arXiv:2302.00827v1 [physics.geo-ph] 2 Feb 2023

将应力松弛纳入地震发生的点过程模型

Giuseppe Petrillo 和 Jiancang Zhuang*The Institute of Statistical Mathematics, Research Organization of Information and Systems, Tokyo, Japan*

Eugenio Lippiello*Department of Mathematics and Physics, University of Campania "L. Vanvitelli", Viale Lincoln 5, 81100 Caserta, Italy*（日期：2023年2月3日）

基于物理和基于统计的地震发生模型是同一枚硬币的两面。本文比较了地震断层的弹簧块体模型所得到的事件时间组织结构与地震发生概率模型所预测的时间组织结构。通过使用最大似然估计优化参数，可以确定与物理模型拟合得更好的统计模型。结果表明，最佳统计模型必须考虑时间聚集与高震级主震发生后应力释放之间的非平凡相互作用，其中时间聚集与余震发生有关。根据数据拟合目录中所考虑的最小震级，这两种机制以不同方式发挥作用。

I. 引言

对地震现象的描述与理解不仅有助于丰富基础物理知识，也因其可能产生的社会影响而引人入胜。地震预测是地球物理学界长期以来备受争议的话题，其情景从完全随机、不可预测的（泊松）过程，直至确定性预测 [1]，不一而足。之所以难以回答这一争论，可能在于地震过程的复杂性：其中存在不同的机制，并作用于截然不同的空间和时间尺度 [2]。

目前，类流行病概率模型 [3–5]已对地震预报作出并持续作出根本性贡献。这类模型能够捕捉地震的时空聚集：大多数地震通常称为余震，会在大地震发生后不久、且在空间上靠近震中处发生。这些模型认为，大地震发生后，地震危险性会增加。然而，由于每次地震的震级都是从经验震级分布中随机赋予的，且不取决于此前的地震历史，因此无法据此了解某一区域下一次大地震发生的时间。另一方面，物理模型最初基于这样的观点：地震是某一区域历经数年或数十年积累的应力突然释放。因此，可以预期，发生最大滑移的区域也释放了最多的累积应力，因而不太容易再次发生地震；这与 Gilbert 在 1894 [6]提出的最初交替假说一致。沿着这一思路发展出的后续模型假定，连续发生的地震会在很大程度上重复破裂同一断层段，并触发大小大致相等、时间上大致周期性发生的特征地震。这些通常称为地震空区模型或地震周期模型的模型 [7, 8],提出了对下一次大地震发生时间进行准确定性预测的可能性。对地震空区假说的检验表明，该假说并不有效 [9, 10], 尽管它有时仍被用于地震预测[11]。此外，地震空区模型无法解释余震为何发生；而如前所述，余震恰恰是地震目录中非常显著的特征。不过，余震发生以及由此产生的短期聚集，并不与地震空区假说相矛盾，条件是余震位于主震滑动所涉及区域之外，或者至多位于主震滑动较弱的区域。对 101 次俯冲带板块边界大地震的研究记录了这一特征，这些地震的同震滑移分布均已得到精确确定 [12]。事实上，该研究发现，主震滑动区域内部的余震数量偏少，这与大滑动区域重新锁固的假说一致。进一步表明地震空区假说与余震发生相容的是这样一种观察：较大的余震发生在比小余震更远的位置 [13]。

有趣的是，在地震断层的弹簧块体模型中，地震空区假说所依据的应力积累/松弛机制与流行病模型描述的余震发生之间的相互作用得到了阐释。该模型是对 OFC模型 [14], 的推广，后者是地震断层弹簧块体模型的一种元胞自动机版本 [15]。具体而言，所考虑的模型称为震后滑移松弛 OFC（AROFC）模型，属于一类在 OFC模型 [14]中引入松弛机制、从而使余震发生得以体现的模型 [16–24] 。具体来说，AROFC模型将发震断层描述为一个弹性层，与 OFC模型的描述相同；同时，它还考虑了该弹性层与一个较具韧性的层之间的耦合，在后者中，应力通过一种通常称为震后滑移的震后变形逐渐松弛 [25, 26]。该模型能够非常有效地定量再现地震目录的主要统计特征，并解释余震与震后滑移之间的联系，

以及莫霍面深度对震级分布的影响 [27]。有趣的是，在AROFC模型 [28], 中，尽管大地震主震发生后观测到的地震发生率较高，但仍能再现地震空区假说的某些特征：大地震通常发生在空区内。不过，主震发生的时间并不规则，而且仅微弱地取决于该区域距上一次滑移的时间间隔。因此，近期研究结果表明，流行病式描述与较弱形式的空区假说可以并存。

本研究的主要目的是将这两种机制结合到一个用于描述地震发生的统计模型中：一方面保留流行病学描述，另一方面将超越地震空区假说的应力积累/松弛机制纳入考虑。更具体地说，我们展示了如何将这两种情景结合到各种统计模型中 [29–32]。问题在于，由于具有滑移重叠区域的大地震属于罕见事件，因此无法利用仪器记录的地震目录对不同模型进行准确的统计验证。基于这一原因，我们在 AORFC 模型中寻找能够更好地再现地震时间组织的统计模型；反过来，该模型允许我们生成任意长的模拟目录，从而进行完整的统计验证。更具体地说，我们通过最大似然估计（MLE）确定每个模型的最佳参数，并发现对数似然函数与目录的最小震级之间存在非平凡的依赖关系。

本文结构安排如下。第二节概述用于生成合成目录的AROFC模型。第三节介绍随后使用的各种统计模型。接下来的章节将通过最大似然估计优化参数，并比较不同模型对数据的拟合效果。最后一节为结论。

