arXiv:2302.00846v1 [q-fin.CP] 2 Feb 2023

限价订单簿的时变马尔可夫模型

Jonathan A. Ch´avez-Casillas*[1]

[1]罗德岛大学数学与应用数学科学系

2022年2月18日

摘要

本文研究一种允许速率随时间变化的限价订单簿马尔可夫模型。为理解限价订单簿微观模型如何收敛到比具有常数系数的布朗运动更一般的扩散过程，本文提出了一个简单的时变模型。本文所研究的模型首先描述了支配各类订单到达的过程，例如限价单、市价订单和撤单。因此，这属于微观模型，而非“中观”模型；后者通常以描述价格变动发生时刻的点过程为起点，并将有关单笔订单到达的所有信息汇总其中。此外，本文还开展了若干实证研究，以进一步考察模型假设的有效性，并验证某些股票的价格过程是否满足收敛到更复杂扩散过程的条件。

关键词： 限价订单簿、价格过程、扩散近似、时间依赖 y

1 引言

过去几十年来，交易市场的发展取得了长足进步。这种发展的主要推动力之一，是快速发展的技术的创造与应用。过去，流动性由所谓的做市商提供，他们汇集所有市场参与者的买卖订单，并据此设定买卖报价。尽管这种传统方式普遍为人们接受（主要是因为缺乏其他选择），但也因做市商可能存在偏见及利益冲突而受到批评。如今，大多数交易所都采用完全自动化的平台，即电子通信网络（ECN）。这些电子通信网络支持连续双向拍卖交易机制，无需做市商或中介来撮合交易双方。电子通信网络管理的拍卖之所以称为“连续双向”拍卖，是因为交易者可以随时提交买入报价（即买入订单）和卖出报价（即卖出订单）。电子通信网络大幅提高了交易速度，从提交订单到订单成交只需几毫秒。

买入限价订单（相应地，卖出限价订单）指定了交易者希望买入（相应地，卖出）某种资产的数量和价格。限价订单簿由所有交易者提交的限价单组成。尚未成交的限价单存储在订单簿中的不同队列内。这些队列按价格和类型（买入或卖出）排序。最低卖价与最高买价之间的差额称为买卖价差。

限价单的对应方是市价订单，交易者可以通过市价订单以当前最优价格买入或卖出。限价单不会立即触发交易，而市价订单则会立即执行。从这个意义上说，限价单会在限价订单簿两侧累积，形成并扩大队列规模；市价订单则会从当前最优价格处移除限价单。有时，知情交易者会被认为是下市价订单的交易者，而非知情交易者则被认为是下限价单的交易者，但这种看法与事实不符，因为许多最成功的对冲基金都广泛使用限价单（参见 Bouchaud 等（2009））。

*jchavezc@uri.edu. ORCiD：0000-0002-8494-7538

除了限价单和市价订单，限价订单撤单也是一种常见操作。撤单的基本含义是，交易者不再愿意以指定价格买入或卖出。撤单在订单簿的各类操作中占很大比例，部分原因是高频交易的引入和发展（参见 Harris（2003））；在高频交易中，限价单和撤单的到达间隔时间以毫秒计（参见 Cont 和 de Larrard（2013））。

限价订单簿的一个重要特征是，交易者可以选择提交限价单或市价订单。限价单最大的优点是有可能以比市价订单更优惠的价格成交，但缺点是存在永远无法成交的风险。相反，市价订单的成交价格绝不会优于最佳买价或最佳卖价，但其成交确定且即时。通常，买卖价差可以视为衡量买入或卖出标的资产时，为确定性和即时性所付代价的指标。

从建模角度来看，有时识别能够参与市场的不同类型交易者十分重要。正如 Foucault 等（2003）所述，限价订单簿使交易者能够立即获得流动性，同时也允许其他交易者向日后需要流动性的人提供流动性。在交易所，大多数交易者会结合使用限价单和市价订单，根据自身需求及订单簿的当前状态制定交易策略。然而，概括而言，正如 Foucault 等（2003）详细阐述的那样，采用短期策略的交易者，如套利者、技术交易者和指数交易者，更倾向于提交市价订单；而采用长期策略的交易者，如投资组合经理，则会提交限价单。

正如 Gould 等（2013）指出的，理解限价订单簿的动态有许多实际优势。例如，可以更清楚地了解在特定市场情形下如何采取最佳行动（参见 Harris 和 Hasbrouck（1996））、制定最优订单执行策略（Obizhaeva 和 Wang（2013）、Law（2015）、Cartea 和 Jaimungal（2015））、尽量减少市场冲击（Eisler 等（2012））；设计更出色的电子交易算法（Engle 等（2006）），以及评估市场稳定性（Kirilenko 等（2011））。

由于限价订单簿十分复杂，将其视为动力系统时，任何建模尝试都需要作出大量假设。其中最重要的假设之一，是订单流随时间演变的方式。Cont 等（2010）提出的模型是连续时间下对完整限价订单簿进行建模的开创性研究之一。这是一个零智能模型，其中订单流遵循相互独立的泊松过程，其速率参数取决于订单类型、与买卖价差的距离以及订单簿状态。作者借助这一模型，试图理解某些事件的发生频率如何取决于订单簿状态。该模型的另一个重要特点是，限价单的到达采用幂律分布，且分布取决于其相对价格；这一设定与经验观测吻合良好。

为了简化订单簿的动力学，并根据订单流的控制参数估算波动率，Cont 和 de Larrard（2013）提出了一种模型，只追踪订单簿的第一级，而非整个 LOB。当这个简化的一级订单簿任一侧的订单耗尽时，假设下一档最优价格上的可用订单数量服从分布 f on $\mathbb{N}^2$，且买卖价差始终保持为 1 个最小价格变动单位。作者为这一简化框架给出的理由是，许多交易者只能看到最优价格上的深度，而且在流动性充足的市场中，买卖价差为 1 的时间比例通常超过 97%。在该模型中，限价单、市价单和撤单的到达均被建模为相互独立的泊松过程。这种方法的优点之一是，只需依据泊松过程的参数和深度分布f，便能解析地估算波动率、至下一次价格变化的时间分布、价格变化的分布及自相关，以及给定订单簿当前状态时价格朝特定方向变动的条件概率等感兴趣的量。

正如 Ch´avez-Casillas 等人（2019年）所指出的，Cont 和 de Larrard（2013）提出的模型的主要缺陷之一，是假设限价单、市价单和撤单均以齐次泊松过程到达。为改进这一假设，Ch´avez-Casillas 等人（2019年）假设所有订单均以非齐次泊松过程到达；但与 Cont 和 de Larrard（2013）的模型不同，驱动这些订单到达的随机时钟在价格变动后不会重置。事实上，这个标示新订单到达的随机时钟从不重置；模型采用周期性假设，而非重置时钟。也就是说，假设每周、每天或每隔某个给定时间段，标示订单到达的各过程的强度都相同。尽管这种方法适合分析介观时间尺度下订单簿的行为，但研究并未讨论价格变动之间到达间隔时间的分布性质及其对价格过程重交通近似的影响；本研究旨在探讨这些问题，并进行相应的实证数据分析。

通过分析到达间隔时间的分布性质，并允许决定其发生时刻的点过程强度随时间变化，可以发现，在某些情况下，价格过程长期动态中的波动率包含一个随时间变化的成分。这是对相关研究的一项新改进，旨在从微观价格形成时间尺度进行建模时，使订单簿的宏观价格动态能够以比恒定波动率布朗运动更一般的过程来描述。事实上，现有文献中，大多数从订单到达方式入手、研究宏观价格形成的模型，最终都得出价格过程是具有恒定波动率的布朗运动这一结论。本文旨在探讨如何扩展这类模型，使其极限价格过程收敛到更一般的扩散过程。

本文的目标之一，是分析在不同情形下，如何从微观尺度对价格过程建模。所谓微观尺度，是指从单笔订单的到达开始构建模型，而非从介观尺度出发；后者以价格变化的到达为基准，并将单笔订单到达所提供的全部信息汇总起来，直至价格变动发生。这会带来更复杂的动力学，而文献中考虑构建自下而上的估计和模型的研究为数不多。本文的目标之一，是拓展现有文献，并通过实证研究检验模型假设是否成立；同时，本文也希望为构建更复杂的模型迈出第一步。这类模型从微观尺度出发，能够给出相应条件，使价格过程的长期动态呈现比具有恒定波动率的简单布朗运动更复杂的结构。

本文结构如下。第2节将详细介绍限价订单簿模型及其相应假设。第3节将根据价格变化之间的时间间隔的尾部行为，分析模型的分布性质以及价格过程的长期动态。第4节将介绍并分析本文的六个研究案例。最后，第5节总结全文，并探讨进一步的研究方向，尝试将基于微观价格动态建模的价格过程推广开来。

2 模型描述

本文以 Cont 和 de Larrard（2013）提出的模型为框架，讨论一种一级限价订单簿模型。然而，与该模型不同的是，描述限价单到达的点过程采用随时间变化的周期性速率，该速率与描述市价订单和撤单到达的速率成正比。

接下来的段落将介绍该订单簿模型的建模假设及其一些基本动力学。首先，如前所述，模型仅考虑两侧的最优档位及其对应的规模。此假设是合理的，因为正如 Cont 和 de Larrard（2013）所指出的，订单簿中的大多数操作都发生在一级。此外，在此意义上，假设订单簿的跳动单位为 1，因为对于第 4 节所考察的股票，买卖价差有超过 90% 的时间处于 1 个最小价格变动单位以内。

一个更具争议、并计划在后续研究中放宽的假设，是这些模型中的经典假设：订单量也为单位量。由于本文提出的模型受 Cont 和 de Larrard（2013）提出的原始模型启发，因此保留了相同的假设，但作者希望放宽这一假设。然而，与原始模型不同，为了建立更贴近现实的假设，订单簿买方和卖方的限价单分别按照强度为 λ_t^b 和 λ_t^a 的非齐次泊松过程 L_t^b 和 L_t^a 独立到达。类似地，订单簿买方和卖方的市价单与撤单分别按照强度为 μ_t^b 和 μ_t^a 的非齐次泊松过程 M_t^b 和 M_t^a 独立到达。请注意，在该模型中，限价单会增加队列规模，而市价单和撤单都会减少队列规模，因此后两者合并为一个过程；鉴于我们假设所有订单的量均为单位量，这种处理是自然的。此外，假设过程 L_t^a，L_t^b，M_t^a 和 M_t^b 两两独立。

最后，将描述每次发生价格变动时的情况。实际上，每当买方队列或卖方队列耗尽时，就会发生价格变动。如果买方耗尽，价格就会下跌；如果卖方队列耗尽，价格就会上涨。发生价格变动后，将根据两个新队列规模的分布来考察订单簿的深度。也就是说，价格变动后，买价和卖价都会上调一个最小价格变动单位，并从某个分布中重新抽取两个队列的规模 $f \in \mathbb{N}^2$。

3 到达间隔时间与价格过程的分布性质

对于该模型，假设每次价格变动后，标记订单簿中新订单到达或撤单的时钟都会重置；也就是说，在这些过程的到达之间重置。因此，若 $\tau_n, n \geq 1$ 表示第 $(n-1)-$ 次与第 $n-$ 次价格变动之间的到达间隔时间，那么序列 $\{\tau_n\}_{n\geq 1}$ 将成为一个独立样本。

为了准确描述价格变化之间到达间隔时间的分布，下面先介绍一些全文通用的记号。设 $\{(a_n, b_n)\}_{n\geq 1}$ 是由分布 $f \in \mathbb{N}^2$生成的独立随机变量序列。它们分别表示第 $n-$ 次价格变化之后，订单簿买方和卖方的初始订单数量。对于 $t \geq 0$，再设 $\{X^{(n)}_{x_{n-1}}(t)\}_{n\geq 1}$ 和 $\{Y^{(n)}_{y_{n-1}}(t)\}_{n\geq 1}$ 是两个相互独立的一维正半轴连续时间随机游走族，以其起点为参数化变量；也就是说，对任意 $n \in \mathbb{N}$， $X^{(n)}_{x_{n-1}}(0) = x_{n-1}$，且 $Y^{(n)}_{y_{n-1}}(0) = y_{n-1}$，其生成元 $\mathscr{L}^{(X,n)}_t$ 和 $\mathscr{L}^{(Y,n)}_t$ 分别为

$$\mathscr{L}^{(X,n)}_t(i,j) = \mathscr{L}^{(Y,n)}_t(i,j) := \begin{cases} 0 & \text{if} \quad i = 0,\ j \geq 0, \\ \mu_t & \text{if} \quad 1 \leq i,\ j = i-1, \\ \lambda_t & \text{if} \quad 1 \leq i,\ j = i+1, \\ -(\lambda_t + \mu_t) & \text{if} \quad 1 \leq i,\ j = i, \\ 0 & \text{if} \quad |i-j| > 1 \end{cases} \tag{1}$$

