arXiv:2302.00859v2 [math.NT] 9 Feb 2023

具有双椭圆纤维化的曲面中的有限轨道与截面的挠值

Pietro Corvaja、Jacob Tsimerman、Umberto Zannier

2023年2月13日

摘要

我们研究具有双椭圆纤维化且带有两个截面的曲面。我们考察由此诱导的平移自同构下的轨道，并证明在自然条件下，有限轨道都局限于一条曲线上。这与 Cantat-Dujardin 最近的工作方向相似（也受其启发）， [5], 不过我们采用了截然不同的方法，得出了相关但不同的结果。

作为类似论证的一个应用实例，我们证明了 Zilber-Pink 猜想的一个新情形，即定理 1.5：对于某些定义在二维基底上的概形，这一问题此前已知会带来相当大的困难。

大多数结果都依赖于若干其他成果，包括 Bakker 与本文第二作者近期关于“ Ax-Schanuel 型”的定理；我们还将一个函数条件与 Shioda 关于勒让德概形上非分歧截面的定理联系起来。在其中一个证明中，我们还使用了 Yuan-Zhang [26]（或 Dimitrov-Gao-Habegger [14]）近期得到的高度不等式。

最后，在附录中，我们证明了复数域上的相对 Manin-Mumford猜想等价于其在代数数域上的版本。

1 引言

本文最初源于 S. Cantat 和 R. Dujardin 的研究。他们在论文 [5], 中研究射影曲面的自同构的非初等子群，尤其是其轨道。他们证明了若干结果，表明在适当条件下，有限轨道被限制在有限条曲线的并中。

双椭圆纤维化。当曲面 $\mathcal{X}$ 带有双椭圆纤维化时，会出现重要情形；具体而言，我们有两个有理映射 λ、μ： $\mathcal{X} \to \mathbb{P}_1$，使得对于每一个映射，一般纤维都是 $\mathcal{X}$ 上带有零截面的椭圆曲线。[1] 我们假设态射 $(\lambda,\ \mu)$: $\mathcal{X} \to \mathbb{P}^2_1$ 的次数有限，这相当于说两个椭圆纤维化彼此不同。它们分别对应于有理基底上的两个椭圆概形，记作 $\mathcal{E}$、$\mathcal{F}$，其纤维分别记作 E_a、F_b。

为简便起见，我们始终假设这些概形都不是等变的。 1.
我们还可以假设 $\mathcal{X}$ 是光滑且射影的。

我们进一步假设有两个截面 σ、τ，分别对应 $\mathcal{E}$、$\mathcal{F}$，且它们都不是挠截面。这些截面定义了 $\mathcal{X}$的有理自同构 $\tilde{\sigma}$、$\tilde{\tau}$，例如令

$$\tilde{\sigma}(p) := p + \sigma(\lambda(p)), \qquad p \in \mathcal{X}, \tag{1.1}$$

其中加法是在 $E_{\lambda(p)}$上进行的；将 σ替换为 τ 时，情况也类似。

这是 [5], 背景下的一个关键例子。如上所述，作者证明了，除去某条适当的曲线后，所有点在相关群作用下的轨道都是无限的；在当前情形中，该群由 $\tilde{\sigma}$、$\tilde{\tau}$生成。

目标。本文的目标之一是利用一种完全不同的方法，在这些情形下证明更精确的结论。具体而言，我们将证明：如果一个点位于预先指定的有限条曲线的并之外，那么即使只考虑群中一个“较小”的部分，该点的轨道也已经是无限的。

一个例子。四次费马曲面是这一情形中一个著名而优美的例子，它在 $\mathbb{P}_3$ 中由 $x^4 + y^4 = z^4 + w^4$给出。（例如，参见论文 [9] ，该文利用双重纤维化的存在研究了该曲面的算术性质。）Swinnerton-Dyer 已构造出如下带截面的椭圆纤维化：对于 $\mathcal{X}$ 上的一条直线（这样的直线有 48 条），考虑经过该直线的平面束，它与$\mathcal{X}$ 相交所得为该直线加上平面内的一条三次曲线。取另一条直线，令其与这条三次曲线相交，便得到一个截面；可将其取作零截面，于是得到一个椭圆族。再取一条直线，则得到另一个截面。

可以证明，在这种情形下出现的自同构可正则地延拓到$\mathcal{X}$。不过，我们的方法（采用适当的定义后）甚至适用于无法延拓为正则自同构的有理自同构。

更高维情形? 在本文中，我们仅考虑曲面的情形，这是受到前文提及的 Cantat-Dujardin 工作的启发。不过，原则上，这些方法也

[1]注意，若允许其中一条底空间曲线具有正亏格，则会推出另一种概形是等平凡的，因为从亏格为一的曲线到正亏格曲线的非恒定态射的存在，意味着该亏格为一的曲线是目标曲线的雅可比簇的一个因子。

适用于更高维中的类似情形，例如簇上维数为 $n \geq 3$ 的 n椭圆纤维化情形。这些纤维化很容易构造，例如取复数域中的三个椭圆曲线 2-网即可。

但在维数为 ≥ 3 时，还存在其他可能性；例如在维数为 3 时，我们可以同时考虑曲面上的椭圆纤维化，以及以阿贝尔曲面为纤维、底空间为曲线的纤维化（可能是在双有理意义下）。我们认为，本文的方法或许可以应用于这一更一般的情形，只需用 Yuan-Zhang 关于高度的近期结果替代 Silverman-Tate 界。我们将这一问题留待未来研究，并将讨论范围限于当前情形，这正是我们最初的研究动机。

回到我们的情形，记由 $\tilde{\sigma}$、$\tilde{\tau}$ 生成的群为 Γ，我们关注 $\mathcal{X}$ 中经由 Γ 具有有限轨道的点集。从现在起，我们假设所有这些对象都定义在某个数域 K 上。

关于自同构。一般而言，这些自同构并非处处有定义，但每个自同构在一个有限集之外都有良好定义。此外，它们可能将某条（有理）曲线压缩为一个点；这一现象源于通常无法假设两个椭圆纤维化都是相对极小的。鉴于这种可能性，我们通过给出以下定义来避开不定点。

对于点 $p \in \mathcal{X}$，我们设

$$O(p) = \{\tilde{\sigma}^m \tilde{\tau}^n(p) : \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad \tilde{\sigma}^m \tilde{\tau}^n \text{ is defined at } p\}. \tag{1.2}$$

我们关注满足 $O(p)$ 有限的 p 的集合，并将证明以下结论

Theorem 1.1. 满足 $O(p)$ 有限的点 $p \in \mathcal{X}$ 位于有限条 F_x 型曲线的并中。

在温和的假设下，该定理实际上蕴含着其 Γ-轨道有限的点集是有限的。例如，更确切地说，我们可以推出

Corollary 1.2. 假设映射 $(\lambda, \mu) : \mathcal{X} \to \mathbb{P}_1^2$ 有限。那么，只有有限多个点 $p \in \mathcal{X}$ 满足所有集合 $O(\tilde{\sigma}^h(p))$，$h \in \mathbb{N}$ 都是有限的。

由定理推出推论。注意，事实上该推论是定理的直接推论，只需将 p 替换为 $\tilde{\sigma}^h(p)$。为证明这一点，注意若 p 是推论中所涉及的点之一，则所有 $\tilde{\sigma}^h(p)$、$h \in \mathbb{N}$ 都落在某个有限并 $U = \bigcup_{x \in A} F_x$ 中，其中 A 是 $\mathbb{P}_1$ 的有限子集。现在，由于根据假设这些纤维化彼此不同，对于任意 x，只有有限条曲线 $\tilde{\sigma}^h(F_x)$ 可能具有 F_y 这种形式；否则，μ 将有无限多个纤维彼此同构，而 μ-纤维化便会是等平凡的，这与假设矛盾。

假设我们的集合是无限的，那么对某个不可约分支 F' 与某个 F_a 的交集也将是无限的，其中 $a \in A$ 取适当值。于是，对每个 $h \in \mathbb{N}$，曲线 $\tilde{\sigma}^h(F')$ 都将包含在 U 中。但这样一来，某个非零次幂 $\tilde{\sigma}^q$ 就会稳定 F'。另一方面，根据假设，函数 λ: $F' \to \mathbb{P}_1$ 是泛满射，这意味着 F' 中存在一点 p'，使得 $\tilde{\sigma}^q$ 在 p' 处为无限阶。但该轨道位于 F' 与 p' 处的 λ-纤维的交集中，而根据假设，该交集是有限的。矛盾由此证明了所述结论。

□

实际上，这一论证表明，对于同样的结论，只需让 h遍历一个充分大的整数集合，而不是遍历整个 $\mathbb{N}$。

此外，该推论断言：

只有有限多个点 $p \in \mathcal{X}$使得集合 $\{\tilde{\sigma}^m\tilde{\tau}^n\tilde{\sigma}^h(p)$ m、 n、 $h \in \mathbb{Z}\}$是有限的。

1.1 一种改进

我们可以用以下术语表述上述情形：我们有一个在开子集 $\mathcal{X}_0$ of $\mathcal{X}$ 上的概形，其纤维是三条椭圆曲线的乘积。具体而言，对于一个点 $x \in \mathcal{X}_0$，我们将椭圆曲线的乘积

$$E_{\lambda(x)} \times F_{\mu(\tilde{\sigma}(x))} \times E_{\lambda(\tilde{\tau}\circ\tilde{\sigma}(x)))}.$$

这里， $X_0 \subset X$ 是从 $\mathcal{X}$ 中移除某些相关映射未定义或某条椭圆曲线退化的部分后得到的；因此， X_0 是 X 中有限多条曲线和有限个点的补集。

为简化记号，我们用 $\mathcal{E}_i \to \mathcal{X}_0$、 $i = 1$、2、3 表示相应的椭圆概形。

我们有一个显然的截面 ξ，其定义如下：

$$\xi(p) = \sigma(p) \times \tau(\tilde{\sigma}(p)) \times \sigma((\tilde{\tau} \circ \tilde{\sigma})(p)),$$

这里我们简化了记号，将 $\sigma(\lambda(p))$ 记作 $\sigma(p)$，将 $\tau(\mu(p))$ 记作 $\tau(p)$。

借助 Bakker 与第二作者近期的一项结果，我们将证明定理 1.1 的一个变体，从某种意义上说，该变体更强。

我们首先指出，点 p 的轨道 $O(p)$ 显然是无限的，只要相关椭圆曲线上的 $\sigma(p)$ 或 $\tau(p)$ 中任一个具有无限阶。于是，研究两个截面都具有有限阶的点 p 就有了意义。

Definition 1.3. 我们通过以下方式定义集合 T_λ, T_μ

$$T_\lambda = \{x \in \mathcal{X}_0 : E_{\lambda(x)}\sigma(x) \text{ has finite order on } E_{\lambda(x)}\}$$