II. AROFC模型

该模型由两层组成：一层 H 和一层 U，分别模拟断层的脆性部分和韧性部分。层 U 受以速度 V_D 运动的构造动力学驱动，并与层 H弹性耦合。每一层都是一个对象，可视为由排列在大小为 $L_x \times L_y$的晶格上的块体组成。为简化起见，我们假设 V_D 沿 x方向，因此位移仅限于沿 x方向，定义为层 H 中的 $h_i(t)$和层 U中的 $u_i(t)$。我们假设存在短程相互作用，每个块体仅与其最近邻块体弹性连接。在这一近似下，位置 i 处块体 H 上的总应力可分为两部分：层内应力 $f_i = k_h \Delta h_i$ 和层间应力 $g_i = k(u_i - h_i)$。在最后几个表达式中，Δ 是离散拉普拉斯算子，而 k_h 和k 分别表示层间相互作用和层内相互作用的弹性常数。关于摩擦力，我们假设存在两种不同形式。对于脆性断层 H，我们采用库仑破坏准则：一旦总力 $f_i + g_i$ 超过局部摩擦阈值 f_i^{th}，位置 h_i 便变得不稳定，第i–个块体就会发生固定量 Δh 的滑移。应力随之演化如下：

$$
\begin{aligned}
f_i &\to f_i - 4k_h \Delta h \\
f_i &\to f_j + k_h \Delta h \\
g_i &\to g_i - 4k_h \zeta \Delta h \\
g_j &\to g_j - k_h(\zeta - \epsilon)\Delta h,
\end{aligned} \tag{1}
$$

其中 $\zeta = (1 - q_0)(\frac{k}{4k_h})$ 和 $\epsilon = (1 - q_0 - 4q_1)(\frac{k}{4k_h})$。第一个量考虑了两层之间的耦合，第二个量则表示耗散。量 $k_h \Delta h = \Delta f$ 表示应力降，其取值来自均值为 $\langle \Delta f \rangle$、标准差为 σ的高斯分布。对于韧性层，我们假设存在速度强化摩擦，并采用速率—状态摩擦定律的稳态形式$f_i^U(t) = \sigma_N(\mu_c + A\log(\frac{u_{i(t)}}{V_D}))$，其中 σ_N为法向应力，μ_c为块体以稳态速度 V_D 滑移时的摩擦系数；对于速度强化材料，$A > 0$。块体 h_i 的滑移 Δh 会在块体 u_j 上引发同震滑移 $q_0 \Delta h$ 和 $q_1 \Delta h$ （其中 j 是 u_i的最近邻）。当作用于第 i个块体、位于第 H 层的总应力超过局部摩擦应力阈值 f_i^{th}时，即当 $f_i + g_i \geq f_i^{th}$时。文献 [22–24]对该模型的动力学进行了深入阐释。本文模拟一个系统尺寸为 $L_y = 200$ 、 $L_x = 400$ 具有吸收边界条件的断层。

一次地震定义为一系列滑移，这些滑移始于区块 i 的初始失稳；该区块的位置决定了地震的震中坐标，滑移则在 $f_i + g_i \leq f_i^{th}$ 时终止。考虑到第 i 个区块在一次地震中可能发生多次滑移，我们引入量 $n_k(i)$，表示第 i 个区块在第 k 次地震中发生的滑移次数。第 k 次地震释放的地震矩 M_k 可定义为 $M_k \propto \sum_i n_k(i)\Delta h$，其中求和范围涵盖所有晶格位点。最后，我们将矩震级定义为 $m_k = (2/3)\log_{10} M_k$，其中任意加法常数设为零。

因此，利用所描述的模型，可以得到随时间变化的事件震级集合，称为地震目录。我们想强调的是，该模型能够正确再现所有地震统计定律，例如古登堡—里希特定律、大森—宇津定律、 $m$vs $Log(A)$- 标度等。 [23]。

我们模拟了两个合成目录：第一个，

CAT_1由 $N = 1E6$个不受地震矩约束的事件组成；第二个 CAT_2是 CAT_1 的一个子集，仅包含地震矩 M 小于 1000 的地震。图（1）特别展示了地震矩随发生时间的变化。这里，每个符号对应一个发生时间为 t 、矩震级为 M_k的事件。可以立即观察到目录中存在相关序列，称为簇。每个簇由一个主震（定义为该序列中最大的事件）以及一些余震/前震（即所有发生在主震之后/之前的事件）组成。常见的情况是，簇中的第一个事件大于其他所有事件；这并非模型的异常，而是表示一个没有前震发生的单一地震序列，这种情况在仪器地震目录中经常可以观察到。

III. 自触发与应变释放模型

点过程（PP）是一种在地震学中非常流行的数学模型，尤其用于地震预测，其实现了将地震视为时间上孤立点的假设。点过程可通过某个时间区间 Δt 内发生的事件数 $\mathcal{N}$ 来定义。如果这个时间跨度很短， $\mathcal{N}$ 可以取零值（事件未发生）或单位值（事件已发生）。因此，该过程由在给定先前历史$\mathcal{H}_t$的条件下，在某个区间 Δt 内观察到事件的概率唯一确定。其极限