请注意，对于生成元为 $\mathscr{L}^{(X,\bullet)}_t$ 或 $\mathscr{L}^{(Y,\bullet)}_t$ 的任意马尔可夫链，0 都是一个吸收态。当链到达吸收点 0 时，这称为灭绝。

设 $\sigma^{(X,n)}_{x_{n-1}}$ 和 $\sigma^{(Y,n)}_{y_{n-1}}$ 分别为独立马尔可夫链 $X^{(n)}_{x_{n-1}}(t)$ 和 $Y^{(n)}_{y_{n-1}}(t)$ 的灭绝时间。此外，令 $\tau_0 := 0$，并令 $\tau_n := \min\left(\sigma^{(n)}_{x_{n-1}}, \sigma^{(n)}_{y_{n-1}}\right)$。

订单簿的动力学可描述如下。令 $q_t = (q^b_t, q^a_t)$ 表示时间 t 时买卖订单的数量，其中 (x_0, y_0) 为订单簿两侧的初始订单数量，即 $q_0 = (x_0, y_0)$。对于 $0 \leq t < \tau_1$，定义 $q_t := (X^{(1)}_{x_0}(t)\ Y^{(1)}_{y_0}(t))$，因此， τ_1 是首次发生价格变动的时间。在时间 τ_1，两个队列均移动一个最小价格变动单位（若卖方队列耗尽则向右移动，若买方队列耗尽则向左移动）。随后将卖方队列和买方队列的规模设为 (x_2, y_2)（其取值来自分布 $f \in \mathbb{N}^2$），并将 q_{τ_1} 定义为 (x_1, y_1)。此外，对于 $\tau_1 \leq t < \tau_2$，将 q_t 定义为 $(X^{(2)}_{x_1}(t)\ Y^{(2)}_{y_1}(t))$，此后过程继续。为简化记号，我们分别用 σ^n_a 和 σ^n_b 表示随机变量 $\sigma^{(X,n)}_{x_{n-1}}$ 和 $\sigma^{(Y,n)}_{y_{n-1}}$。

3.1 价格变动之间到达间隔时间的分布 s

由于首次价格变动前订单簿的卖方和买方彼此独立，要分析 τ_1 的分布，只需研究订单簿的一方，例如卖方。在这种情况下， $\mathbb{P}[\sigma^1_a > t]$ 的显式公式由以下结果给出，其证明见附录 A。

命题 3.1. *Let q^a_t be the process defined above starting at x, that is, the Markov process with generator given by Equation 1 such that $q^a_0 = x$. Fix any $T > 0$ and let $\bar{u}(t,z) : \mathbb{R}_+ \times (\mathbb{N} \cup \{0\}) \to \mathbb{R}$ be a bounded function such that $t \mapsto \bar{u}(t,x)$ is $C_1(\mathbb{R})$ for all x and $(t,x) \mapsto \partial\bar{u}(t,z)/\partial t$ is bounded and satisfies the conditions:*

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \mathscr{L}_r\right)\bar{u}(T-r,z) = 0 \quad \textit{for} \quad 0 < r < T,\ z \in \mathbb{N}. \\ \bar{u}(T-r,0) = 0 \quad \textit{for} \quad 0 \leq r < T. \\ \bar{u}(0,z) = 1 \quad \textit{for} \quad z \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{2}$$

Then,

$$\bar{u}(T,x) = \mathbb{P}[\sigma^1_a(x) > T],$$

where $\sigma^1_a = \text{无穷}\{t > 0 \mid q^a_t = 0\}$.

首先，我们将对速率 λ_t 和 μ_t 的行为作出一些假设。

假设 1： 存在一个函数 $\alpha_t : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$，使得对于某些正数 λ 和μ,

$$\lambda_t = \lambda\alpha_t \qquad \text{and} \qquad \mu_t = \lambda\alpha_t \tag{3}$$

令 $\mathcal{H}_t$ 表示描述假设 1 下队列大小动力学的马尔可夫过程的生成元，即，

$$\mathcal{H}_t(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad i=0,\ j\geq 0, \\ \mu\alpha_t & \text{if} \quad 1\leq i,\ j=i-1, \\ \lambda\alpha_t & \text{if} \quad 1\leq i,\ j=i+1, \\ -(\lambda\alpha_t+\mu\alpha_t) & \text{if} \quad 1\leq i,\ j=i, \\ 0 & \text{if} \quad |i-j|>1. \end{cases} \tag{4}$$

在 速率为常数的情形下，也就是说，在上述假设 1 中， $\alpha_t \equiv 1$，生成 r $\mathscr{A}_t$ 给定 在方程1中化简为

$$\mathcal{Q}(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad i=0,\ j\geq 0, \\ \mu & \text{if} \quad 1\leq i,\ j=i-1, \\ \lambda & \text{if} \quad 1\leq i,\ j=i+1, \\ -(\lambda+\mu) & \text{if} \quad 1\leq i,\ j=i, \\ 0 & \text{if} \quad |i-j|>1. \end{cases} \tag{5}$$

在继续之前，我们先如下定义价格变动之间的到达间隔时间。对于$\bullet \in \{a,b\}$，令 $\sigma^1_{\bullet,\mathcal{Q}}$ 为第3节所述马尔可夫过程的灭绝时间，其中$\mathscr{L}_{(X,n)\,t}(i,j) = \mathscr{L}_{(Y,n)\,t}(i,j) = \mathcal{Q}(i,j)$。以同样的方式定义到达间隔时间序列 $\{\tau^n_{\mathcal{Q}}\}_{n\geq 0}$ 以及队列过程 $q_{t,\mathcal{Q}} := (q^a_{0,\mathcal{Q}}, q^b_{0,\mathcal{Q}})$。

类似地，对于 $\bullet \in \{a,b\}$，令 $\sigma^1_{\bullet,\mathcal{H}}$ 为第3节中所述马尔可夫过程的灭绝时间，其中 $\mathscr{L}_{(X,n)\,t}(i,j) = \mathscr{L}_{(Y,n)\,t}(i,j) = \mathcal{H}_t(i,j)$。以同样的方式定义到达间隔时间序列 $\{\tau^n_{\mathcal{H}}\}_{n\geq 0}$ 以及队列过程 $q_{t,\mathcal{H}} := (q^a_{0,\mathcal{H}}, q^b_{0,\mathcal{H}})$。

下面的引理给出了$\sigma^1_{a,\ \mathcal{Q}}$的分布。

引理 3.2. *For the difference operator $\mathcal{Q}$ given by (5), a solution to the initial value probl em*

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial r}+\mathcal{Q}\right)\bar{u}(T-r,z) = 0 \quad \textit{for} \quad 0<r<T,\ z\in\mathbb{N}. \\ \bar{u}(T-r,0) = 0 \quad \textit{for} \quad 0\leq r<T. \\ \bar{u}(0,z) = 1 \quad \textit{for} \quad z\in\mathbb{N}. \end{cases} \tag{6}$$

is given by the function

$$\bar{u}_{\mathcal{Q}}(T,x) = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{x/2} \int_T^\infty \frac{x}{s} I_x\left(2s\sqrt{\lambda\mu}\right) e^{-s(\lambda+\mu)} ds, \tag{7}$$

wher$^{e\ I_\nu(\ \cdot)}$ is the modified Bessel function of the first kind Consequently, $\mathbb{P}[\sigma^1_{a,\mathcal{Q}} > T] = \bar{u}_{\mathcal{Q}}(T,\ x)$.

Proof. 当 $\mathscr{L}_t \equiv \mathcal{Q}$ 时，该模型简化为 Cont 和 de Larrard（2013）中考虑的情形。因此，结论可由其中的命题 1 得出。 □

分析 $\sigma^1_{a,\ \mathcal{Q}}$ 生存分布的尾部行为十分重要。以下引理（证明见附录 A）确立了这一行为。

引理 3.3。 *Let $\mathcal{C} = (\sqrt{\mu} - \sqrt{\lambda})^2$. Then, for a sufficiently large T,*

$$\mathbb{P}[\sigma^1_{a,\mathcal{Q}} > T \mid q^a_0 = x] \sim \begin{cases} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{x/2} \frac{x}{\mathcal{C}\sqrt{\pi\sqrt{\lambda\mu}}} \frac{e^{-T}}{T^{1/2}} & \textit{if} \quad \lambda<\mu \\ \frac{x}{\lambda\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{T}} & \textit{if} \quad \lambda=\mu \end{cases}$$

Consequently, as expected, if $\lambda=\mu$, $\mathbb{E}[\sigma^1_{a,\mathcal{Q}}] = \infty$, whereas if $\lambda<\mu$, for every $k\in\mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}\left[\left(\sigma^1_{a,\mathcal{Q}}\right)^k\right] < \infty.$$

Remark 3.4. 注意，如果 $\lambda=\mu$，引理 3.3 中的结果与 Cont 和 de Larrard（2013）式 (6) 中得到的结果一致。然而，如果 $\lambda<\mu$，Cont 和 de Larrard（2013）式 (5) 表明

$$\mathbb{P}[\sigma^1_{a,\mathcal{Q}} > T \mid q^a_0 = x] \sim \frac{x(\lambda+\mu)}{2\lambda(\mu-\lambda)} \frac{1}{T},$$

这是不正确的，因为众所周知，当生灭过程的死亡速率大于出生速率时，其灭绝时间 $\sigma^1_{a,\ \mathcal{Q}}$ 的各阶矩均存在（一个简单的验证方法是使用 Cont 和 de Larrard（2013）中命题 1 计算的矩母函数（MGF），并注意到，如果 $\lambda<\mu$，那么该 MGF 在 0 附近的一个开区间内有定义（参见 Billingsley（1995）[第 21] 节）。

引理 3.2 可以在速率彼此成比例时（如假设 1 所述），为 $\sigma^1_{a,\ \mathcal{H}}$ 的分布导出一个闭式公式。以下命题给出了该公式，其证明推迟至附录 A。

命题 3.5. *Under Assumption 1, for $A_t = \int_0^t \alpha_s ds$, the distribution of $\sigma^1_{a,\ \mathcal{H}}$ is given by*

$$\mathbb{P}[\sigma^1_{a,\mathcal{H}} > T |\ q^a_0 = x] = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{x/2} \int_{A_T}^{\infty} \frac{x}{s} I_x\left(2s\sqrt{\lambda\mu}\right) e^{-s(\lambda+\mu)} ds,$$

where $I_\nu(\cdot)$ is the modified Bessel function of the first kind.

Remark 3.6. 引理 3.2 和命题 3.5 意味着

$$\mathbb{P}[\sigma^1_{a,\mathcal{H}} > T |\ q^a_0 = x] = \mathbb{P}[\sigma_{a,\mathcal{Q}} > A_T |\ q^a_0 = x].$$

这意味着，在当前模型中，价格变化间隔时间的分布与 Cont 和 de Larrard（2013）提出的模型中价格变化到达间隔时间的分布相当。

最后，我们给出首次价格变动时间的分布。

推论 3.7. *Under Assumption 1, for $A_t = \int_0^t \alpha_s ds$, the distribution of $\tau^1_{\mathcal{H}}$ is given by*

$$\mathbb{P}[\tau^1_{\mathcal{H}} > T \mid q^a_0 = x, q^b_0 = y] = \mathbb{P}[\sigma^1_{a,\mathcal{H}} > T |\ q^a_0 = x]\mathbb{P}[\sigma^1_{a,\mathcal{H}} > T |\ q^a_0 = y],$$

where using the formula in proposition 3.5.