对于 τ, μ，定义方式类似。

已知这些集合各自都是可数无穷曲线并（这并不显然，但例如可以通过所谓的贝蒂映射的非恒定性来证明，或参见[11], [28]）。因此，交集 $T_\lambda \cap T_\mu$ 预计是一个可数的扎里斯基稠密集。类似地，满足 $\tilde{\sigma}(x) \in T_\mu$ 的点集 $x \in T_\lambda$ 也再次是扎里斯基稠密的。

我们希望证明，若再增加第三个条件，就会得到一个退化性结论。为此，我们定义例外集

$$\mathcal{E}x := \{x \in \mathcal{X} : x \in T_\lambda,\ \tilde{\sigma}(x) \in T_\mu,\ \tilde{\tau} \circ \tilde{\sigma}(x) \in T_\lambda\}. \tag{1.3}$$

THEOREM 1.4. 集合 $\mathcal{E}x$ 包含于有限条曲线的并中。

对于这里考察的群这一特殊情形，这些结果在某种程度上改进了 [5] 的结论。[2]

1.2 二维基底上的贝蒂映射与相对 Manin-Mumford 猜想

在构思这项工作时，我们发现它与其他一些问题存在若干联系。

(1) 关于 Ax-Schanuel 和贝蒂映射。已知算术方法的应用促使我们研究与所谓的贝蒂映射有关的新问题，而贝蒂映射又与函数超越性及 Ax-Schanuel 型定理相关；我们尤其提出了论文 [2] 所解决的问题。

(2) 相对 Manin-Mumford。某些方法可以处理齐尔伯-平克猜想中关于扭点的一些情形，而这些问题直到最近才得到解答。这里我们关注齐尔伯-平克猜想中有关所谓相对 Manin-Mumford 问题的部分：将阿贝尔概形的截面的挠值限制在适当的闭子簇中。对于基底为曲线的阿贝尔概形，这一问题基本上已经得到处理（近期结果及以往研究的讨论见 [7] ）。在 [17] 中，Ph. Habegger 通过一种略显特设的方法，处理了基底为曲面的椭圆概形的一个实例。最近，Gao 和 Habegger 宣布，他们已对任意维数的簇给出了完整解答。本文采用的方法依赖 Bakker-Tsimerman 关于 Ax-Schanuel 型结果，并结合 Yuan-Zhang 关于高度的结果，或许能为他们的结果提供一种部分不同的证明。这里我们只列举其中一个例子

[2]另一方面，论文 [5] 探讨了一个更为一般的情形，并采用了完全不同的方法。

事实上，这个例子已出现在本文的早期版本中，当时 Gao-Habegger 尚未宣布其结果。

更具体地说，我们将证明以下定理

THEOREM 1.5.：设 $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$ 是曲面 $\mathcal{X}$ 上两两非同源的椭圆概形，且 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 是非挠截面（均定义在 $\overline{\mathbb{Q}}$ 上）。那么，只有有限多个 $x \in \mathcal{X}$ 满足：对于 $i = 1$， $\sigma_i(x)$ 在 $\mathcal{E}_i$ 上是挠点，其中 2 、 3。

为了证明这一结果，除了使用 Bakker-Tsimerman 提到的结果外，我们还将用到 Yuan-Zhang 关于截面的取值的高度不等式的近期结果。

此前的结果都可以作为这一结果的特例推出。不过，我们更倾向于在不借助这些工具的情况下给出独立证明，其中的论证或许也能用于其他问题。

(3) 关于 $\mathbb{C}$ 上的相对 Manin-Mumford 猜想。尽管 Gao-Habbeger 已宣布证明了 $\overline{\mathbb{Q}}$ 上簇的情形，我们意识到，本文采用的超越方法允许通过特化论证，形式化地推出任意复基底上的一般情形。在附录中，我们给出了这一推论的证明。 [3]

(4) 勒让德概形的截面分歧。与往常在应用 Pila-Wilkie 计数时一样，最终必须处理相关簇的所谓代数部分，并证明该部分为空（或很小）。进而，这会引出函数型问题。在我们的情形中，对定理 1.4 中代数部分的处理，使我们得到了一个看似具有独立意义的结论，涉及曲线上的双椭圆概形。具体而言，我们证明了以下结果；该结果似乎确有独立价值，而且我们未能在文献中找到相关论述。

THEOREM 1.6. 设 $\mathcal{E}$ 是定义在复代数曲线 B 上的非等构椭圆概形，具有一个非挠截面 σ，并考虑 $B \times B$ 内的一条不可约代数曲线 T，满足以下性质：对于一般的 $(x, y) \in T$，存在一个非零循环同源 $\phi: E_x \to E_y$，使得 T 上由 $\phi \circ \sigma$ 和 σ 给出的截面线性相关，即存在非零整数 a, b，使得 $a\phi(\sigma)(x) = b\sigma(y)$。那么， ϕ 是一个同构。

为证明这一点，我们发现有必要援引 Shioda 关于勒让德概形中非挠截面的定义域分歧的一项结果。下文将对此作进一步说明。

[3] Ph. Habegger 告知我们，他和 Gao 也提出了一种从 $\overline{\mathbb{Q}}$ 到 $\mathbb{C}$的约化方法，与我们的方法略有不同。

2 证明

下文中，我们固定一个数域 K，使得该簇、这些纤维化和截面均定义在其上，并且 $\tilde{\sigma}$、$\tilde{\tau}$ 的所有不定点都是 K-有理的。

我们首先证明定理 1.1。该证明将采用 [21] 中针对超越簇上有理点的 Pila-Wilkie 估计。不过，这并非自动成立，因为我们现在是在曲面上进行研究，并且出现了一个额外变量。事实证明，该证明可以保持足够的一致性，从而处理这一自由度。我们相信，这可能对未来的应用有所帮助；这也是我们加入这一论证的另一个动机，而不是仅仅援引后续的论证和结果。

我们回顾下面的引理，它直接由 Silverman 和 Tate 首先证明的结果推出，实际上，那些结果适用于更为广泛的情形。稍后我们将在这一背景下需要 Yuan-Zhang 最近证明的一个更强结果；Dimitrov-Gao-Habegger 在 [14] 中也得到了一个类似的、足以满足我们需要的结果。

我们用 $h(x)$ 表示代数数（或点） x 的 Weil 高度。

LEMMA 2.1. 存在一个数 C，使得对于每个 $x \in \mathbb{P}_1$，如果 $\sigma(x)$ 在 E_x 上具有有限阶（或者 $\tau(x)$ 在 F_x 上具有有限阶），则有 $h(x) < C$。

注意到，由于这些截面被假定为非挠的，这些点自然都是代数点。对于引理中的界，我们可以应用所引结果，因为我们假设椭圆概形不是等平凡的。（参见 [28, 命题 3.2，第 69 页，其中给出了一个简单且自成一体的论证。）

高度有界将在多个方面发挥作用，包括使我们能够将相关点限制在指定的紧集内（如论文 [23] ——尤其是引理 8.2 及后续引理——中所述）。

另一个重要工具是以下结果：

LEMMA 2.2. 存在一个常数 $c = c(\mathcal{X}, \sigma, \tau)$，使得对于任意满足 $\sigma(x)$（分别为 $\tau(x)$）是挠点、且在 E_x（分别为 F_x）上的恰好阶为 N 的 $x \in \mathbb{P}_1$，都有

$$N \leq c[\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}]^2(1 + h(x))$$

.

这一版本（作为 [23]的引理 7.1 出现）归功于 S. David。Masser 曾得到一个类似但稍弱的结果（在此处仍然足够）；证明概要见 [28] 中的附录 D（由 Masser 撰写）。

现在设 $p \in \mathcal{X}_0$ ，使得 $O(p)$是有限的。显然， p 是一个代数点，我们记 $a = \lambda(p)$ $b = \mu(p)$为 $\in \overline{\mathbb{Q}}$，于是 $p \in E_a \cap F_b$。

现在我们可以假设 $\tau(b)$ 在 F_b 上具有有限阶 m，且点 $\tilde{\tau}^r(p), r = 0, 1, \ldots, m-1$ 在 E_a 上具有有限阶 n_r。

如果我们对 m 有一个上界，那么 b 就属于一个由该上界确定的有限集，因为 τ 不是挠截面；因此， p 属于 τ 的有限个纤维之并。因此，为了证明定理 1.1，在下文中我们可以假设 m 大于任意给定的数。

我们现在注意到，曲线 $F_b^0 := F_b \cap \mathcal{X}_0$ 可以视为两个带截面的椭圆概形的底曲线。具体而言，我们将曲线 $E_{\lambda(z)}$、 $E_{\lambda(z+\tau(b))}$ 及其各自的两个截面与 $z \in F_b^0$ 关联起来，截面定义如下

$$s_0(z) := \sigma(\lambda(z)) \quad \text{and} \quad s_1(z) := \sigma(\lambda(z + \tau(b))).$$

这给出了一个在 F_b^0 上的乘积概形，其截面为 (s_0, s_1)。

我们注意到两点：

1. 这两个截面都不是（恒等地）挠的。根据假设，这一点成立；否则， σ 本身就会恒等地为挠。

2. 此外，当 m 足够大时，所讨论的两个椭圆概形不同源。事实上，若不然，坏约化轨迹就会相同，因而在平移 $\tau(b)$ 下保持不变。特别地，由于该轨迹非空（因为这些概形非等平凡），坏轨迹的基数至少为 m。当 m 足够大时，这不可能成立（因为 λ 作为 F_b 上的映射，其次数有界），从而证明了我们的论断。

继续之前，请注意，由伽罗瓦共轭，我们可以在全文中将 b （以及 p）替换为其在 K 上的任一共轭。由于 b 的高度有界，我们于是可以假设 b 位于 $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ 的一个预先指定且足够大的紧集 Δ 中，该紧集不包含 μ、 λ 或 $\lambda \circ \tilde{\tau}$ 的任何有限个坏约化点（实际上，我们甚至可以假设 Δ 包含 b 在 K 上至少一半的共轭；目前这里还不需要这一点，关于这些内容见 [23] 的引理 8.2）。

在这一阶段，我们将证明分为两部分。第一部分大致对应于 [23], 中结果的一个统一版本，我们将沿用该文的思路，并简要说明各个步骤及所需的修改。

回顾一下，我们假设 m，也就是说， $\tau(b)$ 的挠阶足够大（以便论证接下来的步骤）。

为了定义我们的分类讨论，对于 $r = 0$、1、.....、$m-1$，我们令 n_r 表示 σ 在点 $\lambda(p + r\tau(b))$ 处的阶：我们确实可以假设 σ 在 $E_{\lambda(p+r\tau(b))}$ 上是有限阶的，否则 $O(p)$ 显然是无限的。

第一种情况：对于某个 r，我们有 $n_r > m^5$ 。

对于紧集 Δ 中的 b，我们首先从 $F_b(\mathbb{C})$ 中移除相对于 $\lambda(z)$ 和 $\lambda(z + \tau(b))$ 的坏约化集合的一个极小开邻域。随着 b 在 Δ 中变化，我们可以平滑地进行这一操作。（这相当于移除 λ 和 $\lambda \circ \tilde{\tau}$ 的奇异纤维的小邻域，并将其限制在 $b \in \Delta$ 对应的 F_b 上。）事实上，我们可以用实代数函数来表示这些邻域；这很重要，因为这些函数是可定义的（在 o-极小结构 $\mathbb{R}_{an,\ exp}$ 中），并能使我们应用 Pila-Wilkie 的结果。（关于这些概念的基础知识，另见 [28], ；其中还概述了与此处相关的证明。）实际操作中，这相当于假设 Δ 是可定义的。