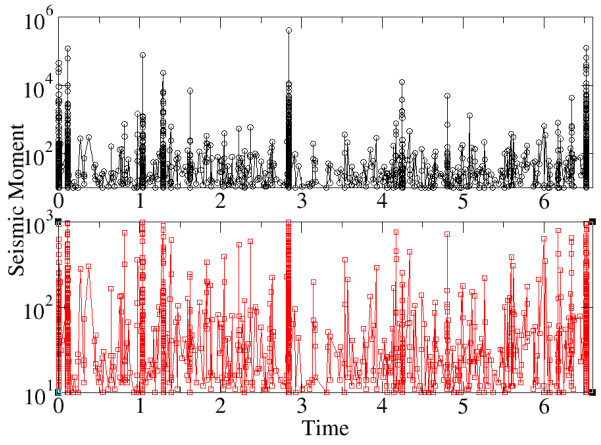

图 1：使用 OFCR 模型得到的数值地震目录。（上图）黑色圆点表示在时间 t_i 发生的所有事件 i 的地震矩 M_i 。（下图）红色方块表示在时间 t_i 且满足额外约束 $M_i \leq 1000$ 时发生的所有事件 i 的地震矩 M_i 。

$$\lambda(t|\mathcal{H}_t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(\mathcal{N}_{\Delta t} = 1|\mathcal{H}_t)}{\Delta t} \tag{2}$$

则表示在给定截至时间 t 的历史的条件下，在某个时间 t 观察到地震的概率密度（通常称为“强度函数”）。

预测模型也会采用点过程来描述地震的空间发生。为简化起见，本研究仅考虑时间模型。

A. 自校正模型

在经典回弹模型中，假设应力会缓慢积累，直至达到破裂点，此时便发生地震。另一方面，该事件发生后断层的破裂会导致应力降低。一般而言，该模型的条件强度率可写为：

$$\lambda_{SR}(t|\mathcal{H}_t) = e^{F(t) - G[0,t)} \tag{3}$$

其中， $G[0,t)$ 是与历史相关的函数，而 $F(t)$ 是应力加载，一般认为它是随时间线性递增的函数。采用指数形式是为了确保速率 λ_{SR} 为正。

应力释放模型（SR）属于 [30] 提出的自校正模型。在实际情况下，弹性应变因长期构造加载而不断积累，超过某一阈值后便会释放应力。应力释放后，需要经过一段时间，应力才能重新积累并引发后续事件。因此，[30, 33–35], 提出的 SR 模型公式（3）可写为

$$\lambda_{SR}(t|\mathcal{H}_t) = e^{\alpha + \beta t - \xi \mathcal{S}[0,t)} \tag{4}$$

其中， $F(t) = \alpha + \beta t$ 是时间的线性函数，表示构造加载； $\xi\mathcal{S}[0,t)$ 与过去的历史所导致的应力降低有关。设 M_i 为第 i 个事件的地震矩，$\mathcal{S}[0,t) = \sum_{i:\ t_i<t} S_i$，其中 S_i 是第 i 次地震释放的应力，求和范围为在 $t_i < t$ 发生的所有事件。一种合理的假设 [36, 37] 是，S_i 与释放的能量 $S_i \propto \sqrt{E_i}$ 的平方根成正比，由此得到 $S_i \propto \sqrt{M_i}$。因此，公式（4）中 SR 模型的拟合参数集为 $\Theta_{SR} = (\alpha,\ \beta,\ \xi)$。有时，在描述地震活动性时会采用简化版 SR 模型。具体而言，文献 [32, 38] 假设，平均而言，释放的总应力与已发生地震的数量成正比，由此得到 $\mathcal{S}[0,t) = \mathcal{N}[0,t)$，其中 $\mathcal{N}[0,t)$ 表示区间 $(0,\ t]$ 内的地震数量。根据这一设定，我们得到

$$\lambda_{SC}(t|\mathcal{H}_t) = e^{\alpha + \beta t - \xi \mathcal{N}[0,t)} \tag{5}$$

拟合参数集与 SR 模型相同，从现在起，我们将该模型简称为自校正（SC）模型，因为它不考虑先前地震释放的能量。

B. 触发模型

自激发点过程（SEPP）也被用于模拟地震发生和进行地震预测。典型的霍克斯过程 [39] 可写为

$$\lambda(t|\mathcal{H}_t) = \mu(t) + \sum_{j:t_j<t} \nu(t-t_j), \tag{6}$$

其中， $\mu(t)$表示背景地震活动， $\nu(t)$表示触发强度函数；在实践中， ν 控制聚集密度。对于 $\nu(t)$的函数形式，已有许多提议 [3, 31, 40–43]。

式（6）将地震活动性描述为一个分枝过程，其中每次地震都可能产生余震，而这些余震又可能产生自己的余震，从而形成级联地震过程。

本文重点讨论两种触发形式。第一种由弹性后效理论提出，其概率密度为 $\lambda_{TR1}(t|\mathcal{H}_t)$

$$\lambda_{TR1}(t|\mathcal{H}_t) = e^{\alpha} + \sum_{j:t_j<t} \phi e^{-\theta(t-t_j)}, \tag{7}$$

其中，我们将 $\mu(t) = e^{\alpha}$ 和 $\nu(t) = \phi e^{-\theta t}$置于此处。第二种是ETAS模型，它采用大森—宇津定律 $\nu(t) \propto \phi(t+c)^{-\theta}$

$$\lambda_{ETAS}(t|\mathcal{H}_t) = e^{\alpha} + \sum_{j:t_j<t} \frac{\phi}{(t-t_j+c)^{\theta}}, \tag{8}$$

触发模型中需要拟合的参数取决于 ν的函数形式。

C. ETASLC模型

我们提出将触发模型与自校正模型结合起来，得到所谓的流行型余震序列长期校正（ETAFLC）模型。

从解析角度来看，必须修改条件强度率的两个项。第一步是将触发模型的背景地震活动 $\mu(t)$ 设置为公式（7）中提出的时变应力加载，即

$$\mu(t) = e^{\alpha+\beta t} \tag{9}$$

同时，大地震后的应力释放机制可以通过函数形式 $\nu(t)$ 合理实现：只需减去一个常数 ξ，该常数代表需要拟合的新参数，如公式（4、5）所示。

综上所述，综合考虑所有这些信息并采用指数触发形式，ETAFLC 模型的条件发生率可写为：

$$\lambda_{ETAFLC1}(t|\mathcal{H}_t) = e^{\alpha+\beta t} + \sum_{j:t_j<t} \left(\phi e^{-\theta(t-t_j)} - \xi\right), \tag{10}$$

