arXiv:2302.00829v1 [math.DS] 2 Feb 2023

量子幻影流体动力学类比的随机离散动力学模型

Gonzalo Ferrandez Quinto [*†], Aminur Rahman[*‡]

摘要

近年来，行走液滴动力学的离散动力学模型使人们能够快速数值模拟液滴的水平混沌运动，进而研究液滴位置的长期统计分布。我们为椭圆形围栏中的行走体建立了一个离散模型，其中包含两个主导特征模态。这些特征模态会周期性地受到激发，各自具有随机但彼此相关的权重。在每次迭代中，模型都会计算液滴与流体浴撞击所产生的水平推进力。推进力根据液滴与特征模态激发所产生的波场之间的相互作用计算得出。我们记录了长期统计特性；令人惊讶的是，对于如此简单的模型而言，其结果在定性上与实验结果相似。

1 引言

过去二十年来，行走液滴一直令经典物理学家着迷。早在 20 世纪 70 年代，人们就已知道，在适当条件下，液滴可以在垂直振动的流体浴表面持续弹跳很长时间 [1]。后来，Couder 及其同事发现，如果增大流体浴的驱动力，液滴便会开始水平移动，因此将其称为“行走者” [2, 3]。由于粒子（液滴）受到其在浴中产生的波的推动，研究人员得以

[*]应用数学系，华盛顿大学
[†]华盛顿大学物理系
[‡]通讯作者 arahman2@uw.edu

产生类量子现象，例如粒子被限制在圆形围栏中 [4, 5, 6] 以及量子幻影 [7, 8]，等。Bush 及其同事在综述中对这些现象进行了详尽阐述 [9, 10, 11, 12]。

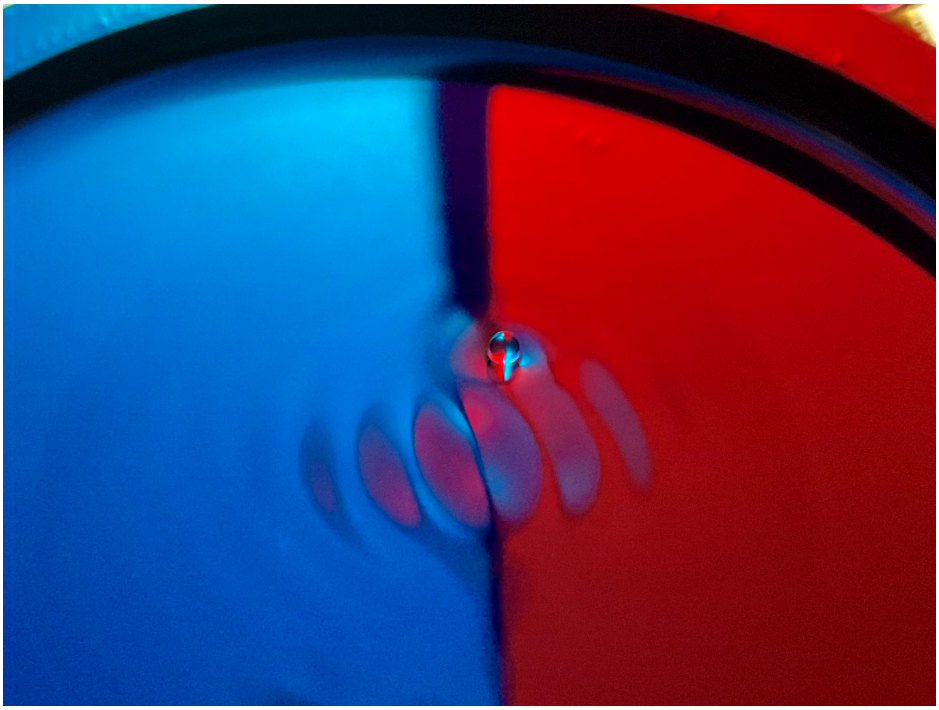

图1：行走液滴在振动流体浴上产生波。画面中使用了蓝色和红色滤光片，以改善波场的可视效果。

尽管液滴系统所呈现的现象颇为引人入胜，但事实证明，其建模相当微妙且极其复杂。即使是简化的连续介质模型，例如频闪模型 [13]，，在计算上也可能代价高昂，并且在数学上难以处理。离散动力学模型 [14, 15, 16, 17] 则可以摆脱这种复杂性，并实现严格的数学分析 [18, 19, 20]。第一个此类模型由Gilet提出，将行走者限制在一维区域内。液滴的波动和位置在每次撞击时通过迭代更新，其中包含二者之间的相互作用项。这使Gilet得以提出猜想 [14] ，并由Rahman和Blackmore证明 [15] Neimark–Sacker分岔 [21, 22]的存在。后续的此类模型揭示了新的异宿型分岔以及通向混沌的路径 [18, 19]。Gilet还为一个行走者建立了离散动力学模型

限制在圆形围栏中 [16], 该模型令人难以置信地再现了流体动力学围栏实验中所显示的长期统计特征 [5]。本文旨在修改Gilet针对流体动力学类比量子幻影所建立的圆形围栏模型；该量子幻影最近由S´aenz等人[8]开发。

在本实验中，椭圆围栏以给定的加速度振幅 γ 垂直振动。当驱动加速度低于法拉第波阈值 $\gamma/\gamma_F < 1$ 时，只有在存在液滴的情况下才能观察到驻波。为了捕捉行走者能够激发哪些模态，S´aenz 等人 [8] 以略高于法拉第波阈值的加速度驱动了一个长半轴为 14.25mm、偏心率为 0.5 的椭圆围栏。这表明，在法拉第阈下区间，两种不同的马蒂厄函数驻波会优先被激发。这些函数对应于具有固定边界条件的椭圆区域中亥姆霍兹方程的解。具体而言，偶模态 (n=4, j=4) 和奇模态 (n=1, j=5) 如 Wilson 等人 [23]所述。