然后，我们用有限个小的紧单连通集（同样是可定义的）覆盖 $F_b(\mathbb{C})$ 中的补紧集，使得对于其中任意一个集内的 z ，我们都可以解析地表示与曲线 $E_{\lambda(z+i\tau(b))}$ 对应的复环面的周期 ω_{1i}、ω_{2i}、$i = 0$、1，以及该截面的椭圆对数 $\ell_i(z)$。

注意，这些函数也依赖于 b（为方便记号，我们没有明确写出这一点）；但由于 b 位于一个紧集内，我们可以进一步假设这些表达式对于小圆盘 $\Delta_1 \subset \Delta$ 内的 b 一致成立且具有解析性。

对于在这些有限个小紧集中的每一个内变化的 z ，我们还可以写成：

$$\ell_i(z) = \beta_{1i}(z)\omega_{1i}(z) + \beta_{2i}(z)\omega_{2i}(z), \qquad i = 0, 1, \tag{2.4}$$

对于实解析函数 β_{1i}、β_{2i} （也关于 $b \in \Delta_1$ 解析地依赖）。注意，当且仅当 $\beta_{1i}(z)$、$\beta_{2i}(z)$ 是有理数（其公分母等于 $s_i(z)$ 的阶）时， $s_i(z)$ 是挠点（位于 $E_{\lambda(z+i\tau(b))}$ 上）。

我们选取所讨论的紧集之一，其中包含 z 的一个取值，记作 ζ，并且 $s_0(\zeta)$ $s_1(\zeta)$ 都是挠点（分别位于相应的曲线上），且其最大阶为 $n > m^5$。（这个 ζ 应为 $p + r\tau(b) = \tilde{\tau}^r(p)$， $0 \le r \le m-1$ 的形式。）

如上，由于 ζ 具有有界高度，根据 [23], 的引理 8.2，我们可以假设紧集与预先给定的一个足够小的开集不相交，该开集包含 λ所有坏约化点（这些点有限）。事实上，否则，由于覆盖中的紧集个数从一开始就已确定， ζ 的共轭中就会有正比例落在 $\mathcal{X}_0$的某个指定代数点附近，从而迫使 ζ 的高度大于任何指定的数（只要 m 足够大）。

根据引理 2.2，由于 $h(\zeta)$有界（根据前面的引理 2.1），我们得到 $m^5 < n \leq c[K(\zeta) : K]^2$。另一方面，通常的除法方程给出 $[K(b) : K] \ll m^2 \ll n^{2/5}$。因此 $[K(b,\zeta) : K(b)] \gg n^{1/2-2/5} = n^{1/10}$。

于是，我们可以取 ζ 在 $K(b)$ 上的共轭 ζ_j、 $j = 1$、.....、 $n_1 \gg n^{1/10}$，从而在 $E_{\lambda(z+i\tau(b))}$ $(i = 0, 1)$ 上得到同时的挠值 $s_i(\zeta_j)$，对所有 $j = 1$、.....、 n_1 均成立。

注意，由引理 2.1 可知，每个 ζ_j 的高度均一致有界；再由 [23] 的引理 8.2，我们可以假设这些共轭中至少有 $c_1 n_1$ 个位于同一个紧集内，现记为 $\Omega = \Omega_b \subset F_b(\mathbb{C})$，它具有与上述相同的性质，即上述函数在 Ω 中定义良好且解析：这里 $c_1 > 0$ 表示一个仅依赖于原始数据的正数。因此，我们可以假设 Ω 对于 j =1、.....、 l 均包含 ζ_j，其中 $l \gg n^{1/10}$。

每个 $\zeta_j, 1 \leq j \leq l$ 都对应一个有理点 $B(\zeta_j)$，其分母为 $\geq n > m^5$，位于 $\mathbb{R}^4$ 中由 $B(z) = B_b(z) := (\beta_{10}(z)\ \beta_{20}(z)\ \beta_{11}(z)\ \beta_{21}(z))$ 描述的实解析曲面上，其中 z 在 Ω 中变化。我们将此曲面记为 Z_b。

我们进一步指出，每个有理点 $\rho \in \mathbb{Q}^4$ 至多作为 $B(\zeta_j)$ 的值出现于 C_2 个点 ζ_j，其中 C_2 仅取决于初始数据：这是因为，对于给定的 ρ_1, ρ_2，函数 $\ell_i(z) - \rho_1\omega_{1i}(z) - \rho_2\omega_{2i}(z)$ 在 Ω 中的零点数有统一上界。反过来，这可由 [21], 中的引理 7.1 得出。唯一的区别在于，这里 b （甚至未出现在记号中）可能变化；但局部而言，该引理一致成立，证明也相同。（或者，也可以直接使用加布里埃洛夫定理，见 [3]。）

由此可知，由 $\{B(z) : z \in \Omega\}$ 给出的 Z_b 中的实解析曲面至少包含 l 个分母为 $\leq n^2$ 的有理点，其中如上所述 $l \gg n^{1/10}$。这些点的高度为 $\ll n^2$，其中隐含常数仅取决于所涉及的紧集，这些紧集假定从一开始便固定。

此时我们应用 Pila-Wilkie 论文 [25], 中的定理 1.9，对 Z_b 的超越部分中的这些有理点的数量作出界估计（定义见 [25] 或 [28]）。与 [23] 中的论证相比，当前论证的区别在于，此处 b 是变化的。更具体地说，我们可以先像上文那样将 Δ 分解为有限个小的可定义紧集的并 A_j，使得相关函数在并集 $Z := \bigcup_{b\in A_j} b \times \Omega_b \subset A_j \times \mathbb{R}^4$ 上解析。这个 Z 是一个可定义族，其中 Z_b 是纤维。

由 [25] 定理 1.9，我们得到， Z_b 的超越部分至多包含 $c(Z,\epsilon)T^\epsilon$ 个高度为 $\leq T$的有理点，对任意 $\epsilon > 0$均成立。

另一方面， Z_b 的代数部分是空的：这可由 Andr´e 在 [1], 中的结果，按照 [23] 中的方式应用得到。我们简要回顾一下这一推论的步骤。如果代数部分非空，则存在一条包含于 Z_b 中的实解析弧 U。这意味着，限制在该弧上的四个函数 β_{ij} 都与其中任意一个非恒定函数代数相关（如果它们全都是常数，情况则更简单）。但是，随后两个函数 ℓ_j,

限制在 U 上时，与 ω_{ij}、$i=1$、2、$j=0$、1 在这条实代数弧上的限制代数相关。然而，所有这些函数（局部地）都是复解析的，因此这种相关性将在它们的定义域上恒等成立，这与 Andr´e [4] 的上述结果相矛盾。

此时，取 $T=c_3n^2$ 并取 $\epsilon=1/10$，例如，我们将上述估计结合起来，得到 n的一个界。

至此，第一种情况的讨论结束。

现在我们来看

第二种情形：对于所有 r，我们都有 $n_r\le m^5$ 。

这意味着，在不同的 $\lambda(\tilde{\tau}^r(p))$ 处，σ 的挠点阶不会比 τ 在 $\mu(p)=b$ 处的挠阶 m 大太多。

策略与第一部分类似，但有理点的构造方式略有不同，而且证明代数部分为空也会稍有不同：不使用前面提到的 Andr´e 的结果，而采用一个自足的论证。

与第一部分一样，我们假设 b 位于紧集 Δ 中（该紧集不包含 μ 的坏约化点）。实际上，我们可以将 Δ 包含在稍大的紧集 Δ' 中，且该紧集具有相同的性质，以便能够安全地在 Δ 的边界上进行工作。现在，在 Δ 上局部而言，我们对曲线 F_η、$\eta\in\Delta$ 有一个环面表示；因此，我们可以用有限个包含于 Δ' 中的开单连通集 A_l 覆盖 Δ，使得对于其中某个 A_l 内的 η，对应于 F_η 的环面的周期 $\pi_1(\eta)$ $\pi_2(\eta)$ 在 A_l 上解析变化。我们还可以假设这些 A_i 是可定义的。

就我们的目的而言，我们可以一次只在每个 A_l 上进行工作，因此现在省略下标，并用 A 表示包含 b 的这些开集之一。

我们用 ξ 表示一个复变量，它位于对应于 F_η 的环面的（紧）基本域 $T(\eta)$ 中：$=\{t_1\pi_1(\eta)+t_2\pi_2(\eta):0\le t_1、t_2\le 1\}$。注意，对于 $\eta\in A$，这些基本域构成一个可定义族。现在，从每个基本域中移除一些小开圆盘，其圆心对应于限制在椭圆曲线 F_η 上的 λ 的坏约化点。剩余的区域记为 $T^*(\eta)$；对于这些圆盘边界的适当参数化，它仍将构成一个可定义族。

注意，如上所述，由于 a、b 和 $\lambda(p+r\tau(b))$ 具有有界高度（由引理 2.1 得出），我们可以假设这些点的环面代表落在 $T^*(b)$ 中。这里我们进一步说明。对于每个 l，以及对于 $\eta\in A_l$，我们按照上文所述，从 $T(\eta)$ 中移除

[4]实际上，尽管 Andr´e 证明了一个更一般的结果，但在这里我们甚至可以应用 D. Bertrand 之前的一个结果

围绕 λ 的坏约化点的非常小的圆盘（通过同构 $T(\eta) \cong F_\eta$，将 λ 视为 $T(\eta)$ 上的函数）。我们以代数方式（即以可定义方式）选择这些圆盘，使其随 η 在 A_l 中变化。现在设 $K_1 = K(p)$ 在 K 上的次数为 d_1，并考虑 p 在 K 上的共轭 p^g。由于 b 具有有界高度，我们可以假设 b [5] 至少有 $\gg d_1$ 个共轭落在 A_l 中的同一个 A 内。（事实上，A_l 的数量是固定的，而 $\gg d_1$ 个共轭都留在 A_l 的紧并中。）

如果对于所有这些共轭，都存在 $m/2$（例如）个 r 值，使得 $\lambda(p^g + r\tau(b^g))$ 落在某个待移除的小圆盘中，那么对所有共轭 g 求和所得的和 $\sum_g \sum_{r_1 \neq r_2} |\lambda(p^g + r_1\tau(b^g)) - \lambda(p^g + r_2\tau(b^g))|^{-1}$ 将超过 $d_1 m^2$ 的任意给定倍数（只要这些圆盘足够小），这与 $\lambda(p + r\tau(b))$ 的高度一致有界相矛盾。（这一论证是对 [23] 中引理 8.2 所用论证的改进。）因此，我们可以假设，对于 b 的某个共轭以及 r 的 $\geq m/2$ 个值，$\lambda(p^g + r\tau(b^g))$ 不落在任何一个待移除的小“坏”圆盘中。