Proof. 该结果由以下事实、引理 3.5 以及 $\sigma^n_{a,\mathcal{H}}$ 与 $\sigma^n_{b,\mathcal{H}}$ 之间的独立性得出：$\tau^n_{\mathcal{H}} = \sigma^n_{a,\mathcal{H}} \wedge \sigma^n_{\mathcal{H},b}$。

□

现在给出 $\tau^1_{\mathcal{H}}$ 的生存分布函数的渐近行为，其证明见附录 A。

引理 3.8。 *Let $\mathcal{C} = (\sqrt{\mu} - \sqrt{\lambda})^2$. Then,*

$$\mathbb{P}\left[\tau^1_{\mathcal{H}} > T \;\middle|\; q^a_0 = x, q^b_0 = y\right] \sim \begin{cases} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{(x+y)/2} \frac{xy}{\pi \mathcal{C}^2 \sqrt{\lambda\mu}} \frac{\exp(-2A_T\mathcal{C})}{A_T} & \text{if} \quad \lambda < \mu \\ \dfrac{xy}{\lambda^2 \pi} \dfrac{1}{A_T} & \text{if} \quad \lambda = \mu \end{cases}$$

Moreover, if

- $\alpha_t \sim t^s$以^{m}为底的对数（t） *as $t \to \infty$ for some $s \neq -1$, $m \geq 0$, and $n \in \mathbb{N}$,*

$$\mathbb{E}\left[\left(\tau^1_{\mathcal{H}}\right)^n \;\middle|\; q^a_0 = x, q^b_0 = y\right] \begin{cases} < \infty & \text{if} \quad \lambda < \mu \\ < \infty & \text{if} \quad \lambda = \mu \text{ and } n < s+1 \\ = \infty & \text{if} \quad \lambda = \mu \text{ and } n \geq s+1 \end{cases}$$

- *$\alpha_t \sim k/t$ as $t \to \infty$ for some $k > 0$,*

$$\mathbb{E}\left[\left(\tau^1_{\mathcal{H}}\right)^n \;\middle|\; q^a_0 = x, q^b_0 = y\right] \begin{cases} < \infty & \text{if} \quad n < 2k\mathcal{C} \text{ and } \lambda < \mu \\ = \infty & \text{if} \quad n \geq 2k\mathcal{C} \text{ and } \lambda < \mu \\ = \infty & \text{if} \quad \lambda = \mu \end{cases}$$

3.2 价格过程的长期动态

我们感兴趣的是分析截至时间 t 的价格变化次数的渐近行为。也就是说，描述

$$N^\bullet_t := \max\{n > 0 \mid \tau^1_\bullet + \tau^2_\bullet + \ldots + \tau^n_\bullet \leq t\}, \tag{8}$$

其中，$\tau^n_{\mathcal{Q}}$ 和 $\tau^n_{\mathcal{H}}$ 如上所定义 .

下一个命题的证明将在附录 A 中给出。该命题提供了一个表达式，用来关联模型中价格变化之间等待时间的部分和的分布，其生成元为 $\mathcal{H}_t$ 和 $\mathcal{Q}$。

命题 3.9。 *Let $S^n_{\mathcal{H}} := \tau^1_{\mathcal{H}} + \tau^2_{\mathcal{H}} + \ldots + \tau^n_{u\mathcal{H}}$ and $S^n_{\mathcal{Q}} := \tau^1_{\mathcal{Q}} + \tau^2_{\mathcal{Q}} + \ldots + \tau^n_{\mathcal{Q}}$. Then,*

$$\mathbb{P}[S^n_{\mathcal{H}} \leq t] = \mathbb{P}[S^n_{\mathcal{Q}} \leq A_t],$$

where $A_t = \int_0^t \alpha_s ds$ in accordance with Assumption 1.

以下结果给出了价格过程的收敛性。为便于阐述，我们将其分为 $\lambda < \mu$ 和 $\lambda = \mu$ 两种情况。

定理 m 3.10. *Assume $\lambda < \mu$ and let $\mathcal{C} = (\sqrt{\mu} - \sqrt{\lambda})^2$. Then, under Assumption 1, for $A_t = \int_0^t \alpha_s ds$,*

- *If $\frac{\alpha_t}{t^s} \to \widetilde{K}$ with $s \neq -1$ or if $\frac{\alpha_t}{t^{-1}} \to K$ as $t \to \infty$, with $2\mathcal{C}K > 1$, the rescaled price process converges and for the sequence $t_n = nt$ and a constant σ, in distribution,*

$$\frac{s_{t_n}}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sigma W_t$$

- *If $\frac{\alpha_t}{t^{-1}} \sim K$ with $2\mathcal{C}K \leq 1$ as $t \to \infty$, the rescaled price process converges and for the sequence $t_n = tn^{1/2k\mathcal{C}}$ and a constant σ, in distribution,*

$$\frac{s_{t_n}}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sigma \int_0^t \sqrt{\frac{1}{u^{1-2\mathcal{C}K}}} dW_u$$

定理 3.11. *Assume $\lambda = \mu$. Then, under Assumption 1, for $A_t = \int_0^t \alpha_s ds$,*

- *If $\alpha_t \sim t^{-1+s}$ as $t \to \infty$, for any $s > 1$, the rescaled price process converges and for the sequence $t_n = nt$ and a constant σ, in distribution,*

$$\frac{s_{t_n}}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sigma W_t$$

- *If $\alpha_t \sim t^{-1+s}$ as $t \to \infty$ for any $s \in$ 0 1 the rescaled price process converges and for the sequence , , 0 log , , $t_n = t\ n^{1/s}$ n and a constant σ in distribution*

$$\frac{s_{t_n}}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sigma \int_0^t \sqrt{\frac{1}{u^s}} dW_u$$

- *If $\alpha_t = o(t^{-1+s})$ for some $s > 0$, the price process converges cannot be rescaled to ensure conver - gence.*

Remark 3.12. 值得注意的是，在当前设定下，我们得到了 Cont 和 de Larrard（2013）提出的模型。事实上，要恢复他们的模型， α_t 应选择为满足 $\alpha_t \equiv 1 = x^0$。在这种情况下，

- 若 $\lambda < \mu$ 且 $\alpha_t = 1$，则 $\alpha_t / t^{-1} \to \infty$，由此立即可得 Cont 和 de Larrard（2013）中的结果。

- 若 $\lambda = \mu$ 且 $\alpha_t = t^{-1+1}$，则成为定理 3.11 中的临界情形。在这种情况下，从上述定理的证明可知，我们需要选择重缩放序列$t_n = tn$对数(n)，但所得极限是一个具有恒定波动率的布朗运动。

4 实证结果

本文将分析六种不同的股票。这些股票所属的行业以及交易频率各不相同，其他属性也有所差异。本文的主要目标是考察模型对不同数量的拟合情况，并将其与 Cont 和 de Larrard（2013）的模型进行对比。选取的股票为 CSCO、FB、INTC、微软、LBTYK 和 VOD，分析所用数据均来自 2014年11月3日至11月7日。

本文将首先分析价格变化间隔时间的分布。由引理 3.8 可知，

$$\mathbb{P}\left[\tau_{\mathcal{H}}^1 > T \,\middle|\, q_0^a = x, q_0^b = y\right] \sim \begin{cases} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{(x+y)/2} \frac{xy}{\pi \mathcal{C}^2 \sqrt{\lambda\mu}} \frac{\exp(-2A_T\mathcal{C})}{A_T} & \text{if} \quad \lambda < \mu \\ \dfrac{xy}{\lambda^2 \pi} \dfrac{1}{A_T} & \text{if} \quad \lambda = \mu \end{cases}$$

然后，对队列的所有可能初始位置求和，并乘以该位置出现的概率，我们得到

$$\mathbb{P}\left[\tau_{\mathcal{H}}^1 > T\right] \sim \begin{cases} \sum_{x=1}^{\infty} \sum_{y=1}^{\infty} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{(x+y)/2} \frac{xyf(x,y)}{\pi \mathcal{C}^2 \sqrt{\lambda\mu}} \frac{\exp(-2A_T\mathcal{C})}{A_T} & \text{if} \quad \lambda < \mu \\ \sum_{x=1}^{\infty} \sum_{y=1}^{\infty} \dfrac{xyf(x,y)}{\lambda^2 \pi} \dfrac{1}{A_T} & \text{if} \quad \lambda = \mu \end{cases}$$

By t取导数并使用洛必达法则，我们得到：如果 $f_{\tau^1_{\mathcal{H}}}(t)$ 是 $\tau^1_{\mathcal{H}}$ 的密度，那么，

$$f_{\tau^1_{\mathcal{H}}}(t) \sim \begin{cases} \sum_{x=1}^{\infty}\sum_{y=1}^{\infty} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{(x+y)/2} \frac{xyf(x,y)}{\pi \mathcal{C}^2\sqrt{\lambda\mu}} \frac{(2\mathcal{C}A_T+1)\alpha_T \exp(-2A_T\mathcal{C})}{A_T^2} & \text{if} \quad \lambda < \mu \\ \sum_{x=1}^{\infty}\sum_{y=1}^{\infty} \frac{xyf(x,y)}{\lambda^2\pi} \frac{\alpha_T}{A_T^2} & \text{if} \quad \lambda = \mu \end{cases} \tag{9}$$

下图展示了六只选定股票的 $f_{\tau^1_{\mathcal{H}}}(t)$ 经验密度。如表3所示，六种情况下平均而言均有 $\mu < \lambda$，但几乎所有情况下都有 $\mu/\lambda > 0.9$。

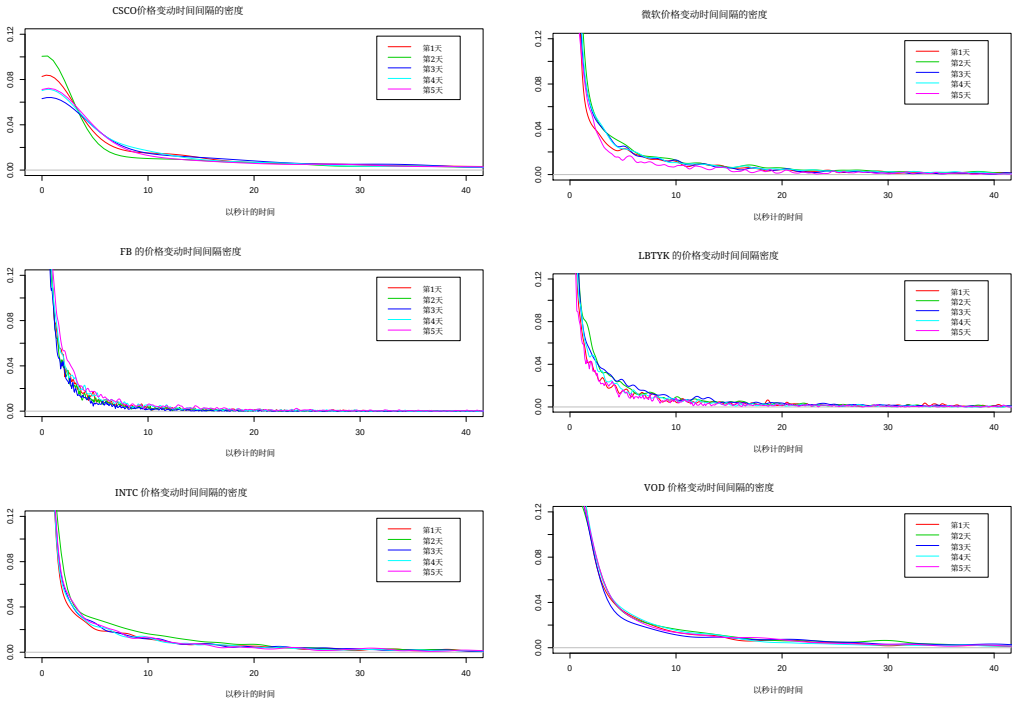

图1：2014年11月3日至11月7日这一周内，六只股票价格变化到达间隔时间的密度。

接下来，分别绘制每只股票卖方限价单的强度 λ_t^a，以及市价订单与撤单的强度 μ_t^a。在每张图中，按星期中的每一天计算强度 λ_t^a或 μ_t^a，并通过回归进行幂律拟合。回归结果汇总于对应图表之后的表1中。

