arXiv:2302.00830v1 [math.CV] 2 Feb 2023

关于布拉施克乘积连通性的一则注记

Yue Xin 和 Bingzhe Hou

摘要。 考虑单圆开圆盘上所有内函数构成的空间 $\mathcal{F}$，赋予一致拓扑；该拓扑是由 H^∞-范数诱导的度量拓扑。本文引入一类记作 $\mathcal{H}_{SC}$的布拉施克乘积。我们证明，对于每个 $B \in \mathcal{H}_{SC}$， B和 zB 都属于 $\mathcal{F}$中的同一个路径连通分支。这一方法在选取零点的精细子序列方面发挥着重要作用。由此还可得到， $\mathcal{H}_{SC}$ 中的每个布拉施克乘积都具有一个插值因子和一个单分支因子。

数学主题分类（2010）。主要分类 30J05、30J10；次要分类 54C35。

关键词。 布拉施克乘积；路径连通性；伪双曲距离；插值；单分支。

1. 引言

设 $\mathbb{D}$ 为复平面 $\mathbb{C}$ 中的单位开圆盘， $\partial\mathbb{D}$ 为 $\mathbb{D}$的边界，即单位圆。单位开圆盘 $\mathbb{D}$上的伪双曲距离记为 ρ，其定义为

$$\rho(z,w) = |\frac{z-w}{1-\overline{z}w}|, \quad \text{for any } z,w \in \mathbb{D}.$$

设 H^∞ 为 $\mathbb{D}$ 上有界解析函数构成的巴拿赫代数，配备范数 $\|f\|_\infty = \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)|$。若有界解析函数 f 在 $\mathbb{D}$ 上几乎处处具有边界 $\partial\mathbb{D}$ 上模为一的径向极限，则称其为内函数。此外，用 $\mathcal{F}$ 表示所有内函数构成的集合。我们关注一致拓扑下的空间 $\mathcal{F}$，该拓扑是由 H^∞-范数诱导的度量拓扑。值得注意的是， $\mathcal{F}$ 上的一致拓扑非常复杂且有趣，例如参见 [6, 9, 10] 。

Blaschke乘积是一种形如以下形式的内函数

$$B(z) = \lambda z^m \prod_n \frac{|z_n|}{z_n} \frac{z_n - z}{1-\overline{z_n}z},$$

其中， m 是非负整数， λ 是满足 $|\lambda| = 1$的复数，且$\{z_n\}$ 是 $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ 中的点构成的序列，满足 Blaschke条件$\sum_n(1 - |z_n|) < \infty$。此外，若 $\lambda = 1$，则称 B 为规范化的。

如果对于每个有界复数序列 $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$，都存在 f in H^∞ 满足 $f(z_n) = w_n$ 对每个 $n \in \mathbb{N}$ 均成立，那么序列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 Blaschke乘积 $B(z)$ 都称为插值的。根据 Carleson 的著名结果 [3], , 可以看出， $B(z)$ 是插值 Blaschke乘积，当且仅当 $\{z_n\}$ 是一致分离序列，即

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \prod_{k\neq n} \left|\frac{z_k - z_n}{1 - \overline{z_k} z_n}\right| > 0.$$

此外，如果

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k\neq n} \left|\frac{z_k - z_n}{1 - \overline{z_k} z_n}\right| = 1,$$

序列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 Blaschke乘积 $B(z)$ 都称为薄的。此外，若一个 Blaschke乘积是有限个插值Blaschke乘积的乘积，则称其为 Carleson-Newman Blaschke乘积。插值Blaschke乘积和 Carleson-Newman Blaschke乘积在内函数空间 H^∞ 的研究中发挥着重要作用。众所周知，内函数可以由 Blaschke乘积一致逼近，而 Carleson-Newman Blaschke乘积可以由插值Blaschke乘积一致逼近 [8]。然而，所有插值Blaschke乘积在内函数空间 $\mathcal{F}$ 中是否稠密，仍是一个未解决的问题。目前已有一些相关结果。例如，Marshall（[7]）证明，Blaschke乘积的有限线性组合在 H^∞ 中稠密；Nicolau 和 Suárez [11] 刻画了 H^∞ 中由乘积 bh 构成的子集 CN^* 的连通分支，其中 b 是 Carleson-Newman Blaschke乘积， $h \in H^\infty$ 是可逆函数。

特别地，K. Tse 的一个结果 [13] 告诉我们，包含在 Stolz域中的点序列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$\{z \in \mathbb{D} : |1 - \overline{\xi} z| \leq C(1 - |z|)\},$$

其中 ξ 是一个满足 $|\xi| = 1$ 的常数，当且仅当它是分离的，也就是说，它是插值的，

$$\inf_{m\neq n} \rho(z_m, z_n) > 0.$$

那么，如果零点位于 Stolz域中，我们就可以对 Blaschke乘积作出更多论述。例如，A. Reijonen 给出了一个充分条件，使得零点位于 Stolz域中的 Blaschke 乘积成为单分支内函数 [12]。如果存在 $\eta \in (0,1)$，使得水平集 $\Omega_u(\eta) := \{z \in \mathbb{D} : |u(z)| < \eta\}$ 连通，则称内函数 u in H^∞ 为单分支内函数。关于单分支内函数的更多细节，请参阅 [1, 4, 12]。

本文关注一致拓扑下空间$\mathcal{F}$的道路连通分支。回顾一下，集合 $\mathcal{F}$ 上的一致收敛拓扑由以下度量诱导:

$$d(f,g)=\|f-g\|_\infty=\sup_{z\in\mathbb{D}}|f(z)-g(z)|=\sup_{\theta\in\mathbb{R}}\operatorname{ess}|f(e^{\mathbf{i}\theta})-g(e^{\mathbf{i}\theta})|.$$

对于任意两个内函数 f 和 g，如果它们属于空间 $\mathcal{F}$中的同一个道路连通分支，我们记作 $f\sim g$。

内函数的路径一直备受关注，并且与许多重要问题相关。D. Herrero [6] 研究了空间 $\mathcal{F}$的路径连通分支。他证明了， $\mathcal{F}$ 的一个分支中，除了含有无穷多个零点的布拉施克乘积、恰好一个（相差一个常数因子）奇异内函数，或无穷多个两两互素的奇异内函数之外，不会包含其他函数；这一结果解决了Douglas提出的一个问题。此外，V. Nestoridis研究了内函数空间 $\mathcal{F}$ 的不变连通分支和非不变连通分支。他证明了内函数 $d(z)=\exp\{(z+1)/(z-1)\}$ 和 zd 属于同一个连通分支 [9], ，并给出了一个记为 H的内函数族，使得对于每个 $B\in H$， B 和 zB 不属于同一个分支 [10]。特别地，族 H 只包含Blaschke乘积，并且包含所有薄的Blaschke乘积。此外，还有几位作者在模型空间和算子理论的背景下研究了内函数的连通分支（例如参见 [2, 5] ）。

本文旨在给出一类 Blaschke乘积，记作 $\mathcal{H}_{SC}$，使得每个 $B\in\mathcal{H}_{SC}$、B 和 zB 都属于同一个连通分支。首先，我们定义单位开圆盘的一个子集类，称为条带锥，记作 $SC(\xi,\theta,T_1,T_2)$。本文研究零点位于条带锥中的Blaschke乘积。

定义1.1。设 $\theta\in(0,\pi)$、 $\xi\in\partial\mathbb{D}$、 T_1 和 T_2 是两个非零实数。将圆上的弧记为 J_i

$$|z-(1-T_ie^{\mathbf{i}\theta})\xi|=|T_i|$$

在单位开圆盘中，对于 $i=1$， 2。将 ξ_i 记为 J_i 与 $\partial\mathbb{D}$ 的交点中异于 ξ、$i=1$ 的那个点。我们将由 $\overset{\frown}{J_1}$、 J_2 以及 $\xi_1\xi_2$ 所围成的区域定义为 $SC(\xi,\theta,T_1,T_2)$，其中 $\xi_1\xi_2$ 是单位圆上的弧 $\partial\mathbb{D}$，从 ξ_1 到 ξ_2 且不包含 ξ，并称其为条带锥。若 $T_1=T_2\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$，则 $SC(\xi,\theta,T_1,T_2)$ 就是弧 $J_1=J_2$。特别地，若 T_1 和 T_2 都是无穷大，则 $SC(\xi,\theta,T_1,T_2)$ 就是线段 $J_1=J_2=(-1,1)$。

图1中可以看到一些条带锥的例子。接下来，我们解释为什么将其称为条带锥。

定义1.2。设 $\theta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，且 L_1和 L_2是与实轴成 θ 角的两条平行直线。记 $SL(\theta,L_1,L_2)$ 为右半平面内 L_1 与 L_2 之间的条带区域。

给定任意条带锥 $SC(\xi,\theta,T_1,T_2)$。考虑分式线性变换 $\varphi_\xi(z)=(\xi+z)/(\xi-z)$，其中 $|\xi|=1$。容易看出