现在我们来表述在应用 Pila-Wilkie 定理时涉及的可定义簇。对于 $\eta \in A$ 和 $\xi \in T(\eta)$，记 $\xi = t_1\pi_1(\eta) + t_2\pi_2(\eta)$；此外，如上所述，记 $\ell_0(z) = \beta_1(z)\omega_1(z) + \beta_2(z)\omega_2(z)$。现在可以省略下标“$i$”，因为我们只使用截面 $s_0 = \sigma \circ \lambda$，而不考虑 s_1。这里 z 属于 F_η。（不过请记住，这些函数也依赖于 η，且这种依赖是局部解析的。）

最后，令 $\mathsf{e} = \mathsf{e}_\eta : T(\eta) \to F_\eta$ 表示椭圆指数映射。

我们的簇 Z 在 $A \times \mathbb{R}^4$ 中由点 $\eta \times (t_1, t_2, \beta_1(z)\ \beta_2(z))$ 描述，其中 $z = \mathsf{e}(t_1\pi_1(\eta) + t_2\pi_2(\eta)) \in F_\eta$，并且 $0 \leq t_1, t_2 \leq 1$ 和 $\eta \in A$。我们将其视为簇的可定义族 Z_η，当 η 在 A中变化时；我们将关注其中的一个 Z_η，即 Z_b，其中 $b = \mu(p)$（或者可能是它的一个共轭，按照上文所述进行选择）。

对于 $r = 0, 1, \ldots, m-1$，令 ξ_r 表示 $r\tau(b)$ 的一个代表元，它位于上述基本域 $\tilde{}$damental domain $T(b)$ 中，并令 ξ 为 p 的一个类似代表元；回顾涉及有界高度的上述论证，我们可以假设，对于一个集合 $R \subset \{0, 1, \ldots, m-1\}\tilde{}$，满足 $|R| \gg m$，$\xi + \xi_r$ 位于上述修正基本域的双 $2T^*(b)$ 中，对于 $r \in R$。我们有 $\xi_r = \theta_{1r}\pi_1(b) + \theta_{2r}\pi_2(b)$，其中 θ_{1r}、θ_{2r} 是 $[0,1]\tilde{}$中的有理数，其分母整除 m。[6] 此外，令 $z_r = \mathsf{e}(\xi + \xi_r)$，则 $\beta_1(z_r)\ \beta_2(z_r)$ 是分母至多为 m^5 的有理数，因为我们处于第二种情形。

这些 m 有理点两两不同，因此再次应用 [25]的定理 1.9（取任意固定的 $\epsilon < 1/4$），我们推得 Z_b 的代数部分非空，这意味着 Z_b 在 $\mathbb{R}^4$中包含一段实代数曲线弧。令 ξ 为上述变量

[5]其中一些共轭可能重合：我们取的是域 K_1 的共轭，而该域可能大于 $K(b)$。[6]我们有 $\theta_{ir} \equiv r\theta_{1r}$（模 $\mathbb{Z}$）。

限制在这段曲线上，于是 t_1、t_2 是 ξ的代数函数。（注意，当然， t_1、t_2 无论如何都可视为 ξ 的函数，但若 ξ 不限制在这段曲线上，这些函数就不是代数函数。） $\beta_1(\mathbf{e}(\xi))$ $\beta_2(\mathbf{e}(\xi))$也同样如此。换言之，我们可以将ξ 视为 $z \in F_b$ 相对于 F_b的椭圆对数，并且当我们将 ξ 限制在 $T(b)$内部一段适当的实解析弧上时， $\ell_0(z)$具有“Betti 坐标”，它们是 ξ的代数函数。回顾一下，这里 $\ell_0(z)$是 $s_0(z)$相对于椭圆曲线 $E_{\lambda(z)}$的椭圆对数。

令 $B_i(\xi) := \beta_i(\mathbf{e}(\xi))$，于是 $\ell_0(\mathbf{e}(\xi)) = B_1(\xi)\omega_1(\mathbf{e}(\xi)) + B_2(\xi)\omega_2(\mathbf{e}(\xi))$。当 ξ沿着上述弧变化时， B_i 就等于 ξ的某些代数函数，记作$f_1(\xi)$ $f_2(\xi)$。因此，等式

$$\ell_0(\mathbf{e}(\xi)) = f_1(\xi)\omega_1(\mathbf{e}(\xi)) + f_2(\xi)\omega_2(\mathbf{e}(\xi))$$

根据解析延拓，该等式必须在整个圆盘上成立（事实上，在该弧的整个邻域内成立）；更准确地说，对于所讨论的代数函数的某个适当分支，以及函数 $\omega_i(\mathbf{e}(\xi))$到基本域$T(b)$中该圆盘上的某些延拓，等式成立。[7]

在贝蒂映射的背景下，这类条件似乎本身也颇有研究价值。为反驳它，我们可以采用若干论证，例如基于单值化的论证。我们选择如下论证：考虑 F_b 中 E_λ的坏约化点 w_i ，即其上方的纤维 $\lambda(w_i)$不是椭圆曲线的点；对每个这样的点，都关联着一个作用于周期上的单值化表示：先选取一个基点 $y_0 \in \mathbb{P}_1$，沿路径前往 w_i附近，随后绕 w_i 一周，再沿原路返回，并考察周期 ω_1、ω_2的变换。其在 $SL_2(\mathbb{Z})$ 中表示。

现在假设 y_0 已经靠近 w_i。取一个表示 y_0 的点 $\xi \in T(b)$。设 $M \in SL_2(\mathbb{Z})$ 为表示上述绕 w_i 的单值化作用的矩阵。现在，如果我们沿着 ξ 绕 $T(b)$ 上表示 w_i 的点行进，比如绕行 h 次，那么对于 $h > 0$ 的适当选择，代数函数 f_1、f_2 将保持不变。这对应于 M^h 作用于列向量 $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\xi) := (\omega_1(y_0)\ \omega_2(y_0))^t$。另一方面，截面 $s_0 \circ \lambda$ 在 F_b 上将保持不变，因此 ℓ_0 与之前的值相差某个带整数系数的线性组合 $a_1\omega_1(y_0) + a_2\omega_2(y_0)$。将由此得到的表达式相减，我们得到

$$(f_1(\xi), f_2(\xi)) \cdot (M^h - I)\mathbf{v} + (a_{1h}, a_{2h}) \cdot \mathbf{v} = 0. \tag{2.5}$$

这意味着 $(f_1(\xi)\ f_2(\xi)) \cdot M^h - (f_1(\xi) + a_1, f_2(\xi) + a_2)$ 与 $\mathbf{v}$ 正交。通过解析延拓，该表达式在圆盘内对所有 ξ 均成立，其中整数

[7]注意 however，(f_1, f_2) 不必等于 ℓ_0 在整个圆盘上的贝蒂映射。

a_{1h}, a_{2h} 保持不变。重复这一论证，即绕 w_i 行进两次，可得到一个类似的关系，其中用 $2h$ 替代 h。于是这两个向量

$$(f_1, f_2)(M^h - I) + (a_{1h}, a_{2h}), \quad (f_1, f_2)(M^{2h} - I) + (a_{1,2h}, a_{2,2h})$$

彼此平行。取外积后，我们得出结论：

$$(f_1, f_2)(M^h - I) \wedge (f_1, f_2)(M^{2h} - I)$$

是关于 f_1, f_2 的整数系数线性形式。另一方面，上述外积是一个二次型，等于 $(\det(M^h - I)\det((f_1, f_2)^t, M^h(f_1, f_2)^t)$。再次迭代，我们得到另一个同类二次方程，其中以 M^2 替代 M。

现在，我们可以找到一个点 y_0，使得 M 不是幺幂元且不是有限阶的（例如，考虑一个勒让德模型，其单值群在 $SL_2(\mathbb{Z})$ 中的指数有限）。在关于 M 的这一假设下，这两个二次关系彼此独立；因此，函数 f_1, f_2 必须是常数，进而是实常数（因为它们在一段弧上取实值）。但根据 Manin 定理（见 [20] 或 [28]），贝蒂像 $(f_1(\xi), f_2(\xi))$ 不可能是常数。

2.1 定理 1.4 的证明

我们可以将此情形视为定义在开子集 $\mathcal{X}_0$ of $\mathcal{X}$ 上的概形，其纤维是三个椭圆曲线的乘积。具体而言，在点 $x \in \mathcal{X}_0$ 上，我们关联的椭圆曲线乘积为

$$E_{\lambda(x)} \times F_{\mu(\tilde{\sigma}(x))} \times E_{\lambda(\tilde{\tau}\circ\tilde{\sigma}(x)))}.$$

为简化记号，我们将相应的椭圆概形记为 $\mathcal{E}_i \to \mathcal{X}_0$、$i = 1$、2、3。现在，我们将 $\mathcal{X}_0$ 定义为从 $\mathcal{X}$ 中移除以下子集后所得的集合：相关映射中有映射未定义之处，或某条椭圆曲线退化之处。与之前一样，$\mathcal{X}_0$ 是 $\mathcal{X}$ 中有限个点和曲线之并的补集；这些点是 $\tilde{\sigma}$ 或 $\tilde{\tau}\circ\tilde{\sigma}$ 未定义之处，此外还包括相应于所出现映射的奇异纤维之并。

我们有一个显然的截面 ξ，它由（采用上述压缩记号）$\xi(p) = \sigma(p) \times \tau(\tilde{\sigma}(p)) \times \sigma((\tilde{\tau}\circ\tilde{\sigma})(p))$ 给出。

我们首先证明如下结论

LEMMA 2.3. 上述定义的椭圆概形两两非同源。

PROOF. 我们将 j_λ 记为：$\mathcal{X}_0 \to \mathbb{C}$（分别为 j_μ），即对应于 $\mathcal{X}_0$ 上的 λ-概形（分别对应于 μ-概形）的 j-函数。概形 $\mathcal{E}_1$ 与 $\mathcal{E}_2$之间的同源将对应于如下形式的代数关系

$$P(j_\lambda, j_\mu \circ \tilde{\sigma}) = 0$$

对于某个非零多项式 $P(X,Y) \in \mathbb{C}[X,Y]$。但现在注意到， j_λ 在 $\tilde{\sigma}$作用下显然保持不变，因此 j_λ、 j_μ 事实上将是代数相关的；然而，由于映射（λ， μ），进而映射（j_λ， j_μ）是支配的，这种情况被排除了。