而在触发部分采用大森—宇津定律时

$$\lambda_{ETAFSLC2}(t|\mathcal{H}_t) = e^{\alpha+\beta t} + \sum_{j:t_j<t} \left(\frac{\phi}{(t-t_j+c)^{\theta}} - \xi\right). \tag{11}$$

显然，求和中的常数 ξ会产生一个校正项，该项与截至时间 t 已发生的地震数量成正比，其作用类似于公式（5）中的 $\mathcal{N}[0,t)$ 。

IV. 对数似然（LL）最大化

对于异步数据，具有强度函数 $\lambda(t)$ 的非平稳泊松过程的似然为

$$L(Y|\Theta) = \prod_{i=1}^{N} \lambda(t_i) e^{-\int_{t_{in}}^{t_{fin}} \lambda(t)dt} \tag{12}$$

其中， $Y = (y_1, ..., y_N)$ 为观测数据， t_i 是时间区间 $[t_{in}, t_{fin}]$ 内第 i 个事件的发生时间，而 Θ 为参数集。

对于这两个模型，参数优化均通过最大似然估计（MLE）[4, 44–46] 进行。参数优化过程采用逐分量马尔可夫链蒙特卡洛（MCMC）方法。所用的最大似然估计算法见附录 A。

对模拟目录数据拟合最佳的模型，是 AIC 值最小的模型。某个模型的 AIC 值为 $AIC = 2k - 2LL$，其中 k 是模型中的参数数量。在实践中，该准则通过选择 LL 最高的模型来避免欠拟合，同时对每增加一个参数施加惩罚。

V. 模型与模拟比较

对于 AROFC 目录，不同拟合模型的参数估计值见表(I,II)，马尔可夫链蒙特卡洛算法的设置值见附录 B 中的表(III)。图(2,3,4,5,6,7)展示了所有所考虑模型在参数优化过程中各参数的变化情况。该算法执行了 10^6 个蒙特卡洛步数，并且可以清楚地看到，对于所有参数和所有模型，算法都收敛到一个平稳值。

我们首先分析完整目录，表(I)的结果清楚地表明，触发模型优于自校正模型和应力释放模型；然而，将前两个模型结合起来后， $AIC_{ETASLC2}$ 远小于其他所有模型。此外，ETAS和ETASLC2的AIC值均小于通过实现指数触发函数所定义的相应模型的AIC值。

这带来了两条重要信息。第一，正如早已广为人知的那样，大森—宇津形式是用于描述短期触发效应最合理的触发函数 ν（t）。这也证实了物理模型中每次事件发生后松弛函数的实现是正确的。第二，ETASLC1和ETASLC2模型的表现都优于各自对应的触发模型。有趣的是，如果我们进行同样的研究，但只考虑数值目录中地震矩低于某一阈值 $M_{max} = 1000$的事件，就会发现两个ETASLC模型的AIC值都大幅增加，变得与触发模型ETAS相当。这有力地表明，较大震级的事件造成的应力降幅远大于仅由小事件造成的降幅。事实上，在限制目录震级后，触发模型的AIC值几乎保持不变（见表(II)）。再次比较触发模型TR1和ETAS可以看出，大森—宇津函数形式更适合描述短期地震活动。结果还证实了 [28] 最近的发现，即两个连续主震的复发时间略有依赖关系。通过考察简单的自我校正模型和应力释放模型，也能观察到这种震级依赖性。事实上，只有在考虑较大事件时，我们才注意到SR模型的AIC有所改善；该模型恰好包含了有关地震震级的信息。然而，对于较小事件，这两个模型的AIC几乎没有差别。

VI. 结论

本文介绍了两种不同类型的模型：一种是物理弹簧块体模型，另一种是各种点过程模型。它们在地震学中被广泛应用，既用于描述物理现象的内在特征，也用于实际的统计预测。尝试弥合这两类模型之间的差异，或许能让双方都得到加强。具体而言，本研究基于[23]，通过元胞自动机算法，从弹簧块体模型生成了一个数值目录，并用不同类型的点过程模型对该目录进行了拟合。一方面，自校正模型和应力释放模型考虑到断层破裂时，地震位置周围的应变量会减少；另一方面，自激模型则体现了地震的时间聚集特性。此外，还存在一种将上述两类PP模型相结合的模型，称为流行病型余震长期校正模型。该模型同时考虑短期触发效应以及地震发生所导致的应变释放。在触发模型中，背景地震活动 μ 被假设为恒定的；而在其他模型中，μ 是时间的函数。通过对数似然最大化过程，可以找到每个模型的最佳参数集，使其能够更好地拟合合成目录。

本研究结果表明，最佳统计模型的选择并非易事，且可能取决于地震目录所采用的最小地震矩截断值。事实上，目录中存在大事件，因此需要引入应力释放因素，以便更好地拟合实验目录。值得强调的是，数值目录的特点是不存在不完备性。因此，这一并非显而易见的结果显然不能归因于实验数据的不完备性，而应归因于聚类现象和／或占主导地位的背景效应。我们希望，本研究结果有助于开发新一代点过程模型。

致谢

本研究工作得到日本文部科学省地震学研究创新数据项目（STAR-E项目）的支持，资助编号：JPJ010217。E. Lippiello 感谢 PRIN201798CZLJ 项目以及坎帕尼亚大学“L. Vanvitelli”的 VALERE项目提供的支持。