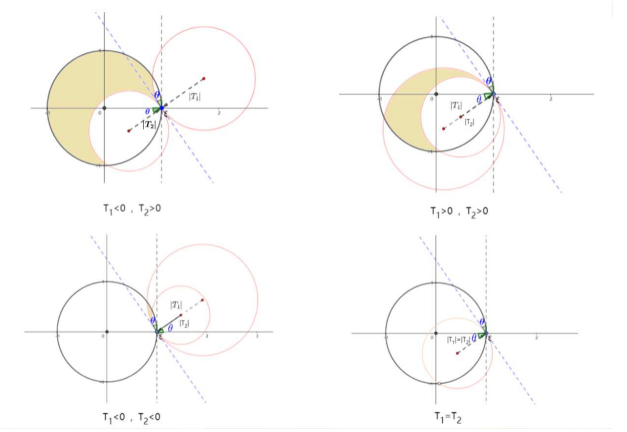

图1. 条带锥的示例

φ_ξ 将单位开圆盘映射到右半平面，并将定义1.1中的圆弧J_1 和 J_2 映射到某些平行直线 L_1 和 L_2，且 θ 与右半平面的虚轴所成的角。于是，φ_ξ 是从 $SC(\xi,\theta,T_1,T_2)$ 到 $SL(\frac{\pi}{2}-\theta,L_1,L_2)$ 的解析双射（例如见图2）。这就是我们将子集 $SC(\xi,\theta,T_1,T_2)$ 称为条带锥的原因。不失一般性，我们可以假设 $\xi=1$，因为处理 $\xi=1$ 和满足 $|\xi|=1$ 的一般 ξ 并无不同。此外，本文中我们始终记 $\varphi(z)=(1+z)/(1-z)$。

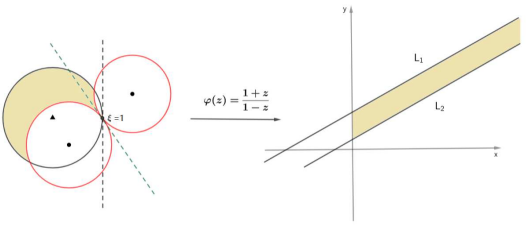

图2. $\varphi(z)$ 将 $SC(1,\theta,T_1,T_2)$ 映射到 $SL(\frac{\pi}{2}-\theta,L_1,L_2)$

定义 1.3. 用 $\mathcal{H}_{SC}$ 表示满足以下条件的所有布拉施克乘积 B 的族：

(i) B 的零点 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 位于某个特定的条带锥 $SC(\xi,\theta,T_1,T_2)$ 中；(ii) $|\xi-z_n|$ 单调不增地趋于 0；(iii) 存在一个正数 $\delta<1$，使得对任意 $n\in\mathbb{N}$，都有 $\rho(z_n,z_{n+1})\le\delta$。

现在，我们将以下述定理给出主要结果。

主定理 对于任意的 $B \in \mathcal{H}_{SC}$、 B 和 zB，它们都属于内函数空间 $\mathcal{F}$ 在一致拓扑下的同一路径连通分支。

在下一节中，我们将介绍一种方法，用于从 $\mathcal{H}_{SC}$ 中选取 Blaschke乘积的一个“精细”因子，这对证明主定理起着重要作用。作为一个副产品，我们得到 $\mathcal{H}_{SC}$ 中的每个布拉施克乘积都有一个插值且为单分支的因子。随后，我们将在最后一节完成主定理的证明。

2. 预备知识

首先，让我们从下面这个简单的结果开始。

引理 2.1. 设 $f = \varphi_1 \cdot \varphi_2$ 和 $g = \psi_1 \cdot \psi_2$，其中 f，g，φ_1，φ_2，ψ_1，$\psi_2 \in \mathcal{F}$。若 $\varphi_1 \sim \psi_1$ 且 $\varphi_2 \sim \psi_2$，则 $f \sim g$。特别地，若 $\varphi_1 \sim z\varphi_1$，则 $f \sim zf$。

‹ ‹ ‹ 要证明 $B \sim zB$，只需证明：若 B 是 B 的因子，则 $B \sim zB$。本节将证明，我们可以从 B 中选取一个因子 B，使得 B 满足比 B 更多的条件。关键在于如何选取 B 的零点序列的一个子序列。回忆一下，对于零点为 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的 Blaschke乘积 $B \in \mathcal{H}_{SC}$，存在一个正数 $\delta < 1$，使得对于任意 $n \in \mathbb{N}$， $\rho(z_n, z_{n+1}) \leq \delta$。

引理 2.2. 设 a、 a'、 b、 b' 为实数，满足

$$0 \leq a \leq a' < 1 \quad and \quad 0 \leq b \leq b' < 1.$$

那么，

$$\frac{a+b}{1+ab} \leq \frac{a'+b'}{1+a'b'}$$

证明。

$$\begin{aligned}\frac{a'+b'}{1+a'b'} - \frac{a+b}{1+ab} &= \frac{(a'+b'+a'ab+abb') - (a+b+aa'b'+a'bb')}{(1+ab)(1+a'b')} \\ &= \frac{(a'-a)(1-bb') + (b'-b)(1-a'a)}{(1+ab)(1+a'b')} \\ &\geq 0.\end{aligned}$$

□

引理 2.3. 设 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是单位开圆盘中的一个复数序列，满足

1. 对任意 $m \in \mathbb{N}$、 $\rho(z_m,\ z_n) \to 1$，当 $n \to \infty$ 时；2. 存在一个正数 $0 < \delta < 1$，使得对任意 $n \in \mathbb{N}$， $\rho(z_n,\ z_{n+1}) \leq \delta$。

那么，对于任意 $0 < \varepsilon < 1$，我们可以从 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 中选取一个子序列 $\{z_{n_k}\}_{n_k=1}^{\infty}$，使得

$$0 < \varepsilon \leq \rho(z_{n_k}, z_{n_{k+1}}) \leq \frac{\varepsilon+\delta}{1+\varepsilon\delta} < 1.$$

证明。给定任意 $0<\varepsilon<1$。令 $z_{n_1}=z_1$。由于当 $i\to\infty$ 时， $\rho(z_{n_1},z_i)\to 1$，我们可以选取

$$n_2=\min\{i;\ \rho(z_{n_1},z_i)\geq\varepsilon\}.$$

显然， $\rho(z_{n_1},z_{n_2})\geq\varepsilon$。

用同样的方法，我们选取 n_{k+1}，使得

$$n_{k+1}=\min\{i;\ i>n_k,\ \rho(z_{n_k},z_i)\geq\varepsilon\}.$$

于是， $\rho(z_{n_k},z_{n_{k+1}})\geq\varepsilon$。此外，对于每个 $k=1,\ 2,\ .....$,

$$0\leq\rho(z_{n_k},z_{n_{k+1}-1})<\varepsilon<1\ \text{ and }\ 0\leq\rho(z_{n_{k+1}-1},z_{n_{k+1}})<\delta<1.$$

由引理 2.2 可得

$$\frac{\rho(z_{n_k},z_{n_{k+1}-1})+\rho(z_{n_{k+1}-1},z_{n_{k+1}})}{1+\rho(z_{n_k},z_{n_{k+1}-1})\rho(z_{n_{k+1}-1},z_{n_{k+1}})}\leq\frac{\varepsilon+\delta}{1+\varepsilon\delta}.$$

因此,

$$0<\varepsilon\leq\rho(z_{n_k},z_{n_{k+1}})\leq\frac{\rho(z_{n_k},z_{n_{k+1}-1})+\rho(z_{n_{k+1}-1},z_{n_{k+1}})}{1+\rho(z_{n_k},z_{n_{k+1}-1})\rho(z_{n_{k+1}-1},z_{n_{k+1}})}\leq\frac{\varepsilon+\delta}{1+\varepsilon\delta}<1.$$

□

引理 2.4. 设 α 和 β 是单位开圆盘内满足$|1-\alpha|<|1-\beta|$的两个复数。记 $\alpha=s_1+\mathbf{i}(1-s_1)\cot\theta_1$和 $\beta=s_2+\mathbf{i}(1-s_2)\cot\theta_2$，其中 $\theta_1,\theta_2\in(0,\pi)$。对于 α 和 β这一对，设正数 ε, δ,θ_0, C, τ 和 η 满足以下条件,

(1) $0<\varepsilon\leq\rho(\alpha,\beta)\leq\delta<1$;
(2) $\theta_0\in(0,\pi)$ *and* $C=|1-\mathbf{i}\cot\theta_0|$;
(3) $|\cot\theta_i-\cot\theta_0|<\tau<\sqrt{\frac{3C^2\varepsilon^2}{16C^2(1-\varepsilon^2)+3\varepsilon^2}}$, *for* $i=1,2$;
(4) $3\leq 4-2\eta\leq(1+s_1-(1-s_1)\cot^2\theta_1)(1+s_2-(1-s_2)\cot^2\theta_2)\leq 4$.

Then

$$0<C_1\leq\Big|\frac{1-\alpha}{1-\beta}\Big|\leq C_2<1.$$

其中

$$C_1=\frac{C-\tau}{C+\tau}\left(\frac{C-\tau}{C+\tau}+\frac{2\delta^2-2\sqrt{\delta^4+\delta^2(C^2-\tau^2)(1-\delta^2)}}{(C+\tau)^2(1-\delta^2)}\right),$$

$$C_2=\frac{C+\tau}{C-\tau}\left(\frac{C+\tau}{C-\tau}+\frac{(2-\eta)\varepsilon^2-\sqrt{(2-\eta)^2\varepsilon^4+2\varepsilon^2(2-\eta)(C^2-\tau^2)(1-\varepsilon^2)}}{(C-\tau)^2(1-\varepsilon^2)}\right).$$

证明. 对于 $i=1$，由条件 (3) 可得

$$|(1-\mathbf{i}\cot\theta_i)-(1-\mathbf{i}\cot\theta_0)|<\tau,$$

因此,

$$0<C-\tau<|1-\mathbf{i}\cot\theta_i|<C+\tau.$$

记作

$$K=\frac{1-s_1}{1-s_2}.$$

注意到

$$0<(1-s_1)(C-\tau)\le|1-\alpha|=(1-s_1)|1-\mathbf{i}\cot\theta_1|\le(1-s_1)(C+\tau),$$
$$0<(1-s_2)(C-\tau)\le|1-\beta|=(1-s_2)|1-\mathbf{i}\cot\theta_2|\le(1-s_2)(C+\tau).$$

