C\left\|\varepsilon\eta_r \sum_{i=1}^d \partial_{x_i} u\phi_{n,e_i}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)\right\|_{L^2(U)} \leq C\|\nabla u\|_{L^\infty(U_r)} \sum_{i=1}^d \varepsilon\left\|\phi_{n,e_i}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)\right\|_{L^2(\varepsilon\square_n)}.$$

由此以及（3.20），我们有

$$\|\nabla w^\varepsilon - \nabla u\|_{\widehat{H}^{-1}(U)} \leq \frac{C}{r^{d/2}}\|\nabla f\|_{L^{2+\delta}(U)}\Psi(\varepsilon)^{\frac{1}{2}}.$$

由此以及 (3.27)，我们得到

$$\|\nabla u^\varepsilon - \nabla u\|_{\widehat{H}^{-1}(U)} \leq C\frac{\Lambda(\square_n)+1}{\lambda(\square_n)}\|\nabla f\|_{L^{2+\delta}(U)}\left(r^b + \frac{1}{r^{2+d/2}}\Psi(\varepsilon)^{\frac{1}{2}}\right).$$

由于 $u^\varepsilon - u \in H_0^1(U)$ 可以通过在 $\square_0 \setminus U$ 上取 0 延拓为 $\square_0$，因此应用引理 4.3 可得 $\|u^\varepsilon - u\|_{L^2(U)} \leq C\|\nabla u^\varepsilon - \nabla u\|_{\widehat{H}^{-1}(U)}$，从而得到 (3.30)。

步骤 *5.* 为完成证明，还需用 $\Omega(n)$ 估计 $\Psi(\varepsilon)$。首先注意重缩放的 $\widehat{H}^{-1}$范数：对于任意 $f \in L^2(\square_n)$,

$$\left\|f\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)\right\|_{\underline{H}^{-1}(\varepsilon\square_n)} = \varepsilon\|f\|_{\underline{H}^{-1}(\square_n)}.$$

我们还注意到 $|\varepsilon\square_n| < 3^d$ 成立。回忆一下，$\phi_{n,e_i} = v(\cdot, \square_n, e_i) - l_{e_i}$ 属于 $H_0^1(\square_n)$。应用引理 4.3 和命题 3.1，可得

$$\begin{aligned}
\Psi(\varepsilon) &\leq C\sum_{i=1}^d \left(\varepsilon^2\left\|\phi_{n,e_i}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)\right\|^2_{\underline{L}^2(\varepsilon\square_n)} + \left\|\mathbf{a}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)\left(e_i + (\nabla\phi_{n,e_i})\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)\right) - \bar{\mathbf{a}}e_i\right\|^2_{\underline{H}^{-1}(\varepsilon\square_n)}\right) \\
&\leq C\varepsilon^2\sum_{i=1}^d \left(\|\phi_{n,e_i}\|^2_{\underline{L}^2(\square_n)} + \|\mathbf{a}(e_i + \nabla\phi_{n,e_i}) - \bar{\mathbf{a}}e_i\|^2_{\underline{H}^{-1}(\square_n)}\right) \\
&\leq C\varepsilon^2\sum_{i=1}^d \left(\|\nabla\phi_{n,e_i}\|^2_{\underline{\widehat{H}}^{-1}(\square_n)} + \|\mathbf{a}(e_i + \nabla\phi_{n,e_i}) - \bar{\mathbf{a}}e_i\|^2_{\underline{\widehat{H}}^{-1}(\square_n)}\right) \\
&\leq C\varepsilon^2\left\{\left(\frac{\Lambda(\square_n)^3 + \Lambda(\square_n)}{\lambda(\square_n)} + |\bar{\mathbf{a}}|^2\right) + 3^{2n}\left(\frac{\Lambda(\square_n)^2+1}{\lambda(\square_n)} + |\bar{\mathbf{a}}|\right)\Omega(n)\right\} \\
&\leq C\left(\frac{\Lambda(\square_n)^3 + \Lambda(\square_n)}{\lambda(\square_n)}\right)\varepsilon^2 + C\left(\frac{\Lambda(\square_n)^2+1}{\lambda(\square_n)} + 1\right)\Omega(n).
\end{aligned}$$