表 I：本文所用模型的参数，通过最大似然估计程序获得。

模型	α	β	ξ	ϕ	c	θ	AIC
自我校正	6.45	0.11	6.65×10^{-4}	-	-	-	-24942
应力释放	6.28	0.15	1.55×10^{-5}	-	-	-	-26202
触发器（TR1）	-8.41	-	-	52.25	-	150.10	-33004
ETAS	-9.69	-	-	0.0016	6.5×10^{-4}	1.34	-39032
ETASLC1	-9.69	-4428	0.04	743	-	3035	-41766
ETASLC2	-9.69	-4129	0.037	1.47×10^{-4}	7.16×10^{-4}	1.42	-44290

表 I：本文所用模型的参数，采用最大似然估计程序对带有 $M \leq 1000$ 的数值目录求得。

模型	α	β	ξ	ϕ	c	θ	AIC
自我校正	6.74	0.18	0.001	-	-	-	-24920
应力释放	6.06	0.15	4.5×10^{-5}	-	-	-	-24896
触发器（TR1）	-8.20	-	-	55.73	-	157.28	-33104
ETAS	-9.69	-	-	0.002	3.6×10^{-4}	1.26	-38874
ETASLC1	-9.69	-4478	0.042	1018	-	3755	-39104
ETASLC2	-9.69	-4129	0.038	1.81×10^{-4}	4.08×10^{-4}	1.31	-39002

附录 A：对数似然最大化过程

为最大化对数似然函数，我们采用马尔可夫链蒙特卡洛算法。将 $\Theta^k = \{\theta_i^k\}$ 称为模型 k的参数集，选取 $\vec{\theta}_0^k$ 作为初始值。随后按以下步骤执行该算法。

- 计算 $LL(Y|\theta_0^k)$。
- 随机选择一个参数 $\theta_{i^*}^k$，并按照规则 $\theta_{i^*}^k \to \theta_{i^*}^k + \epsilon_{i^*}$ 更新，其中 ϵ_{i^*} 通过手动调整，以确保该过程收敛，同时避免马尔可夫链移动过慢。
- 比较 $LL(Y|\theta_i, \ldots\ldots, \theta_{i^*}^k, \ldots\ldots)$ 和 $LL(Y|\vec{\theta}_0^k)$。如果$LL(Y|\theta_i, \ldots\ldots, \theta_{i^*}^k, \ldots\ldots) > LL(Y|\vec{\theta}_0^k)$，则 $LL(Y|\vec{\theta}_0^k) = LL(Y|\theta_i, \ldots\ldots, \theta_{i^*}^k, \ldots\ldots)$ 并重复上一步。否则保留旧的 $LL(Y|\vec{\theta}_0^k)$ 并重复上一步。

当无法再找到大于前一个似然值时，程序便停止。为确保算法收敛，我们生成了一条由 100000 步组成的马尔可夫链。

附录 B：对数似然估计

1. SC 和 SR 模型

对于 SC模型，非平稳泊松点过程的强度见公式（5）。因此，自校正模型的似然函数可写为

$$L(Y|\alpha,\beta,\xi) = \left(\prod_{i=1}^{N} e^{\alpha+\beta t_i - \xi\mathcal{N}[0,t_i)}\right) \times e^{-\int_{t_{in}}^{t_{fin}} \exp(\alpha+\beta t - \xi\mathcal{N}[0,t))dt} \quad \text{(B1)}$$

为简化计算，将似然函数转换为对数似然（LL）函数:

$$LL(Y|\alpha,\beta,\xi) = \left(\sum_{i=1}^{N} \alpha + \beta t_i - \xi\mathcal{N}[0,t_i)\right) - \int_{t_{in}}^{t_{fin}} e^{\alpha+\beta t - \xi\mathcal{N}[0,t)}dt \quad \text{(B2)}$$

以非常相似的方式，我们可以得到与 SR 模型相关的 $LL(Y|\alpha,\ \beta,\ \xi)$，其中在 λ 的定义中考虑了 $\mathcal{N}[0,t_i) = \mathcal{S}[0,t_i)$。优化后的参数列于表 (I) 中，而模型各参数的 MCMC 动力学则绘于图 (2,3) 中。

2. 触发模型

对于SC模型和SR模型，触发模型（TR1）7的对数似然函数可写为

参数 初始值 标准差		
α	0.1	0.1
β	0.1	0.1
ξ	0.1	0.1

SC模型参数的初始值和标准差

参数 初始值 标准差		
α	0.1	0.1
β	0.1	0.1
ξ	0.1	0.1

SR模型参数的初始值和标准差

参数 初始值 标准差		
α	1.0	0.1
ϕ	1.0	0.1
θ	1.0	0.1

TR1 模型参数的初始值和标准差

参数 初始值 标准差		
α	1.0	0.1
ξ	0.1	0.1
ϕ	1.0	0.1
c	1.0	0.1
θ	1.0	0.1

ETAS模型参数的初始值和标准差

参数 初始值 标准差		
α	1.0	0.1
β	1.0	0.1
ξ	0.1	0.1
ϕ	1.0	0.1
θ	1.0	0.1

STLC1 模型参数的初始值和标准差

参数 初始值 标准差		
α	1.0	0.1
β	1.0	0.1
ξ	0.1	0.1
ϕ	1.0	0.1
c	1.0	0.1
θ	1.0	0.1

STLC2 模型参数的初始值和标准差

表 III：所有不同模型中马尔可夫链蒙特卡洛算法所采用的初始值。

$$LL(Y|\alpha,\beta,\phi,\theta) = \sum_{i=1}^{N} \log\left(e^{\alpha} + \sum_{j:t_j<t_i} \phi e^{-\theta(t_i-t_j)}\right) - \int_{t_{in}}^{t_{fin}} \left(e^{\alpha} + \sum_{j:t_j<t} \phi e^{-\theta(t-t_j)}\right) dt \tag{B3}$$