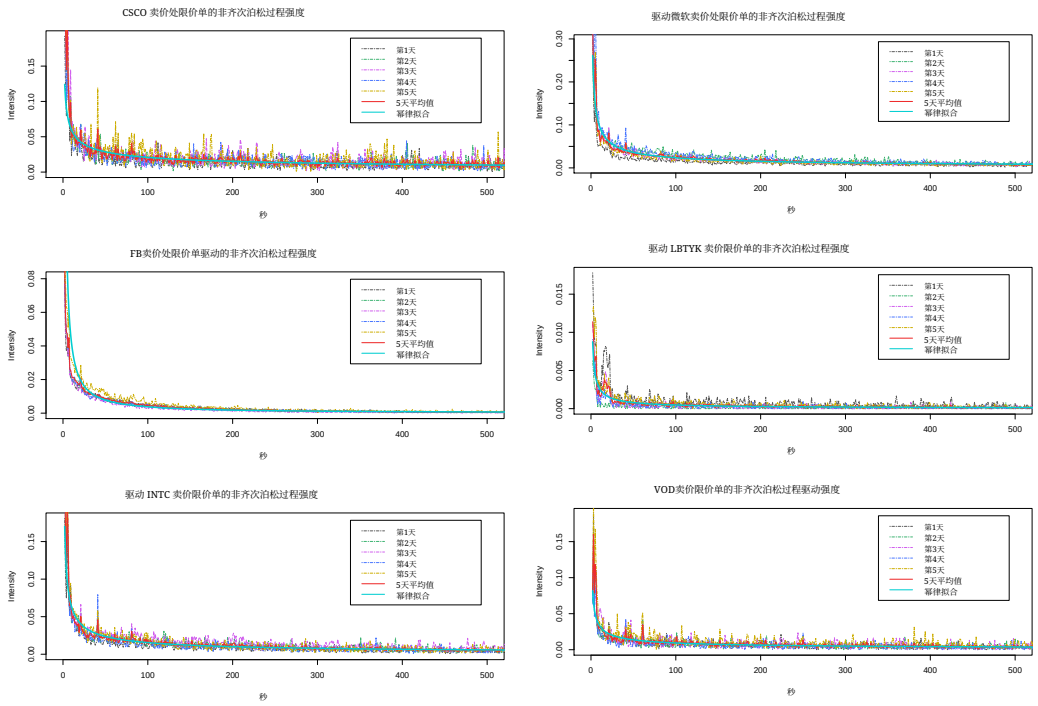

图2：2014年11月3日至11月7日这一周所考察的六只股票卖方限价单的每日强度及其对应的幂律拟合。

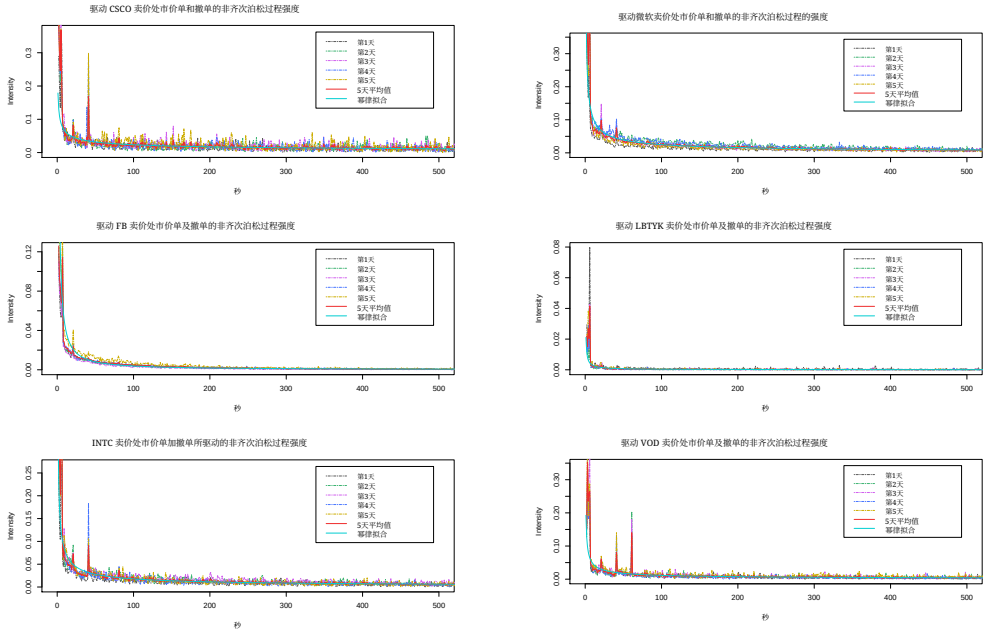

图3：2014年11月3日至11月7日这一周所考察的六只股票卖方标记单与撤单的每日强度及其对应的幂律拟合。

在.....中 以近似定理 (3.10) 中所述价格过程的长期动态 -

(3.11)，对所分析的六只股票，分别对卖方限价单强度进行幂律拟合。也就是说，进行回归以拟合 $\lambda_t^a \approx {}^{K_\lambda}{}_{t^s}{}^a$。同样，对所分析的六只股票，分别对卖方市价订单与撤单的强度进行幂律拟合。在这种情况下，进行回归以拟合 $\mu_t^a \approx {}^{K_{\mu,}}{}_{t^r}{}^a$。下表总结了对所分析股票的强度进行幂律拟合的结果。

股票	**对 $\lambda_t^a \approx K_{\lambda,a} t^{-s}$ 的拟合**		**对 $\mu_t^a \approx K_{\mu,a} t^{-r}$ 的拟合**	
	系数 $K_{\lambda,a}$	**指数 s**	**系数 $K_{\mu,a}$**	指数 r
CSCO	0.1703	0.4560	0.1790	0.4412
FB	0.4664	1.0045	0.5429	1.0073
INTC	0.2604	0.6127	0.3582	0.6515
MSFT	0.4002	0.6153	0.4671	0.6363
LBTYK	0.0146	0.7438	0.0211	0.8640
VOD	0.1199	0.5536	0.1927	0.6116

表1：所有六只股票的 $\lambda_t^a \approx Ct^{-s}$ 和 $\mu_t^a \approx Dt^{-r}$ 的回归拟合。

现在，分别绘制每只股票买方的限价单强度 λ_t^b，以及市价订单与撤单的强度 μ_t^b。与之前类似，每张图中都按一周中的每一天计算强度 λ_t^b 或 μ_t^b，并通过回归进行幂律拟合。回归结果汇总于相应图表之后的表 2 中。

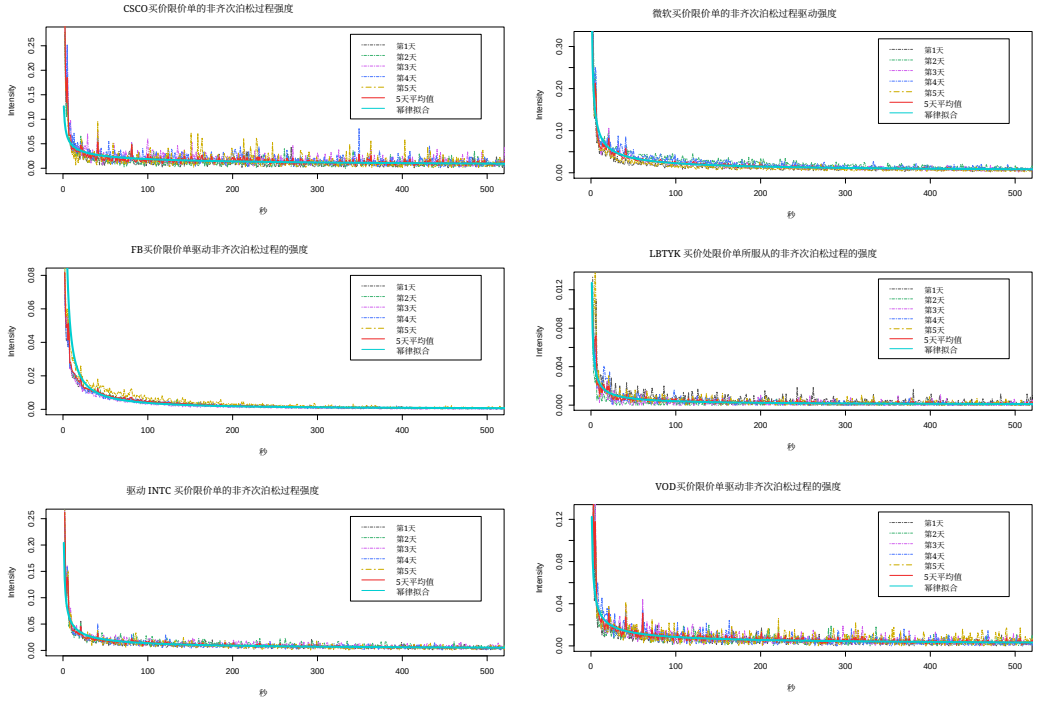

图 4：2014年11月3日至11月7日当周所研究的六只股票买方限价单的每日强度及其相应的幂律拟合。

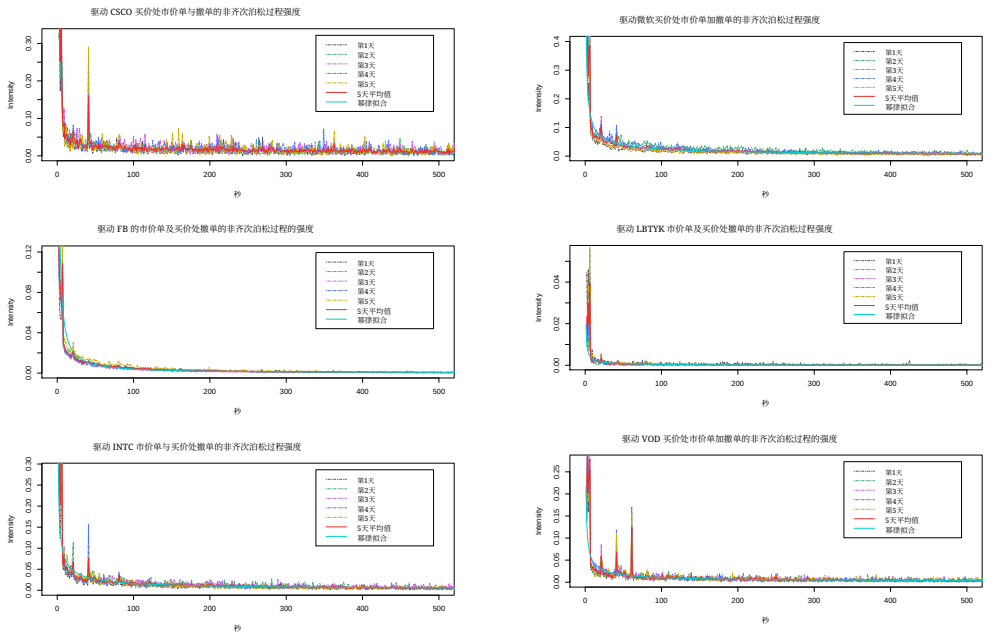

图5：2014年11月3日至11月7日这一周内，所考察的六只股票买方标记单及撤单的每日强度，以及相应的幂律拟合。

与之前相同，对所分析的六只股票分别拟合买方限价单强度 λ_t^b 的幂律。也就是说，进行回归以拟合 $\lambda_t^b \approx {}^{K_{\lambda,\ b}}{}_{t^s}{}^{b}$。类似地，对所分析的六只股票分别拟合买方市价订单与撤单强度 μ_t^b 的幂律。在这种情况下，进行回归以拟合 $\mu_t^b \approx {}^{K_{\mu,\ b}}{}_{t^r}{}^{b}$。下表汇总了所分析股票的强度幂律拟合结果。

股票	$\lambda_t^b \approx K_\lambda$**的拟合**，$_b t^{-s}$		$\mu_t^b \approx K_\mu$**的拟合**，$_b t^{-r}$	
	系数 $K_{\lambda,\ b}$	**指数** s	**系数** $K_{\mu,\ b}$	**指数** r
CSCO	0.1264	0.4149	0.1775	0.4509
FB	0.4584	1.0039	0.5359	1.0064
INTC	0.2041	0.5872	0.3525	0.6649
MSFT	0.3887	0.6163	0.5014	0.6522
LBTYK	0.0127	0.7466	0.0196	0.8352
VOD	0.1223	0.5806	0.2143	0.6566

表 2：对所分析的六只股票进行的 $\lambda_t^b \approx Ct^{-s}$ 和 $\mu_t^a bapprox Dt^{-r}$ 的回归拟合。

最后，为了评估商 λ_t^a/μ_t^a 和 λ_t^b/μ_t^b 的行为与常数有多接近，我们绘制了这些商及其平均值。首先展示卖方的商，然后展示买方的商。可以看出，在所有情况下，商都小于 1，这表明队列处于平稳状态。