Then

$$\frac{K(C-\tau)}{C+\tau}\le\Big|\frac{1-\alpha}{1-\beta}\Big|\le\frac{K(C+\tau)}{C-\tau}. \tag{2.1}$$

由于

$$\rho(\alpha,\beta)^2=\frac{|\alpha-\beta|^2}{(1-\overline{\alpha}\beta)(1-\overline{\beta}\alpha)}=\frac{1}{\frac{(1-|\alpha|^2)(1-|\beta|^2)}{|\alpha-\beta|^2}+1},$$

由条件 (1) 可得

$$0<\frac{1}{\delta^2}-1\le\frac{(1-|\alpha|^2)(1-|\beta|^2)}{|\alpha-\beta|^2}\le\frac{1}{\varepsilon^2}-1. \tag{2.2}$$

考虑 $\frac{(1-|\alpha|^2)(1-|\beta|^2)}{|\alpha-\beta|^2}$。我们有

$$\begin{aligned}&\frac{(1-|\alpha|^2)(1-|\beta|^2)}{|\alpha-\beta|^2}\\=&\frac{(1-(s_1^2+(1-s_1)^2\cot^2\theta_1))\cdot(1-(s_2^2+(1-s_2)^2\cot^2\theta_2))}{|(1-\beta)-(1-\alpha)|^2}\\=&\frac{(1-s_1)(1-s_2)(1+s_1-(1-s_1)\cot^2\theta_1)(1+s_2-(1-s_2)\cot^2\theta_2))}{|(1-s_1)(1-\mathbf{i}\cot\theta_1)-(1-s_2)(1-\mathbf{i}\cot\theta_2)|^2}.\end{aligned}$$

记

$$W_1=1+s_1-(1-s_1)\cot^2\theta_1\ \text{ and }\ W_2=1+s_2-(1-s_2)\cot^2\theta_2.$$

Then,

$$3\le4-2\eta\le W_1\cdot W_2\le4.$$

现在分别给出 K 的下界和上界。然后，由不等式 (2.1)，我们可以完成证明。

K 的下界。如果 $K\le\frac{C-\tau}{C+\tau}$，则有

$$\begin{aligned}\frac{(1-|\alpha|^2)(1-|\beta|^2)}{|\alpha-\beta|^2}=&\frac{(1-s_1)(1-s_2)W_1W_2}{|(1-s_1)(1-\mathbf{i}\cot\theta_1)-(1-s_2)(1-\mathbf{i}\cot\theta_2)|^2}\\=&\frac{KW_1W_2}{|K(1-\mathbf{i}\cot\theta_1)-(1-\mathbf{i}\cot\theta_2)|^2}\\\le&\frac{4K}{(|(1-\mathbf{i}\cot\theta_2)|-|K(1-\mathbf{i}\cot\theta_1)|)^2}\\\le&\frac{4K}{((C-\tau)-K(C+\tau))^2}.\end{aligned}$$

由不等式 (2.2) 可得

$$\frac{4K}{((C-\tau)-K(C+\tau))^2}\ge\frac{(1-|\alpha|^2)(1-|\beta|^2)}{|\alpha-\beta|^2}\ge\frac{1}{\delta^2}-1.$$

于是,

$$K^2-2\left(\frac{C-\tau}{C+\tau}+\frac{2\delta^2}{(C+\tau)^2(1-\delta^2)}\right)K+\frac{(C-\tau)^2}{(C+\tau)^2}\leq 0,$$

设 a_1 和 a_2 是上述关于 K的二次多项式的两个根,

$$a_1=\frac{C-\tau}{C+\tau}+\frac{2\delta^2-2\sqrt{\delta^4+\delta^2(C^2-\tau^2)(1-\delta^2)}}{(C+\tau)^2(1-\delta^2)},$$

$$a_2=\frac{C-\tau}{C+\tau}+\frac{2\delta^2+2\sqrt{\delta^4+\delta^2(C^2-\tau^2)(1-\delta^2)}}{(C+\tau)^2(1-\delta^2)}.$$

可以看出

$$0<a_1<\frac{C-\tau}{C+\tau}<a_2.$$

那么，我们总有

$$K\geq a_1>0.$$

此外，令 $C_1=\frac{C-\tau}{C+\tau}\cdot a_1$,

$$\left|\frac{1-\alpha}{1-\beta}\right|\geq\frac{K(C-\tau)}{C+\tau}\geq C_1>0.$$

K的上界。注意到

$$\begin{aligned}
&\frac{(1-|\alpha|^2)(1-|\beta|^2)}{|\alpha-\beta|^2}\\
=&\frac{KW_1W_2}{|K(1-\mathbf{i}\cot\theta_1)-(1-\mathbf{i}\cot\theta_2)|^2}\\
=&\frac{KW_1W_2}{\left|iK(\cot\theta_0-\cot\theta_1)-i(\cot\theta_0-\cot\theta_2)+(K-1)(1-\mathbf{i}\cot\theta_0)\right|^2}\\
\geq&\frac{(4-2\eta)K}{\left(\left|K(\cot\theta_0-\cot\theta_1)\right|+\left|\cot\theta_0-\cot\theta_2\right|+\left|(K-1)C\right|\right)^2}\\
\geq&\frac{(4-2\eta)K}{(|(K-1)|C+(K+1)\tau)^2}.
\end{aligned}$$

首先，让我们证明 K 必须小于 **1**。若 $K\geq 1$，则有

$$\frac{(1-|\alpha|^2)(1-|\beta|^2)}{|\alpha-\beta|^2}\geq\frac{(4-2\eta)K}{((1-K)C+(K+1)\tau)^2}.$$

由不等式 (2.2) 可得

$$\frac{(4-2\eta)K}{((K-1)C+(K+1)\tau)^2}\leq\frac{(1-|\alpha|^2)(1-|\beta|^2)}{|\alpha-\beta|^2}\leq\frac{1}{\varepsilon^2}-1.$$

那么,

$$K^2-2\left(\frac{C-\tau}{C+\tau}+\frac{(2-\eta)\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)(C+\tau)^2}\right)K+\frac{(C-\tau)^2}{(C+\tau)^2}\geq 0,$$

设 λ_1 和 λ_2 为上述关于 K 的二次多项式的两个根,

$$\lambda_1=\frac{C-\tau}{C+\tau}+\frac{(2-\eta)\varepsilon^2-\sqrt{(2-\eta)^2\varepsilon^4+2\varepsilon^2(2-\eta)(C^2-\tau^2)(1-\varepsilon^2)}}{(C+\tau)^2(1-\varepsilon^2)},$$

$$\lambda_2=\frac{C-\tau}{C+\tau}+\frac{(2-\eta)\varepsilon^2+\sqrt{(2-\eta)^2\varepsilon^4+2\varepsilon^2(2-\eta)(C^2-\tau^2)(1-\varepsilon^2)}}{(C+\tau)^2(1-\varepsilon^2)}.$$

由于

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{C+\tau}{C-\tau}\right)^2-2\left(\frac{C-\tau}{C+\tau}+\frac{(2-\eta)\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)(C+\tau)^2}\right)\left(\frac{C+\tau}{C-\tau}\right)+\frac{(C-\tau)^2}{(C+\tau)^2}\\
&=\left(\frac{C+\tau}{C-\tau}-\frac{C-\tau}{C+\tau}\right)^2-\frac{(4-2\eta)\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)(C+\tau)^2}\cdot\left(\frac{C+\tau}{C-\tau}\right)\\
&=\frac{16C^2\tau^2}{(C^2-\tau^2)^2}-\frac{(4-2\eta)\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)(C^2-\tau^2)}\\
&=\frac{16C^2}{(C^2-\tau^2)^2}\left(\tau^2-\frac{3\varepsilon^2(C^2-\tau^2)}{16C^2(1-\varepsilon^2)}\right)\\
&<0,
\end{aligned}$$

可以看出

$$0<\lambda_1<\frac{C-\tau}{C+\tau}<1<\frac{C+\tau}{C-\tau}<\lambda_2.$$

于是，我们有

$$K\geq\lambda_2>\frac{C+\tau}{C-\tau}>1.$$

然而，由不等式 (2.1),

$$\left|\frac{1-\alpha}{1-\beta}\right|\geq\frac{K(C-\tau)}{C+\tau}\geq\lambda_2\cdot\frac{C-\tau}{C+\tau}>1.$$

这与 $|1-\alpha|<|1-\beta|$ 矛盾。

现在我们已知 $K<1$。于是,

$$\frac{(1-|\alpha|^2)(1-|\beta|^2)}{|\alpha-\beta|^2}\geq\frac{(4-2\eta)K}{((1-K)C+(K+1)\tau)^2}.$$

由不等式 (2.2) 可得

$$\frac{(4-2\eta)K}{((1-K)C+(K+1)\tau)^2}\leq\frac{(1-|\alpha|^2)(1-|\beta|^2)}{|\alpha-\beta|^2}\leq\frac{1}{\varepsilon^2}-1.$$

于是,

$$K^2-2\left(\frac{C+\tau}{C-\tau}+\frac{(2-\eta)\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)(C-\tau)^2}\right)K+\frac{(C+\tau)^2}{(C-\tau)^2}\geq0.$$

设 A_1 和 A_2 是上述关于 K的二次多项式的两个根,

$$A_1=\frac{C+\tau}{C-\tau}+\frac{(2-\eta)\varepsilon^2-\sqrt{(2-\eta)^2\varepsilon^4+2\varepsilon^2(2-\eta)(C^2-\tau^2)(1-\varepsilon^2)}}{(C-\tau)^2(1-\varepsilon^2)},$$

$$A_2=\frac{C+\tau}{C-\tau}+\frac{(2-\eta)\varepsilon^2+\sqrt{(2-\eta)^2\varepsilon^4+2\varepsilon^2(2-\eta)(C^2-\tau^2)(1-\varepsilon^2)}}{(C-\tau)^2(1-\varepsilon^2)}.$$