$\mathcal{E}_1$ 与 $\mathcal{E}_3$ 之间的同源将如前所述蕴含 j_λ 与 $j_\lambda \circ \tilde{\tau} \circ \tilde{\sigma}$之间存在代数相关关系，进而蕴含 j_λ 与 $j_\lambda \circ \tilde{\tau}$之间存在代数相关关系（同样是因为 $\tilde{\sigma}$ 作用于 λ-纤维）。在这种情况下，我们利用论文前文已经使用过的论证：在 μ的一般纤维上， τ 的平移会保持 λ概形（限制在所述 μ的一般纤维上）的坏约化，而坏约化是一个有限集。但这是不可能的，因为 τ 具有无限阶。更简单地说，若限制在 λ的某个给定一般纤维上，只需注意到 $\tilde{\tau}$ 不会将该纤维映到另一条纤维；另一方面，若此事成立，那么对 $\tilde{\tau}$ 的任意迭代都会如此，因此第一个概形将是等平凡的。

最后， $\mathcal{E}_2$ 与 $\mathcal{E}_3$ 之间的同源将蕴含$j_\mu \circ \tilde{\sigma}$ 与 $j_\lambda \circ \tilde{\tau} \circ \tilde{\sigma}$之间存在代数相关关系，进而蕴含 j_μ 与 $j_\lambda \circ \tilde{\tau}$之间存在代数相关关系。注意到 j_μ 在 $\tilde{\tau}$作用下保持不变，我们便可像第一种情况那样得到 j_λ 与 j_μ之间存在代数相关关系，而这已被排除。 □

现在我们要证明，使上述截面 ξ 取挠值的集合是退化的，也就是说，它在 $\mathcal{X}_0$ 中不是扎里斯基稠密的。根据定义，这个集合现在记作 $\mathcal{E}x_0$，即 $\mathcal{E}x_0 := \mathcal{E}x \cap \mathcal{X}_0$。

我们采用常见的计数方法，回到 [21]。

首先，根据引理 2.1，我们当然知道 $p \in \mathcal{E}x_0$ 的高度有界。

此外，如果截面 ξ 在 p 处的挠阶为 n，那么 p 的定义域的次数为 $\gg n^c$，其中 c 是某个正数（此处我们使用引理 2.2），因此 p 至少有这么多个不同的共轭。

由于我们有有界高度 $h(p)$，可以再次假设 $\gg n^c$ 个这样的共轭落在 $\mathcal{X}_0$ 内的一个固定紧集 $\mathcal{X}_1$ 中。为得出这一结论，先用有限多个仿射簇覆盖 $\mathcal{X}$，然后只需在每个簇中考虑一个仿射坐标中的多项式 Q，它在 $\mathcal{X} \setminus \mathcal{X}_0$ 中的曲线上恒为零，并在 p 处计算该多项式。我们得到一个高度有界的数 $Q(p)$；因此，如果 $Q(p) \neq 0$，那么其共轭中有正比例的绝对值至少被一个固定正数 $\epsilon > 0$ 所界定，该正数仅取决于 $\mathcal{X}$、Q 以及高度的界。因此，这些共轭都留在由 $|Q(p)| \geq \epsilon$ 定义的 $\mathcal{X}_0$ 的紧子集中。

现在，反过来，我们可以用有限个紧致（双）圆盘 D 覆盖 $\mathcal{X}_1$（即与 $\mathbb{C}^2$ 中的紧致圆盘解析同构），使得在每个 D 中，对于概形 $\mathcal{E}_i$、 $i = 1$、2、3，都有三对定义良好的周期 ω_{i1}、 ω_{i2}，并且对于这些截面，有三个定义良好的椭圆对数ℓ_i，因此得到方程

$$\ell_i(z) = \beta_{i1}(z)\omega_{i1}(z) + \beta_{i2}(z)\omega_{i2}(z), \qquad z \in D, \quad i = 1,2,3, \tag{2.6}$$

其中贝蒂数值 $\beta_{ij}(z)$ 为实数。

对于 $z \in D$, $\beta_{ij}(z)$ 的六元组描述了 $\mathbb{R}^6$ 中的一个紧实可定义实集 Z。

由于 $\mathcal{X}_1$ 被圆盘 D 覆盖的次数有限，且可以独立于 p 选取，我们也可以假设 D 也包含 p 的 $\gg n^c$ 个共轭。

因此，我们在 Z 中得到 $\gg n^c$ 个有理点。

代数部分。若这对足够大的 n 值成立，根据 Pila-Wilkie 定理，存在一条代数弧 C 位于 Z 中；令 C' 为它在 D 中的逆像；这个 C' 将是一个维数为 ≥ 1 的实解析集。

若我们将范围限制在 C' 这九个函数 ℓ_i、ω_{i1}、ω_{i2}、$i = 1$、2、3 上，方程 (2.6) 将给出这九个函数之间至少两个独立的代数关系（更确切地说，每组六元函数，即对于 $i = 1$、2、$i = 1$、3 以及 $i = 2$、3，都满足一个非平凡的代数关系）。

为了利用这一事实，我们应用 Bekker-Tsimerman 的一个新的 Ax-Schanuel 型结果。我们只需要其中一个特殊情形，它以定理 4.1 的形式出现在 [2], 中；我们用自己的记号将其重述如下，作为一个引理：

LEMMA 2.4. 设 S 是一个代数簇，对于 $i = 1, \ldots, n$，设 $\mathcal{E}_i \to S$ 是两两非同源的非等平凡椭圆概形，并配有截面 $s_i : S \to \mathcal{E}_i$。对于一个单连通开集 $D \subset S$，令 $i = 1, \ldots, n$ 上的 l_i 为 s_i 的椭圆对数，并令 $\omega_i,1,\omega_i,2$ 为 $\mathcal{E}_i$ 在 D 上的周期的一组基。令 $F = (l_i, \omega_i,1, \omega_i,2)_{i=1\ldots,n} : D \to \mathbb{C}^{3n}$ 为相应的映射。设 $T \subset \mathbb{C}^{3n}$ 为一个余维 k 的代数子簇，并假设 $F^{-1}(T)$ 包含一个余维 $< k$ 的不可约解析分支 R。那么 $R \neq S$，且以下情形之一成立：两个椭圆概形在 R 上变为同源；至少两个截面在 R 上变为挠；或一个椭圆概形在 R 上变为等平凡。

我们将此引理应用于上述定义的 $n = 3$、$k = 2$、$\mathcal{E}_1$、$\mathcal{E}_2$、$\mathcal{E}_3$。根据引理 2.3，$\mathcal{E}_i$、$i = 1$、2、3 这三个概形两两非同源，符合上述陈述的要求。

我们取 $\mathbb{C}^9$ 中由上述两个独立关系定义的代数簇作为 T，而 R 将是 D 中 C' 的解析闭包的一个连通分支（它是实解析的，因为它是某个实解析弧在一个解析映射下的逆像）。

还要注意，上述九个函数之间的两个独立代数关系在 R 中仍然成立；并且，由于 C 具有正实维数，R 的（复）余维为 < 2。

由该引理可得，以下三种情形之一成立：

(i) 两个椭圆概形在 R上变为同源。(ii) 两个截面在 R 上变为挠。(iii) 一个椭圆概形在 R上变为等平凡。

在这三种情形中，我们都得到一个重要结论： R 实际上是代数的；我们可以假设它是一条代数曲线，因为否则这一结论将扩展到整个 $\mathcal{X}$，而这从一开始就是我们所排除的。

回想一下，我们仍然知道，在 D 上由 $\ell_i, \omega_{i1}, \omega_{i2}, i$ 给出的每组六元函数组（其中任意一对在 $\{1,2,3\}$ 中变化）在 $\mathbb{C}$ 上生成的域的超越次数至多为 5。现在，Andr´e 的一个结果（特例）（见 [1], 的定理 3、第 7 节；这里所需的情形此前已由 Bertrand 证明）表明：要么其中一个概形在 R 上变为等平凡，要么对任意两个概形，它们要么同源，要么其中一个截面是挠的。

因此，相较于引理 2.4，我们得到了一个稍强的结论。

还要回想一下，我们假设由三个截面的贝蒂坐标给出的簇 $Z \subset \mathbb{R}^6$（限制在 R 上）包含一条代数弧。

现在假设两个概形 $i = a, b$ 同源。在上述代数弧上，四个函数 $\ell_a, \omega_{1a}, \omega_{2a}, \ell_b$ 生成的域的超越次数至多为 3。由 Andr´e 的定理可知，这两个截面线性相关（若将它们视为同一椭圆概形的截面，则需先应用该同源映射）。因此，两个椭圆对数 ℓ_a, ℓ_b 在 R 上线性相关（相差若干周期）。（注意，这比上述备选情形 (i)、(ii)、(iii) 所给出的结论更强。）

另一方面，如果这两个概形在 R 上不同源，那么同样的论证可以证明其中一个截面在 R 上是挠的。

我们先假设这三个概形中没有一个在 R 上变为等平凡。在此假设下，没有一个截面在 R 上是挠的。事实上，例如，若第一个截面是挠的，那么由于 σ 在 $\mathcal{X}$ 上不是挠的， R 就会是 λ 的一个纤维，因此第一个概形将是常值的。同理，若第二个截面在 R 上是挠的，这意味着 $\mu \circ \tilde{\sigma}$ 在 R 上是常值的，因而第二个概形将是等平凡的。第三个概形也同样如此。

因此，根据上述结论，我们可以假设任意两个概形都同源，且相应的截面线性相关。

于是我们得到，对于 $z \in R$，曲线 $E_{\lambda(z)}$ 与 $F_{\mu(\tilde{\sigma}(z))}$ 同源，曲线 $E_{\lambda(z)}$ 与 $E_{\lambda(\tilde{\tau}\circ\tilde{\sigma})(z))}$ 也同源。为方便记号，最好（且等价地）表述为：对于曲线 $\tilde{\sigma}$（R）上的 z，曲线 $E_{\lambda(z)}$、 $F_{\mu(z)}$ 和 $E_{\lambda(\tilde{\tau}(z)}$ 同源。

我们将把这一事实应用于第一和第三个截面，即取 $a = 1, b = 3$；注意，在这种情况下，椭圆概形源自 $\mathcal{X}$ 上的同一个概形，且截面相同，但在不同的点处取值，即 $\lambda(z)$ $\lambda(\tilde{\tau}(z))$。

我们注意到，这一结果体现了纯函数域情形下的一个不太可能交点问题，即在数域情形中没有类似结果；因此，显然不能说这一情形源自数域背景。

为处理这一问题，我们也可以再次采用计数方法，并使用与 [21] 中类似的论证。不过，我们可以直接利用定理 1.6 得出结论，具体如下。

事实上，即使没有例外曲线，当没有任何概形在 R 上等平凡时，定理 1.6 也足以完成定理 1.4 的证明。

如果第二个概形是等平凡的，那么上述论证仍然成立。

如果第一个或第三个概形在 R 上等平凡，我们认为另外两个之间的同源次数有一个与 R 无关的上界（注意，另外两个必定同源，因为它们都不可能是等平凡的）。事实上，这些同源对应于相关椭圆曲线的相应 j 不变量之间的某些（模）代数关系（这些关系在定理 1.6 的证明中也出现过）。这些 j 不变量是点$p \in \mathcal{X}_0$的坐标的有理函数，且次数有界：事实上，椭圆曲线有理地依赖于 p、$\tilde{\sigma}$（p）、（$\tilde{\tau} \circ \tilde{\sigma}$）（$p$）。如果 p 位于 λ 的某个纤维中，或位于 $\lambda \circ \tilde{\tau} \circ \tilde{\sigma}$ 的某个纤维中，这些次数就有一个与纤维无关的上界。因此，同源次数有界，例外曲线的有限性便得以证明。