而对于 ETAS，我们得到

$$LL(Y|\alpha,\beta,\phi,\theta) = \sum_{i=1}^{N} \log\left(e^{\alpha} + \sum_{j:t_j<t} \frac{\phi}{(t-t_j+c)^{\theta}}\right) - \int_{t_{in}}^{t_{fin}} \left(e^{\alpha} + \sum_{j:t_j<t} \frac{\phi}{(t-t_j+c)^{\theta}}\right) dt \tag{B4}$$

与记录数据 Y 相符的最佳序列 (α,ϕ,θ) 和 (α,ϕ,c,θ) 是使似然最大化的序列。优化后的参数列于表 (I) 中。

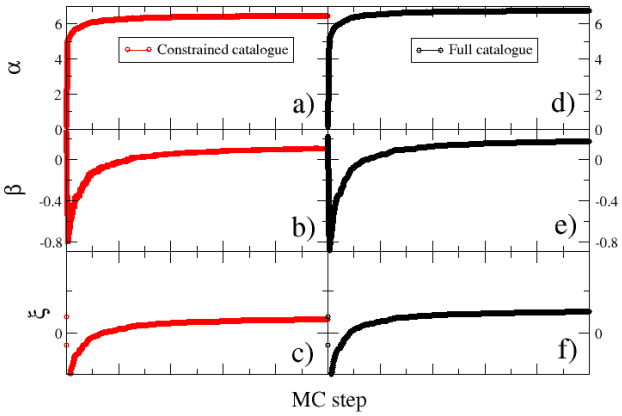

图2：自校正模型的参数优化。红色曲线 (a)、(b) 和 (c) 分别表示在马尔可夫链蒙特卡洛算法运行过程中，目录仅包含 $M \leq 1000$ 时参数 α,β,ξ 的变化。黑色曲线 (d)、(e) 和 (f) 表示在整个数值目录上运行马尔可夫链蒙特卡洛算法时参数的变化。

3. STLC模型

采用指数触发形式的 ETASLC1模型的对数似然函数解析表达式可写为

$$LL(Y|\alpha,\beta,\phi,\theta) = \sum_{i=1}^{N}\log\left[e^{\alpha+\beta t_i}+\sum_{j:t_j<t_i}\left(\phi e^{-\theta(t_i-t_j)}-\xi\right)\right] - \int_{t_{in}}^{t_{fin}}\left[e^{\alpha+\beta t}+\sum_{j:t_j<t}\left(\phi e^{-\theta(t-t_j)}-\xi\right)\right]dt \quad \text{(B5)}$$

而采用大森—宇津函数形式，我们得到

$$LL(Y|\alpha,\beta,\phi,c,\theta) = \sum_{i=1}^{N}\log\left[e^{\alpha+\beta t_i}+\sum_{j:t_j<t_i}\left(\frac{\phi}{(t-t_j+c)^{\theta}}-\xi\right)\right] - \int_{t_{in}}^{t_{fin}}\left[e^{\alpha+\beta t}+\sum_{j:t_j<t}\left(\frac{\phi}{(t-t_j+c)^{\theta}}-\xi\right)\right]dt \quad \text{(B6)}$$

与记录数据 Y 相符的最佳序列（α、β、ϕ、c、θ、ξ）是使似然最大化的序列。优化后的参数列于表（I）中。

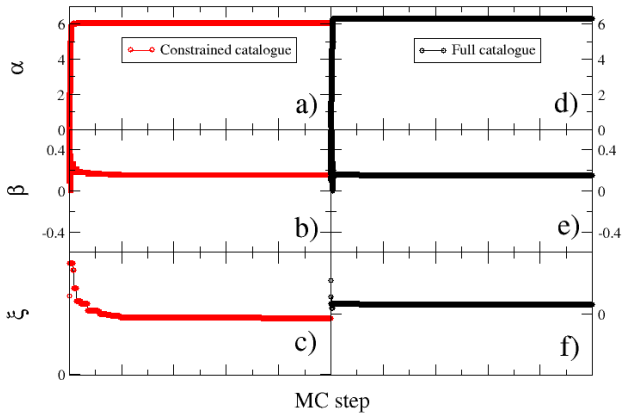

图 3：应力释放模型的参数优化。红色曲线（a）、（b）和（c）表示仅包含 $M \leq 1000$的目录中，参数在马尔可夫链蒙特卡洛算法运行期间的变化。黑色曲线（d）、（e）和（f）表示整个数值目录中，参数在马尔可夫链蒙特卡洛算法运行期间的变化。