由于

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{C-\tau}{C+\tau}\right)^2 - 2\left(\frac{C+\tau}{C-\tau} + \frac{(2-\eta)\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)(C-\tau)^2}\right)\left(\frac{C-\tau}{C+\tau}\right) + \frac{(C+\tau)^2}{(C-\tau)^2} \\
=& \left(\frac{C-\tau}{C+\tau} - \frac{C+\tau}{C-\tau}\right)^2 - \frac{(4-2\eta)\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)(C-\tau)^2} \cdot \left(\frac{C-\tau}{C+\tau}\right) \\
=& \frac{16C^2\tau^2}{(C^2-\tau^2)^2} - \frac{(4-2\eta)\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)(C^2-\tau^2)} \\
=& \frac{16C^2}{(C^2-\tau^2)^2}\left(\tau^2 - \frac{3\varepsilon^2(C^2-\tau^2)}{16C^2(1-\varepsilon^2)}\right) \\
<& 0,
\end{aligned}
$$

可以看出

$$0 < A_1 < \frac{C-\tau}{C+\tau} < 1 < A_2.$$

那么，我们总有

$$K \le A_1 < \frac{C-\tau}{C+\tau} < 1.$$

此外，令 $C_2 = \frac{C+\tau}{C-\tau} \cdot A_1$,

$$\left|\frac{1-\alpha}{1-\beta}\right| \le \frac{K(C+\tau)}{C-\tau} \le C_2 < 1.$$

□

引理 2.5. 设 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是条带锥$SC(\xi, \theta_0, T_1, T_2)$ 中的复数序列， $\theta_0 \in (0, \pi)$，满足

1. $|1-z_n|$ 作为 $n \to \infty$ 时 z_n 到 1 的增加 $\cos\theta_0$ 存在两个正数 $0 < \varepsilon \le \delta < 1$，使得对于任意 $n \in \mathbb{N}$,

$$0 < \varepsilon \le \rho(z_n, z_{n+1}) \le \delta < 1.$$

则存在一个正整数 N 和两个正实数 C_1 和 C_2，使得对于任意 $n \ge N$,

$$0 < C_1 \le \left|\frac{1-z_{n+1}}{1-z_n}\right| \le C_2 < 1.$$

此外，这意味着 $\sum_{n=1}^{\infty} |1-z_n| < \infty$。

证明。 不妨设 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 位于条带锥 $SC(1, \theta_0, T_1, T_2)$ 中（见图3）。

记

$$z_n = x_n + \mathbf{i}(1-x_n)\cot\theta_n, \quad \text{for } n = 1, 2, \ldots,$$

and

$$C = |1 - \mathbf{i}\cot\theta_0|.$$

由 $z_n \in SC(1, \theta_0, T_1, T_2)$可知，我们也可以记作

$$z_n = (1 - t_n \mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta_0}) + t_n \mathrm{e}^{\mathbf{i}\zeta_n},$$

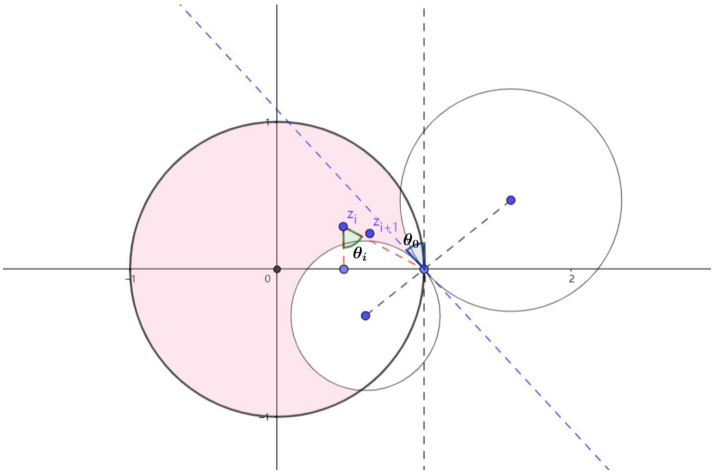

图3. $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的零点 $B(z)$

其中，若 $T_1T_2 > 0$，则为 $t_n \in [T_1, T_2]$；若 $T_1T_2 < 0$，则为 $t_n \in (-\infty, T_1] \cup [T_2, +\infty)$。此外，

$$\lim_{n\to\infty} 1 - z_n = \lim_{n\to\infty} t_n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta_n}) = 0 = \lim_{n\to\infty} 1 - x_n.$$

注意，当 $T_1T_2 > 0$ 或 $T_1T_2 < 0$时，t_n 与0的距离始终大于某个正常数。于是，$\zeta_n \to \theta_0$，因为 $n \to \infty$。因此，

$$\lim_{n\to\infty} \cot\theta_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{Im}z_n}{1 - \mathrm{Re}z_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{t_n(\sin\zeta_n - \sin\theta_0)}{t_n(\cos\zeta_n - \cos\theta_0)} = \cot\theta_0.$$

因此，对于任意两个正数

$$0 < \eta \le \frac{1}{2} \quad \text{and} \quad 0 < \tau \le \sqrt{\frac{3C^2\varepsilon^2}{16C^2(1-\varepsilon^2) + 3\varepsilon^2}},$$

存在 $N \in \mathbb{N}$，使得对所有 $n \ge N$，

$3 \le 4 - 2\eta \le (1 + x_n - (1 - x_n)\cot^2\theta_n)(1 + x_{n+1} - (1 - x_{n+1})\cot^2\theta_{n+1}) \le 4$

和

$$|\cot\theta_n - \cot\theta_0| < \tau.$$

因此，由引理 2.4 可知，存在两个正常数 C_1 和 C_2，使得对于任意 $n \ge N$，

$$0 < C_1 \le \left|\frac{1 - z_{n+1}}{1 - z_n}\right| \le C_2 < 1.$$

此外，这意味着

$$\sum_{n=1}^{\infty} |1 - z_n| \le \sum_{n=1}^{\infty} |1 - z_1| C_2^{n-1} = \frac{|1 - z_1|}{1 - C_2} < \infty.$$

□

现在，我们证明可以从每个 Blaschke乘积 $B \in \mathcal{H}_{SC}$ 的零点中选取一个“精细”的子序列。

定义 2.6。 如果序列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足以下条件，则称其为良序列。

(1) 序列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 位于某个确定的条带锥 $SC(\xi, \theta, T_1, T_2)$中。(2) $|\xi - z_n|$ 单调递减趋于 ξ，当 $n \to \infty$时；(3) 存在两个正数 $0 < \varepsilon \leq \delta < 1$，使得对于任意$n \in \mathbb{N}$,

$$0 < \varepsilon \leq \rho(z_n, z_{n+1}) \leq \delta.$$

此外，存在一个正整数 N 和两个正数C_1 和 C_2，使得对于任意 $n \geq N$,

$$0 < C_1 \leq \Big|\frac{\xi - z_{n+1}}{\xi - z_n}\Big| \leq C_2 < 1.$$

∞特别地，$\sum_{n=1} |\xi - z_n| < \infty$。

(4) $\mathrm{Re}\varphi_\xi(z_n)$ 单调趋于 $+\infty$，其中 $\varphi_\xi(z) = (\xi + z)/(\xi - z)$。$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$此外，存在两个正数 C_1 和 C_2 使得

$$0 < \widetilde{C_1} \leq \frac{\mathrm{Re}\varphi_\xi(z_n)}{\mathrm{Re}\varphi_\xi(z_{n+1})} \leq \widetilde{C_2} < 1.$$

此外，如果一个 Blaschke乘积 的零点序列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是精细的，则称该 Blaschke乘积 为精细的。记 $\mathcal{H}_{SC}$ 为所有精细 Blaschke乘积 构成的族。

引理 2.7. 设 B 是 $\mathcal{H}_{SC}$ 中的一个 *Blaschke*乘积，其零点为 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$。则$\widetilde{\quad}$ B 在 $\mathcal{H}_{SC}$中有一个因子，即，序列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有一个精细子序列。

证明。 不失一般性，假设 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 属于某个特定的条带锥 $SC(1, \theta_0, T_1, T_2)$。回顾一下，$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足以下条件。

1. $|1 - z_n|$ 单调不增地趋于 1，当 $n \to \infty$。 2. 存在一个正数 $0 < \delta < 1$, 使得对于任意 $n \in \mathbb{N}$, $\rho(z_n, z_{n+1}) \leq \delta$。

用 φ 下的条带锥 $SC(1, \theta_0, T_1, T_2)$ 的像表示为 $SL(\frac{\pi}{2} - \theta_0, L_1, L_2)$。我们可以写成

$$L_1 : y - \tan(\frac{\pi}{2} - \theta_0) \cdot x - c_1 = 0 \quad \text{and} \quad L_2 : y - \tan(\frac{\pi}{2} - \theta_0) \cdot x - c_2 = 0.$$

由于对每个 $n\in\mathbb{N}$ 都有 $|1-z_{n+1}|\leq|1-z_n|$，因此我们有

$$\begin{aligned}|\varphi(z_{n+1})|=&|\frac{1+z_{n+1}}{1-z_{n+1}}|\\=&|1-\frac{2}{1-z_{n+1}}|\\\geq&|\frac{2}{1-z_{n+1}}|-1\\\geq&|\frac{2}{1-z_n}|-1\\\geq&|\frac{2}{1-z_n}-1|-2\\=&|\varphi(z_n)|-2.\end{aligned}$$