2.2 定理 1.6 的证明

经过同构，并对底空间 B 取有限次数（可能分歧）的覆盖后，我们可以假设概形 $\mathcal{E}$ 具有勒让德形式，因此由仿射方程 E_t： $y^2 = x(x-1)(x-t)$ 给出，其中 B 是 t 直线（去掉 $\{0, 1, \infty\}$）的一个覆盖。（曲线 T 将被 T 在扩张后的 $B \times B$ 上的提升的一个不可约分支所取代。）我们可以假设该同源是循环的，次数为 $d > 1$，并且必须证明上述情形不可能成立。

反复迭代该同源，且不改变底空间 B 或截面后，不难看出，我们可以假设该同源的次数大于任意给定的数。

我们有一个从 $B \times B$ 到 $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ 的投影，它给出勒让德参数，记为 t、u；限制后，这些 t、u 可以视为 T 上的有理函数。由于 $E_{t(p)}$、$E_{u(p)}$ 在 $p \in T$ 上同源，曲线 T 以这种方式投影到 $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ 中熟知的某条模曲线上：首先使用关于 j 不变量的模方程（例如参见 [18]），然后只需将 j 替换为勒让德参数对应的通常取值。

因此， T_0 到 T 的投影 $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ 定义如下：取联系 t、u 和 T 的上述不可约平面方程，它将是这条曲线提升到 $B \times B$所得的一个合适的不可约分支。定义 T_0 的平面方程（属于刚才描述的显式族）关于 t、u对称。于是，(t, u) 是 T_0的一个 $\mathbb{C}$-泛点，且 $\mathbb{C}(T_0) \cong_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(t, u)$。我们将 B 的两个副本记为 B_t、B_u，它们分别有两个对应的投影到 t-

直线或 u-直线上。因此，我们得到两个函数域扩张 $\mathbb{C}(B_t)/\mathbb{C}(t)$、 $\mathbb{C}(B_u)/\mathbb{C}(u)$，它们在 $\mathbb{C}$上同构，且存在一个同构延拓自然同构$\mathbb{C}(t) \cong_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(u)$的同构，该延拓将 $t \to u$映至相应点。

我们可以将这些截面视为分别给出勒让德椭圆曲线 E_t、 E_u 上的点 $s_t \in E_t$、 $s_u \in E_u$，这些点分别定义在 $\mathbb{C}(B_t)$、 $\mathbb{C}(B_u)$ 上。

注意，扩张 $\mathbb{C}(t,u)/\mathbb{C}(t)$（它对应于一个带有到 $\mathbb{P}_1$ 的映射的 T_0 光滑模型）在 $t \in S := \{0,1,\infty\}$ 之外非分歧，而此函数域扩张的素点 $t \in S$ 与 $u \in S$ 的素点恰好一一对应：这是因为 S 显然正是勒让德曲线的坏约化轨迹，同源曲线的坏约化轨迹也相同。

定义 L 为将 d-挠点 E_t 和 E_u 的所有坐标添加到 $\mathbb{C}(t,u)$ 后得到的域。根据一般理论，扩张 $L/\mathbb{C}(t)$ 是有限伽罗瓦扩张，且在 $t \in S$ 之外非分歧； $L/\mathbb{C}(u)$ 也同理。此外，同源 ϕ 定义在 L 上：事实上，该同源对应于对 E_t 取一个阶为 d 的有限循环子群的商。

现在我们进行正规化，这严格来说并非必要，但可以使论证更简洁。我们可以将截面 s_t, s_u 替换为其非零倍数 qs_t, qs_u，而不改变假设。相应的定义域扩张 $\mathbb{C}(B_t)/\mathbb{C}(t)$ $\mathbb{C}(B_u)/\mathbb{C}(u)$ 只会缩小；若 q 足够可整除，这些域便会稳定下来，因此我们可以假设，对于 q 的所有取值，这两个域都取到最小值。完成这一步正规化后，由最小性可知，对于任意正整数 b， bs_t 的定义域恰为 $\mathbb{C}(B_t)$；对于 u，将 t 作相应替换，也同样如此。

令 $L_t = L \cdot \mathbb{C}(B_t)$，对于 u 也同样如此（当然，这里我们将所有域都视为嵌入固定的 $\mathbb{C}(t)$ 代数闭包中）。注意，由对称性可得次数相等：$[L_t : L] = [L_u : L]$。此外，与我们的相关性假设相对应的等式 $a\phi(s_t) = bs_u$ 表明， bs_u 定义在 L_t 上。根据正规化， s_u 已定义在 L_t 上，因此 L_t 包含 L_u，从而实际上有 $L_t = L_u$。

现在来到关键之处。由于截面 s_t 不是挠点，根据Shioda 的一个定理，截面 s_t 的最小定义域（即 $\mathbb{C}(B_t)$）在 t 的至少一个值上分歧，而该值不属于 $S := \{0,1,\infty\}$；这是一个相当微妙的定理，可以用不同方法证明。例如，参见论文 [10]，其中给出了一个“模”证明、一个强化版本，以及（在附录中）对 Shioda的证明的简化。

设 t_0 为这样的值。则 t_0 在 L中非分歧，但在 L_t中分歧，因此它必定在 L_u中分歧。现在取一个值 $u_0 \in \mathbb{C}$，使得素点 $u = u_0$在 $\mathbb{C}(t,u)$中提升为位于 $t = t_0$之上的素点。由于 $t = t_0$ 在 $\mathbb{C}(t,u)$中非分歧，所以有$d := [\mathbb{C}(t,u) : \mathbb{C}(t)]$ 个这样的值。这样的素点 $u = u_0$ 在 $\mathbb{C}(u)$中也在 L 中非分歧（因为 $L/\mathbb{C}(u)$仅在 $u \in S$之上分歧）。因此，该素点既然在

$L_t = L_u$中分歧，就必定在 $\mathbb{C}(B_u)/\mathbb{C}(u)$中分歧。但该扩张中的分歧素点数目仅取决于截面，而我们可以任意增大 d 。这一矛盾最终证明了该结果。

REMARK 2.5. 使用 [10] 中对 Shioda 定理的强化结果（定理 2.1），可以给出定理 1.6 的一个更简短的证明。其内容如下。设我们有一个定义在 B 上的椭圆概形，如上文定理 1.6 所述。令 $\mathcal{H} \to B$ 为 $B = B(\mathbb{C})$ 的万有覆盖；通过拉回，可得到一个定义在 $\mathcal{H}$ 上的椭圆族。B 的基本群通过自同构作用于 $\mathcal{H}$ （即由 $PSL_2(\mathbb{R})$ 中的表示给出）。在 $\mathcal{H}$ 上，可以为上述椭圆族定义一个周期基，也可以为原椭圆概形的任意给定截面定义一个对数。于是，基本群作用于这些周期和对数；例如，它会将给定的对数变为其自身与某个周期之和。[10] 的定理 2.1 表明，保持周期不变的子群作用于给定的（非挠截面的）对数时，其轨道是周期格的一个秩 2 子格。

现在简要说明这一不同论证对当前定理的要点。对于 $z \in \mathcal{H}$，令 $\tau(z) = \omega_2(z)/\omega_1(z)$ 为给定周期基的比值。我们有 $B \times B$ 的万有覆盖，由 $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ 给出。对于满足 $ad - bc > 0$ 的互素整数 a, b, c, d，还有一条曲线 $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{a,b,c,d} \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}$，它由 $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ 中对应于给定循环同源的点对定义，即 $\mathcal{V} = \{(z_1, z_2) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} \colon \tau(z_2) = (a\tau(z_1) + b)/(c\tau(z_1) + d)\}$。若固定 $\delta := ad - bc$ 为我们的同源的次数，则这条曲线覆盖 $B \times B$ 内的曲线 T （对应于次数为 δ 的循环同源）：这是因为 $SL_2(\mathbb{Z})$ 在行列式为 n 的矩阵上传递作用（不过实际上并不需要这一点）。

注意到，上述子群（以$g(z_1, z_2) = (gz_1, gz_2)$的方式作对角作用）将 $\mathcal{V}$ 映至其自身，记作 G；它固定周期（这是一个至关重要的事实）。事实上，G固定周期，因此固定 τ。

记 $\ell(z)$为我们的非挠截面的一个对数，它在 $\mathcal{H}$中定义良好。连接 z_2 上的椭圆曲线与 z_1 上的椭圆曲线的同源由乘以一个 $\xi = \xi(z_1, z_2) \in \mathbb{C}$ 表示，使得 $\xi\omega_1(z_2) = a\omega_1(z_1) + b\omega_2(z_1)$，$\xi\omega_2(z_2) = c\omega_1(z_1) + d\omega_2(z_1)$。

注意，对于 $g \in G$，有 $\xi(gz_1, gz_2) = \xi(z_1, z_2)$，因为 G 固定周期。

我们关于截面之间依赖关系的假设意味着，对于 $(z_1, z_2) \in \mathcal{V}$，有 $n\xi\ell(z_2) = m\ell(z_1) + \eta(z_1, z_2)$，其中 η是一个特定的周期（对应于 z_1的曲线的周期），而 m, n 是非零整数。设 ω_1, ω_2 如上所述为周期基，并视为定义在 $\mathcal{H}$上的函数。于是，对最后一个等式作用 G，并利用 G的作用为 $\mathbb{Z}^2$ （且它将 $\mathcal{V}$ 映入自身并固定 ξ），可得，对于某个适当的整数 $h > 0$（可取为 G在 $\mathbb{Z}^2$中的指标），

$$n\xi(\ell(z_2) + h\omega_i(z_2)) = m(\ell(z_1) + h\omega_i(z_1)) + \eta(z_1, z_2), \qquad i = 1, 2. \tag{2.7}$$

因此，减去前一个等式后，我们得到 $nh\xi\omega_i(z_2) = mh\omega_i(z_1)$，于是 $\tau(z_1) = \tau(z_2)$（对于当前选取的周期基），这表明该同源的次数为 1。

如果可能的话，要直接用微分伽罗瓦理论的纯代数术语来表述这一论证，似乎并不容易。

2.3 定理 1.5 的证明

我们将使用 Silverman 高度界引理 2.1 的一个类似结果，该结果由 Yuan-Zhang [26] 最近得到。我们仅引用他们的定理 6.2.2 的一个推论。陈述如下：

LEMMA 2.6. 设 $A \to \mathcal{X}$ 是代数曲面 $\mathcal{X}$ 上的一个阿贝尔概形；设 σ_1、$\sigma_2 : \mathcal{X} \to A$ 是独立截面。存在一个非空的 Zariski 开子集 $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X}$，使得在该子集内，两个截面都取挠值的点具有一致有界的高度。