结合这一不等式与 (3.30)，可得 (3.16)。 □

3.3 定理 1.2 的证明

本节结合第 2.2 节和第 3.2 节的结果证明定理 1.2。定理 3.2 表明，系数的椭圆性对误差的影响几乎是多项式阶的。由引理 4.1， $\Lambda(\square_n)$ 和 $1/\lambda(\square_n)$ 的增长几乎与多项式一样快，因此它们不会影响定理 2.7 中得到的 $\mathsf{a}(\square_n)$ 的收敛速率 $\exp\left(-cn^{1-3\alpha}\right)$ 。

定理 *1.2* 的证明。步骤 *1*。在这一步中，我们证明抑制序列的存在性。令

$$\beta' := \frac{1}{\beta} + \frac{1}{2}\left(\alpha - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma}\right), \quad \gamma' := \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{2}\left(\alpha - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma}\right),$$

并且 $\delta_n := (n+1)^{-\gamma'}, M_n := (n+1)^{\beta'}$。我们证明存在一个常数 $L = L(M, \beta, \gamma, \alpha) < \infty$，使得 $(\{\delta_n\}, \{M_n\})$ 是抑制的。由切比雪夫不等式可得

$$\mathbb{P}\left(\Lambda(\square_0) \geq M_n\right) = \mathbb{P}\left(\exp\left(\Lambda(\square_0)^{\beta}\right) \geq \exp\left((n+1)^{\beta\beta'}\right)\right) \leq \exp\left(-(n+1)^{\beta\beta'}\right) \mathbb{E}\left[\exp\left(\Lambda(\square_0)^{\beta}\right)\right].$$

利用平稳性和 $\beta\beta' > 1$，可得估计

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\Lambda(\square_n) \geq M_n\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{z \in \mathbb{Z}^d \cap \square_n} \{\Lambda(z + \square_0) \geq M_n\}\right) \\ &\leq 3^{nd}\, \mathbb{P}\left(\Lambda(\square_0) \geq M_n\right) \leq M 3^{nd} \exp\left(-(n+1)^{\beta\beta'}\right) \leq C e^{-4n}.\end{aligned}$$

另一方面，由于

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\Lambda(\square_0)\right)\right] \leq \mathbb{E}\left[\exp\left(\Lambda(\square_0)^{\beta}\right) : \Lambda(\square_0) \geq 1\right] + \mathbb{E}\left[\exp\left(\Lambda(\square_0)\right) : \Lambda(\square_0) \leq 1\right] \leq M + e,$$

由命题 4.1 可知，对每个 $q \geq 1$，存在 $C = C(q, M) < \infty$，使得 th at

$$\mathbb{E}\left[\Lambda(\square_n)^q\right] = \mathbb{E}\left[\sup_{z \in \mathbb{Z}^d \cap \square_n} \Lambda(z + \square_0)^q\right] \leq C\left((q-1)^q + \left(\log\left(3^{nd}(M+e)\right)\right)^q\right) \leq C + Cn^q. \quad (3.31)$$

同理，我们可以看出

$$\mathbb{P}\left(\lambda(\square_n) \leq \delta_n\right) \leq C e^{-4n},$$

and

$$\mathbb{E}\left[\lambda(\square_n)^{-q}\right] \leq C + Cn^q. \quad (3.32)$$

利用柯西-施瓦茨不等式和前面的估计，我们得到

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\lambda\left(\square_n\right)^{-3} + \Lambda\left(\square_n\right)^3 : \left\{\lambda\left(\square_n\right) \leq \delta_n\right\} \cup \left\{\Lambda\left(\square_n\right) \geq M_n\right\}\right] \\ \leq & C\, \mathbb{E}\left[\lambda\left(\square_n\right)^{-6} + \Lambda\left(\square_n\right)^6\right]^{\frac{1}{2}} \mathbb{P}\left(\left\{\lambda\left(\square_n\right) \leq \delta_n\right\} \cup \left\{\Lambda\left(\square_n\right) \geq M_n\right\}\right)^{\frac{1}{2}} \\ \leq & C(1+n^3)e^{-2n} \leq Ce^{-n},\end{aligned}$$