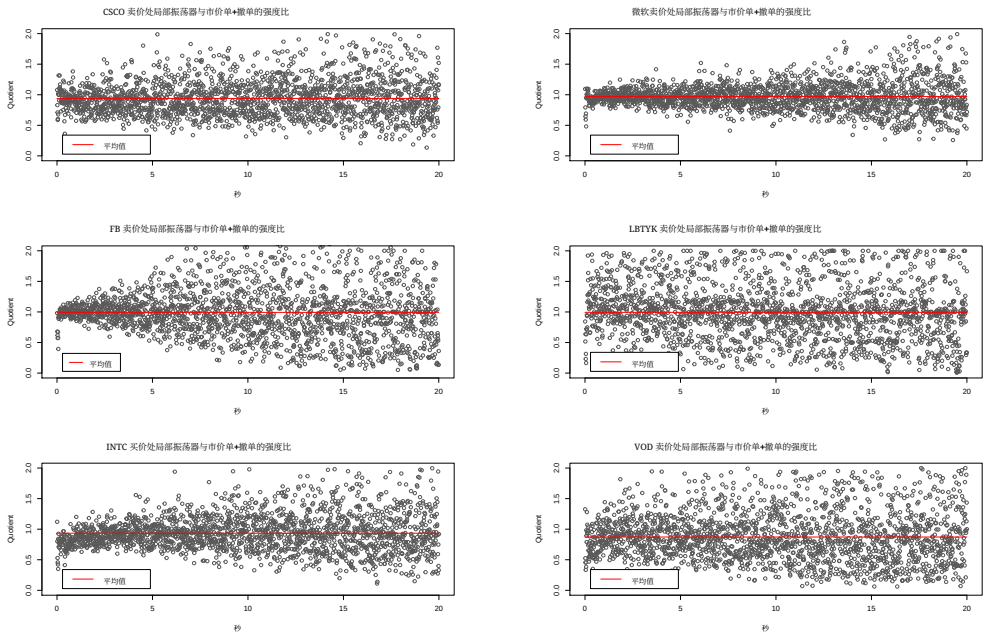

图6：比值 λ_t^a/μ_t^a 随时间 t 的变化图。此处对恒定比值这一假设进行了对比。

接下来展示买方的比值。

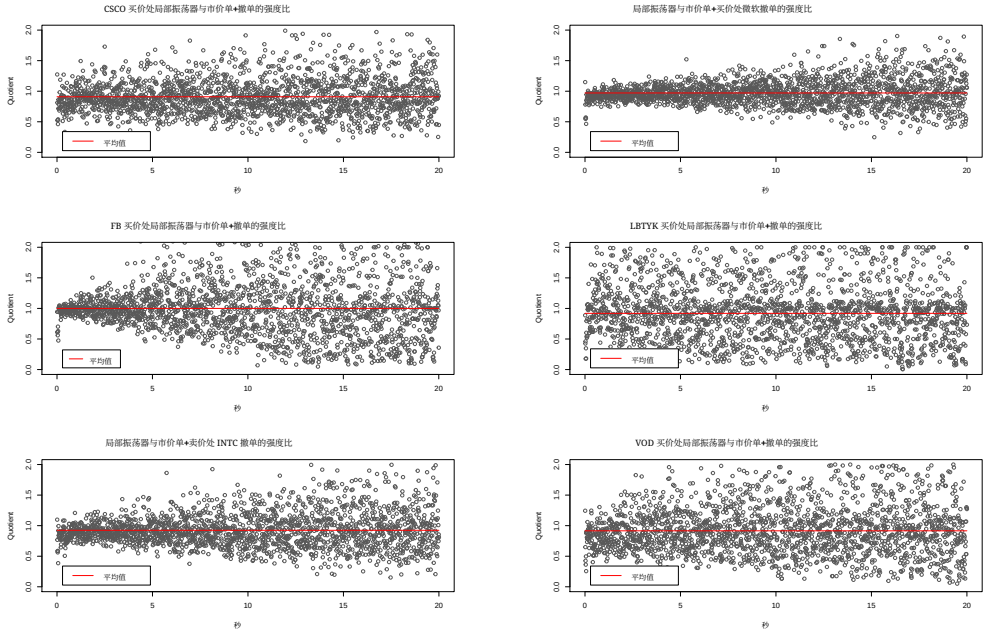

图7：比值 λ_t^b/μ_t^b 随时间 t 的变化图。此处对恒定比值这一假设进行了对比。

本节最后一部分是一张表格，比较六只股票卖方商 λ_t^a/μ_t^a 的平均值与六只股票买方相同商 λ_t^b/μ_t^b 的平均值。

股票	**商的均值** λ_t^a/μ_t^a	**商的均值** λ_t^b/μ_t^b
CSCO	0.9598	0.9392
FB	0.9927	0.9993
INTC	0.9441	0.9544
MSFT	0.9901	0.9912
LBTYK	0.9998	0.9498
VOD	0.8919	0.9255

表3：所分析的全部六只股票中，卖方和买方限价单的强度与市价订单加撤单强度之比的均值比较。

5 结论与进一步研究

本文提出了一个简单的限价订单簿模型，旨在进一步研究这些复杂系统的经验特征。具体而言，本文尝试聚焦并理解订单提交之间到达间隔时间的经验特征，以及这些经验特征如何影响价格过程的流体动力学。事实上，正如第3节所示，根据订单到达间隔时间的密度衰减速度，价格过程的长期动态可能具有时变波动率。这一特征十分重要，因为一个值得探究的问题是：在什么条件下，价格过程的长期动态会收敛于比恒定波动率的简单布朗运动更一般的伊藤扩散，例如几何布朗运动——后者是最常用于描述股票价格的模型之一。此外，据作者所知，许多现有模型试图实现这类收敛，但它们定义的是一个对价格变化到达进行计数、而非对订单到达进行计数的点过程。也就是说，许多模型研究的是介观层次，而非通过计入单笔订单所形成的微观层次。

为了构建能够概括价格过程长期动态的简单模型，本文表明可能出现不同的情形。例如，CSCO、INTC 和 VOD 的商为 $\lambda_t/\mu_t < 1$，这意味着它们属于定理 3.10 所涵盖的情形；由于它们的尾部均按指数不同于 -1 的幂律衰减，因此会收敛到波动率恒定的简单布朗运动。然而，对于另外三只股票（FB、微软和 LBTYK），可以看出它们的商 $\lambda_t/\mu_t < 1$ 显著接近 1，这意味着它们属于定理 3.11 所涵盖的情形。在这种情况下，会出现两种情形：微软和 LBTYK 的尾部衰减速度慢于 t^{-1}，因此会收敛到具有时变波动率的布朗运动；而 FB 的尾部仅略重于 t^{-1}，这意味着它会收敛到波动率恒定的标准布朗运动。

从这小部分股票样本可以看出，已经出现了许多不同的情形，这说明模型中设定的这些条件是可以实现的。当然，该模型存在一些局限性，也作了许多简化，但作者认为，这是朝着构建更现实的模型（如几何布朗运动）迈出的第一步。Jaisson 和 Rosenbaum（2015）提供了一个很好的例子，展示了如何在采用介观尺度的情况下构建这类模型：作者通过对价格变化的到达时刻建模，利用近临界不稳定 Hawkes 过程实现了向几何布朗运动的收敛。接下来，一个值得研究的模型是：如何从单笔订单的到达过程出发，而非从聚合数据出发，利用类似结果实现向这类过程的收敛。所有这些模型中的难点，在于理解能够指示价格变动的停止时间的尾部行为，例如引理 3.8 中给出的情形。作者认为，若用更一般的点过程（如 Hawkes 过程），甚至更理想地用状态依赖霍克斯过程（其强度取决于过程状态）取代非齐次泊松过程，就能得到更多有趣的特征；不过，复杂之处在于揭示上述停止时间的行为，这也将成为近期一个值得关注的研究方向。

参考文献

Billingsley, P.（1995）。 *Probability and measure*。威利概率与数理统计丛书。John Wiley & Sons Inc.，纽约，第三版。Wiley-Interscience 出版物。Bouchaud, J.、Farmer, J. 和 Lillo, F.（2009）。市场如何缓慢消化供给与需求的变化。

Proceedings of the Handbook of Financial Markets: Dynamics and Evolution，9(70):57–160。Cartea, A. 和 Jaimungal, S.（2015 *Quantitative*）。*Finance* 0 0 1 13
使用限价单和市价单进行最优执行。，（）：–。Ch´avez-Casillas, J. A.、Elliott, R. J.、R´emillard, B. 和 Swishchuk, A. V.（2019年）。具有时变到达率的一级限价订单簿。

Methodology and Computing in Applied Probability，21(3):699–719。Cont, R. 和 de Larrard, A.（2013 *SIAM Journal*）。*on Financial Mathematics* 4 1 1 25
马尔可夫限价订单市场中的价格动态。，（）：–。Cont, R.、Stoikov, S. 和 Talreja, R.（2010 *Operations*）。*Research* 58 3 549 563
订单簿动态的随机模型。，（）：–。Eisler, Z.、Bouchaud, J.-P. 和 Kockelkoren, J.（2012）。订单簿事件的价格冲击：市价订单、限价单和撤单。 *Quantitative Finance*，12:1395–1419。Engle, R. F.、Ferstenberg, R. 和 Russell, J. R.（2006）。执行成本与风险的测量和建模。 *NYU Working Paper*。Foucault, T.、Kadan, O. 和 Kandel, E.（2003）。作为流动性市场的限价订单簿。讨论论文系列，希伯来大学费德曼理性研究中心，耶路撒冷。Gould, M. D.、Porter, M. A.、Williams, S.、McDonald, M.、Fenn, D. J. 和 Howison, S. D.（2013）。限价订单簿。 *Quantitative Finance*，13(11):1709–1742。Gut, A.（2013）。 *Probability: a graduate course*，第75卷。施普林格科学与商业媒体。Harris, L.（2003）。 *Trading and exchanges: market microstructure for practitioners*。牛津大学出版社。Harris, L. 和 Hasbrouck, J.（1996）。市价单与限价单：关于订单提交策略的 SuperDOT 证据。

Journal of Financial and Quantitative Analysis，31:213–231。Jaisson, T. 和 Rosenbaum, M.（2015 *The Annals*）。*of Applied Probability* 25 2 600 631
近临界不稳定 Hawkes 过程的极限定理。，（）：–。Kirilenko, A.、Kyle, A. S.、Samadi, M. 和 Tuzun, T.（2011）。闪电崩盘：高频交易对电子市场的影响。Law, B.（2015 *PhD thesis Purdue*）。*University*
高频交易的纯跳跃做市模型。，。Obizhaeva, A. A. 和 Wang, J.（2013 *Journal*）。*of Financial Markets* 16 1 1 32
最优交易策略与供需动态。，（）：–。Olver, F. W.、Lozier, D. W.、Boisvert, R. F. 和 Clark, C. W.（2010 *NIST Handbook of Mathematical*）。。*Functions* 1
剑桥大学出版社，美国纽约州纽约市，第一版。

第3节的证明

Proof of Proposition 3.1. 。到达过程 L_t 和 M_t 是马尔可夫过程。此外，描述卖价处订单数量的队列过程 q_t^a 也是一个马尔可夫过程，其生成元由方程1给出。也就是说，对于任意函数 $u \in$Dom($\mathscr{L}_t$)， $t \in \mathbb{R}^+$ 和 $z \in \mathbb{N}$,

$$\mathscr{L}_t u(t,z) = \lambda_t u(t,z+1) + \mu_t u(t,z-1) - (\lambda_t + \mu_t) u(t,z). \tag{10}$$

令 $\bar{u}\ t\ x$ $t \mapsto \bar{u}\ t\ x$ C_1 x $t\ x \mapsto$(,) 为任意有界函数，$\partial \bar{u}\ t\ x\ /\partial t$ $T > 0$ $f\ t\ x\ = \bar{u}\ T - t\ x$ $\bar{u}$ 使得对于所有情况，(,) 均成立，且 (,) (,) 有界。固定 并令 (,) (,)。在所述条件下，属于生成元 $\mathscr{L}_t$ 的定义域，因此，该过程

$$f(t, q_t^a) - f(0, q_0^a) - \int_0^t \left(\frac{\partial}{\partial r} + \mathscr{L}_r \right) f(r, q_r^a) dr, \quad t \in [0,T]$$

是一个局部鞅。因此,

$$M_t := \bar{u}(T-t, q_t) - \bar{u}(T, q_0) - \int_0^t \left(\frac{\partial}{\partial r} + \mathscr{L}_r \right) \bar{u}(T-r, q_r) dr, \quad t \in [0,T],$$

是一个鞅，其中 $M_0 = 0$。令 $\varsigma := T \wedge \sigma_a^1$。根据可选抽样定理,

$$\bar{u}(T,x) = \mathbb{E}_x[\bar{u}(T-\varsigma, q_\varsigma)] - \mathbb{E}_x \left[\int_0^\varsigma \left(\frac{\partial}{\partial r} + \mathscr{L}_r \right) \bar{u}(T-r, q_r) dr \right], \tag{11}$$

其中 $\mathbb{E}_x[\cdot] := \mathbb{E}[\,\cdot \mid q_0 = x]$。O

n 另一方面，假设 $\bar{u}(t,\ x)$ 是初值问题 2 的解。也就是说， $\bar{u}(t,\ x)$ 满足 fies

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \mathscr{L}_r\right) \bar{u}(T-r, z) = 0 \quad \text{for} \quad 0 < r < T,\ z \in \mathbb{N}. \\ \bar{u}(T-r, 0) = 0 \quad \text{for} \quad 0 \le r < T. \\ \bar{u}(0, z) = 1 \quad \text{for} \quad z \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