[1] I. Main，《对单个地震进行可靠预测是一个现实的科学目标吗？》，Nature，1476（1999）。[2] de Arcangelis L.、C. Godano、G. J. R. 和 L. E.，《地震发生与预测的统计物理学方法》，Physics Reports **628**，1（2016）。[3] Y. Ogata，《Journal of the American Statistical Association》**83**，9（1988）。[4] Y. Ogata，《地震发生的时空点过程模型》，Annals of the Institute of Statistical Mathematics **50**，379（1998）。[5] G. Petrillo 和 Z. J.，《基于流行型余震序列模型的贝叶斯地震预测方法》，Research Square（2022）。[6] G. K. Gilbert，《地震预报导论》，Science **29**，121（1909）。[7] W. McCann、S. Nishenko、L. Sykes 和 J. Krause，《地震空区与板块构造：主要边界的地震潜能》，《地震预测与地震活动性模式》，1082（1979）。[8] S. P. Nishenko，*Circum-Pacific seismic potential: 1989–1999*（1991 Springer，）。[9] Y. Y. Kagan 和 D. D. Jackson，《地震空区假说：十年之后》，Journal of Geophysical Research: Solid Earth **96**，21419（1991）。[10] Y. Rong、D. D. Jackson 和 Y. Y. Kagan，《地震空区与地震》，Journal of Geophysical Research: Solid Earth **108** (2003). [11] F. Mulargia、P. B. Stark 和 R. J. Geller，为什么仍在使用概率地震危险性分析（psha）？Physics of the Earth and Planetary Interiors **264**, 63 (2017). [12] N. Wetzler、T. Lay、E. Brodsky 和 H. Kanamori，大型俯冲带地震中同震滑移量较大的区域余震存在系统性不足，科学进展，4，eaao3225 (2018). [13] N. J. van der Elst 和 B. E. Shaw，较大的余震发生在更远处：余震震级与空间分布不可分离，Geophysical Research Letters **42**, 5771 (2015). [14] Z. Olami、H. J. S. Feder 和 K. Christensen，用于地震建模的连续非守恒元胞自动机中的自组织临界性，Physical review letters **68**, 1244 (1992). [15] R. Burridge 和 L. Knopoff，模型与理论地震活动性，Bullettin of the Seismological Society of America，341–371 (1967). [16] S. Hainzl、G. Zoller 和 J. Kurths，地震弹簧块体模型中前震序列和余震序列的相似幂律，Journal of Geophysical Research: Solid Earth **104**, 7243 (1999). [17] E. Jagla，改进的 Olami-Feder-Christensen模型中的真实地震时空分布，Physical Review E **81**, 046117 (2010).

[18]E. Jagla 和 A. Kolton，地震时空聚集的一种机制，Journal of Geophysical Research: Solid Earth **115** (2010). [19] A. Jagla、E.、F. Landes 和 A. Rosso，雪崩动力学中的黏弹性效应：地震统计的关键，《物理评论快报》**112**, 174301 (2014). [20] X. Zhang 和 R. Shcherbakov，幂律流变学控制余震触发与衰减，《科学报告》**6**, 1 2016( ). [21] J. Bar´o 和 J. Davidsen，流变断裂平均场模型中普适雪崩统计与临近失效触发，Physical Review E **97**, 033002 (2018). [22] E. Lippiello、G. Petrillo、F. Landes 和 A. Rosso，断层非均质性与余震和震后滑移之间的联系，Bulletin of the Seismological Society of America **109**, 1156 (2019). [23] G. Petrillo、E. Lippiello、F. P. Landes 和 A. Rosso，脆韧性转换带对余震和前震发生的影响，《自然通讯》**11**, 1 (2020). [24] E. Lippiello、G. Petrillo、F. Landes 和 A. Rosso，弹簧滑块模型中余震的成因，《地震成因的统计方法与建模》，131 (2021). [25] H. Perfettini 和 J.-P. Avouac，脆性蠕变驱动的震后松弛：一种可能协调大地测量结果与余震衰减率的机制——以台湾集集地震为例，Journal of Geophysical Research: Solid Earth **109** (2004). [26] H. Perfettini 和 J.-P. Avouac，模拟1992年兰德斯地震后的震后滑移和余震，Journal of Geophysical Research: Solid Earth **112** (2007). [27] C. Godano、A. Tramelli、G. Petrillo、E. Bellucci Sessa 和 E. Lippiello，莫霍面深度的依赖性

古登堡–里克特定律的b值，《美国地震学会会刊》(2022)。[28] G. Petrillo、A. Rosso和E. Lippiello，《在具有真实地震统计特征的模型中检验地震空区假说》，Journal of Geophysical Research: Solid Earth **127**(2022)。[29] D. Vere-Jones，《应力释放模型的方差性质》，《澳大利亚统计学杂志》**30A**，123 (1988)。[30] D. Vere-Jones，《地震预测——统计学家的观点》，《地球物理学杂志》**26**，129 (1978)。[31] C. Lomnitz，《地震序列中的震级稳定性》，Bulletin of the Seismological Society of America **56**，247 (1966)。[32] F. Schoenberg和B. Bolt，《地震目录的短期激发、长期校正模型》，Bulletin of the Seismological Society of America **90**，849 (2000)。[33] D. Vere-Jones和Y. L. Deng，《华北历史地震的点过程分析》，Earthq. Res. China **2**，165 (1988)。[34] C. Lu、D. Harte和M. Bebbington，《日本历史地震的联结应力释放模型》，《地球、行星与空间》**51**，907 (1999)。[35] X. Zheng和D. Vere-Jones，《应力释放模型在华北地震中的应用》，Pure appl. Geophys. **135**，559 (1991)。[36] C. G. Bufe和D. J. Varnes，《旧金山湾区地震周期的预测建模》，Journal of Geophysical Research: Solid Earth **98**，9871 (1993)。[37] N. Limnios、E. Papadimitriou和G. Tsaklidis, *Sta-tistical Methods and Modeling of Seismogenesis* (Wiley，2021)。[38] V. Isham和M. Westcott，《一种自我校正点过程》，《随机过程及其应用》**8**，335

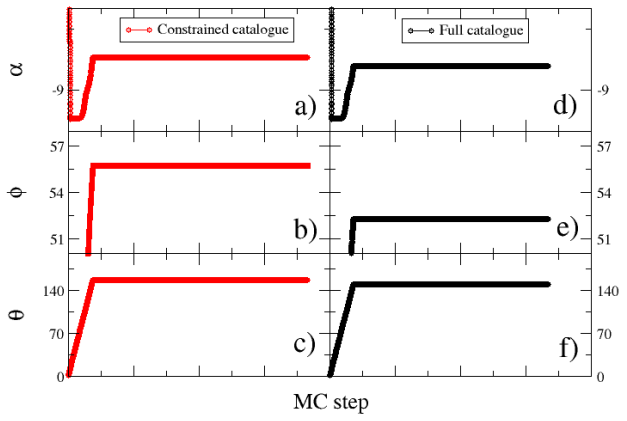

图 4：TR1 模型的参数优化。红色曲线 (a)、(b) 和 (c) 表示仅包含 $M \leq 1000$ 的目录在马尔可夫链蒙特卡洛算法中的参数演化。黑色曲线 (d)、(e) 和 (f) 表示整个数值目录在马尔可夫链蒙特卡洛算法中的参数演化。