由此得证。

步骤 *2.* 接下来我们估计 $\Omega(n)^2$ 的期望。根据柯西-施瓦茨不等式,

$$\begin{aligned}\Omega(n)^2 &\le \left(\left(\sum_{m=0}^{n} 3^{-(n-m)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{m=0}^{n} 3^{-(n-m)} 3^{-(n-m)d} \sum_{z\in 3^m\mathbb{Z}^d\cap\square_n} |\mathbf{a}(z+\square_m)-\bar{\mathbf{a}}|\right)^{\frac{1}{2}}\right)^4 \\ &\le C\left(\sum_{m=0}^{n} 3^{-(n-m)} 3^{-(n-m)d} \sum_{z\in 3^m\mathbb{Z}^d\cap\square_n} |\mathbf{a}(z+\square_m)-\bar{\mathbf{a}}|\right)^2 \\ &\le C\left(\sum_{m=0}^{n} 3^{-(n-m)}\right)\left(\sum_{m=0}^{n} 3^{-(n-m)} 3^{-2(n-m)d} \left(\sum_{z\in 3^m\mathbb{Z}^d\cap\square_n} |\mathbf{a}(z+\square_m)-\bar{\mathbf{a}}|\right)^2\right) \\ &\le C\sum_{m=0}^{n} 3^{-(n-m)} 3^{-(n-m)d} \sum_{z\in 3^m\mathbb{Z}^d\cap\square_n} |\mathbf{a}(z+\square_m)-\bar{\mathbf{a}}|^2.\end{aligned}$$

对于 $x\in\mathbb{R}$，我们用 $\lfloor x\rfloor$ 表示小于或等于 x的最大整数。由抑制序列的存在性，取期望并利用平稳性和定理 2.7，可得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\Omega(n)^2\right] &\le C\sum_{m=0}^{n} 3^{-(n-m)}\exp\left(-cm^{1-3\alpha}\right) \\ &= \sum_{m=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} 3^{-(n-m)}\exp\left(-cm^{1-3\alpha}\right) + \sum_{m=\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1}^{n} 3^{-(n-m)}\exp\left(-cm^{1-3\alpha}\right) \\ &\le C3^{-\frac{n}{2}} + C\exp\left(-c\left\lfloor\frac{n}{2}+1\right\rfloor^{1-3\alpha}\right) \le C\exp\left(-cn^{1-3\alpha}\right). \end{aligned} \tag{3.33}$$

步骤 *3.* 我们完成证明。固定 $p\in(0,4)$。对于 $\varepsilon\in(0,1)$，令 $n\in[-\log_3\varepsilon,-\log_3\varepsilon+1)\cap\mathbb{N}$，并记

$$\Phi(\varepsilon) := \left(\frac{\Lambda(\square_n)^3+\Lambda(\square_n)}{\lambda(\square_n)}\right)^{\frac{1}{2}}\varepsilon + \left(\left(\frac{\Lambda(\square_n)^2+1}{\lambda(\square_n)}\right)^{\frac{1}{2}}+1\right)\Omega(n)^{\frac{1}{2}}.$$

利用霍尔德不等式、(3.31)、(3.32)、(3.33)以及 $-\log_3\varepsilon\le n$，可得

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\Phi(\varepsilon)^{\frac{p+4}{2}}\right] \\ &\le C\,\mathbb{E}\left[\left(\frac{\Lambda(\square_n)^3+\Lambda(\square_n)}{\lambda(\square_n)}\right)^{\frac{p+4}{4}}\right]\varepsilon^{\frac{p+4}{2}} + C\,\mathbb{E}\left[\left(\left(\frac{\Lambda(\square_n)^2+1}{\lambda(\square_n)}\right)^{\frac{1}{2}}+1\right)^{\frac{4(p+4)}{4-p}}\right]^{\frac{4-p}{8}}\mathbb{E}\left[\Omega(n)^2\right]^{\frac{p+4}{8}} \\ &\le C\left(n^{p+4}+1\right)\varepsilon^{\frac{p+4}{2}} + C\left(n^{\frac{3(p+4)}{4}}+1\right)\exp\left(-cn^{1-3\alpha}\right) \\ &\le C\exp\left(-c\left(-\log\varepsilon\right)^{1-3\alpha}\right).\end{aligned} \tag{3.34}$$