在这种情况下，根据 (11),

$$\begin{aligned} \bar{u}(T,x) &= \mathbb{E}[\bar{u}(T-\varsigma, q_\varsigma)] \\ &= \mathbb{E}[\bar{u}(T-\varsigma, q_\varsigma)\mathbb{I}\{\sigma_a^1 \le T\} + \bar{u}(T-\varsigma, q_\varsigma)\mathbb{I}\{\sigma_a^1 > T\}] \\ &= \mathbb{E}[\bar{u}(T-\sigma_a^1, 0)\mathbb{I}\{\sigma_a^1 \le T\} + \bar{u}(0, q_T)\mathbb{I}\{\sigma_a^1 > T\}] \\ &= \mathbb{P}[\sigma_a^1(x) > T]. \end{aligned}$$

这意味着 $\bar{u}(T,\ x) = \mathbb{P}[\sigma_a^1(x) > T]$。

□

Proof of Lemma 3.3. 根据 Olver等人（2010）[公式 10.30。4], 对于固定的 ν,

$$I_\nu(x) \sim \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \qquad \text{as} x \to \infty.$$

因此，当 $T \to \infty$ 时,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\sigma_{a,\mathcal{Q}}^1 > T \mid q_0^a = x] &= \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{x/2} \int_T^\infty \frac{x}{s} I_x\left(2s\sqrt{\lambda\mu}\right) e^{-s(\lambda+\mu)} ds \\ &\sim \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{x/2} \int_T^\infty \frac{x}{s} \frac{e^{2s\sqrt{\lambda\mu}}}{\sqrt{4s\pi\sqrt{\lambda\mu}}} e^{-s(\lambda+\mu)} ds \\ &\sim \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{x/2} \int_T^\infty \frac{x}{2\sqrt{\pi\sqrt{\lambda\mu}}} s^{-3/2} e^{-s(\sqrt{\mu}-\sqrt{\lambda})^2} ds \end{aligned}$$

因此，如果 $\lambda = \mu$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\sigma_{a,\mathcal{Q}}^1 > T \mid q_0^a = x] &\sim \int_T^\infty \frac{x}{2\lambda\sqrt{\pi}} s^{-3/2} ds \\ &\sim \frac{x}{2\lambda\sqrt{\pi}} \frac{2}{\sqrt{T}} \\ &\sim \frac{x}{\lambda\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{T}}. \end{aligned}$$

这与 Cont 和 de Larrard（2013）证明的结果一致。然而，如果 $\lambda < \mu$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[\sigma^1_{a,\mathcal{Q}} > T \mid q^a_0 = x] &\sim \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{x/2} \int_{T(\sqrt{\mu}-\sqrt{\lambda})^2}^{\infty} \frac{x}{2\sqrt{\pi\sqrt{\lambda\mu}}} \frac{(\sqrt{\mu}-\sqrt{\lambda})^3}{u^{3/2}} e^{-u} \frac{du}{(\sqrt{\mu}-\sqrt{\lambda})^2} \\
&\sim \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{x/2} \frac{x(\sqrt{\mu}-\sqrt{\lambda})}{2\sqrt{\pi\sqrt{\lambda\mu}}} \int_{T(\sqrt{\mu}-\sqrt{\lambda})^2}^{\infty} u^{-3/2} e^{-u} du \\
&= \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{x/2} \frac{x(\sqrt{\mu}-\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\pi\sqrt{\lambda\mu}}} \left[\frac{e^{-T(\sqrt{\mu}-\sqrt{\lambda})^2}}{(\sqrt{\mu}-\sqrt{\lambda})\sqrt{T}} - \Gamma\left(\frac{1}{2}, T(\sqrt{\mu}-\sqrt{\lambda})^2\right)\right] \\
&\sim \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{x/2} \frac{x(\sqrt{\mu}-\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\pi\sqrt{\lambda\mu}}} \left[\frac{e^{-T(\sqrt{\mu}-\sqrt{\lambda})^2}}{(\sqrt{\mu}-\sqrt{\lambda})\sqrt{T}} - T^{-3/2}e^{-T} + O(T^{-1})\right] \\
&= \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{x/2} \frac{x(\sqrt{\mu}-\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\pi\sqrt{\lambda\mu}}} \left[\frac{e^{-T(\sqrt{\mu}-\sqrt{\lambda})^2}}{(\sqrt{\mu}-\sqrt{\lambda})\sqrt{T}} + o(T^{-1/2})\right] \\
&\sim \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{x/2} \frac{x(\sqrt{\mu}-\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\pi\sqrt{\lambda\mu}}} \frac{e^{-T\mathcal{C}}}{(T\mathcal{C})^{1/2}},
\end{aligned}$$

其中，在倒数第二个渐近展开中，我们使用了 Olver等人（2010）中的公式 8.11.2
Let $\mathcal{C} = (\sqrt{\mu}-\sqrt{\lambda})^2$. 为了计算 $\lambda = \mu$ 情况下的期望，请注意，f或足够大 T,

$$\mathbb{E}\left[\sigma^1_{a,\mathcal{Q}}; \mid q^a_0 = x\right] = \int_0^{\infty} \mathbb{P}[\sigma^1_{a,\mathcal{Q}} > t; \mid q^a_0 = x]dt \geq \frac{x}{\lambda\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \infty,$$

而如果 ⌢ ⌢$\lambda < \mu$，对于足够大的 T，存在有限常数 C_1 和 C_2，使得对于任意 $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\sigma^1_{a,\mathcal{Q}}\right)^k; \mid q^a_0 = x\right] &= n\int_0^{\infty} t^{n-1}\mathbb{P}[\sigma^1_{a,\mathcal{Q}} > t]dt \\
&\leq \widehat{C_1} + \widehat{C_2}\int_T^{\infty} t^{n-1}\left((t\mathcal{C})^{-1/2}e^{-t\mathcal{C}}\right)dt \\
&\leq \widehat{C_1} + \widehat{C_2}\int_T^{\infty} t^{n-1-1/2}e^{-t\mathcal{C}}dt \\
&= \widehat{C_1} + \widehat{C_2}\Gamma(n-1/2, T\mathcal{C}) < \infty
\end{aligned}$$

□

Proof of Proposition 3.5. 对于 $0 \leq t \leq A_T$ $\bar{w}$ t x 7 $0 \leq t \leq$，令 (,) 为方程中定义的函数。对于 ^{T}，设 (,) (,)。则，(,) 属于 的定义域，并且 $\bar{v}$ t x $= \bar{w}$ A_t x $\bar{v}$ t x $\mathscr{L}_t$

$$\frac{\partial}{\partial r}\bar{v}(T-r,x) = \frac{\partial}{\partial r}\left[\bar{w}(A_{T-r},x)\right] = \frac{\partial}{\partial r}\bar{w}(A_{T-r},x)\cdot(-a_r) = -Q\bar{w}(A_{T-r},x)a_r,$$

对于所有 $r \in (0,T)$ 和 $x \in \mathbb{N}$。然而，由于 $\mathscr{L}_r = Qa_r$,

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{v}(t,x) + \mathscr{L}_r\bar{v}(t,x) = 0$$

对于所有 $x \in \mathbb{N}$, $t \in (0,T)$。此外，由于 $\bar{w}(t,$ x $=$ $\bar{w}$ A_{T-r} 0 $= 0$ $z \in \mathbb{N}$ $\bar{v}$ 0 z $= \bar{w}$ A_0 z $= \bar{w}$ 0 z $= 1$ 3 1,) 满足初值问题 6，对于 $0 \leq r < T$, $\bar{v}(T-r,0)$ (,)，且对于任意 , (,) (,) (,)。因此，根据命题，结论得证。 □

Proof of Lemma 3.8. 根据注 3.6 和引理 3.3，第一部分显而易见。若

- $\alpha_t \sim t^s \log^m(t)$ 作为 $t \to \infty$，其中某些 $s \neq -1, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$。那么，对于足够大的 t, $A_t \geq \hat{c}t^{s+1}$。因此，

– 若 $\lambda < \mu$（根据引理的证明），则存在有限常数 $\mathcal{C}, C_1, C_2$ 和 C_3，使得 ，

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\tau_{\mathcal{H}}^1\right)^n \mid q_0^a = x, q_0^b = y\right] &= n\int_0^\infty t^{n-1}\mathbb{P}\left[\tau_{\mathcal{H}}^1 > t \mid q_0^a = x, q_0^b = y\right] dt \\
&= n\int_0^\infty t^{n-1}\mathbb{P}\left[\tau_{\mathcal{Q}}^1 > A_t \mid q_0^a = x, q_0^b = y\right] dt \\
&\leq T^n + n\int_T^\infty t^{n-1}\mathbb{P}\left[\tau_{\mathcal{Q}}^1 > A_t \mid q_0^a = x, q_0^b = y\right] dt \\
&\leq T^n + C_1\int_T^\infty t^{n-1}\left[(\mathcal{C}A_t)^{-1/2}e^{-\mathcal{C}A_t}\right]^2 dt \\
&\leq T^n + C_1\int_T^\infty t^{n-1}\left[\left(\mathcal{C}t^{s+1}\right)^{-1/2}e^{-\mathcal{C}t^{s+1}}\right]^2 dt \\
&\leq T^n + C_2\int_T^\infty t^{n-s-2}e^{-2\mathcal{C}t^{s+1}} dt \\
&= T^n + C_3\int_T^\infty u^{(n-2(s+1))/(s+1)}(u/2\mathcal{C})e^{-u} du \\
&= T^n + C_4\int_T^\infty u^{n/(s+1)-2}e^{-u} du < \infty.
\end{aligned}$$

– 若 $\lambda = \mu$，则存在有限常数 C_1、C_2 和 C_3，使得，

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\tau_{\mathcal{H}}^1\right)^n \mid q_0^a = x, q_0^b = y\right] &= n\int_0^\infty t^{n-1}\mathbb{P}\left[\tau_{\mathcal{H}}^1 > t \mid q_0^a = x, q_0^b = y\right] dt \\
&= n\int_0^\infty t^{n-1}\mathbb{P}\left[\tau_{\mathcal{Q}}^1 > A_t \mid q_0^a = x, q_0^b = y\right] dt \\
&= C_1 + n\int_T^\infty t^{n-1}\mathbb{P}\left[\tau_{\mathcal{Q}}^1 > A_t \mid q_0^a = x, q_0^b = y\right] dt \\
&= C_1 + C_2\int_T^\infty \frac{xy}{\lambda^2\pi}t^{n-1}\frac{1}{A_T} dt \\
&= C_1 + C_2\int_T^\infty \frac{xy}{\lambda^2\pi}t^{n-s-2} dt \\
&= C_3\mathbb{1}_{\{n<s+1\}} + \infty\mathbb{1}_{\{n\geq s+1\}}.
\end{aligned}$$

- $\alpha_t \sim k/t$ 对于某个 $k > 0$。那么 $A_t \sim k\log(t)$。
  – 若 $\lambda < \mu$，则当 T 足够大时，存在有限常数 $\mathcal{C}$、C_1、C_2 和 C_3，使得:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\tau_{\mathcal{H}}^1\right)^n \mid q_0^a = x, q_0^b = y\right] &= n\int_0^\infty t^{n-1}\mathbb{P}\left[\tau_{\mathcal{H}}^1 > t \mid q_0^a = x, q_0^b = y\right] dt \\
&= n\int_0^\infty t^{n-1}\mathbb{P}\left[\tau_{\mathcal{Q}}^1 > A_t \mid q_0^a = x, q_0^b = y\right] dt \\
&= C_1 + n\int_T^\infty t^{n-1}\left[A_t^{-1/2}e^{-\mathcal{C}A_t}\right]^2 dt \\
&= C_1 + n\int_T^\infty t^{n-1}\left[(k\log(t))^{-1/2}e^{-k\mathcal{C}\log(t)}\right]^2 dt \\
&= C_1 + C_2\int_T^\infty kt^{n-1-2k\mathcal{C}}\log(t) dt \\
&= C_3(\mathbb{I}\{n < 2\mathcal{C}k\} + \infty(\mathbb{I}\{n \geq 2\mathcal{C}k\}).
\end{aligned}$$

– 若 $\lambda = \mu$，则存在有限常数 C_1、C_2 和 C_3，使得：

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left(\tau_{\mathcal{H}}^1\right)^n \mid q_0^a = x, q_0^b = y\right] &= n\int_0^\infty t^{n-1}\mathbb{P}\left[\tau_{\mathcal{Q}}^1 > A_t \mid q_0^a = x, q_0^b = y\right]dt \\ &= C_1 + C_2\int_T^\infty \frac{xy}{\lambda^2\pi}t^{n-1}\frac{1}{A_T}dt \\ &= C_1 + C_2\int_T^\infty \frac{xy}{\lambda^2\pi}t^{n-1}\frac{1}{k\log(t)}dt \\ &= C_1 + C_3\int_T^\infty \frac{t^{n-1}}{\log(t)}dt = \infty.\end{aligned}$$

