arXiv:2302.00831v1 [math.RT] 2 Feb 2023

关于拟遗传结构数量的一个注记

Yuichiro Goto

摘要

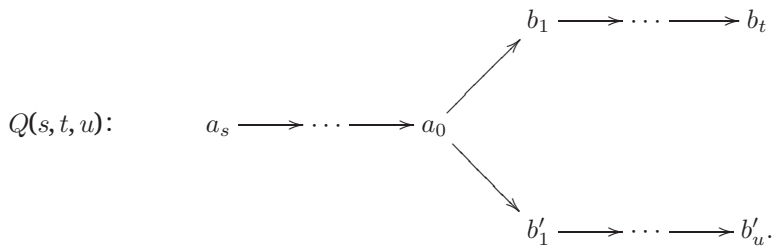
Dlab 和 Ringel 证明，若一个代数对本原幂等元指标的所有全序都是拟遗传的，那么它就是遗传的。因此，我们关注给定的拟遗传代数在何种次序下仍是拟遗传的。事实上，我们考虑的是指标的排列，而非全序。如果由两个排列定义的标准模相同，我们就称这两个排列等价。此外，若按某个排列重新标记指标后的代数是拟遗传代数，则称该排列的等价类为一个准遗传结构。本文给出一种方法，用于计算某些代数的准遗传结构数量。

1 引言

Cline、Parshall 和 Scott 引入的拟遗传代数是遗传代数的推广。此外，Dlab 和 Ringel 在 [1] 的定理 1 中证明，若一个代数在所有次序下都是拟遗传的，则它是遗传的，反之亦然。从这一角度出发，我们研究给定代数上的准遗传结构。Flores、Kimura 和 Rognerud 在 [2]中给出了一种计算 Dynkin 型路径代数的准遗传结构数量的方法。本文在讨论准遗传结构时，将使用排列而非全序。

以下是本文的主要结果。

定理 1.1（定理 3.4 和 3.6）。对于某些非负整数 s、t、$u \geq 0$，令 $Q(s,t,u)$ 为箭图



若 s、t、u 中有一个等于 1，则路径代数$KQ(s,t,u)$ 上的准遗传结构 $q(s,t,u)$ 的数量如下。

(1) $q(1,t,u) = (c_{t+2} - c_{t+1})(c_{u+2} - c_{u+1}) + c_{t+1}c_{u+1}$.

(2) $q(s,t,1) = q(s,1,t) = (t+1)c_{s+t+2} - 3tc_{s+t+1} - \sum_{k=0}^{t-2}(k+1)c_{t-k-1}c_{s+k+2}$

这里，c_k 是卡特兰数。

2 预备知识

在本文中，设 K 为一个域， A 为一个有限维 K-代数，其两两正交的本原幂等元为 $e_1, \ldots, e_n$，并设 $\Lambda = \{1, \ldots, n\}$。对于 $i \in \Lambda$，我们用 $P(i)$ 表示不可分解投射模 $= e_i A$，用 $S(i)$ 表示 $P(i)$ 的顶。有限生成右 A-模范畴记作 $\mathsf{mod}\, A$，其对象称为 A-模。对于非负整数 $k \geq 0$，我们记 c_k 为卡特兰数，即 $c_k = \frac{(2k)!}{(k+1)!k!}$。

本节回顾准遗传结构的定义及其已知性质。

定义 2.1. 设 A 是如上所述的代数，且 σ、$\tau \in \mathfrak{S}_n$。

(1) 对于每个 $i \in \Lambda$， A-模 $\Delta^\sigma(i)$ 称为关于 σ 的标准模，其定义为 $P(i)$ 的最大因子模，且其合成因子仅为满足 $\sigma(j) \leq \sigma(i)$ 的 $S(j)$。此外，我们将集合 $\{\Delta^\sigma(1) \ldots, \Delta^\sigma(n)\}$ 记作 Δ^σ。