由引理 2.3，存在 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的一个子序列 $\{z_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 以及正数 ε 和 δ，使得

$$0<\varepsilon\leq\rho(z_{n_k},z_{n_{k+1}})\leq\delta<1.$$

因此，由引理 2.5，存在正数 C_1 和 C_2，使得

$$0<C_1\leq|\frac{1-z_{n_{k+1}}}{1-z_{n_k}}|\leq C_2<1.$$

由于当 $k\to\infty$ 时 $z_{n_k}\to1$，且 $\varphi(z_{n_k})\in SL(\frac{\pi}{2}-\theta_0,L_1,L_2)$，我们有

$$\lim_{k\to\infty}|\varphi(z_{n_k})|=\lim_{k\to\infty}|\frac{1+z_{n_k}}{1-z_{n_k}}|=+\infty,$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\mathrm{Re}\varphi(z_{n_k})}{|\varphi(z_{n_k})|}=\cos(\frac{\pi}{2}-\theta_0)>0$$

and

$$\lim_{k\to\infty}|\frac{\varphi(z_{n_k})}{\varphi(z_{n_{k+1}})}|\Big/|\frac{1-z_{n_{k+1}}}{1-z_{n_k}}|=\lim_{k\to\infty}|\frac{1+z_{n_k}}{1+z_{n_{k+1}}}|=1.$$

此外,

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\mathrm{Re}\varphi(z_{n_k})}{\mathrm{Re}\varphi(z_{n_{k+1}})}\right)\Big/|\frac{1-z_{n_{k+1}}}{1-z_{n_k}}|=1.$$

于是，存在一个正整数 k_0，使得对任意 $k\geq k_0$,

$$0<\frac{C_1}{2}\leq\frac{\mathrm{Re}\varphi(z_{n_k})}{\mathrm{Re}\varphi(z_{n_{k+1}})}\leq\frac{1+C_2}{2}<1.$$

因此，子序列 $\{z_{n_k}\}_{k=k_0}^{\infty}$ 符合要求。特别是,

$$\mathrm{Re}\varphi(z_{n_{k+1}})>\mathrm{Re}\varphi(z_{n_k}).$$

□

那么，为了证明我们的主定理，只需考虑 $\mathcal{H}_{SC}$ 中的 Blaschke 乘积。

顺便一提，我们还可以发现，细序列蕴含布拉施克乘积的一些其他性质。更确切地说，我们可以得出，每个$B \in \mathcal{H}_{SC}$ 都有一个因子是插值且为单分支的布拉施克乘积。

引理 2.8（ [4]**中的推论 2.5**）。设 B 是一个布拉施克乘积，其零点 z_n 包含于某个 *Stolz*域中且彼此分离。假设$\rho(z_n, z_{n+1}) \leq \eta < 1$。那么 B 是一个单分支内函数。

定理 2.9。每个 $B \in \mathcal{H}_{SC}$ 都有一个插值且为单分支的布拉施克乘积因子。

‹证明。根据引理 2.7，只需证明每个 $B \in \mathcal{H}_{SC}$ 都有一个插值且为单分支的布拉施克乘积因子。显然，任何细序列都有一个尾部包含于某个特定的 Stolz域中；于是， $\mathcal{H}_{SC}$ 中的布拉施克乘积是插值的，当且仅当其零点序列是分离的，即

$$\inf_{m \neq n} \rho(z_n, z_m) > 0.$$

此外，结合引理 2.8，我们只需证明任意精细序列都存在一个分离的子序列。

不失一般性，假设 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是条带锥 $SC(1, \theta, T_1, T_2)$ 中的一个细序列。由于 $\varphi(z) = (1 + z)/(1 - z)$，我们有 $z = (\varphi(z) - 1)/(\varphi(z) + 1)$，于是

$$\begin{aligned} |z_m - z_n| &= \left|\frac{\varphi(z_m) - 1}{\varphi(z_m) + 1} - \frac{\varphi(z_n) - 1}{\varphi(z_n) + 1}\right| \\ &= \left|\frac{2(\varphi(z_m) - \varphi(z_n))}{(\varphi(z_m) + 1)(\varphi(z_n) + 1)}\right| \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} |1 - \overline{z_m} z_n| &= \left|1 - \frac{\overline{\varphi(z_m)} - 1}{\overline{\varphi(z_m)} + 1} \cdot \frac{\varphi(z_n) - 1}{\varphi(z_n) + 1}\right| \\ &= \left|\frac{2(\overline{\varphi(z_m)} + \varphi(z_n))}{(\overline{\varphi(z_m)} + 1)(\varphi(z_n) + 1)}\right| \\ &= \left|\frac{2[\overline{\varphi(z_m)} + \varphi(z_n)]}{(\varphi(z_m) + 1)(\varphi(z_n) + 1)}\right|. \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}\rho(z_m,z_n)&=|\frac{z_m-z_n}{1-\overline{z_m}z_n}|\\&=|\frac{\varphi(z_m)-\varphi(z_n)}{\overline{\varphi(z_m)}+\varphi(z_n)}|\\&\geq|\frac{|\varphi(z_m)|-|\varphi(z_n)|}{|\varphi(z_m)|+|\varphi(z_n)|}|\\&=|\frac{1-|\frac{\varphi(z_n)}{\varphi(z_m)}|}{1+|\frac{\varphi(z_n)}{\varphi(z_m)}|}|.\end{aligned}$$

此外，存在正数 C_1 和 C_2，使得

$$0<C_1\leq|\frac{1-z_{n_{k+1}}}{1-z_{n_k}}|\leq C_2<1.$$

由于当 $n\to\infty$ 时， $|1-z_n|$ 以非递增方式趋于 1，因此存在正整数 $N\in\mathbb{N}$，使得对于任意 $n\geq N$,

$$|\frac{1+z_n}{1+z_{n+1}}|\leq\frac{1+C_2}{2C_2}.$$

于是，我们有

$$\begin{aligned}|\frac{\varphi(z_n)}{\varphi(z_{n+1})}|&=|\frac{1+z_n}{1-z_n}\cdot\frac{1-z_{n+1}}{1+z_{n+1}}|\\&=|\frac{1+z_n}{1+z_{n+1}}||\frac{1-z_{n+1}}{1-z_n}|\\&\leq\frac{C_2+1}{2}\\&<1,\end{aligned}$$

因此，对于任意 $m>n$,

$$\begin{aligned}|\frac{\varphi(z_n)}{\varphi(z_m)}|\leq&\Big(\frac{C_2+1}{2}\Big)^{m-n}\\\leq&\frac{C_2+1}{2}\\<&1.\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}\rho(z_m, z_n) &\geq \left|\frac{1-\left|\frac{\varphi(z_n)}{\varphi(z_m)}\right|}{1+\left|\frac{\varphi(z_n)}{\varphi(z_m)}\right|}\right| \\ &= 1-\frac{2}{\frac{1}{\left|\frac{\varphi(z_n)}{\varphi(z_m)}\right|}+1} \\ &\geq 1-\frac{2}{\frac{1}{\frac{C_2+1}{2}}+1} \\ &= \frac{1-C_2}{3+C_2}.\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\inf_{m\neq n}\rho(z_n, z_m) \geq \frac{1-C_2}{3+C_2} > 0.$$

证明至此完成。 □

3. 主定理的证明

本节将证明我们的主定理。考虑一个 Blaschke乘积

$$B = \lambda z^m \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{z_n}}{|\, z_n \,|} \cdot \frac{z_n - z}{1-\overline{z_n} z}.$$

其中 $|\lambda| = 1$。众所周知，阶数相同的有限布拉施克乘积属于同一个连通分支。于是， $B \sim zB$ 当且仅当存在某个 $N \in \mathbb{N}$,

$$\prod_{n=N}^{\infty} \frac{\overline{z_n}}{|\, z_n \,|} \cdot \frac{z_n - z}{1-\overline{z_n} z} \sim \prod_{n=N+1}^{\infty} \frac{\overline{z_n}}{|\, z_n \,|} \cdot \frac{z_n - z}{1-\overline{z_n} z}. \tag{3.1}$$

回顾一下， $\varphi(z) = (1+z)/(1-z)$ 是从单位开圆盘到右半平面的分式线性变换。令 $\alpha_n(t)$ 为 $\mathbb{D}$ 中满足下述条件的唯一点

$$\varphi(\alpha_n(t)) = (1-t)\varphi(z_n) + t\varphi(z_{n+1}),$$

对于 $t \in [0,1]$ 和 $n = 1, 2, \cdots$。此外，借鉴 Nestoridis 的思路， [9], 定义从 $[0,1]$ 到 $\mathcal{F}$ 的映射 B_t 如下

$$t \longmapsto B_t = \prod_{n=N}^{\infty} \frac{\overline{\alpha_n(t)}}{|\, \alpha_n(t) \,|} \cdot \frac{\alpha_n(t) - z}{1-\overline{\alpha_n(t)} z}. \tag{3.2}$$

如果上述映射连续，那么关系式 (3.1) 成立，因此$B \sim zB$。要证明 B_t的连续性，下面的定理起着重要作用。

引理 3.1（ [9]**中的引理**1 ）。设

$$K_1=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\overline{\alpha_n}}{|\alpha_n|}\frac{\alpha_n-z}{1-\overline{\alpha_n}z}\quad and\quad K_2=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\overline{\beta_n}}{|\beta_n|}\frac{\beta_n-z}{1-\overline{\beta_n}z}$$

设 $K_1(0)>0$ 和 $K_2(0)>0$ 是两个无限布拉施克乘积，则有以下不等式，

$$\begin{aligned}\|K_1-K_2\|_\infty\leq&\sum_n\big|arg\frac{\alpha_n}{\beta_n}\big|+2\sum_n\big|arg\frac{1-\alpha_n}{1-\beta_n}\big|\\&+2\sup_{y\in\mathbb{R}}\operatorname{ess}\sum_n\big|arg\frac{\varphi(\alpha_n)-\mathbf{i}y}{\varphi(\beta_n)-\mathbf{i}y}\big|.\end{aligned}\tag{3.3}$$