在低于法拉第波阈值时，研究人员在围栏深度均匀的情况下进行了行走液滴实验。对于这种底部地形，两个主导模态等权叠加后，所得波形与围栏表面记录到的平均波形相似。为了解深度变化对波场的影响，研究人员在椭圆的一个焦点处增加深度扰动后，重复了实验。观察发现，这使波场明显由偶模态 (4,4) 主导。此外，当深度扰动位于半短轴中点时，两个模态的共振均减弱，因此行走者的整体速度降低。此外，观测到的波场中，奇模态 (1,5) 的水平特征波形得到增强。在这两种情况下，杂质均被观察到会成为行走者的吸引点。

本文其余部分安排如下：第 2 节，我们将 S´aenz 等人 的实验建模为离散动力系统。接着，第 3 节介绍用于模拟和分析该模型的数值方法。第4节呈现模型与实验结果的比较。最后，第 5节总结全文，并讨论未来研究方向。

2 离散动力学模型

为了将量子幻影的流体动力学类比 [8]建模为离散动力系统，我们必须首先研究 Gilet 的模型 [14, 15,16]。一维模型 [14]

$$w_{n+1} = \mu[w_n + \Psi(x_n)], \tag{1a}$$
$$x_{n+1} = x_n - C w_n \Psi'(x_n); \tag{1b}$$

描述波场在每次撞击时的离散演化 n，其阻尼因子为 $\mu \in [0,1]$，其中 w 是振幅，Ψ 是本征模的形状。此外，x 是水平位置，$C \in [0,1]$ 是波粒耦合因子，与非弹性碰撞的恢复系数有关。该模型假设液滴在撞击时沿波场梯度的反方向移动；如果将液滴视为撞击刚性表面的质点，这一假设在启发式上是合理的。尽管在流体系统中，液滴-表面相互作用更为复杂，但在一维情况下，由于运动学自由度较少，沿梯度反方向移动无疑是合理的假设。

Gilet [16] 将这一思路扩展到圆形围栏，提出了以下模型

$$r_{n+1} = \frac{r_n - C\sum_k \frac{d\varphi}{dr}\Big|_{r_n} \mathrm{Re}\left(w_{k,n} e^{ik\theta_n}\right)}{\cos(\theta_{n+1} - \theta_n)}, \tag{2a}$$
$$r_{n+1} = \frac{\frac{C}{r_n}\sum_k \varphi'(r_n)\mathrm{Im}\left(w_{k,n} e^{ik\theta_n}\right)}{\sin(\theta_{n+1} - \theta_n)}, \tag{2b}$$
$$w_{k,n+1} = \mu_k \left[w_{k,n} + \phi_k(r_n) e^{-ik\theta_n}\right]; \tag{2c}$$

其中，除了采用式（1）的设置外，我们还必须跟踪二维情况下可能被激发的多个本征模，这些本征模由整数 k表示，而 C 的值不再局限于小于 1。我们还采用标准的（r，θ）极坐标系。最后，φ 表示圆盘上可能被激发的本征模。在本文中，我们修改式（2），以模拟带有杂质的椭圆上的行走者。

我们首先求解可能的本征模。先写出亥姆霍兹方程，

$$\nabla^2 \Psi = -k^2 \Psi, \tag{3}$$

该方程由分离变量法求解波动方程时导出。在此情况下， k 是一个分离常数，在物理上表示角波数。在圆盘上求解亥姆霍兹方程可得贝塞尔函数。在椭圆上使用椭圆坐标求解该方程可得马丢函数。要将椭圆坐标转换为笛卡尔坐标，我们使用

$$x = A\ \cosh\xi\ \cos\eta$$
$$y = A\ \sinh\xi\ \sin\eta$$

其中 $A = 7.125$毫米，来自实验 [8], 以及边界

$$0 \le \xi \le \xi_0, \qquad -\pi \le \eta \le \pi,$$

其中 $\xi_0 = \tanh^{-1}(b/a)$， a 和 b 分别表示椭圆围栏的长半轴和短半轴。当使用椭圆坐标分离变量法求解亥姆霍兹方程时，关于 ξ 的方程称为径向马丢方程，关于η 的方程称为角向马丢方程。正如 Wilson 等人著作中的公式 (6) 至 (9) 所示，[23], 分离变量法引入了常数 n和 q。由于 η满足周期边界条件， n 必须为整数。角向方程的解可通过递推关系求得。对于径向马丢函数，其解可通过第一类贝塞尔函数的无穷级数展开求得。围栏上的无滑移边界条件对变量q施加了进一步的约束。对于给定的 n， q的取值必须满足$\Psi_{n,j}(\xi_0, \eta, q_{n,j}) = 0$，其中$q_{n,j}$ 是满足该条件时的 j^{th} 值。此外，当$\Theta(\eta, q_{n,j})$展开为有限项余弦级数时，形如$\Psi_{n,j}(\xi, \eta, q_{n,j}) = \Phi(\xi, q_{n,j})\Theta(\eta, q_{n,j})$的函数具有偶对称性；展开为正弦函数时，则具有奇对称性。