在使用定理 3.2 时，需要说明两点。首先，由于存在抑制序列，命题 2.4 和 (2.38) 给出了常数 $a=a(M,\beta,\gamma,\alpha)>0$,$A=A(M,\beta,\gamma,\alpha)<\infty$ 的存在性，它们满足 $a\mathrm{Id}\le\bar{\mathbf{a}}\le A\mathrm{Id}$。其次，对于 $b,c>0$ 和 $D>0$，有以下等式成立:

$$\inf_{r\in(0,1)}\left(r^b+\frac{1}{r^c}D\right) = \begin{cases}\left(\left(\frac{c}{b}\right)^{\frac{b}{b+c}}+\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{c}{b+c}}\right)D^{\frac{b}{b+c}} & \text{if } D\le\frac{b}{c},\\ 1+D & \text{if } D\ge\frac{b}{c}.\end{cases}$$

令 $c := 2 + d/2$。应用定理 3.2，并利用霍尔德不等式、(3.31)、(3.32) 以及上述不等式，我们得到

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\|u-u^{\varepsilon}\|_{L^2(U)}^p\right] \\
\leq& C\|\nabla f\|_{L^{2+\delta}(U)}^p \mathbb{E}\left[\left(\frac{\Lambda(\square_n)+1}{\lambda(\square_n)}\right)^{\frac{p(3p+4)}{4-p}}\right]^{\frac{4-p}{3p+4}} \mathbb{E}\left[\inf_{r\in(0,1)}\left(r^b+\frac{1}{r^c}\Phi(\varepsilon)\right)^{\frac{3p+4}{4}}\right]^{\frac{4p}{3p+4}} \\
\leq& C\|\nabla f\|_{L^{2+\delta}(U)}^p \left(n^{2p}+1\right)\left(\mathbb{E}\left[\Phi(\varepsilon)^{\frac{3p+4}{4}\frac{b}{b+c}}\right]+\mathbb{E}\left[(1+\Phi(\varepsilon))^{\frac{3p+4}{4}}:\Phi(\varepsilon)\geq\frac{b}{c}\right]\right)^{\frac{4p}{3p+4}}.
\end{aligned}$$

利用霍尔德不等式、切比雪夫不等式和 (3.34)，我们得到

$$\mathbb{E}\left[\Phi(\varepsilon)^{\frac{3p+4}{4}\frac{b}{b+c}}\right] \leq \mathbb{E}\left[\Phi(\varepsilon)^{\frac{p+4}{2}}\right]^{\frac{3p+4}{2p+8}\frac{b}{b+c}} \leq C\exp\left(-c\left(-\log\varepsilon\right)^{1-3\alpha}\right)$$

and

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(1+\Phi(\varepsilon))^{\frac{3p+4}{4}}:\Phi(\varepsilon)\geq\frac{b}{c}\right] &\leq \mathbb{P}\left(\Phi(\varepsilon)\geq\frac{b}{c}\right)^{\frac{4-p}{2p+8}} \mathbb{E}\left[(1+\Phi(\varepsilon))^{\frac{p+4}{2}}\right]^{\frac{3p+4}{2p+8}} \\
&\leq C\,\mathbb{E}\left[\Phi(\varepsilon)^{\frac{p+4}{2}}\right]^{\frac{4-p}{2p+8}}\left(1+\mathbb{E}\left[\Phi(\varepsilon)^{\frac{p+4}{2}}\right]\right)^{\frac{3p+4}{2p+8}} \\
&\leq C\exp\left(-c\left(-\log\varepsilon\right)^{1-3\alpha}\right).
\end{aligned}$$

结合前面三个公式即可得到 (1.7)，证明完毕。 □

4 附录

本节给出证明所需的一些估计。

下面的引理给出了随机变量最大值的 L^p 阶矩的上界估计。

命题 4.1。 (参见[1, 命题 5.2。]) 设 X_1，X_2，.. ., X_n 为随机变量，满足$\mathbb{E}[e^{|X_i|}] < \infty$ 对于 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$。那么，存在一个常数 $C = C(p) < \infty$ 使得

$$\mathbb{E}\left[\max_{i=1,2,\ldots,n}|X_i|^p\right] \leq C\left\{(p-1)^p+\left[\log\left(\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[e^{|X_i|}\right]\right)\right]^p\right\}. \tag{4.1}$$