现在，我们应用引理 3.1 来验证路径B_t的连续性。更确切地说，

$$\begin{aligned}\|B_t-B_{t+\Delta t}\|_\infty\leq&\sum_n\big|\arg\frac{\alpha_n(t)}{\alpha_n(t+\Delta t)}\big|+2\sum_n\big|\arg\frac{1-\alpha_n(t)}{1-\alpha_n(t+\Delta t)}\big|\\&+2\sup_{y\in\mathbb{R}}\operatorname{ess}\sum_n\big|\arg\frac{\varphi(\alpha_n(t))-\mathbf{i}y}{\varphi(\alpha_n(t+\Delta t))-\mathbf{i}y}\big|.\end{aligned}\tag{3.4}$$

那么，要证明 $\lim_{\Delta t\to 0}\|B_t-B_{t+\Delta t}\|=0$，只需证明不等式 (3.4) 右侧的三项当 $\Delta t\to 0$ 时趋于 0。

~**命题 3.2.** 对于任意 $B\in\mathcal{H}_{SC}$，存在正整数 $N_1\in\mathbb{N}$ 和正数 K_1 ，使得对任意 $t\in[0,1]$ 及充分小的正数 Δt,

$$\sum_{n=N_1}^{\infty}\big|arg\frac{\alpha_n(t)}{\alpha_n(t+\Delta t)}\big|\leq K_1\Delta t.$$

证明. 不失一般性，假设 $B\in\mathcal{H}_{SC}$ 的零点序列在条带锥 $SC(\mathbf{1},\theta,T_1,T_2)$ 中是细的。根据 $\alpha_n(t)$ 的定义，我们有

$$\begin{aligned}1-\alpha_n(t)=&1-\varphi^{-1}(\varphi(\alpha_n(t)))\\=&1-\frac{\varphi(\alpha_n(t))-1}{\varphi(\alpha_n(t))+1}\\=&\frac{2}{\varphi(\alpha_n(t))+1}\end{aligned}$$

此外，

$$\begin{aligned}&\alpha_n(t+\Delta t)-\alpha_n(t)\\=&(1-\alpha_n(t))-(1-\alpha_n(t+\Delta t))\\=&\frac{2\Delta t(\varphi(z_{n+1})-\varphi(z_n))}{(\varphi(\alpha_n(t))+1)(\varphi(\alpha_n(t+\Delta t))+1)}\\=&\frac{4\Delta t(z_{n+1}-z_n)}{(1-z_n)(1-z_{n+1})}\cdot\frac{1}{(\varphi(\alpha_n(t))+1)(\varphi(\alpha_n(t+\Delta t))+1)}.\end{aligned}$$

由于 Re$\varphi(z_n)$ 逐渐趋近于 $+\infty$，并且

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\mathrm{Re}\varphi(z_n)}{|\varphi(z_n)|}=\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)>0,$$

存在一个正数 $R_1>0$ 使得

$$|\varphi(\alpha_n(t))+1|\geq|\mathrm{Re}(\varphi(\alpha_n(t))+1)|\geq|\mathrm{Re}(\varphi(z_n)+1)|\geq\frac{|\varphi(z_n)+1|}{R_1}.$$

此外，以下结论成立。

(1) 序列 $|1-z_n|$ 单调不增地趋于 1，当 $n\to\infty$。(2) 由引理 2.5，存在正数常数 C_1 使得

$$0<C_1\leq\Big|\frac{1-z_{n+1}}{1-z_n}\Big|.$$

于是，我们有

$$\begin{aligned}
&|\alpha_n(t+\Delta t)-\alpha_n(t)|\\
=&\Big|\frac{4\Delta t(z_{n+1}-z_n)}{(1-z_n)(1-z_{n+1})}\Big|\cdot\Big|\frac{1}{(\varphi(\alpha_n(t))+1)(\varphi(\alpha_n(t+\Delta t))+1)}\Big|\\
\leq&\frac{4\Delta t(|1-z_{n+1}|+|1-z_n|)}{|1-z_n||1-z_{n+1}|}\cdot\frac{R_1^2}{|\varphi(z_n)+1|^2}\\
\leq&\frac{8\Delta t|1-z_n|}{|1-z_n||1-z_{n+1}|}\cdot\frac{R_1^2}{|\frac{2}{1-z_n}|^2}\\
=&2R_1^2\cdot\Delta t\cdot\frac{|1-z_n|}{|1-z_{n+1}|}\cdot|1-z_n|\\
\leq&\frac{2R_1^2}{C_1}\cdot|\Delta t|\cdot|1-z_n|.
\end{aligned}$$

给定一个正数 $0<r<1$，由 $z_n\to1$ 可知，存在一个正整数 $N_1\in\mathbb{N}$，使得对于任意 $n\geq N_1$ 和任意 $t\in[0,1]$,

$$|\alpha_n(t)|\geq r.$$

因此，考虑顶点为 0、$\alpha_n(t+\Delta t)$ 和 $\alpha_n(t)$ 的三角形的面积，我们有

$$\begin{aligned}
&\Big|\arg\frac{\alpha_n(t)}{\alpha_n(t+\Delta t)}\Big|\\
\leq&\frac{\pi}{2}\cdot\sin\Big|\arg\frac{\alpha_n(t)}{\alpha_n(t+\Delta t)}\Big|\\
\leq&\frac{\pi}{2}\cdot\frac{|\alpha_n(t+\Delta t)-\alpha_n(t)|\cdot1}{|\alpha_n(t+\Delta t)|\cdot|\alpha_n(t)|}\\
\leq&\frac{R_1^2\pi}{r^2C_1}\cdot\Delta t\cdot|1-z_n|.
\end{aligned}$$

因此，由 $\sum_n |1-z_n|<\infty$ 可知，对于任意 $t\in[0,1]$,

$$\sum_{n=N_1}^{\infty}\left|\arg\frac{\alpha_n(t)}{\alpha_n(t+\Delta t)}\right|\le\Delta t\cdot\frac{R_1^2\pi}{r^2C_1}\sum_{n=N_1}^{\infty}|1-z_n|.$$

此外，记

$$K_1=\frac{R_1^2\pi}{r^2C_1}\sum_{n=1}^{\infty}|1-z_n|$$

如所要求的。 □

~**命题 3.3**。对于任意 $B\in\mathcal{H}_{SC}$，存在一个正整数 $N_2\in\mathbb{N}$ 和一个正数 K_2，使得对于任意 $t\in[0,1]$ 和足够小的正数 Δt,

$$\sup_{y\in\mathbb{R}}ess\sum_{n=N_2}^{\infty}\left|arg\frac{\varphi(\alpha_n(t))-\mathbf{i}y}{\varphi(\alpha_n(t+\Delta t))-\mathbf{i}y}\right|\le K_2\Delta t.$$

证明。不妨设 $B\in\mathcal{H}_{SC}$ 的零点序列在条带锥 $SC(\mathbf{1},\theta,T_1,T_2)$ 中是细的。设条带 $SL(\frac{\pi}{2}-\theta,L_1,L_2)$ 是条带锥 $SC(\mathbf{1},\theta,T_1,T_2)$ 在映射 $\varphi(z)$ 下的像，其中

$$L_1:y-\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)\cdot x-c_1=0\quad\text{and}\quad L_2:y-\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)\cdot x-c_2=0.$$

记 L 为经过 $\varphi(z_n)$ 且平行于 L_1 的直线，并记 ω_n 为 L 与经过 $\varphi(z_n)$ 的直线和 $\varphi(z_{n+1})$ 之间的角。于是

$$\sin\omega_n\le\frac{|c_1-c_2|}{|\varphi(z_{n+1})-\varphi(z_n)|}.$$

由于存在正数 C_1 和 C_2，使得

$$0<C_1\le\left|\frac{1-z_{n+1}}{1-z_n}\right|\le C_2<1,$$

and

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\varphi(z_n)}{\varphi(z_{n+1})}\right|\Big/\left|\frac{1-z_{n+1}}{1-z_n}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{1+z_n}{1+z_{n+1}}\right|=1,$$

可以看出

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}|\varphi(z_{n+1})-\varphi(z_n)|&=\lim_{n\to\infty}|\varphi(z_n)|\left(\frac{|\varphi(z_{n+1})|}{|\varphi(z_n)|}-1\right)\\&\le\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{C_2}-1\right)|\varphi(z_n)|\\&=\infty.\end{aligned}$$

因此，

$$\lim_{n\to\infty}\omega_n\le\frac{\pi}{2}\lim_{n\to\infty}\sin\omega_n\le\frac{\pi}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{|c_1-c_2|}{|\varphi(z_{n+1})-\varphi(z_n)|}=0,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\arg(\varphi(z_{n+1})-\varphi(z_n))=\frac{\pi}{2}-\theta.$$

记 ϑ_n 为虚轴与经过 $\varphi(z_n)$和 $\varphi(z_{n+1})$的直线之间的夹角。那么，对于任意 $\epsilon > 0$，都存在一个正整数 $N_2 \in \mathbb{N}$，使得对于每个 $n \geq N_2$

$$(1-\epsilon)\sin\theta \leq \sin\vartheta_n \leq (1+\epsilon)\sin\theta \quad \text{and} \quad \mathrm{Re}z_n > 0.$$