正如 S´aenz 等人 [8],所观察到的，模态是

$$\Psi_{1,5}(\xi, \eta, q_{1,5}) = Ms_1^{(1)}(\xi, q_{1,5})se_1^{(1)}(\eta, q_{1,5}) \tag{4a}$$
$$\Psi_{4,4}(\xi, \eta, q_{4,4}) = Mc_4^{(1)}(\xi, q_{4,4})ce_4^{(1)}(\eta, q_{4,4}) \tag{4b}$$

第一个奇模态的数值计算结果为$q_{1,\ 5} = 20.6638$，第二个偶模态为$q_{4,\ 4} = 21.4267$。由马丢方程激发的这些本征模示例见图2。在热图中，深色区域表示负值，浅色区域表示正值。该区域为一个椭圆，其长半轴为14。25毫米，偏心率为

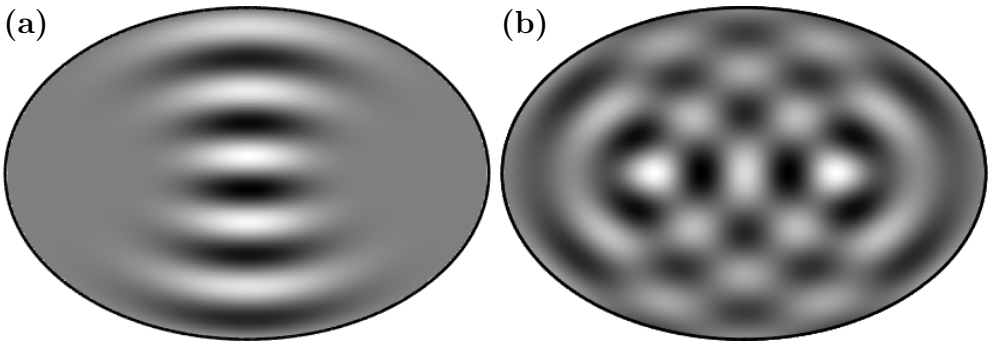

图 2：半长轴为 14.25mm、偏心率为 0.5 的椭圆的 Mathieu 函数共振模态。较亮区域表示模态值较大（正值），较暗区域表示模态值较小（负值）。**（a）**奇模态 $\Psi_{1,\,5}(\xi,\ \eta,\ q_{1,\,5})$ 的剖面，其中 $n=1$、$j=5$ 和 $q_{1,\,5}$ 经数值计算得出为 $q_{1,\,5}=20.6638$。**（b）**偶模态 $\Psi_{4,\,4}(\xi,\ \eta,\ q_{4,\,4})$ 的剖面，其中 $n=4$、$j=4$ 和 $q_{4,\,4}$ 经数值计算得出为 $q_{4,\,4}=21.4267$。

为0。5。奇模态绘于图2（a）中，偶模态绘于图2（b）中。

受 Gilet 模型 [16] 启发，我们先用与笛卡尔坐标下式（2）相同的基本结构来描述液滴运动和波场演化，

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - Cw_{n+1}\Psi_x(x_n, y_n), \\ y_{n+1} &= y_n - Cw_{n+1}\Psi_y(x_n, y_n), \\ w_{n+1} &= \mu\left(w_n + \Psi(x_n, y_n)\right). \end{aligned}$$

我们回顾一下，该模型假设液滴沿波场梯度的反方向运动。尽管这是一个合理的假设，但在模拟该模型时，我们发现其长期统计与 S´aenz 等人 [8] 的实验结果并不接近。事实上，目前还没有任何成功的海市蜃楼实验模型，这些模型都采用了沿梯度反方向运动的假设。造成这些差异的原因可能有几种：也许实验中观察到的主导特征模态实际上略有不同；反向波场梯度的假设可能并非在所有情况下都成立；或者需要一种全新的建模范式。

在本研究中，我们假设液滴并非沿着与

撞击时波场梯度相反的方向运动，而是沿垂直方向运动。从数学上讲，这得到以下模型

$$x_{n+1} = x_n - Cw_{n+1}\Psi_y(x_n, y_n), \tag{5a}$$
$$y_{n+1} = y_n + Cw_{n+1}\Psi_x(x_n, y_n), \tag{5b}$$
$$w_{n+1} = \mu\left(w_n + \Psi(x_n, y_n)\right); \tag{5c}$$

其中 Ψ 是 Mathieu 方程解中两个主导特征模态的线性组合，这一点由 Saenz 等人 [8]观察到。虽然实验中并未观测到该线性组合的精确形式，但我们假设其形式为

$$\Psi(x_n, y_n) = p_n\alpha\Psi_{1,5} + (1/2 - p_n)\beta\Psi_{4,4} \tag{6}$$

在这种情况下，p_n 是一个在范围 $[0, 0.5]$内均匀分布的随机变量。每次更新液滴位置时，都会重新计算该随机变量。常数 α 和 β 是分别赋予各个模态的静态权重。这些参数的相对变化会产生图 3所示的不同时间平均波场。

3 数值方法

为了生成奇数和偶数角向马丢函数，我们使用与 Wilson [24] 的文章相关联的 MATLAB 工具箱等人 [23]。在这种情况下，$ce_4^{(1)}$ 和 $se_1^{(1)}$，角向马丢函数可以用正弦函数或余弦函数的无穷级数展开。假设级数收敛，可使用三对角矩阵特征值问题求解系数值，如 Wilson等人 [23] 所示，从而生成奇数和偶数径向马丢函数，$Ms_1^{(1)}(\xi, q_{1,5})$ 和 $Mc_4^{(1)}(\xi, q_{4,4})$。这些项使用第一类贝塞尔函数的无穷级数展开 [23]。近似计算采用无穷级数的前五十项。由于正弦函数与双曲函数之间的关系，无需重新计算贝塞尔级数的系数。此外，用于 Mathieu 函数的工具箱 [24] 使用椭圆坐标。为简化仿真和模型，我们只使用笛卡尔坐标，并在通过工具箱计算特征模态值时转换为椭圆坐标。