(2) 如果一个 A-模 M 具有 $\boldsymbol{\Delta^\sigma}$-滤过，则称其为 $\boldsymbol{\Delta^\sigma}$-滤过模；也就是说，存在一列子模

$$M = M_1 \supset M_2 \supset \cdots \supset M_{m+1} = 0$$

使得对每个 $1 \leq k \leq m$，都有某个 $j \in \Lambda$ 使得 $M_k/M_{k+1} \cong \Delta^\sigma(j)$。

(3) 若一对 (A, σ) 满足以下条件，则称其为准遗传代数。

(a) 对所有 $i \in \Lambda$， $\mathsf{End}_A(\Delta^\sigma(i))$ 都是局部代数。

(b) A_A 有一个 Δ^σ-滤过。

(4) 若 (A, σ) 和 (A, τ) 是准遗传的，且具有 $\Delta^\sigma = \Delta^\tau$，则称排列 σ和 τ等价。此外，我们将这样的等价类称为 A 上的准遗传结构，并用 $\mathsf{qh.str}(\boldsymbol{A})$ 表示准遗传结构的集合。

现在我们回顾 [2] 中的结果。

引理 2.2 ([2] 引理 2.22)。对于 A 的反代数 A^{op}，有

$$|\mathrm{qh.str}(A)| = |\mathrm{qh.str}(A^{\mathrm{op}})|.$$

定理 2.3 ([2] 推论 4.8)。对于具有 $n \geq 1$ 的箭图 Q_n：$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow n$，有

$$|\mathrm{qh.str}(KQ_n)| = c_n.$$

定义 2.4. 设 Q 是一个底层图为树的有限箭图。在汇点或源点 v 处对Q 进行去拼接，是指将 Q分解为互不相交的 $Q^1 \sqcup Q^2 \sqcup \cdots \sqcup Q^l$ 个真满子箭图 Q^i，并满足以下性质。

1. 每个 Q^i 都是 Q 的一个连通满子箭图，且包含顶点 v。

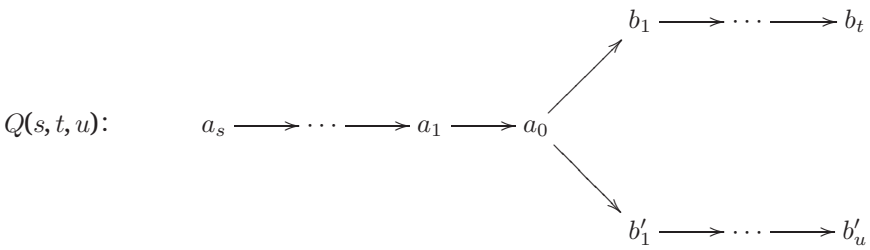
2. *On vertices, put* $\overline{Q_0^i} = Q_0^i \backslash \{v\}$. *Then* $Q_0 = \overline{Q_0^1} \sqcup \overline{Q_0^2} \sqcup \cdots \sqcup \overline{Q_0^l} \sqcup \{v\}$.

定理 2.5（[2] 定理 3.7）。设 Q 是一个底层图为树的有限箭图，且$Q^1 \sqcup Q^2 \sqcup \cdots \sqcup Q^l$是 Q的去拼接。则有

$$|\mathrm{qh.str}(KQ)| = \prod_{i=1}^{l} \left|\mathrm{qh.str}\left(KQ^i\right)\right|.$$

3 主要结果

根据上一节的结果，接下来我们要计算箭图的路径代数上准遗传结构的数量



对某些整数 $s,t,u \geq 0$。作为一个备注，存在同构 $KQ(s,t,u) \cong KQ(s,u,t)$，特别地，$\mathrm{qh.str}(KQ(s,t,u)) = \mathrm{qh.str}(KQ(s,u,t))$。因此，不失一般性，我们可以假设 $t \geq u$。随后，Flores、Kimura 和 Rognerud 给出了以下公式。