对于每个 $n \in \mathbb{N}$ 以及每个 $p \in [1, \infty)$。

证明。 在 $[0, \infty)$ 上定义函数 f

$$f(x) := \exp\left(x^{\frac{1}{p}}\right)$$

且 $x_0 := (p-1)^p$。容易看出， f 在 $[0, \infty)$ 上严格递增，并在 $[x_0, \infty)$ 上为凸函数。令随机变量 Y 为

$$Y := \max_{i=1,2,\ldots,n}|X_i|^p \vee x_0.$$

对 Y 应用詹森不等式，得到

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\max_{i=1,2,\cdots,n}|X_i|^p\right]\\
\leq&\mathbb{E}\left[Y\right]\\
\leq&f^{-1}\left(\mathbb{E}\left[f\left(Y\right)\right]\right)\\
=&f^{-1}\left(\mathbb{E}\left[\exp\left(\max_{i=1,2,\ldots,n}|X_i|\right):Y\geq x_0\right]+\exp\left(x_0^{1/p}\right)\mathbb{P}\left(Y\leq x_0\right)\right)\\
\leq&f^{-1}\left(\mathbb{E}\left[\exp\left(\max_{i=1,2,\ldots,n}|X_i|\right):Y\geq x_0\right]+e^{p-1}\mathbb{E}\left[\exp\left(\max_{i=1,2,\ldots,n}|X_i|\right):Y\leq x_0\right]\right)\\
\leq&f^{-1}\left(e^{p-1}\mathbb{E}\left[\max_{i=1,2,\ldots,n}e^{|X_i|}\right]\right)\\
\leq&\left(p-1+\log\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[e^{|X_i|}\right]\right)\right)^p\\
\leq&2^{p-1}\left\{(p-1)^p+\left[\log\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[e^{|X_i|}\right]\right)\right]^p\right\}.
\end{aligned}$$

因此，(4.1) 得证。 □

下面给出内部卡恰波利不等式的表述。对于每个 $r\in\mathbb{R}_+$，我们定义$r\square:=(-r,r)^d$。

引理 4.2 (内部卡恰波利不等式)。 设 $r>0, 0<\lambda\leq\Lambda$，且 $\mathbf{a}$ 是一个从 $3r\square$ 到特征值属于 $[\lambda,\Lambda]$ 的正定对称矩阵集合的可测映射。假设 $u\in H^1(3r\square)$ 满足

$$-\nabla\cdot(\mathbf{a}(x)\nabla u)=0\quad in\ 3r\square. \tag{4.2}$$

那么，存在一个常数 $C=C(d)<\infty$，使得

$$\|\nabla u\|_{\underline{L}^2(r\square)}\leq C\frac{\Lambda}{\lambda}\frac{1}{r}\|u-(u)_{3r\square}\|_{\underline{L}^2(3r\square)}.$$

证明。用 u 替换 $u-(u)_{3r\square}$ 后，我们不妨假设 $(u)_{3r\square}=0$。令 $\phi\in C_c^\infty(3r\square)$ 为满足以下条件的截断函数

$$0\leq\phi\leq1,\quad \phi=1\quad\text{in } r\square,\quad |\nabla\phi|\leq\frac{2}{r}, \tag{4.3}$$

并用 $\phi^2u\in H_0^1(3r\square)$ 对方程 (4.2) 进行测试，得到

$$⨍_{3r\square}\phi^2\nabla u\cdot\mathbf{a}\nabla u=-⨍_{3r\square}2\phi u\nabla\phi\cdot\mathbf{a}\nabla u.$$

由杨氏不等式、上界 $\mathrm{a}\leq\Lambda\mathrm{Id}$ 和 (4.3)，可得

$$\begin{aligned}
|2\phi u\nabla\phi\cdot\mathbf{a}\nabla u|&\leq\frac{2\Lambda^2}{\lambda}|u\nabla\phi|^2+\frac{\lambda}{2\Lambda^2}|\phi\cdot\mathbf{a}\nabla u|^2\\
&\leq\frac{8\Lambda^2}{\lambda}\frac{1}{r^2}|u|^2+\frac{\lambda}{2}|\phi|^2|\nabla u|^2.
\end{aligned}$$