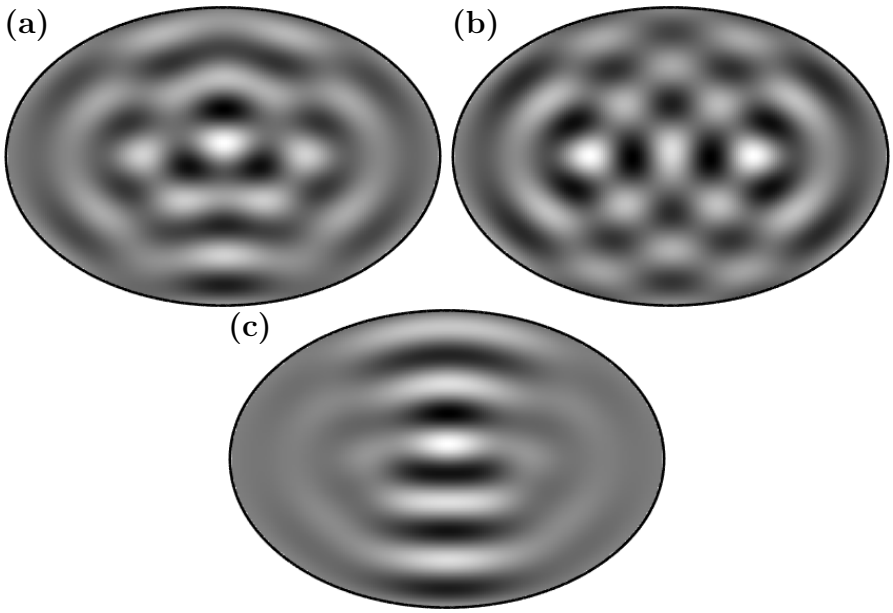

图3：根据（6）对椭圆形围栏进行模拟所得的归一化时间平均波场。较亮区域表示波场值较为正，较暗区域表示波场值较为负。对于 **(a)** ，模拟波场的特征模态权重相同 $\alpha = 0.5$ 和 $\beta = 0.5$（6）中，**(b)** 中 $\Psi_{4,\ 4}$ 阶特征模态占主导，且 $\alpha = 0.05$ 和 $\beta = 0.5$ 见（6）；而 **(c)** 中 $\Psi_{1,\ 5}$ 阶特征模态占主导，且 $\alpha = 0.5$ 和 $\beta = 0.1$ 见（6）。

现在，让我们将一个包含 $h = \Delta x$ 和 $k = \Delta y$ 的网格嵌入到我们的特征模态中。由于我们希望在每个时间步近似梯度，并且不会在后续近似中重复使用它，因此不必太过担心截断误差的传播。因此，我们使用二阶中心差分来近似梯度，

$$\left.\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right|_{(x_n,y_n)} \approx \frac{\Psi(x_n + h, y_n) - \Psi(x_n - h, y_n)}{2h},$$
$$\left.\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right|_{(x_n,y_n)} \approx \frac{\Psi(x_n, y_n + k) - \Psi(x_n, y_n - k)}{2k}.$$

为了迭代该动力系统，我们首先按照（6）的形式，以具有相关性的随机振幅，将波场更新为两个主导特征模态的线性组合。然后，我们使用中心差分法计算梯度。接下来，我们根据（5）先更新波场，再更新位置。由于未考虑边界效应，液滴偶尔会逃出边界。在这些情况下，我们认为仿真已经结束，并从围栏中的另一个随机点开始新的运行。最终直方图是多次（数量级约为十次）不同运行的累积求和，这些运行均不受边界效应影响。我们总共迭代该模型约 10^5 次，这为我们提供了足够的数据点，从而生成下文所示长期统计的热图。热图通过在椭圆内部液滴位置的直方图中使用 90×90 个分箱生成。

4 结果

在本节中，我们模拟波场和液滴运动，并将其与 S´aenz 等人 [8]的实验进行比较。波场由（6）给出，液滴运动则建模为（5）。波场本身直接根据 S´aenz 等人 [8], 的假设推导而来，因此自然会与实验结果吻合。另一方面，液滴运动要复杂得多，我们希望其与实验结果在定性上相符。尽管在我们的模型（5）中，液滴沿垂直于梯度的方向运动，而不是沿标准的梯度反方向运动，我们仍然观察到良好的定性吻合。

我们首先模拟图 6 所示的时间平均波场，其表达式为 (3)。图 3(**a**) 展示浴中不存在杂质的情况，$\alpha = 0.5$ 以及

$\beta = 0.5$。当深度扰动位于其中一个焦点时，数值为 $\alpha = 0.05$ 和 $\beta = 0.5$，对应图 3(b)。这与以下实验推理一致：由于 $\Psi_{1\,1}$ 模态相对于x轴具有奇对称性，杂质会降低该模态的激发程度[8]。而$\Psi_{4\,4}$ 模态不受影响，因为它相对于 x 轴具有偶对称性。当杂质位于半短轴中心时，观察到的图样与$\Psi_{1\,5}$ 模态极为相似，这也解释了为何选择 $\alpha = 0.5$ 和 $\beta = 0.1$，对应图 3(c)。