记 h_n 为 $\mathbf{i}y$ 到经过 $\varphi(\alpha_n(t))$ 和 $\varphi(\alpha_n(t+\Delta t))$ 的直线的距离。考虑顶点为 $\mathbf{i}y$、$\varphi(\alpha_n(t))$ 和 $\varphi(\alpha_n(t+\Delta t))$ 的三角形的面积，可得

$$\begin{aligned}
&\sin\left(\arg\frac{\varphi(\alpha_n(t+\Delta t))-\mathbf{i}y}{\varphi(\alpha_n(t))-\mathbf{i}y}\right)\\
=&\frac{|\varphi(\alpha_n(t+\Delta t))-\varphi(\alpha_n(t))|\cdot h_n}{|\varphi(\alpha_n(t+\Delta t))-\mathbf{i}y|\cdot|\varphi(\alpha_n(t))-\mathbf{i}y|}\\
\leq&\frac{\frac{\mathrm{Re}\varphi(\alpha_n(t+\Delta t))-\mathrm{Re}\varphi(\alpha_n(t))}{(1-\epsilon)\sin\theta}\cdot\max\{|y-c_1|,|y-c_2|\}(1+\epsilon)\sin\theta}{|\varphi(\alpha_n(t+\Delta t))-\mathbf{i}y|\cdot|\varphi(\alpha_n(t))-\mathbf{i}y|}\\
=&\Delta t\cdot\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}\cdot\frac{(\mathrm{Re}\varphi(z_{n+1})-\mathrm{Re}\varphi(z_n))\cdot\max\{|y-c_1|,|y-c_2|\}}{|\varphi(\alpha_n(t+\Delta t))-\mathbf{i}y|\cdot|\varphi(\alpha_n(t))-\mathbf{i}y|}.
\end{aligned}$$

由于 $\{\mathrm{Re}\varphi(z_n)\}$ 是趋于 $+\infty$ 的正数递增序列，因此有

$$\begin{aligned}
&\left|\arg\frac{\varphi(\alpha_n(t))-\mathbf{i}y}{\varphi(\alpha_n(t+\Delta t))-\mathbf{i}y}\right|\\
\leq&\frac{\pi}{2}\sin\left(\arg\frac{\varphi(\alpha_n(t+\Delta t))-\mathbf{i}y}{\varphi(\alpha_n(t))-\mathbf{i}y}\right)\\
\leq&\Delta t\cdot\frac{\pi(1+\epsilon)}{2(1-\epsilon)}\cdot\frac{(\mathrm{Re}\varphi(z_{n+1})-\mathrm{Re}\varphi(z_n))\cdot\max\{|y-c_1|,|y-c_2|\}}{|\varphi(\alpha_n(t+\Delta t))-\mathbf{i}y|\cdot|\varphi(\alpha_n(t))-\mathbf{i}y|}.
\end{aligned}$$

此外,

$$\begin{aligned}
&\left|\arg\frac{\varphi(\alpha_n(t))-\mathbf{i}y}{\varphi(\alpha_n(t+\Delta t))-\mathbf{i}y}\right|\\
\leq&\Delta t\cdot\frac{\pi(1+\epsilon)}{2(1-\epsilon)}\cdot\frac{(\mathrm{Re}\varphi(z_{n+1})-\mathrm{Re}\varphi(z_n))\cdot\max\{|y-c_1|,|y-c_2|\}}{|\mathrm{Re}\varphi(z_n)|\cdot|\mathrm{Re}\varphi(z_n)|}\\
=&\Delta t\cdot\frac{\pi(1+\epsilon)}{2(1-\epsilon)}\cdot\left(\frac{\mathrm{Re}\varphi(z_{n+1})}{\mathrm{Re}\varphi(z_n)}-1\right)\cdot\frac{\max\{|y-c_1|,|y-c_2|\}}{\mathrm{Re}\varphi(z_n)}\\
\leq&\Delta t\cdot\frac{\pi(1+\epsilon)(1-\widetilde{C_1})}{2\widetilde{C_1}(1-\epsilon)}\cdot\frac{\max\{|y-c_1|,|y-c_2|\}}{\mathrm{Re}\varphi(z_n)}.
\end{aligned}$$

（1）假设 y 满足 $\min\{|y-c_1|,|y-c_2|\} \leq |c_1-c_2|$。在这种情况下,

最大值$\{|y-c_1|,|y-c_2|\} \leq$最小值$\{|y-c_1|,|y-c_2|\}+|c_1-c_2| \leq 2|c_1-c_2|$.

那么,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=N_2}^{\infty} \left|\arg\frac{\varphi(\alpha_n(t))-\mathbf{i}y}{\varphi(\alpha_n(t+\Delta t))-\mathbf{i}y}\right| \\
\leq &\sum_{n=N_2}^{\infty} \Delta t\cdot\frac{\pi(1+\epsilon)(1-\widetilde{C_1})}{2\widetilde{C_1}(1-\epsilon)}\cdot\frac{2|c_1-c_2|}{\mathrm{Re}\varphi(z_n)} \\
\leq &\Delta t\cdot\frac{\pi(1+\epsilon)(1-\widetilde{C_1})|c_1-c_2|}{\widetilde{C_1}(1-\epsilon)}\cdot\sum_{n=N_2}^{\infty}\frac{1}{|\varphi(z_n)|(1-\epsilon)\sin\theta} \\
= &\Delta t\cdot\frac{\pi(1+\epsilon)(1-\widetilde{C_1})|c_1-c_2|}{\widetilde{C_1}(1-\epsilon)^2\sin\theta}\cdot\sum_{n=N_2}^{\infty}\frac{|1-z_n|}{|1+z_n|} \\
\leq &\Delta t\cdot\frac{\pi(1+\epsilon)(1-\widetilde{C_1})|c_1-c_2|}{\widetilde{C_1}(1-\epsilon)^2\sin\theta}\cdot\sum_{n=N_2}^{\infty}|1-z_n|.
\end{aligned}$$

(2) 假设 y 满足 $\min\{|y-c_1|,|y-c_2|\}\geq|c_1-c_2|$。
令 $N\geq N_2$ 为满足条件的第一个正数，使得

$$\mathrm{Re}\varphi(z_N)\geq\max\{|y-c_1|,|y-c_2|\}.$$

那么,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=N}^{\infty} \left|\arg\frac{\varphi(\alpha_n(t))-\mathbf{i}y}{\varphi(\alpha_n(t+\Delta t))-\mathbf{i}y}\right| \\
\leq &\sum_{n=N}^{\infty} \Delta t\cdot\frac{\pi(1+\epsilon)(1-\widetilde{C_1})}{\widetilde{C_1}(1-\epsilon)}\cdot\frac{\max\{|y-c_1|,|y-c_2|\}}{\mathrm{Re}\varphi(z_n)} \\
= &\Delta t\cdot\frac{\pi(1+\epsilon)(1-\widetilde{C_1})}{\widetilde{C_1}(1-\epsilon)}\cdot\frac{\max\{|y-c_1|,|y-c_2|\}}{\mathrm{Re}\varphi(z_N)}\cdot\sum_{n=N}^{\infty}\frac{\mathrm{Re}\varphi(z_n)}{\mathrm{Re}\varphi(z_N)} \\
\leq &\Delta t\cdot\frac{\pi(1+\epsilon)(1-\widetilde{C_1})}{\widetilde{C_1}(1-\epsilon)}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\widetilde{C_2}^k \\
= &\Delta t\cdot\frac{\pi(1+\epsilon)(1-\widetilde{C_1})}{\widetilde{C_1}(1-\epsilon)(1-\widetilde{C_2})}.
\end{aligned}$$

注意，对于 $t\in[0,1]$

$$|\varphi(\alpha_n(t))-\mathbf{i}y|\geq\min\{|y-c_1|,|y-c_2|\}\sin\theta\geq|c_1-c_2|\sin\theta.$$

不难看出

$$\begin{aligned}
\frac{\max\{|y-c_1|,|y-c_2|\}}{|\varphi(\alpha_n(t))-\mathbf{i}y|}\leq&\frac{\min\{|y-c_1|,|y-c_2|\}+|c_1-c_2|}{\min\{|y-c_1|,|y-c_2|\}\sin\theta} \\
=&\left(1+\frac{|c_1-c_2|}{\min\{|y-c_1|,|y-c_2|\}}\right)\cdot\frac{1}{\sin\theta} \\
\leq&\frac{2}{\sin\theta}.
\end{aligned}$$

那么，对于任意 $N_2 \le n \le N-1$,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=N_2}^{N-1} \left|\arg\frac{\varphi(\alpha_n(t))-\mathbf{i}y}{\varphi(\alpha_n(t+\Delta t))-\mathbf{i}y}\right| \\
\le &\sum_{n=N_2}^{N-1} \Delta t\cdot\frac{\pi(1+\epsilon)}{2(1-\epsilon)}\cdot\frac{(\mathrm{Re}\varphi(z_{n+1})-\mathrm{Re}\varphi(z_n))\cdot\max\{|y-c_1|,|y-c_2|\}}{|\varphi(\alpha_n(t+\Delta t))-\mathbf{i}y|\cdot|\varphi(\alpha_n(t))-\mathbf{i}y|} \\
\le &\Delta t\cdot\frac{\pi(1+\epsilon)}{2(1-\epsilon)}\cdot\sum_{n=N_2}^{N-1}\frac{(\mathrm{Re}\varphi(z_{n+1})-\mathrm{Re}\varphi(z_n))\cdot\max\{|y-c_1|,|y-c_2|\}}{\min\{|y-c_1|,|y-c_2|\}\sin\theta\cdot|\varphi(\alpha_n(t))-\mathbf{i}y|} \\
\le &\Delta t\cdot\frac{\pi(1+\epsilon)}{(1-\epsilon)\min\{|y-c_1|,|y-c_2|\}\sin^2\theta}\cdot\sum_{n=N_2}^{N-1}(\mathrm{Re}\varphi(z_{n+1})-\mathrm{Re}\varphi(z_n)) \\
= &\Delta t\cdot\frac{\pi(1+\epsilon)}{(1-\epsilon)\sin^2\theta}\cdot\frac{\mathrm{Re}\varphi(z_N)-\mathrm{Re}\varphi(z_{N_2})}{\min\{|y-c_1|,|y-c_2|\}} \\
\le &\Delta t\cdot\frac{\pi(1+\epsilon)}{(1-\epsilon)\sin^2\theta}\cdot\frac{\frac{\mathrm{Re}\varphi(z_N)}{\mathrm{Re}\varphi(z_{N-1})}\cdot\mathrm{Re}\varphi(z_{N-1})}{\min\{|y-c_1|,|y-c_2|\}} \\
\le &\Delta t\cdot\frac{\pi(1+\epsilon)}{(1-\epsilon)\sin^2\theta}\cdot\frac{\frac{1}{\widetilde{C_1}}\max\{|y-c_1|,|y-c_2|\}}{\min\{|y-c_1|,|y-c_2|\}} \\
= &\Delta t\cdot\frac{2\pi(1+\epsilon)}{(1-\epsilon)\widetilde{C_1}\sin^2\theta}.
\end{aligned}
$$