命题 3.1（[2] 命题 5.6）。

$$\begin{aligned}|\mathrm{qh.str}(KQ(s,t,u))| = &\sum_{i=0}^{s}\left|\mathrm{qh.str}\left(\frac{KQ(s,t,u)}{\langle a_i\rangle}\right)\right| + \sum_{j=1}^{t}\left|\mathrm{qh.str}\left(\frac{KQ(s,t,u)}{\langle b_j\rangle}\right)\right| \\ &+ \sum_{k=1}^{u}\left|\mathrm{qh.str}\left(\frac{KQ(s,t,u)}{\langle b'_k\rangle}\right)\right| - \sum_{k=1}^{u}\sum_{j=1}^{t}\left|\mathrm{qh.str}\left(\frac{KQ(s,t,u)}{\langle b_i, b'_k\rangle}\right)\right|,\end{aligned}$$

其中 $\langle e\rangle$ 是双侧理想 $eKQ(s,t,u)e$，对任意幂等元 $e = a_i, b_j, b'_k$ 均成立。

现在我们发现存在同构

$$\begin{aligned}\frac{KQ(s,t,u)}{\langle a_i\rangle} &\cong KQ(s-i,0,0) \times KQ(i-1,t,u) \\ \frac{KQ(s,t,u)}{\langle b_j\rangle} &\cong KQ(0,t-j,0) \times KQ(s,j-1,u) \\ \frac{KQ(s,t,u)}{\langle b'_k\rangle} &\cong KQ(0,0,u-k) \times KQ(s,t,k-1) \\ \frac{KQ(s,t,u)}{\langle b_j, b'_k\rangle} &\cong KQ(0,t-j,0) \times KQ(0,0,u-k) \times KQ(s,j-1,k-1).\end{aligned}$$

我们用 $q(s,t,u)$ 表示 $|\mathrm{qh.str}(KQ(s,t,u))|$。由此得到命题 3.1 的以下等式。

引理 3.2。

$$\begin{aligned}q(s,t,u) = &c_s c_t c_u + \sum_{i=1}^{s} c_{s-i} q(i-1,t,u) + \sum_{j=1}^{t} c_{t-j} q(s,j-1,u) \\ &+ \sum_{k=1}^{u} c_{u-k} q(s,t,k-1) - \sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{u} c_{t-j} c_{u-k} q(s,j-1,k-1).\end{aligned}$$

利用这个等式，当箭图 Q 的底层图为 Dynkin 型 $\mathbb{A}$,$\mathbb{D}$ 或 $\mathbb{E}$ 时，可以得到数量 |qh.str(KQ)| 如下。

引理 3.3（[2] 引理 5.8、5.9、例 5.10）。以下结论成立。

$\mathbb{A}_n$： $q(n-1,\ 0,\ 0) = c_n$ 适用于 $n \geq 1$（定理 2.3）。$\mathbb{D}_n$： $q(n-3,\ 1,\ 1) = 2c_n - 3c_{n-1}$，$q(1,\ n-3,\ 1) = 3c_{n-1} - c_{n-2}$ 适用于 $n \geq 3$。$\mathbb{E}_6$： $q(1,\ 2,\ 2) = 106$，$q(2,\ 2,\ 1) = 130$。$\mathbb{E}_7$： $q(1,\ 3,\ 2) = 322$，$q(2,\ 3,\ 1) = 416$，$q(3,\ 2,\ 1) = 453$。$\mathbb{E}_8$： $q(1,\ 4,\ 2) = 1020$，$q(2,\ 4,\ 1) = 1368$，$q(4,\ 2,\ 1) = 1584$。

作为 上述结果的推广，我们将利用卡特兰数来描述 $q(1,t,u)$ 和 $q(s,t,1)$ s.