任意给定迭代时的瞬时波场可解释为$w_{n+1}\Psi(x_n, y_n)$，其水平轨迹由模型 (5) 控制，该模型的波场 (6) 包含权重相等的参数 $\alpha = 0.5$ 和 $\beta = 0.5$。图 4 展示了一条样本轨迹，其中浴的瞬时波场与轨迹后续的若干次迭代叠加显示。瞬时波场对应于液滴的红色标记位置。可以观察到波场变化显著，这是由于在式 (p_n 6) 中引入了分布式随机变量。值得注意的是，在图 4中，液滴沿着一条路径运动，而这条路径刻画了图 4(c) 和 (d)中瞬时波场的局部极大值。这与 S´aenz 等人 [8]的图 2(a) 和 (b) 所示轨迹极为相似。

接下来，我们仿真式 (5) 所描述的液滴运动，并在图5和图6中展示其长期统计。图5给出了波场 (6) 中权重取不同值时的样本轨迹。我们观察到，轨迹的定性行为对特征模态的权重十分敏感。图5 (a) 和图6 (a) 中的权重对应于浴底部不存在深度扰动的情形。在这种情况下，特征模态 $\Psi_{1,5}$ 和 $\Psi_{4,4}$ 均以相等权重 $\alpha = 0.5$ 和 $\beta = 0.5$ 被激发。图5 (b) 和图6 (b) 中的权重对应于椭圆一个焦点处的浴底部存在深度扰动的情形。在这种情况下，特征模态 $\Psi_{1,5}$ 的权重减小，而特征模态 $\Psi_{4,4}$ 占主导地位，其对应权重为 $\alpha = 0.05$和 $\beta = 0.5$。最后，图5 (c) 和图6 (c) 中的权重对应于椭圆半短轴中点处存在深度扰动的情形。在这种情况下，特征模态 $\Psi_{1,5}$ 占主导地位，而特征模态 $\Psi_{4,4}$ 的权重减小，其对应权重为 $\alpha = 0.5$ 和 $\beta = 0.1$。在所有模拟中，两种模态都是液滴能够绕椭圆形浴循环运动所必需的。还值得注意的是，在图6中，长期统计主要取决于参数 α 和 β 的相对值。我们观察到，长期统计的热图

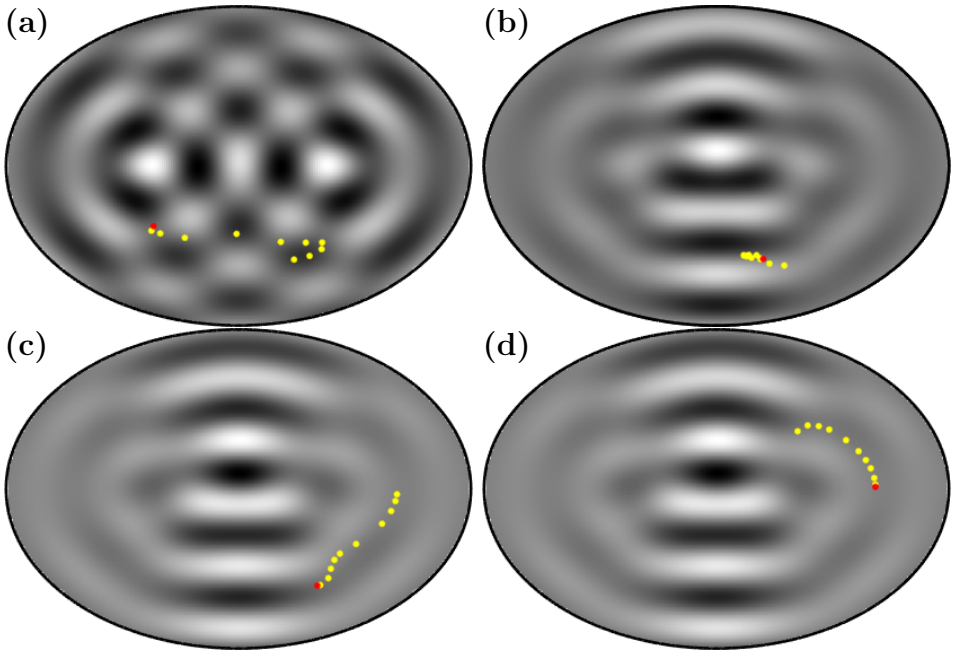

图4：液滴在椭圆围栏中沿等权重特征模态的模拟轨迹，所处波场为（6）。较亮区域表示波场值较正，较暗区域表示波场值较负。背景图对应初始迭代时的有效瞬时波场 $w_{n+1}\Psi(x_n, y_n)$。初始点对应红色标记，黄色标记对应所追踪路径中的一部分点。图 (a) 至 (d) 对应样本轨迹在不同时间的快照。