Let

$$\mathcal{T} = \{x \in \mathcal{X} : \sigma_i(x) \text{ is torsion on } \mathcal{E}_i \text{ for } i = 1, 2, 3\}.$$

由引理可知，存在一个非空的 Zariski 开子集 $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X}$，使得 $\mathcal{T}_0 := \mathcal{T} \cap \mathcal{X}_0$ 中的点具有有界高度，因此特别地，它们在定义域为数域 K 时的次数趋于无穷大。于是，取一点 $x \in \mathcal{T}_0$，使其次数$d = [K(x) : K]$ 在 K 上充分大。

根据有界高度，按照本文前面证明中的做法，我们可以找到一个给定的紧集 $\Delta \subset \mathcal{X}_0(\mathbb{C})$，它与 x 无关，使得至少有 $d/2$ 个 x 的共轭落在 Δ 中。

现在，我们可以将 Δ 划分为数量虽大但有限的紧子集 Δ_j，并可假设与三个概形相关的周期以及截面的对数在每个 Δ_j 中都有定义。（或者，我们可以假设从一开始 Δ 就是单连通的，同时去除有限个实解析三维簇。）无论采用哪种选择，我们都可以假设存在一个与 x 无关的紧 Δ'，在其中上述函数都有定义，并且包含 x 的 $> cd$ 个共轭，其中 $c > 0$ 与 x 无关。

与前面一样，对于 $\mathbf{z} \in \Delta'$，我们可以写成：

$$\ell_i(\mathbf{z}) = \beta_{1i}(\mathbf{z})\omega_{1i}(\mathbf{z}) + \beta_{2i}(\mathbf{z})\omega_{2i}(\mathbf{z}), \qquad i = 1, 2, 3, \tag{2.8}$$

其中 ω_{ij} 是周期，ℓ_i 是截面的椭圆对数。

对于 $\mathbf{z} = x \in \mathcal{T}_0$，$\beta_{ij}(\mathbf{z})$ 是有理数。

同样根据有界高度，引理 2.2 得出挠的阶由 $\ll d^2$ 控制。因此，所述有理数的分母也同样有界。

我们将 Pila-Wilkie 估计应用于在 $\mathbb{R}^6$ 中定义的可定义簇，它是映射 z $\mapsto$(β_{ij}(z)) $_{i=1,2,3,j=1,2}$ 在 Δ' 上的像。比较所有界后，我们推得，若 d 足够大，则 Z 的代数部分非空，即 Z 包含一条实代数弧。

我们来考察它在 Δ' 中的原像 C'，这是一个维数为 ≥ 1 的实解析集。与前一个证明一样，若我们限制到 C' 中的九个函数 ℓ_i,$\omega_{i,1}$,$\omega_{i,2}$（对应 $i = 1, 2, 3$），方程 2.4 将在这些函数之间给出至少两个独立的代数方程（更确切地说，每组六个函数，即 $i = 1, 2, i = 1, 3$ 和 $i = 2, 3$，都满足一个非平凡的代数关系）。我们再次应用引理 2.4，它保证存在一条复解析曲线 $R \subset \mathcal{X}$，该曲线包含 C'，并且以下两种情况之一在 R 上成立：

- 两个椭圆概形在 R上变为同源，或 - 或一个椭圆概形
在 R上变为等平凡，或 - 至少两个截面在 R上变为挠。
特别地，我们推得 R 是一条代数曲线。

假设其中两个概形（例如前两个）在 R 上同源但不等平凡，并且至多有一个截面是挠的（因此第二种和第三种情形不成立）。接下来考虑由第一个和第三个概形组成的一对。与这两个概形相关联的有四个周期、两个对数以及相应的贝蒂映射。和之前一样，我们推得这六个函数在 R 上代数相关。但根据 Andr´e 的定理，这意味着这两个概形同源，因而这三个概形在 R上都变得同源。（于是，由两个周期和三个对数组成的五个解析函数中，至多有三个代数独立。）接下来我们运用 Pila 关于 $\mathbf{C}^n$ 的 Andr´e-Oort 猜想的结果（事实上，证明中的函数部分已足够）。论证如下。三个 j-不变量（j_1、j_2、j_3）定义了一个有理映射 $J: \mathcal{X} \to \mathbb{A}^3$，其像的闭包是 $\mathbb{A}^3$中的一个曲面。由于这些概形在 R上变得同源， $J(R)$中所有三个坐标均为复乘坐标的 $J(R)$的点在其中扎里斯基稠密。根据 Pila 的结果，像 $J(R)$ 必定是两个模曲线的纤维积。（事实上，否则这两个概形将在 $\mathcal{X}$上恒等同源。）但该曲面的次数有界，因此这些模曲线的次数也有界。由此，它们只有有限种可能，而 R也同样如此。 [8] 不过，若从$\mathcal{X}_0$ 中去掉由此产生的有限条曲线 R，根据前面的论证即可得出结论。

[8]例如，若使用 Pila 证明中处理相关可定义集的代数部分的部分，就可以避免诉诸 Andr´e-Ooort 的这一情形。

现在考虑第一个椭圆概形在 R 上变得等平凡的情形。因此， R 是形如 $j_1(x) = c$ 的曲线的一个不可约分支，其中 j_1 是第一个概形的 j-不变量，将其视为底空间 $\mathcal{X}$上的有理函数。因此， R 的次数有界（相对于 $\mathcal{X}$的一个给定嵌入）。

这六个函数 $\ell_i, \omega_{i,\,1}, \omega_{i,\,2}$ 在 $i = 2, 3$ 上代数相关，因此在 C' 上也代数相关。再次由 Andr´e-Bertrand 定理可知，这些概形中要么有两个同源，要么截面 σ_2 or σ_3 在 R 上是挠的。但这意味着曲线 R 至多只有有限条，因为如果同源次数或挠阶超过某个上限，相关曲线的次数就会增长。

最后考虑这样的情形：这些概形在 R 上都不是等平凡的，而 σ_1, σ_2 在 R 上变成挠的。

于是我们可以应用 [7] 的主定理，该定理给出了这类曲线的有限性。

但这仅仅是一个例子，采用相同的方法应当还能得到更一般的结果。

相对 Manin–Mumford 猜想

A.1 关于 $\mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{C}$ 的猜想

对于相对阿贝尔概形 $\pi : A \to S$，若子概形 $V \subset A$ 满足 $V \subset A[N]$，其中 N为某个正整数，则称其为挠簇，或简称为挠。若 V是约化的，这等价于要求对于所有 $v \in V$，点 $v \in A_{\pi(v)}$ 都是挠点。我们用 Y_{tor} 表示 Y的所有挠子簇的并集。

若 $B \subset A$ 是阿贝尔子簇，则对于任意正整数 N，我们称 $B + A[N]$ 的任意不可约分支为挠陪集。

以下猜想称为相对 Manin-Mumford 猜想（RMM）。

猜想 A.1（RMM）。设 $\pi_0 : A_0 \to S_0$ 是相对阿贝尔概形，其中 S_0 是不可约复代数簇。设 $Y_0 \subset A_0$ 是一个子簇，且其包含一个扎里斯基稠密的扭点集合，并满足 $\dim Y_0 + \dim S_0 < \dim A_0$。那么，要么 Y_0 不支配 S_0，要么它包含在一个真挠陪集中。

值得注意的是，Gao-Habbeger 最近已宣布在$\overline{\mathbb{Q}}$上证明了 RMM。我们希望说明如何将其推广到 $\mathbb{C}$。我们的具体定理并不依赖他们的方法，而是一个形式推论：

定理 A.1. $\mathbb{C}$上的 RMM 是 $\overline{\mathbb{Q}}$上 RMM 的推论。

为证明这一[13] 定理，我们将借鉴近期关于 Ax-Schanuel 的工作，尽管我们并不使用其中的具体定理。

事实上，我们将考虑以下广义版本，其中 $r = 0$ 的情形为 RMM：

猜想 A.2. 设 $\pi\colon A \to S$ 是定义在不可约复代数簇 S 上的阿贝尔概形，且 $Y \subset A$ 不可约并支配 S。令 $Y_{tor}^{\geq r}$ 表示 Y_{tor} 中维数至少为 r 的不可约分支集合。假设 $r + \dim A > \dim Y + \dim S$。若 $Y_{tor}^{\geq r}$ 在 Y 中扎里斯基稠密，则 Y 包含于某个真挠陪集中。

注意，这是齐尔伯-平克猜想的一个特例；事实上，它等价于将 ZP 限制在弱特殊子簇的一个特例上（即没有阿贝尔部分的弱特殊子簇）。

我们将证明以下蕴含关系：

定理 A.2. 猜想 A.2 是有理数域 $\overline{\mathbb{Q}}$ 上 RMM 的推论。

我们首先说明，只需考虑我们关于 $\overline{\mathbb{Q}}$ 簇的主猜想——这正是我们最初将其推广到这一情形的主要动机。这个想法已见于 [7]。

Lemma A.1. 有理数域上的猜想 A.2 可由 $\overline{\mathbb{Q}}$ 情形推出。

Proof. 为证明这一约化，我们将其扩张到$\overline{\mathbb{Q}}$上的簇 $\pi'\colon A' \to S' \to T$ 与$Y' \subset A'$，其在 T 上的泛点给出 π。现在假设定理不成立。那么存在一个扎里斯基稠密的簇集合 s_i，包含于$Y_{tor}^{\geq r}$ 中。现在将它们扩张，得到一组簇 $S_i \subset Y$，其在 T 的泛点上的纤维为 s_i，且$S_i \to T$是支配且拟有限的。注意，S'、A'、S_i'的维数都比其未加撇对应项的维数高 $\dim T$。因此，用 $r+$维的 r 替换 T，并应用$\overline{\mathbb{Q}}$ 结果，可得 Y' 包含在 A'的一个真挠陪集中；再取 T 的泛点上的纤维，可得 Y也满足同样结论。

□

此后我们着重证明定义在 $\overline{\mathbb{Q}}$上的 A、S、Y的定理 A.2。无妨假设 A 是主极化的，因为该问题在 étale 底空间变换和同源下保持不变。

A.2 有限维叶族

设 $L = R^1\pi_*\mathbb{Z}$。那么 L 是 S^{an} 上的局部系统，它是权重为 1 的霍奇结构变分的底层局部系统。现在，与 A 上的主极化相对应，有一个 E 的混合变分，它定义在 A 上，权重为 0 和 1，并且属于如下正合列

$$0 \to \pi^* L^\vee \to E \to \mathbb{Z}(0) \to 0.$$

其构造如下：注意到 $\underline{Ext}^1(A,\mathbb{G}_m) \cong A^\vee \cong A$，因此存在一个“普遍”群概形 $\tau: G \to A$，它是 A 由 $\mathbb{G}_m$ 扩张得到的，并将它们视为 A 上的常值群概形。取 $E := R^1\tau_*\mathbb{Z}(0)$。