□

Proof of Proposition 3.9. 令 $F_{n,\ \mathcal{Q}}(t)$ 和 $F_{n,\ \mathcal{H}}(t)$ 分别表示 $S_{\mathcal{Q}}^n$ 和 $S_{\mathcal{H}}^n$的累积分布函数。此外，令 $f_{n,\ \mathcal{Q}}(t)$ 和 $f_{n,\ \mathcal{H}}(t)$ 表示它们对应的密度。该结果将通过归纳法证明。基本情形 $n = 1$ 由推论 3.7 给出。假设该结果对任意 $m \le n \in \mathbb{N}$均成立。那么，根据推论 3.7 和归纳假设，

$$F_{\mathcal{H}}(t) = F_{\mathcal{Q}}(A_t) \qquad \text{and} \qquad f_{n,\mathcal{H}}(t) = f_{n,\mathcal{Q}}(A_t)\alpha_t \tag{12}$$

此外，根据 τ^n 和 S^n的定义

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{x,y}[S_{\mathcal{H}}^{n+1} \le t] &= \mathbb{P}_{x,y}[S_{\mathcal{H}}^n \le t, \tau_{\mathcal{H}}^{n+1} \le t - S_{\mathcal{Q}}^n] \\ &= \int_0^t \mathbb{P}_{x,y}[S_{\mathcal{H}}^n \le t, \tau_{\mathcal{H}}^{n+1} \le t - S_{\mathcal{H}}^n \mid S_{\mathcal{H}}^n = u]\mathbb{P}_{x,y}[S_{\mathcal{H}}^n = u]du \\ &= \int_0^t \mathbb{P}[\tau_{\mathcal{H}}^{n+1} \le t - S_{\mathcal{H}}^n \mid S_{\mathcal{H}}^n = u]\mathbb{P}_{x,y}[S_{\mathcal{H}}^n = u]du \qquad (13) \\ &= \int_0^t \mathbb{P}[\tau_{\mathcal{H}}^{n+1} \le t - u]f_{n,\mathcal{H}}(u)du \qquad (14) \\ &= \int_0^t \mathbb{P}[\tau_{\mathcal{Q}}^{n+1} \le A_{t-u}]f_{n,\mathcal{Q}}(A_u)\alpha_u du \\ &= \int_0^t F_{1,\mathcal{Q}}(A_t - A_u)f_{n,\mathcal{Q}}(A_u)\alpha_u du \\ &= \int_0^{A_t} F_{1,\mathcal{Q}}(A_t - u)f_{n,\mathcal{Q}}(u)du \\ &= \int_0^{A_t} F_{1,\mathcal{Q}}(A_t - u)dF_{n,\mathcal{Q}}(u) \\ &= \mathbb{P}_{x,y}[S_{\mathcal{Q}}^{n+1} \le A_t],\end{aligned}$$

在最后一个等式中，我们用到了以下事实：$S_{n+1} = S_n + \tau_{n+1}$，以及对于 X 和 Y这两个非负独立随机变量，

$$F_{X+Y}(t) = \mathbb{P}[X + Y \le t] = F_X * F_Y(t) = \int_0^t F_X(t-x)dF_Y(x),$$

其中 F_X 和 F_Y 分别表示 X 和 Y的累积分布函数。 □

Proof of Theorem 3.10. 根据第3节所述的订单簿动力学，随机价格变动序列 $X_i \in \{-1, 1\}$ 相互独立。因此，若 $\lambda < \mu$ 且，

- 如果对于 $s \ne -1, m \ge 0$ 有 $\alpha_t \sim t^s \log^m(t) m \ge 0$，或者如果当 $t \to \infty$ 时 $\frac{\alpha_t}{t^{-1}} \to K$，且 $2\mathcal{C}K > 1$，那么根据引理 3.8，对于每个 $x, y \in \mathbb{N}$，
$$\mathbb{E}\left[\left(\tau_{\mathcal{H}}^1\right)^n \;\middle|\; q_0^a = x, q_0^b = y\right] < \infty.$$
由于 $N_t = \max\{n \ge 0 \mid \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_n \le t\}$，因此，
$$\tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_{N_t} \le t \le \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_{N_t+1}.$$

将前一个不等式除以 N_t，由于 $N_t \to \infty$，当 $t \to \infty$ 时，利用大数强律，我们得到几乎必然地

$$\mathbb{E}[\tau] := \sum_{x,y\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[\left(\tau_{\mathcal{H}}^1\right)^n \,\middle|\, q_0^a = x, q_0^b = y\right] f(x,y) \to \frac{t}{N_t} \qquad \text{as } t \to \infty.$$

因此，利用序列 $t_n = tn$，我们将过程 $s_{t_n} := \sum_{j=1}^{N_{t_n}} X_i$ 分解为：

$$s_{t_n} = \underbrace{\frac{s_0}{\sqrt{n}}}_{\mathrm{I}_n} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{[tn/\mathbb{E}[\tau_1]]} (X_j)}_{\mathrm{II}_n} + \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{N_{t_n}} X_j - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{[tn/\mathbb{E}_\pi(\tau_1)]} X_j\right)}_{\mathrm{III}_n}$$

由于 $n \to \infty$，显然，$\mathrm{I}_n \Rightarrow 0$。此外，根据 Donsker 不变性原理，

$$\mathrm{II}_n \Rightarrow \sigma W_t,$$

其中 σ 是一个常数。现在，由于 $X_j \in \{1, -1\}$，对于任意 $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\left|\sum_{j=1}^{N_{t_n}} X_j - \sum_{j=1}^{[tn/\mathbb{E}[\tau_1]]} \Pi_j\right| \geq \epsilon\sqrt{n}\right) &\leq \mathbb{P}\left(\left|\sum_{j=N_{t_n}\wedge[tn/\mathbb{E}[\tau_1]]}^{N_{t_n}\vee[tn/\mathbb{E}[\tau_1]]} X_j\right| \geq \epsilon\sqrt{n}\right) \\
&\leq \mathbb{P}\left(\frac{1}{2}\left|N_{t_n} - [tn/\mathbb{E}[\tau_1]]\right| \geq \epsilon\sqrt{n}\right) \\
&\leq \mathbb{P}\left(\left|\frac{N_{t_n}}{[tn/\mathbb{E}[\tau_1]]} - 1\right| \geq \frac{2\epsilon\sqrt{n}}{[tn/\mathbb{E}[\tau_1]]}\right),
\end{aligned}$$

当 $n \to \infty$ 时，它收敛到 0。因此，III_n 依概率收敛到 0，我们由此完成证明。

- 如果 $\frac{\alpha_t}{t^{-1}} \sim K$，且 $2\mathcal{C}K \leq 1$ 如 $t \to \infty$，那么 $A_T \sim k\log(T)$。根据引理 3.8

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[\tau_{\mathcal{H}}^1 > T \,\middle|\, q_0^a = x, q_0^b = y\right] &\sim \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{(x+y)/2} \frac{xy}{\pi\mathcal{C}^2\sqrt{\lambda\mu}} \frac{\exp(-2\mathcal{C}k\log(T))}{k\log(T)} \\
&\sim \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{(x+y)/2} \frac{xy}{\pi\mathcal{C}^2\sqrt{\lambda\mu}} \frac{T^{-2\mathcal{C}k}}{k\log(T)} \\
&\sim \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{(x+y)/2} \frac{xy}{\pi\mathcal{C}^2\sqrt{\lambda\mu}} \frac{1}{kT^{2\mathcal{C}k}\log(T)}
\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}
n\mathbb{P}\left[\tau_{\mathcal{H}}^1 > n^{1/2k\mathcal{C}} \,\middle|\, q_0^a = x, q_0^b = y\right] &\sim n\left[\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{(x+y)/2} \frac{xy}{\pi\mathcal{C}^2\sqrt{\lambda\mu}} \frac{1}{kn\log(n^{1/2k\mathcal{C}})}\right] \\
&\sim \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{(x+y)/2} \frac{xy}{\pi\mathcal{C}^2\sqrt{\lambda\mu}} \frac{1}{k\log(n^{1/2k\mathcal{C}})}.
\end{aligned}$$

因此，

$$n\mathbb{P}\left[\tau_{\mathcal{H}}^1 > n^{1/2k\mathcal{C}} \,\middle|\, q_0^a = x, q_0^b = y\right] \to 0 \qquad \text{as } n \to \infty.$$

并根据 Gut（2013）中的定理 6.4.2，以概率收敛，

$$\frac{S_n - n\mathbb{E}\left[\tau_{\mathcal{H}}^1 \mathbb{1}_{\left\{\tau_{\mathcal{H}}^1 < n^{1/2k\mathcal{C}}\right\}}\right]}{n^{1/2k\mathcal{C}}} \to 0 \qquad \text{as } n \to \infty.$$

根据命题 B.1，$\hat{}\mathcal{A} := \lim_{n\to\infty} \frac{n\mathbb{E}[\tau \mathbb{I}\{\tau < n^{1/2k\mathcal{C}}]}{n^{1/2k\mathcal{C}}}$ 是一个常数。因此，采用与前一条类似的论证，以概率收敛，

$$\frac{t}{N_t^{1/2k\mathcal{C}}} \to \hat{\mathcal{A}} \qquad \text{as } t \to \infty,$$

或者等价地，

$$N_t \to \left(\frac{t}{\hat{\mathcal{A}}}\right)^{2k\mathcal{C}} \qquad \text{as } t \to \infty.$$

As b因此，利用序列 $t_n = tn^{1/2k\mathcal{C}}$，我们将过程 $s_{t_n} :=$ 分解为 $\sum^{N_{t_n}} X_i$ 当$_{j=1}$：

$$s_{t_n} = \underbrace{\frac{s_0}{\sqrt{n}}}_{\mathrm{I}_n} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{[n(t/\hat{\mathcal{A}})^{2k\mathcal{C}}]} (X_j)}_{\mathrm{II}_n} + \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{N_{t_n}} X_j - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{[n(t/\hat{\mathcal{A}})^{2k\mathcal{C}}]} X_j\right)}_{\mathrm{III}_n}$$

通过与上述类似的论证，当 $n \to \infty$ 时，

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_n &\Rightarrow 0 \\ \mathrm{III}_n &\Rightarrow 0 \\ \mathrm{II}_n &\Rightarrow W_{(t/\hat{\mathcal{A}})^{2k\mathcal{C}}} = W_{\hat{\mathcal{A}}^{-2k\mathcal{C}} \int_0^t \frac{1}{u^{1-2k\mathcal{C}}} du}. \end{aligned}$$

此外，在分布意义下，

$$W_{(t/\hat{\mathcal{A}})^{2k\mathcal{C}}} = \hat{\mathcal{A}}^{-k\mathcal{C}} \int_0^t \sqrt{\frac{1}{u^{1-2\mathcal{C}k}}} dW_u,$$

由此得证。

□

Proof of Theorem 3.11. 根据第3节所述的订单簿动力学，随机价格变动序列 $X_i \in \{-1, 1\}$ 相互独立。于是，如果 $\lambda = \mu$，

- 如果 $\alpha_t \sim t^s \log^m(t)$ 当 $t \to \infty$ 时，对任意 $s > 0$，$m \geq 0$，根据引理 3.8，对每个 x，$y \in \mathbb{N}$，

$$\mathbb{E}\left[\left(\tau_{\mathcal{H}}^1\right)^n \;\middle|\; q_0^a = x, q_0^b = y\right] < \infty.$$

证明过程与定理 3.10 的证明相同。

- 如果 $\alpha_t \sim t^{-1+s}$ 当 $t \to \infty$ 时，对任意 $s \in (0, 1]$，，则 $A_t \sim t^s/s$，并且根据引理 3.8

$$\mathbb{P}\left[\tau_{\mathcal{H}}^1 > T \;\middle|\; q_0^a = x, q_0^b = y\right] \sim \frac{xy}{\lambda^2 \pi} \frac{s}{T^s}$$

因此，

$$\begin{aligned} n\mathbb{P}\left[\tau_{\mathcal{H}}^1 > n^{1/s} \log(n) \;\middle|\; q_0^a = x, q_0^b = y\right] &\sim n\left[\frac{xy}{\lambda^2 \pi} \frac{s}{n \log^s(n)}\right] \\ &\sim \frac{xy}{\lambda^2 \pi} \frac{s}{\log^s(n)}. \end{aligned}$$

因此，由于 $s > 0$，

$$n\mathbb{P}\left[\tau_{\mathcal{H}}^1 > n^{1/s} \log(s) \;\middle|\; q_0^a = x, q_0^b = y\right] \to 0 \qquad \text{as } n \to \infty.$$