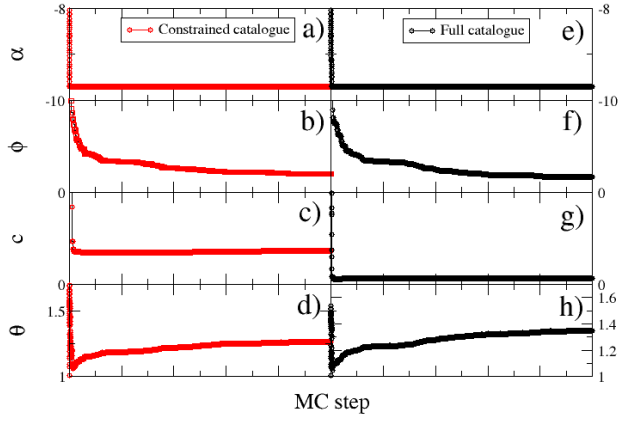

图 5：ETAS模型的参数优化。红色曲线 (a)、(b)、(c) 和 (d) 表示仅包含 $M \leq 1000$ 的目录在马尔可夫链蒙特卡洛算法中的参数演化。黑色曲线 (e)、(f)、(g) 和 (h) 表示整个数值目录在马尔可夫链蒙特卡洛算法中的参数演化。

(1979)。[39] A. G. Hawkes, 《地震簇模型的区域比较》, Bull. Int. Stat. Inst. **45**, 454 (1973)。[40] B. Epstein和C. Lomnitz, 《大地震发生模型》, Nature **211**, 954 (1966)。[41] T. Utsu、Y. Ogata和R. S. Matsu'ura, 《余震活动衰减定律——大森公式百年纪念》, 《地球物理学杂志》**43**, 1 (1995)。[42] D. Vere-Jones和T. Ozaki, 《应用于地震数据的统计估计实例——I. 周期泊松模型与自激模型》, Ann. Inst. Statist. Math. **34**, 189 1982( )。[43] Y. Ogata和H. Akaike, 《混合双重随机泊松点过程与自激点过程的线性强度模型》, Selected Papers of Hirotugu Akaike, 269 (1982)。[44] E. Lippiello、F. Giacco、L. d. Arcangelis、W. Marzocchi和C. Godano, 《ETAS模型中的参数估计：近似方法与新方法》, Bulletin of the Seis- mological Society of America **104**, 985 (2014)。[45] I. Ogata, 《用极大似然法估计修正大森公式中余震频率的参数》, 《地球物理学杂志》**31**, 115 (1983)。[46] Y. Ogata和J. Zhuang, 《时空ETAS模型及其改进扩展》, Tectonophysics **413**, 13 (2006)。

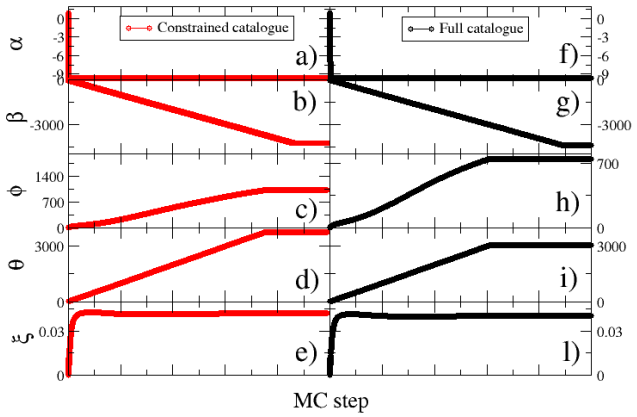

图 6：ETASLC1模型的参数优化。红色曲线 (a)、(b)、(c) 和 (d) 表示仅包含 $M \leq 1000$ 的目录在马尔可夫链蒙特卡洛算法运行过程中参数的演变。黑色曲线 (e)、(f)、(g) 和 (h) 表示整个数值目录在马尔可夫链蒙特卡洛算法运行过程中参数的演变。

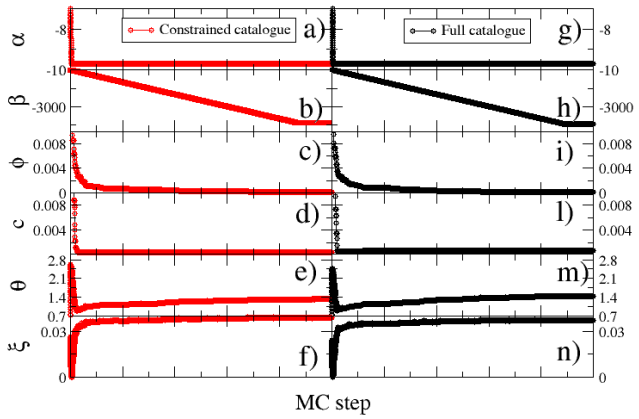

图 7：ETASLC2 模型的参数优化。红色曲线 (a)、(b)、(c)、(d) 和 (e) 表示仅包含 $M \leq 1000$ 的目录在马尔可夫链蒙特卡洛算法运行过程中参数的演变。黑色曲线 (f)、(g)、(h) 和 (i) 表示整个数值目录在马尔可夫链蒙特卡洛算法运行过程中参数的演变。