定理 3.4. 我们有如下等式

$$q(1,t,u) = (c_{t+2} - c_{t+1})(c_{u+2} - c_{u+1}) + c_{t+1}c_{u+1}.$$

证明。我们通过对 $t+u$ 使用归纳法来证明该等式成立。当 $t+u=0$ 时，等式成立，因为 $q(1,0,0) = c_2$。假设 $t+u \geq 1$，并且对于 $j+k < t+u$，有 $q(1,j,k) = (c_{j+2} - c_{j+1})(c_{k+2} - c_{k+1}) + c_{j+1}c_{k+1}$。那么我们有以下等式。

$$\begin{aligned}
q(1,t,u) =& c_1c_tc_u + c_1q(0,t,u) + \sum_{j=1}^{t} c_{t-j}q(1,j-1,u) \\
&+ \sum_{k=1}^{u} c_{u-k}q(1,t,k-1) - \sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{u} c_{t-j}c_{u-k}q(1,j-1,k-1) \\
=& c_tc_u + c_{t+1}c_{u+1} + \sum_{j=1}^{t} c_{t-j}((c_{j+1} - c_j)(c_{u+2} - c_{u+1}) + c_jc_{u+1}) \\
&+ \sum_{k=1}^{u} c_{u-k}((c_{t+2} - c_{t+1})(c_{k+1} - c_k) + c_{t+1}c_k) \\
&- \sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{u} c_{t-j}c_{u-k}((c_{j+1} - c_j)(c_{k+1} - c_k) + c_jc_k) \\
=& c_tc_u + c_{t+1}c_{u+1} + (c_{t+2} - 2c_{t+1})(c_{u+2} - c_{u+1}) + (c_{t+1} - c_t)c_{u+1} \\
&+ (c_{t+2} - c_{t+1})(c_{u+2} - 2c_{u+1}) + c_{t+1}(c_{u+1} - c_u) \\
&- (c_{t+2} - 2c_{t+1})(c_{u+2} - 2c_{u+1}) + (c_{t+1} - c_t)(c_{u+1} - c_u) \\
=& c_{t+2}c_{u+2} - c_{t+2}c_{u+1} - c_{t+1}c_{u+2} + 2c_{t+1}c_{u+1} \\
=& (c_{t+2} - c_{t+1})(c_{u+2} - c_{u+1}) + c_{t+1}c_{u+1}.
\end{aligned}$$

□

为了计算 $q(s,t,1)$，我们使用以下公式。由于下文中的 (3) 可能未见于文献，现给出其证明。

引理 3.5. 我们有以下等式。

(1) $\frac{t+2}{2}c_{t+1} = (2t+1)c_t$。

(2) $\sum_{k=0}^{t} c_k c_{t-k} = c_{t+1}$。

(3) $\sum_{k=0}^{t} k c_k c_{t-k} = \frac{t}{2}c_{t+1}$。

证明。(1)、(2) 这些等式是众所周知的。(3) 有等式

$$\sum_{k=0}^{t} k c_k c_{t-k} = \sum_{k=0}^{t} (t-k) c_{t-k} c_k.$$

另一方面,

$$\sum_{k=0}^{t} k c_k c_{t-k} + \sum_{k=0}^{t} (t-k) c_{t-k} c_k = \sum_{k=0}^{t} t c_k c_{t-k} = t c_{t+1}.$$

因此我们得出 $\sum_{k=0}^{t} k c_k c_{t-k} = \frac{t}{2}c_{t+1}$。 □

定理 3.6。我们有等式

$$q(s,t,1) = (t+1)c_{s+t+2} - 3t c_{s+t+1} - \sum_{k=0}^{t-2} (k+1) c_{t-k-1} c_{s+k+2}.$$

证明。我们通过对 $s+t$ 使用归纳法来证明该陈述。对于 $s+t=0$，我们有 $q(0,0,1) = c_2$。接下来，我们假设 $s+t \geq 1$。对于满足 $0 \leq k \leq j$ 的整数 j、k，我们定义

$$\alpha_k^j = \begin{cases} j+1 & (k=j) \\ -3j & (k=j-1) \\ -(k+1)c_{j-k-1} & (0 \leq k \leq j-2). \end{cases}$$