由下界 $\lambda\mathrm{Id}\leq\mathrm{a}$，可得

$$⨍_{3r\square}\phi^2\nabla u\cdot\mathbf{a}\nabla u\geq\lambda⨍_{3r\square}\phi^2|\nabla u|^2.$$

由前面三个公式可得

$$⨍_{3r\square}\phi^2|\nabla u|^2\leq C\frac{\Lambda^2}{\lambda^2}\frac{1}{r^2}⨍_{3r\square}|u|^2.$$

由于根据 (4.3)，$\|\phi\nabla u\|_{\underline{L}^2(3r\square)}\geq C(d)\|\nabla u\|_{\underline{L}^2(r\square)}$，引理得证。 □

下面的引理是区域 $\square_n$ 上庞加莱不等式的一个改写版本。它包含 $\square_n$ 的所有三分子立方体上的空间平均。

引理 4.3 (多尺度庞加莱不等式)。 存在一个常数 $C(d) < \infty$，使得对于每个 n，$m \in \mathbb{N}$ 满足 $m \leq n$，以及每个 $u \in L^2(\square_n)$，

$$\|u\|_{\underline{\widehat{H}}^{-1}(\square_n)} \leq C\|u\|_{\underline{L}^2(\square_n)} + C\sum_{m=0}^{n-1} 3^m \left(3^{-(n-m)d} \sum_{y\in 3^m\mathbb{Z}^d\cap\square_n} \left|\fint_{y+\square_m} u\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

此外，对于每个 $v \in H^1(\square_n)$，

$$\begin{aligned}\|v-(v)_{\square_n}\|_{\underline{L}^2(\square_n)} &\leq C\|\nabla v\|_{\underline{\widehat{H}}^{-1}(\square_n)}\\ &\leq C\|\nabla v\|_{\underline{L}^2(\square_n)} + C\sum_{m=0}^{n-1} 3^m \left(3^{-(n-m)d} \sum_{y\in 3^m\mathbb{Z}^d\cap\square_n} \left|\fint_{y+\square_m} \nabla v\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

并且，对于每个 $w \in H_0^1(\square_n)$，

$$\begin{aligned}\|w\|_{\underline{L}^2(\square_n)} &\leq C\|\nabla w\|_{\underline{\widehat{H}}^{-1}(\square_n)}\\ &\leq C\|\nabla w\|_{\underline{L}^2(\square_n)} + C\sum_{m=0}^{n-1} 3^m \left(3^{-(n-m)d} \sum_{y\in 3^m\mathbb{Z}^d\cap\square_n} \left|\fint_{y+\square_m} \nabla w\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

证明。 参见 [4, 命题 1.12 和引理 1.13.]。 □

最后，我们介绍迈耶斯估计。这个引理说明，一致椭圆方程的解具有良好的正则性。我们在引理 3.2 中使用迈耶斯估计，得到边界层中 L^2-范数的 ∇u 估计。

引理 4.4 (全局迈耶斯估计)。 固定 $p \in (2,\infty)$ 和 $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$。设 $U \subseteq \mathbb{R}^d$ 为一个有界利普希茨区域，并设$\mathbf{a}$ 是从 U 到特征值属于 $[\lambda,\Lambda]$ 的正定对称矩阵集合的可测映射。假设 $f \in W^{1,p}(U)$，且 $u \in f + H_0^1(U)$ 是下列方程的解

$$-\nabla\cdot(\mathbf{a}(x)\nabla u) = 0 \quad (in\ U), \qquad u = f \quad (on\ \partial U)$$

在分布意义下。于是，存在常数 $\delta = \delta(U,d,\lambda,\Lambda) > 0$ 和 $C = C(U,d,\lambda,\Lambda) < \infty$ 使得 $u \in W^{1,(2+\delta)\wedge p}(U)$ 并且

$$\|\nabla u\|_{\underline{L}^{(2+\delta)\wedge p}(U)} \leq C\|\nabla f\|_{\underline{L}^{(2+\delta)\wedge p}(U)}$$