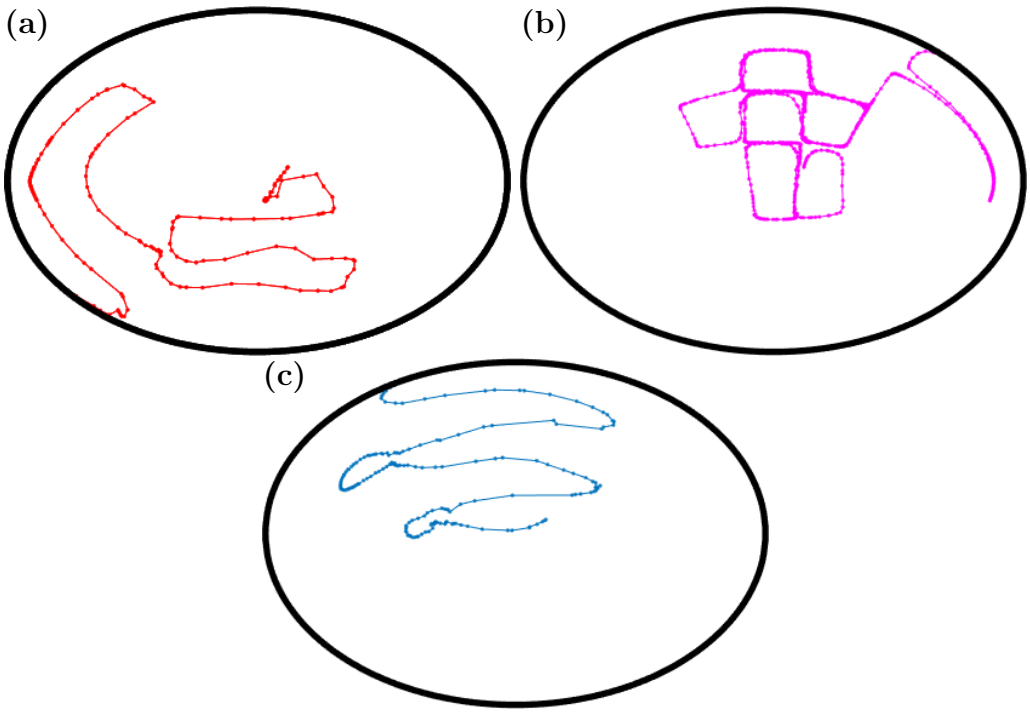

图 5：椭圆围栏上由 (5) 控制的模拟液滴轨迹示例。 (a) 各特征模态权重相等时的模拟液滴轨迹。 $\alpha = 0.5$ 和 $\beta = 0.5$ 见 (6)。 (b) 具有，且 $\alpha = 0.05$ 和 $\beta = 0.5$ 时，(4,4) 主导特征模态的模拟液滴轨迹见 (6)。 *(c)*具有 $\alpha = 0.5$和 $\beta = 0.1$ 时，(1,5) 主导特征模态的模拟液滴轨迹见 (6)。

图6 的统计结果让人联想到 S´aenz 等人 [8],的图2(e)、5(b)和5(a)，分别对应。

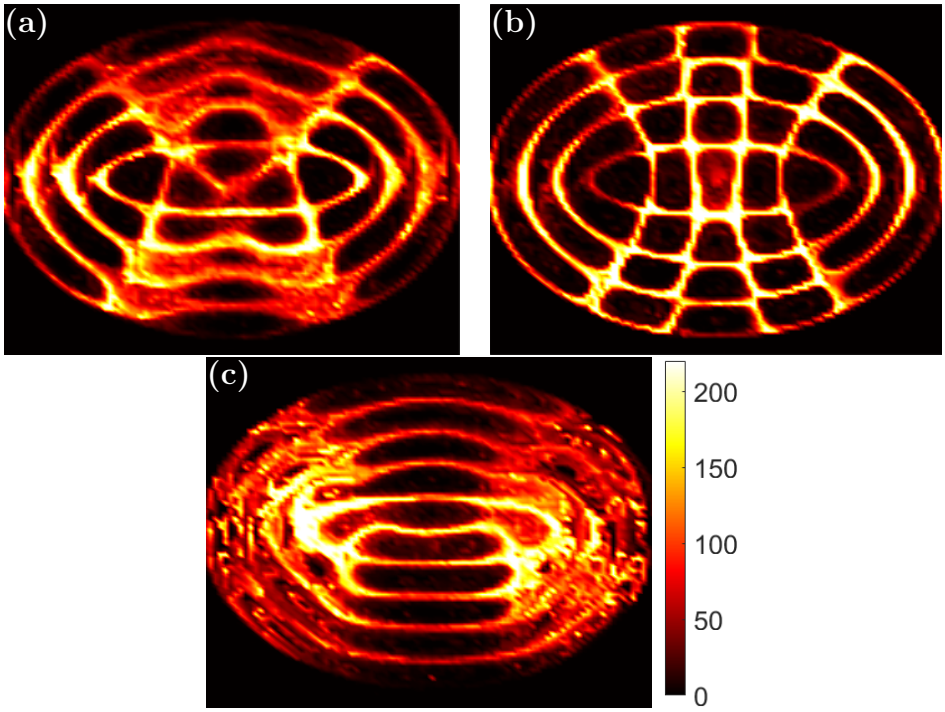

图6：椭圆围栏上由（5）控制的模拟轨迹的长期统计。热图通过对 90×90 个分箱进行直方图统计得到。色条的顶端（白色）表示相关分箱中的出现次数大于220。 **(a)** 由等权重本征模诱导的模拟液滴轨迹的长期统计。 $\alpha = 0.5$ 和$\beta = 0.5$ 见（6）。 **(b)** 由（4,4）主导特征模态诱导的模拟液滴轨迹的长期统计，其中 $\alpha = 0.05$ 以及 $\beta = 0.5$见（6）。 **(c)** 由（1,5）主导特征模态诱导的模拟液滴轨迹的长期统计，其中 $\alpha = 0.5$ 以及 $\beta = 0.1$ 见（6）。

与图6类似，图7 展示了椭圆围栏不同位置处每次迭代的平均位移。这些位移直方图源自图6中的位置直方图。由于模型缺少时间维度，这些图并不与速度完全对应，但能为理解模型的动力学提供参考。值得注意的是，图6 和7之间存在反向关系，这与