于是，根据归纳假设，我们可以将 $q(i,j,1) = \sum_{k=0}^{j} \alpha_k^j c_{i+k+2}$ 写作 $i+j < s+t$。因此有以下等式。

$$\begin{aligned}
& q(s,t,1) \\
=& c_s c_t c_1 + \sum_{i=1}^{s} c_{s-i} q(i-1,t,1) + \sum_{j=1}^{t} c_{t-j} q(s,j-1,1) + c_0 q(s,t,0) - \sum_{j=1}^{t} c_{t-j} c_0 q(s,j-1,0) \\
=& c_s c_t + \sum_{k=0}^{t} \alpha_k^t \sum_{i=1}^{s} c_{s-i} c_{i+k+1} + \sum_{j=1}^{t} \sum_{k=0}^{j-1} \alpha_k^{j-1} c_{t-j} c_{s+k+2} + c_{s+t+1} - \sum_{j=1}^{t} c_{t-j} c_{s+j} \\
=& c_t c_s + \sum_{k=0}^{t} \alpha_k^t (c_{s+k+2} - \sum_{i=0}^{k+1} c_{s+i} c_{-i+k+1}) + \sum_{k=0}^{j-1} (\sum_{j=1}^{t} \alpha_k^{j-1} c_{t-j}) c_{s+k+2} + c_{s+t+1} - \sum_{j=1}^{t} c_{t-j} c_{s+j} \\
=& c_t c_s + \sum_{k=0}^{t} \alpha_k^t c_{s+k+2} - \sum_{i=0}^{k+1} (\sum_{k=0}^{t} \alpha_k^t c_{-i+k+1}) c_{s+i} + \sum_{k=0}^{j-1} (\sum_{j=1}^{t} \alpha_k^{j-1} c_{t-j}) c_{s+k+2} + c_{s+t+1} - \sum_{j=1}^{t} c_{t-j} c_{s+j}.
\end{aligned}$$

我们关注最后一个表达式中 c_{s+l} 的系数。显然，对于 $l<0$ 或 $l>t+2$，c_{s+l} 的系数为零。对于 $0 \leq l \leq t+2$，c_{s+l} 的系数可如下求得。

c_{s+t+2}： $\alpha_t^t = t+1$。

c_{s+t+1}： $\alpha_{t-1}^t - \alpha_t^t c_0 + \alpha_{t-1}^{t-1} c_0 + 1 = -3t$。

c_{s+t}： $\alpha_{t-2}^t - \alpha_{t-1}^t c_0 - \alpha_t^t c_1 + \alpha_{t-2}^{t-1} c_0 + \alpha_{t-2}^{t-2} c_1 - c_0 = -t+1$.

对于 $2 \le l < t$，有c_{s+l}： $\alpha_{l-2}^t - \sum_{k=l-1}^{t} \alpha_k^t c_{-l+k+1} + \sum_{j=l-1}^{t} \alpha_{l-2}^{j-1} c_{t-j} - c_{t-l}$。为考察这一点，我们注意到以下内容。

$$\sum_{k=l}^{t} \alpha_k^t c_{-l+k+1} = \sum_{j=l-1}^{t-1} \alpha_{l-2}^{j-1} c_{t-j}.$$

事实上，

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=l}^{t} \alpha_k^t c_{-l+k+1} - \sum_{j=l-1}^{t-1} \alpha_{l-2}^{j-1} c_{t-j} \\
=&(t+1)c_{t-l+1} - 3tc_{t-l} - \sum_{k=l}^{t-2} (k+1) c_{t-k-1} c_{k-l+1} \\
&- (l-1)c_{t-l+1} + 3(l-1)c_{t-l} + \sum_{j=l+1}^{t-1} (l-1) c_{j-l} c_{t-j} \\
=&(t-l+2)c_{t-l+1} - 3(t-l+1)c_{t-l} - \sum_{k=1}^{t-l-1} (k+l) c_{t-k-l} c_k + \sum_{j=1}^{t-l-1} (l-1) c_j c_{t-j-l} \\
=&(t-l+2)c_{t-l+1} - 3(t-l+1)c_{t-l} - \sum_{k=1}^{t-l-1} (k+1) c_{t-k-l} c_k \\
=&(t-l+2)c_{t-l+1} - 3(t-l+1)c_{t-l} - \left(\frac{t-l+2}{2} c_{t-l+1} - (t-l+2)c_{t-l} \right) \\
=&\frac{t-l+2}{2} c_{t-l+1} - (2t-2l+1)c_{t-l} \\
=&(2(t-l)+1)c_{t-l} - (2t-2l+1)c_{t-l} \\
=&0.
\end{aligned}$$