因此，在这种情况下,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=N_2}^{\infty}\left|\arg\frac{\varphi(\alpha_n(t))-\mathbf{i}y}{\varphi(\alpha_n(t+\Delta t))-\mathbf{i}y}\right| \\
\le &\Delta t\cdot\left(\frac{2\pi(1+\epsilon)}{(1-\epsilon)\widetilde{C_1}\sin^2\theta}+\frac{\pi(1+\epsilon)(1-\widetilde{C_1})}{\widetilde{C_1}(1-\epsilon)(1-\widetilde{C_2})}\right).
\end{aligned}
$$

因此，我们可以写成

$$
K_2=\left\{\begin{array}{c}\frac{\pi(1+\epsilon)(1-\widetilde{C_1})|c_1-c_2|}{\widetilde{C_1}(1-\epsilon)^2\sin\theta}\cdot\sum\limits_{n=N_2}^{\infty}|1-z_n|, \\ \frac{2\pi(1+\epsilon)}{(1-\epsilon)\widetilde{C_1}\sin^2\theta}+\frac{\pi(1+\epsilon)(1-\widetilde{C_1})}{\widetilde{C_1}(1-\epsilon)(1-\widetilde{C_2})}\end{array}\right\}
$$

如所要求的。 □

~**命题 3.4.** 对于任意 $B\in\mathcal{H}_{SC}$，存在一个正整数 $N_3\in\mathbb{N}$和一个正数 K_3 ，使得对于任意 $t\in[0,1]$ 和任意小的正数 Δt,

$$
\sum_n\left|arg\frac{1-\alpha_n(t)}{1-\alpha_n(t+\Delta t)}\right|\le K_3\Delta t.
$$

证明。 不失一般性，设 $B\in\mathcal{H}_{SC}$ 的零点序列在条带锥 $SC(\mathbf{1},\theta,T_1,T_2)$ 中是细的。设条带 $SL(\frac{\pi}{2}-\theta,L_1,L_2)$

是映射 $\varphi(z)$ 下 $SC(1,\theta,T_1,T_2)$ 的像，其中

$$L_1: y-\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)\cdot x-c_1=0 \quad \text{and} \quad L_2: y-\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)\cdot x-c_2=0.$$

为方便起见，假设直线 L_2 位于直线 L_1 的右侧。将 L_2 向右平移一个单位后，我们得到一条新的直线 L_2，更准确地说，

$$\widehat{L_2}:\ y-\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)\cdot(x-1)-c_2=0.$$

Let

$$\varphi(\widehat{z_n})=\varphi(z_n)+1 \ \text{ and } \ \varphi(\widehat{\alpha}_n(t))=\varphi(\alpha_n(t))+1.$$

不难看出，$\{\varphi(\widehat{z_n})\}_{n=1}^{\infty}$ 也满足以下条件，并且是一个良序列。

$\widehat{\ }$(1) 序列 $\{\varphi(\widehat{z_n})\}_{n=1}^{\infty}$ 位于条带 $SL(\frac{\pi}{2}-\theta,L_1,L_2)$ 中。(2) $\lim_{n\to\infty}\arg(\varphi(z_{n+1})-\varphi(z_n))=\frac{\pi}{2}-\theta$。(3) $\mathrm{Re}\varphi(\widehat{z_n})$ 单调趋于 $+\infty$，且存在两个正数 D_1 和 D_2，使得

$$0<\widetilde{D_1}\le\frac{\mathrm{Re}\varphi(\widehat{z_n})}{\mathrm{Re}\varphi(\widehat{z_{n+1}})}\le\widetilde{D_2}<1.$$

于是，命题 3.3 对序列 $\{\varphi(\widehat{z_n})\}_{n=1}^{\infty}$ 也成立。也就是说，存在一个正整数 $N_3\in\mathbb{N}$ 和一个正数 K_3，使得对于任意 $t\in[0,1]$ 以及任意小的正数 Δt,

$$\sup_{y\in\mathbb{R}}\operatorname{ess}\sum_{n=N_3}^{\infty}\Big|\arg\frac{\varphi(\widehat{\alpha}_n(t))-\mathbf{i}y}{\varphi(\widehat{\alpha}_n(t+\Delta t))-\mathbf{i}y}\Big|\le K_3\Delta t.$$

特别地，上述不等式对 $y=0$ 也成立，因此

$$\begin{aligned}K_3\Delta t&\ge\sum_{n=N_3}^{\infty}\Big|\arg\frac{\varphi(\widehat{\alpha}_n(t))}{\varphi(\widehat{\alpha}_n(t+\Delta t))}\Big|\\&=\sum_{n=N_3}^{\infty}\Big|\arg\frac{\varphi(\alpha_n(t))+1}{\varphi(\alpha_n(t+\Delta t))+1}\Big|\\&=\sum_{n=N_3}^{\infty}\Big|\arg\frac{\frac{1+\alpha_n(t)}{1-\alpha_n(t)}+1}{\frac{1+\alpha_n(t+\Delta t)}{1-\alpha_n(t+\Delta t)}+1}\Big|\\&=\sum_{n=N_3}^{\infty}\Big|\arg\frac{1-\alpha_n(t+\Delta t)}{1-\alpha_n(t)}\Big|.\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

主定理的证明： 取任意 $B\in\mathcal{H}_{SC}$。不失一般性，我们可以假设其零点位于条带锥 $SC(1,\theta,T_1,T_2)$，‹ $\theta\in(0,\pi)$ 中。根据引理 2.7，它有一个因子 $B\in\mathcal{H}_{\mathcal{SC}}$，记为

$$\widetilde{B}(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{|z_n|}{z_n}\frac{z_n-z}{1-\overline{z_n}z}.$$

根据命题 3.2、命题 3.3、命题 3.4 和引理 3.1，我们可以选取 $N \geq \max\{N_1, N_2, N_3\}$，于是存在一条连续路径，从

$$\prod_{n=N}^{\infty} \frac{|z_n|}{z_n} \frac{z_n - z}{1 - \overline{z_n} z} \quad \text{to} \quad \prod_{n=N+1}^{\infty} \frac{|z_n|}{z_n} \frac{z_n - z}{1 - \overline{z_n} z}.$$

因此，根据莫比乌斯变换的路径连通性和引理 2.1，我们有 $B \sim zB$。

声明

- 伦理审批 不适用。
- 利益冲突 作者声明不存在利益冲突或竞争利益。
- 作者贡献 所有作者均已审阅本文。
- 经费 本文无经费来源。
- 数据和材料的可用性 本文不适用数据共享，因为本研究未生成或分析任何数据集。

参考文献

[1] Aleksandrov, A.：《关于移位算子余不变子空间的嵌入定理 II》。J. Math. Sciences **110**，2907-2929（2002）。[2] Aleman, A.、Lyubarskii, Y.、Malinnikova, E.、Perfekt, K.：《模型空间中嵌入与复合算子的迹理想判据》。《泛函分析杂志》**270(3)**，861-883（2016）[3] Carleson, L.：《有界解析函数的一个插值问题》。Amer. J. Math. **80**，921-930（1958）[4] Cima, J.、Mortini, R.：《单分支内函数》。Complex Anal. Synerg. **3(1)**，论文第2号，15页（2017）[5] Cohn, B.：《与不变子空间正交的函数的Carleson测度》。《太平洋数学杂志》**103**，347-364（1982）[6]Herrero, D.：《一致拓扑下的内函数》。《太平洋数学杂志》**51**，167-175（1974）[7]Marshall, D.：《Blaschke乘积生成 H^{∞}》。Bull. Amer. Math. Soc. **82**，494-496（1976）[8]Marshall, D.、Stray, A.：《插值Blaschke乘积》。《太平洋数学杂志》**173(2)**，491-499（1996）[9] Nestoridis, V.：《内函数的不变连通分支》。《太平洋数学杂志》**83(2)**，473-480（1979）

[10] Nestoridis, V.: 《内函数：非不变连通分支》。《太平洋数学杂志》**87**(1), 199-209（1980）[11]Nicolau, A.、Suárez, D.: 《内函数相关函数的路径》。《泛函分析杂志》**262**(9), 3749-3774（2012）[12] Reijonen, A.: 《关于单分支内函数的评论》。《芬兰科学院数学年刊》**44**(1), 569-580（2019）[13] Tse, K.: 《非切向插值序列与正规函数插值》。《美国数学会会刊》**29**, 351-354（1971）

Yue Xin，吉林大学数学学院，中国吉林省长春市，邮编 130012，电子邮箱：179929393@qq.com

Bingzhe Hou，吉林大学数学学院，中国吉林省长春市，邮编 130012，电子邮箱：houbz@jlu.edu.cn