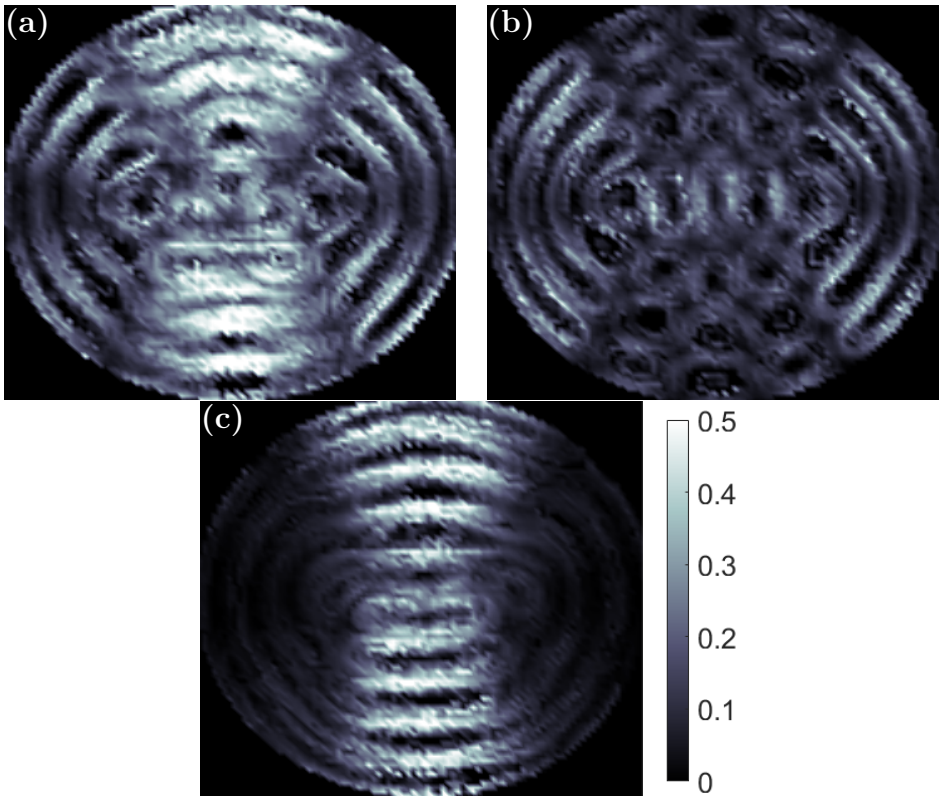

图7：由（5）控制的椭圆围栏中，每次迭代的平均位移（毫米）的长期统计。通过对 90×90 个分箱进行直方图统计生成热图。**(a)** 在（6）中，由权重相等的特征模态诱导的每次迭代平均位移（毫米）的长期统计，其中 $\alpha = 0.5$和 $\beta = 0.5$。**(b)** 在（,）中，由（**4**,**4**）主导特征模态诱导的每次迭代平均位移（毫米）的长期统计，其中 $\alpha = 0.05$ 和 $\beta = 0.5$ 在（6）中。**(c)** 由（**1**,**5**）主导特征模态诱导的每次迭代平均位移（毫米）的长期统计，其中 $\alpha = 0.5$ 和 $\beta = 0.1$ 在（6）中。

在实验中可以观察到 [8]。也就是说，位置直方图中计数较高的位置，其每次迭代的位移值往往较低。

5 讨论

在本文中，我们对量子幻影的流体动力学类比进行建模和仿真 [8] [7]。我们首先受到受限几何5和圆形围栏1模型的启发，构建了一个随机离散动力学模型 [14] ，这两个模型由2提出[16] 。Gilet 的模型假设液滴在两次迭代之间受到的推进方向与梯度相反，而我们的模型则假设液滴受到垂直于梯度方向的推进。确实，从瞬时角度看，我们预期波场会施加一个与波场梯度方向相反的力（在二维中）；然而，迭代映射不一定代表每一次撞击。两次迭代之间完全可能发生多次撞击。此外，在 Gilet 的圆形围栏模型中2 [16], ，使用多个本征模来模拟波场。在我们的模型中，每个时间步都会激发两个占主导地位的特征模态，其瞬时权重随机变化，并对波场产生贡献，如式6所示。尽管使用离散动力系统大幅简化了数值计算，但马丢方程的使用仍带来一些数值方面的考量。最后，我们展示了波场、液滴轨迹和长期统计的模拟结果；这些结果在定性上与 S´aenz 等人 [8]的实验一致。

除了与实验在定性上高度吻合之外，本模型的吸引力还在于，它通过对模态叠加赋予相对权重，产生迥然不同的长期统计结果。此外，假设液滴的运动方向垂直于梯度，可确保模拟液滴所走的路径与时间平均波场相吻合，正如 S´aenz 等人 [8]的实验所观察到的那样。有趣的是，即使采用这一假设，图7 也表明，至少从平均来看，每次迭代中的位移方向都与梯度相反。此外，该模型与波场无关；也就是说，我们可以根据观测结果激发模型中的波场，然后让模型确定性地（在一次迭代中）推动液滴。最后，研究发现该模型具有时间反演不变性。与更复杂的流体动力学模型不同，我们无需通过波场的无限求和来模拟系统中的记忆，因此同样可以轻松地让模拟沿时间反向运行。从流体动力学角度来