因此我们得出，对于 $2 \le l < t$， c_{s+l} 的系数等于

$$\begin{aligned}
&\alpha_{l-2}^t - \sum_{k=l-1}^{t} \alpha_k^t c_{-l+k+1} + \sum_{j=l-1}^{t} \alpha_{l-2}^{j-1} c_{t-j} - c_{t-l} \\
=&\alpha_{l-2}^t - (\alpha_{l-1}^t + \sum_{k=l}^{t} \alpha_k^t c_{-l+k+1}) + (\alpha_{l-2}^{t-1} + \sum_{j=l-1}^{t-1} \alpha_{l-2}^{j-1} c_{t-j}) - c_{t-l} \\
=&\alpha_{l-2}^t - \alpha_{l-1}^t + \alpha_{l-2}^{t-1} - c_{t-l} \\
=&-(l-1)c_{t-l+1}.
\end{aligned}$$

c_{s+1}： $-\sum_{k=0}^{t}\alpha_k^t - c_{t-1}$。这等于

$$\begin{aligned}
-\sum_{k=0}^{t}\alpha_k^t - c_{t-1} &= -(t+1)c_t + 3tc_{t-1} + \sum_{k=0}^{t-2}(k+1)c_{t-k-1}c_k - c_{t-1} \\
&= -(t+1)c_t + 3tc_{t-1} + \frac{t+1}{2}c_t - tc_{t-1} - c_{t-1} \\
&= -\frac{t+1}{2}c_t + 2tc_{t-1} - c_{t-1} \\
&= -(2t-1)c_{t-1} + (2t-1)c_{t-1} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

c_s： $c_t - \sum_{k=0}^{t}\alpha_{k+1}^t$。这等于

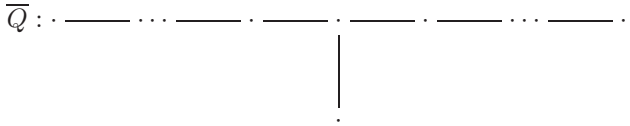
$$\begin{aligned}
c_t - \sum_{k=0}^{t}\alpha_{k+1}^t &= c_t - (t+1)c_{t+1} + 3tc_t + \sum_{k=0}^{t-2}(k+1)c_{t-k-1}c_{k+1} \\
&= c_t - (t+1)c_{t+1} + 3tc_t + \frac{t}{2}c_{t+1} - tc_t \\
&= -\frac{t+2}{2}c_{t+1} + (2t+1)c_t \\
&= -(2t+1)c_t + (2t+1)c_t \\
&= 0.
\end{aligned}$$

对上述等式求和，得到

$$q(s,t,1) = (t+1)c_{s+t+2} - 3tc_{s+t+1} - \sum_{k=0}^{t-2}(k+1)c_{t-k-1}c_{s+k+2},$$

如所需。 □

注 3.7。考虑一个箭图 Q，其底层图 $\overline{Q}$ 与 $Q(1,t,u)$ 和$Q(s,t,1)$ 的底层图相同，即



那么，根据引理 2.2、定理 2.5 以及我们的结果，可以利用卡特兰数描述 $|\mathrm{qh.str}(KQ)|$。

参考文献

[1]V. Dlab 和 C. M. Ringel。《拟遗传代数》。《伊利诺伊数学杂志》，33(2):280–291，1989。

[2] M. Flores、Y. Kimura 和 B. Rognerud。《拟遗传结构的组合学》。《组合理论杂志》A辑，187:105559，2022。