证明。 参见 [4, 定理 C.7]。 □

致谢

作者非常感谢导师楠冈诚一郎教授给予的宝贵建议和鼓励。

参考文献

[1] 相田茂树、菊池隆典和楠冈诚一郎。在利普希茨条件下，路径依赖随机微分方程的 Euler–Maruyama 和 Wong–Zakai近似的 L^p收敛速率。东北数学杂志（第二辑），70(1):65–95, 2018年。

[2] Sebastian Andres 和 Stefan Neukamm。退化导电率随机导电模型的 Berry–Esseen定理与定量均匀化。《随机偏微分方程：分析与计算》，7(2):240–296，2019年。[3] Scott Armstrong、Tuomo Kuusi 和 Jean-Christophe Mourrat。椭圆均质化中的介观高阶正则性与次可加性。《数学物理通讯》，347(2):315–361，2016年。[4] Scott Armstrong、Tuomo Kuusi 和 Jean-Christophe Mourrat。定量随机均匀化与大尺度正则性，数学科学基本原理丛书第352卷 /数学科学基本原理/。施普林格，Cham，2019年。[5] Scott N. Armstrong 和 Charles K. Smart。凸积分泛函的定量随机均匀化。《高等师范学院科学年刊》，第四辑，49(2):423–481，2016年。[6] Peter Bella 和 Michael Kniely。退化系数随机椭圆算子的正则性及其在随机均匀化中的应用。arXiv预印本 arXiv:2210.01192，2022年。[7] Peter Bella 和 Mathias Schäffner。线性非一致椭圆方程解的局部有界性与 Harnack不等式。《纯粹与应用数学通讯》，74(3):453–477，2021年。[8] Richard C. Bradley。随机场的等价混合条件。《概率年刊》，21(4):1921–1926，1993年。[9] Richard C. Bradley。强混合条件导论。第3卷。Kendrick出版社，希伯城，犹他州，2007年。[10] Gianni Dal Maso 和 Luciano Modica。非线性随机均质化。《纯粹与应用数学年刊》，第四辑，144:347–389，1986年。[11] Gianni Dal Maso 和 Luciano Modica。非线性随机均质化与遍历理论。《纯粹与应用数学杂志》。 /克雷尔杂志/, 368:28–42，1986年。[12] Julian Fischer 和 Stefan Neukamm。非线性一致椭圆方程与系统随机均质化的最优均质化速率。《理性力学与分析档案》，242(1):343–452，2021年。[13] R. A. Fisher。判别函数的精度。《优生学年刊：一份专注于人类群体遗传学研究的期刊》，10:422–429，1940年。[14] Antoine Gloria、Stefan Neukamm 和 Felix Otto。相关系数场随机均匀化的定量估计。《分析与偏微分方程》，14(8):2497–2537，2021年。[15] Antoine Gloria 和 Félix Otto。随机均匀化中校正子的周期近似定量估计。载于 CEMRACS 2013——复杂系统建模与仿真：随机与确定性方法，第48卷，ESAIM会议论文与综述，第80–97页。EDP Sci.，莱于利，2015年。[16] Hermann O Hirschfeld。相关性与列联之间的联系。载于《剑桥哲学学会数学学报》，第31卷，第520–524页。剑桥大学出版社，1935年。[17] S. M. Kozlov。随机算子的平均化。《数学文集》。新辑，109(151)(2):188–202，327，1979年。[18] Agnes Lamacz、Stefan Neukamm 和 Felix Otto。渗流模型随机均匀化中校正子的矩估计。《电子概率杂志》，20:1—30，2015年。

[19] G.J. Murphy。《C*代数与算子理论》。Academic Press，1990。[20] G. C. Papanicolaou 和 S. R. S. Varadhan。具有快速振荡随机系数的边值问题。载于《随机场，第 I、II 卷（埃斯泰尔戈姆，1979）》，János Bolyai 数学学会讨论会第 27 卷，第 835–873 页。North-Holland，阿姆斯特丹-纽约，1981。[21] V. Yurinskiĭ。随机椭圆算子的均匀化误差估计。载于《随机介质数学（弗吉尼亚州布莱克斯堡，1989）》，应用数学讲座第 27 卷，第 285–291 页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1991。