在 $E_{\mathcal{O}}$ 中存在一个子丛 F^0E，它包含 $\pi^*F^0L^\vee$，也包含 $\mathbb{C}(0)\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{O}$ 的一个提升。对于点 $a \in A$，若令 e 为 $\mathbb{Z}(0)_a$ 的一个生成元在 $E_{a,\mathbb{Z}}$ 中的提升，那么 $e+l \in F^0E$ 对于 $l \in \pi^*L^\vee$ 意味着 l 在自然的万有覆盖映射 $L^{\vee,\mathrm{an}} \to A^{\mathrm{an}}$ 下映到 a。我们用 $E_1 \subset E$ 表示映到$1 \in \mathbb{Z}(0)$ 的元素所构成的闭子簇。

现在令 $\phi: E \to A$ 表示从 E 的全空间出发的映射，并考虑由联络给出的分解 $\phi^*TA \xrightarrow{\sigma} TE$，它在局部刻画了平坦向量所在的轨迹。现在我们来考虑

$$\mathcal{F}_E := \big(\sigma(\phi^*(TA)) \cap TF^0E\big) \mid E_1.$$

换言之，$\mathcal{F}_E$ 是 E_1 中的一些切方向，沿着这些方向，某个向量保持平坦且留在 F^0 中。根据上述描述，这意味着一旦固定该向量，它就确定了它在 A 中的像。换言之，$\mathcal{F}_E$ 是可积的，并在 E_1 上给出一个叶状结构，其叶局部上是 S 上的覆盖空间。我们将关注这些叶在 A中的像。

在局部坐标中，设 $\ell \subset L^\vee$ 是一个平坦截面，也就是说，它是 A 在 S 上第一相对同调的局部常值截面。于是 ℓ 在 A 中有一个像，而这个像也是与 $e+l$ 对应的叶在 $\mathcal{F}_E$ 中的像。

对我们而言，重要的是，对于每个 N， $A[N]$ 的所有连通分支都是与 $\frac{1}{N}E_1$ 中的向量相对应的叶的像, $\mathbb{Z}$。

我们将 $\mathcal{F}_E$ 中一片叶在 A 中的像称为同调叶。

A.3 叶状结构处处不太可能

Lemma A.2. 存在一个 Zariski开子集 $U \subset Y$，使得 U 中的所有点都位于一片同调叶上，且该叶与 Y 的交维数至少为 r。

Proof. 所讨论的点集可以用代数方式描述。请注意，虽然直观上更容易将 F 视为一个芽，但维数条件可以在形式概形层面检验，因此是代数的，所以该轨迹由切瓦利定理可知是可构造的。现在，这包含了所有$Y_{tor}^{\geq r}$；根据假设，$Y_{tor}^{\geq r}$ 在 Y中扎里斯基稠密。任何扎里斯基稠密的可构造集合都必须包含一个扎里斯基开子集，因此结论得证。

□

A.4 混合 Shimura 簇中的不太可能交点

令 $\mathbb{A}_g$ 表示维数为 g的通用主极化阿贝尔簇。它位于 $\mathcal{A}_g$ 之上——即主极化阿贝尔簇的模空间。现在，我们有以下来自 [15, 命题 1.1]的便捷引理

LEMMA A.3. 令 $W \subset \mathbb{A}_g$ 表示一个弱特殊子簇。那么 W 属于一个弱特殊 $W' \subset \mathcal{A}_g$，且存在一个分解 $\mathbb{A}_g \mid W \sim A \oplus B \oplus C$，使得 C 是等平凡的，并且 $W = A + (0, b, c)$，其中 $b \in B(\overline{W'})$ 是一个挠截面，而 $c \in C(W')$ 是一个常值截面。

现在，我们应用 [16]的混合 Ax-Schanuel 定理。令 W 为 A 在 $\mathcal{A}_g$ 中的像的弱特殊闭包，其像为 $W' \subset \mathcal{A}_g$，并注意到霍奇叶是从 $\mathcal{A}_g$的万有覆盖上代数集的拉回。于是， [16, 定理 1.1] 告诉我们，对于每个点 $y \in Y$ 和每个与 Y 的交集维数至少为r的霍奇叶 L，都存在一个弱特殊 $V \subset W$，其在 A 中的原像是一个子簇 $R \supset Y \cap L$，其像为 $R' \subset S$，使得

$$\dim Y \cap R + \dim V' \geq \dim V + r. \tag{A.9}$$

由于 $\dim Y \cap R \leq \dim Y$，必然有 $\dim V' - \dim V < \dim W' - \dim W = \dim A$，因此由 A.3 可知， $A \mid V'$ 必须分解为 $B + C + D$，其中 D 是等平凡的；以及 $V \subset B + c + d$，其中 c 是挠的，使得 B 是 $A \mid V'$的一个真子簇。

现在，由于这种分解发生在 $y \in U$的每个点上，而且阿贝尔簇的分解只有可数多个，因此存在一个全局分解 $A = B + C + D$，其在 V' 上的限制给出上述分解。现在，由于我们只得到 C的扭点，扭点不可能连续移动，并且 Y不包含在 A的任何真弱特殊子簇中，因此可得 $C = 0$。这意味着存在一个全局分解 $A = B + D$，其中 D 沿着 V' 纤维是等平凡的，并且所有交集都位于 $D \mid V'$的一个常值截面上。

现在我们完成定理 A.2 的证明。令 $\psi : S \to T$ 表示 S 的商，其纤维为 V'，因此 D 是沿 ψ 对 $E \to T$ 作基变换所得。考虑 $Z := \psi(Y)$。注意， Z 的挠点必定在 Z 中$\overline{\text{扎里斯基稠密}}$，因此由 $\overline{\mathbb{Q}}$ 上的 RMM 可知

$$\dim Z + \dim T \geq \dim E. \tag{A.10}$$

现在设 $d \in E$ 为 $y \in Y$的像。根据上述描述可知， R 完全

位于 d的原像内，因此 $Y \cap R \subset Y_d$。由此我们得到

$$\begin{aligned}\dim Y \cap R - \dim V + \dim V' &\leq \dim Y_d - \dim(B/S) \\ &= \dim Y - \dim Z - \dim(B/S) \\ &\leq \dim Y - \dim E + \dim T - \dim(B/S) \\ &= \dim Y - \dim(A/S) \\ &< r.\end{aligned}$$

这与 (A.9) 矛盾。证明至此完成。

致谢。作者衷心感谢 Serge Cantat 和 Romain Dujardin 就本文主题进行的有益讨论，并感谢他们寄来其启发性论文 [5] 的初稿。我们还感谢 Philipp Habegger 与我们通过电子邮件交流，并与我们分享了他与 Z. Gao 合作的一篇相关近期预印本。

参考文献

[1] Y. Andr´e，混合霍奇结构的 Mumford-泰特群与固定部分定理，《组合数学》82（1992），1–24。[2]B. Bakker，J. Tsimerman，周期积分的函数超越性，https://arxiv.org/abs/2208.05182，（2022）。[3] E. Bierstorne，P. Milman，半解析集与次解析集，《I.H.E.S. 数学出版物》（1998）。[4] E. Bombieri，W. Gubler，丢番图几何中的高度，剑桥大学出版社，2006。[5] S. Cantat，R. Dujardin，大型自同构群作用下射影曲面的有限轨道，https://arxiv.org/abs/2012.01762，（2020）。[6]K. Chiu，混合霍奇结构变分的 Ax–Schanuel，http://arxiv.org/pdf/2101.10968 arXiv:2101.10968，2021。[7] P. Corvaja，D. Masser，U. Zannier，阿贝尔概形上的挠超曲面与贝蒂坐标，《数学年刊》371（2018），1013–1045。

[8]P. Corvaja，U. Zannier，丢番图逼近在整点与超越性中的应用，《剑桥数学专著》第212卷，剑桥大学出版社，2018。[9] P. Corvaja，U. Zannier，关于代数簇的希尔伯特性质与基本群，《数学时代》286（2017）第1–2期，579–602。[10] P. Corvaja，U. Zannier，勒让德概形的非分歧截面与模形式，《几何与物理学杂志》166（2021），26页。[11] P. Corvaja，D. Masser，J. Demeio，U. Zannier，关于阿贝尔概形截面的挠值，《纯粹与应用数学杂志》782（2022），1–41。[12] S. David，阿贝尔′簇的′函数与挠′点，《组合数学》78，第2期（1991），121–160。[13] D. Bl′azquez-Sanz，G. Casale，J. Freitag，J. Nagloo，关于 Ax-Schanuel 的微分方法，I，https://arxiv.org/abs/2102.03384[14] V. Dimitrov，Z. Gao，Ph. Habegger，曲线的 Mordell-Lang 一致性，《数学年刊》 194 （ 1 ）（ 2021 ），237–298。[15] Z. Gao，泛阿贝尔簇族中的 Andr´é-Pink-Zannier 特殊点问题，《比萨高等师范学院科学年刊》5（2017），231–266。[16] Z. Gao，关于泛阿贝尔簇的混合 Ax-Schanuel 及其若干应用，《组合数学》15 2266（2020）3–2297bitemGrHaP. Griffiths，J. Harris，空间中的庞斯列定理，《赫尔维蒂数学通讯》52（1977），145–160。[17] Ph. Habegger，魏尔斯特拉斯形式椭圆曲线上的扭点，《比萨高等师范学院科学年刊》卷 XII（第5辑）（2013），1–29。[18] S. Lang，椭圆函数，数学研究生教材112，Springer，1973。[19] S. Lang，丢番图几何基础，Springer，1983。[20] Yu. Manin，函数域上曲线的有理点，《苏联科学院学报·数学辑》27.6（1963），1395–1440。[21] D. Masser，U. Zannier，椭圆曲线族的扭异常点，《美国数学杂志》132（2010），1677–1691。

[22] D. Masser, U. Zannier，椭圆曲线平方族上的扭点，《数学年刊》352（2012），453–484。[23] D. Masser, U. Zannier，椭圆曲线乘积族上的扭点，《数学进展》259（2014），116–133。[24] D. Masser, U. Zannier，简单阿贝尔簇族上的扭点、佩尔方程及初等项积分。[25] J. Pila, A. Wilkie，可定义集的有理点，《杜克数学杂志》133（2005），591–616。[26]X. Yuan, S. Zhang，准射影簇上的阿代尔线丛，https://arxiv.org/abs/2105.13587，（v4 2022）。

[27] U. Zannier，关于从 $Q(t)$的循环扩张得到的范数的局部—整体原理（一种直接、构造性且定量的方法），《数学教学》45（1999），357-377。

[28] U. Zannier，《算术与几何中的不太可能交点若干问题》，普林斯顿大学出版社（2014）。

Pietro Corvaja
Dipartimento di Scienze Matematiche e
Informatiche e Fisiche
Università di UdineVia delle Scienze,
20633100 UdineItaly电子邮箱:
pietro.corvaja@dimi.uniud.it

Jacob Tsimerman
Department of Mathematics
University of TorontoCanada电子
邮件地址：jacobt@math.toronto.edu

Umberto Zannier
Scuola Normale Superiore
Piazza dei Cavalieri, 756126 Pisa
Italy电子邮件地址:
umberto.zannier@sns.it