看，这或许显得有些奇怪，但对于某些量子类比系统而言，这可能有助于我们深入了解其与量子系统之间的联系。

尽管这一模型有诸多优点，但若能对液滴运动与波场之间的关系进行严格的流体力学分析，将更为完善。也就是说，为什么在各种建模尝试中，沿梯度反方向运动都行不通，而在本模型中选择垂直于梯度的方向却行得通？我们认为可能有几个原因，详细分析则留待未来研究。首先，撞击时可能会在垂直方向发生一些优先滑移；不过，即便存在，这种滑移也可能很小，我们不认为它是该特定系统中可能的原因。更有可能的情况是，液滴瞬时受到一个与梯度方向相反的力，但经过多次撞击后，液滴位置最终会落在垂直于前一次迭代所得波场方向的位置上；检查 S´aenz 等人 [8]的实验时，似乎确实发生了这种情况。最后，瞬时波场相当不规则，正如 S´aenz等人在文章中所述： [8], 只有对多个周期的波场取平均后，我们才会观察到 Mathieu 函数结构。因此，液滴有可能沿瞬时不规则波场梯度的反方向运动，而这些运动累积起来，最终对应于垂直于 Mathieu 函数梯度的方向。

由于本文提出了许多尚待解答的问题，未来研究有许多方向可供探索。最显而易见的是上一段讨论的详细流体动力学分析。另一个相关问题是撞击瞬间波场的精确形状。这将是一个相当困难的实验问题，需要一两台高速摄像机以及数小时的视频数据。机器学习是能够大幅降低这项分析成本的一种技术。我们可以设想用普通摄像机捕捉波场，再将其划分为训练集和测试集，以学习对波场有所贡献的本征模。虽然无法保证这种方法一定奏效，但如果可行，其成本将远低于完整的实验。

致谢

本文所述问题最初由 A. R.、A. U. Oza 和 D. L. Blackmore 提出。除就该问题进行了富有成效的讨论外，A. R. 还感念已故导师 D. L. Blackmore 对他的

指导与支持。A. R. 也感谢 A. U. Oza 在问题研究初期所做的工作以及相关讨论。作者还感谢 T. Rosato 邀请他们为纪念 D. L. Blackmore 的专刊撰稿。最后，A. R. 和 G. F. Q. 感谢 UW 应用数学系的支持，G. F. Q. 也感谢 UW 物理系的支持。

参考文献

[1] J. Walker.《业余科学家》：液滴可以漂浮在液体表面上。是什么使它们能够这样做？《科学美国人》，238(6):151–159，1978年。[2] Y. Couder、S. Protiere、E. Fort 和 A. Boudaoud。动力学现象：行走与绕行液滴。《自然》，437:208，2005年。[3] Y. Couder 和 E. Fort。宏观尺度上的单粒子衍射与干涉。《物理评论快报》，97:154101，2006年。[4] M. F. Crommie、C. P. Lutz 和 D. M. Eigler。电子在金属表面量子围栏中的局域。《科学》，262:218–220，1993年。[5] D.M. Harris、J. Moukhtar、E. Fort、Y. Couder 和 J.W.M. Bush。圆形围栏中导波动力学产生的类波统计。《物理评论*E*》，88:011001，2013年。[6] T. Cristea-Platon、P. S´aenz 和 J. W. M. Bush。圆形围栏中的行走液滴：量子化与混沌。混沌，28:096116，2018年。[7] H. C. Manoharan、C. P. Lutz 和 D. M. Eigler。通过电子结构的相干投影形成的量子幻影。《自然》，403:512–515，2000年。[8] P. J. S´aenz、T. Cristea-Platon 和 J. W. M. Bush。流体动力学导波系统中的统计投影效应。*Nature Phsics*，14:315–319，2018年。[9] J.W.M. Bush。放大版的量子力学。《美国国家科学院院刊》，第1–2页，2010年。

[10]J.W.M. Bush。导波流体动力学。《流体力学年度评论》，49:269–292，2015年。[11]J.W.M. Bush。导波理论的新发展。《今日物理》，68(8):47–53，2015年。[12] J. W. M. Bush 和 A. U. Oza。流体动力学量子类比。《物理学进展报告》，84:017001，2021年。[13] A. Oza、R.R. Rosales 和 J.W.M. Bush。行走液滴的轨迹方程：流体动力学导波理论。《流体力学杂志》，737:552–570，2013年。[14] T. Gilet。受限几何中的波粒相互作用的动力学与统计。《物理评论*E*》，90:052917，2014年。[15] A. Rahman 和 D. Blackmore。行走体离散动力学模型中的Neimark–Sacker分岔及混沌证据。《混沌、孤子与分形》，91:339–349，2016年。[16] T. Gilet。圆形腔体中确定性波粒相互作用的类量子统计。《物理评论*E*》，93:042202，2016年。[17] Aminur Rahman。环形腔体中单个和多个行走体的标准映射类模型。混沌，28:096102，2018年。[18] A Rahman、Y. Joshi 和 D Blackmore。Sigma映射动力学与分岔。《规律与混沌动力学》，22(6):740–749，2017年。[19] Aminur Rahman 和 D. Blackmore。行走液滴动力学中的有趣的分岔。《非线性科学与数值模拟通讯》，90:105348，2020年。[20] A. Rahman 和 J. N. Kutz。行走液滴作为阻尼驱动系统。《工业与应用数学学会应用动力系统杂志》，（即将出版）2022年。[21] Ju.I. Neimark。关于依赖于参数的周期运动的若干情形。《苏联科学院院刊》，129:736–739，1959年。[22] R. Sacker。常微分方程周期解的不变曲面与分岔。*IMM-NYU*报告，333:1–62，1964年。

[23] Howard B Wilson 和 Robert W Scharstein。通过 Mathieu 方法和 Galerkin方法计算椭圆膜的高频。工程数学期刊，57(1):41–55，2007年。

[24]Howard B. Wilson。椭圆膜的振动模态。
https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/6500- 椭圆膜的振动模态 MATLAB文件交换平台，2014年。The MathWorks，纳蒂克，马萨诸塞州，美国。