并根据 Gut（2013）中的定理 6.4.2，依概率，

$$\frac{S_n - n\mathbb{E}\left[\tau_{\mathcal{H}}^1 \mathbb{I}\{\tau_{\mathcal{H}}^1 < n^{1/s} \log(n)\right]}{n^{1/s} \log(n)} \to 0 \qquad \text{as } n \to \infty,$$

其中，根据命题（B.2），$\hat{\mathcal{B}} := \lim_{n\to\infty} \frac{n\mathbb{E}[\tau\mathbb{I}\{\tau<n^s\}\log(\frac{}{n^s}\quad n\ ])\log()}{}$ 是一个常数。因此，依概率，证明过程与定理 3.10 的证明类似，

$$\frac{t}{N_t^s \ln(N_t)} \sim \hat{\mathcal{B}} \qquad \text{as } t \to \infty,$$

换句话说，

$$N_t^s \log(N_t) \sim \frac{t}{\hat{\mathcal{B}}} \qquad \text{as } t \to \infty. \tag{15}$$

设 $\psi(t)$ 为 $f(t) := t^s \log(t)$ 的反函数。注意，ψ 是良定义的，因为 f 严格递增。根据定义，$\psi(t) = u$ 意味着 $f(u) = t$，换句话说，$u^s \log(u) = t$，或者 $\psi(t)^s \log(\psi(t)) = t$。因此，

$$\begin{aligned}
\psi(t) &\sim \frac{t^{1/s}}{\log(\psi(t))} \\
&\sim \frac{t^{1/s}}{(1/s)\log(\psi(t)^s)} \\
&\sim \frac{st^{1/s}}{\log(\psi(t)^s \log(\psi(t)))} \\
&\sim \frac{st^{1/s}}{\log(t)}
\end{aligned}$$

因此，根据公式（15），

$$f(N_t) \sim \frac{t}{\hat{\mathcal{B}}}$$

又由于 ψ 是 f 的反函数，因此

$$N_t \sim \psi\left(\frac{t}{\hat{\mathcal{B}}}\right) \sim \frac{s\left(\frac{t}{\hat{\mathcal{B}}}\right)^{1/s}}{\log\left(\frac{t}{\hat{\mathcal{B}}}\right)} \sim \frac{s}{\hat{\mathcal{B}}^{1/s}} \frac{t^{1/s}}{\log(t) - \log(\hat{\mathcal{B}})}$$

利用序列 $t_n = t(n\log(n))^s$，可得，

$$\begin{aligned}
N_{t_n} &\sim \frac{s}{\hat{\mathcal{B}}^{1/s}} \frac{(tn^s \log^s(n))^{1/s}}{\log(tn^s \log^s(n)) - \log(\hat{\mathcal{B}})} \\
&\sim \frac{s}{\hat{\mathcal{B}}^{1/s}} \frac{t^{1/s} n \log(n)}{\log(tn^s \log^s(n)) - \log(\hat{\mathcal{B}})} \\
&\sim \frac{s}{\hat{\mathcal{B}}^{1/s}} \frac{t^{1/s} n}{\frac{\log(tn^s \log^s(n))}{\log(n)} - \frac{\log(\hat{\mathcal{B}})}{\log(n)}} \\
&\sim \frac{s}{\hat{\mathcal{B}}^{1/s}} \frac{t^{1/s} n}{s} \sim \frac{t^{1/s} n}{\hat{\mathcal{B}}^{1/s}}
\end{aligned}$$

最后，我们按照定理 3.10 的证明，将过程 $s_{t_n} := \sum_{j=1}^{N_{t_n}} X_i$ 分解，并使用其中相同的论证。

- 如果对每个 $s < 0$ 都有 $\alpha_t \sim t^s \log^m(t)$，或者如果 $\alpha_t \sim k/t$，那么对于任意在无穷远处具有指数 $1/\rho$ 的正则变序列，其中某个 $\rho \in (0, 1]$，

$$n\mathbb{P}\left[\tau_{\mathcal{H}}^1 > b_n \;\middle|\; q_0^a = x, q_0^b = y\right] \to \infty \qquad \text{as } n \to \infty.$$

因此，N_t 无法通过重新缩放来确保满足大数定律，且价格过程不会收敛。

□

B 辅助结果

命题 B.1。*Let τ be positive random variable such that $\mathbb{P}[\tau > t] \sim \frac{\Theta}{t^{2k\mathcal{C}}\log(t)}$ ~~with $2k\mathcal{C} \leq 1$~~, Θ a constant and define the sequence*

$$X_n = \frac{n}{n^{1/2k\mathcal{C}}}\tau \mathbb{1}_{\{\tau < n^{1/2k\mathcal{C}}\}}.$$

Then, $\Psi_n := \mathbb{E}[X_n]$ converges as $n \to \infty$.

Proof. 设 $F_\tau(t)$ 表示 τ 的累积分布函数。由于 τ 是正随机变量,

$$\mathbb{E}[g(\tau)] = \int_0^\infty g(x) dF_\tau(x),$$

其中，最后一个积分应理解为黎曼–斯蒂尔切斯积分。令 $g(x) = \frac{n}{n^{1/2k\mathcal{C}}} x \mathbb{1}_{\{x < n^{1/2k\mathcal{C}}\}}$，并代入~~上述~~公式,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\frac{n}{n^{1/2k\mathcal{C}}}\tau \mathbb{1}_{\{\tau < n^{1/2k\mathcal{C}}\}}\right] &= \frac{n}{n^{1/2k\mathcal{C}}} \int_0^{n^{1/2k\mathcal{C}}} x dF_\tau(x) \\
&= -\frac{n}{n^{1/2k\mathcal{C}}} \int_0^{n^{1/2k\mathcal{C}}} x d(1 - F_\tau(x))
\end{aligned}$$

注意到左边为 Ψ_n ，并进行分部积分,

$$\begin{aligned}
\Psi_n &= -\frac{n}{n^{1/2k\mathcal{C}}} \cdot x\mathbb{P}[\tau > x]\Big|_{x=0}^{n^{1/2k\mathcal{C}}} + \frac{n}{n^{1/2k\mathcal{C}}} \int_0^{n^{1/2k\mathcal{C}}} \mathbb{P}[\tau > t] dt \\
&= -n\mathbb{P}\left[\tau > n^{1/2k\mathcal{C}}\right] + n^{1-1/2k\mathcal{C}} \int_0^{n^{1/2k\mathcal{C}}} \mathbb{P}[\tau > t] dt \\
&\sim -n\frac{\Theta}{t^{2k\mathcal{C}}\log(t)}\Big|_{t=n^{1/2k\mathcal{C}}} + n^{1-1/2k\mathcal{C}} \int_0^{n^{1/2k\mathcal{C}}} \frac{\Theta}{t^{2k\mathcal{C}}\log(t)} dt \\
&\sim -\frac{\Theta}{2k\mathcal{C}\log(n)} + n^{1-1/2k\mathcal{C}} \int_0^{n^{1/2k\mathcal{C}}} \frac{\Theta}{t^{2k\mathcal{C}}\log(t)} dt
\end{aligned} \tag{16}$$

~~然后，利用洛必达法则，将 Ψ_n 视为 n 的（可微）函数，并令 $\Theta =$~~$\widehat{\Theta}/2k\mathcal{C}$,

$$\frac{d}{dn}\Psi_n \sim \frac{\widehat{\Theta}}{n\log^2(n)} + n^{-1/2k\mathcal{C}} \int_0^{n^{1/2k\mathcal{C}}} \frac{\Theta}{t^{2k\mathcal{C}}\log(t)} dt + n^{1-1/2k\mathcal{C}} \frac{\widehat{\Theta}}{n\log(n)}$$

这显然为正，因此 Ψ_n 是一个递增序列。此外，由式（16）可知，存在常数 ϵ 和 T_ϵ ，使得如果 $n^{1/2k\mathcal{C}} > T_\epsilon$,

$$\Psi_n \leq -\frac{\Theta}{2k\mathcal{C}\log(n)} + n^{1-1/2k\mathcal{C}} \int_0^{T_\epsilon} \frac{\Theta}{t^{2k\mathcal{C}}\log(t)} dt + n^{1-1/2k\mathcal{C}} \int_{T_\epsilon}^{n^{1/2k\mathcal{C}}} \frac{\Theta}{t^{2k\mathcal{C}}\log(t)} dt$$

且由于 $2k\mathcal{C} < 1$，因此 $1 - 1/2\mathcal{C} \leq 0$ ，从而

$$\begin{aligned}
\Psi_n &\leq -\frac{\Theta}{2k\mathcal{C}} + \int_0^{T_\epsilon} \frac{\Theta}{t^{2k\mathcal{C}}\log(t)} dt + n^{1-1/2k\mathcal{C}} \int_{T_\epsilon}^{n^{1/2k\mathcal{C}}} \frac{\Theta}{t^{2k\mathcal{C}}} dt \\
&= -\frac{\Theta}{2k\mathcal{C}} + \int_0^{T_\epsilon} \frac{\Theta}{t^{2k\mathcal{C}}\log(t)} dt + n^{1-1/2k\mathcal{C}} \frac{n^{-1+1/2k\mathcal{C}} + C(T_\epsilon)}{-2k\mathcal{C}+1} \\
&\leq -\frac{\Theta}{2k\mathcal{C}} + \int_0^{T_\epsilon} \frac{\Theta}{t^{2k\mathcal{C}}\log(t)} dt + \frac{1}{1-2k\mathcal{C}} + \frac{C(T_\epsilon)}{1-2k\mathcal{C}} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

因此， Ψ_n 也有界，并根据序列的单调收敛定理，它收敛到一个常数极限。

□

命题 B.

2 *Let τ be positive random variable such that $\mathbb{P}[\tau > t] \sim \frac{\Theta}{t^s}$ with $0 < s \leq 1$ with Θ a constant. Define the sequence* $X_n = \frac{n}{n^{1/s}\log(n)}\tau \mathbb{1}_{\{\tau < n^{1/s}\log(n)\}}$.

Then, $\Phi_n := \mathbb{E}[X_n]$ converges as $n \to \infty$.

Proof. 与前一个结果一样，令 $F_\tau(t)$ 表示 τ 的累积分布函数。那么，同样，由于 τ是正随机变量，

$$\mathbb{E}[g(\tau)] = \int_0^\infty g(x) dF_\tau(x).$$

将 $g(x) = \frac{n}{n^{1/s}\log(n)} x \mathbb{1}_{\{x < n^{1/s}\log(n)\}}$ 代入上述公式，

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\frac{n}{n^{1/s}\log(n)}\tau \mathbb{1}_{\{\tau < n^{1/s}\log(n)\}}\right] &= \frac{n}{n^{1/s}\log(n)} \int_0^{n^{1/s}\log(n)} x dF_\tau(x) \\
&= -\frac{n}{n^{1/s}\log(n)} \int_0^{n^{1/s}\log(n)} x d(1 - F_\tau(x))
\end{aligned}$$

注意到左边为 Φ_n，并进行分部积分，

$$\begin{aligned}
\Phi_n &= -\frac{n}{n^{1/s}\log(n)} \cdot x\mathbb{P}[\tau > x]\Big|_{x=0}^{n^{1/s}\log(n)} + \frac{n}{n^{1/s}\log(n)} \int_0^{n^{1/s}\log(n)} \mathbb{P}[\tau > t] dt \\
&= -n\mathbb{P}\left[\tau > n^{1/s}\log(n)\right] + \frac{n^{1-1/s}}{\log(n)} \int_0^{n^{1/s}\log(n)} \mathbb{P}[\tau > t] dt \\
&\sim -n\frac{\Theta}{t^s}\Big|_{t=n^{1/s}\log(n)} + \frac{n^{1-1/s}}{\log(n)} \int_0^{n^{1/s}\log(n)} \frac{\Theta}{t^s} dt \\
&\sim -\frac{\Theta}{\log^s(n)} + \frac{n^{1-1/s}}{\log(n)} \int_0^{n^{1/s}\log(n)} \frac{\Theta}{t^s} dt \\
&\sim -\frac{\Theta}{\log^s(n)} + \frac{n^{1-1/s}}{\log(n)} \cdot \frac{\Theta t^{-s+1}}{-s+1}\Big|_{t=0}^{n^{1/s}\log(n)} \\
&\sim -\frac{\Theta}{\log^s(n)} + \frac{n^{1-1/s}}{\log(n)} \cdot \frac{\Theta n^{-1+1/s}\log^{-s+1}(n)}{-s+1} \\
&\sim -\frac{\Theta}{\log^s(n)} + \frac{\Theta}{(-s+1)\log^s(n)} \\
&\sim \frac{(2-s)\Theta}{(1-s)\log^s(n)}
\end{aligned}$$

这表明它渐近递减至零，因此运用与前一个定理类似的论证可得 Φ_n 收敛。

□