arXiv:2302.00870v1 [math.AG] 2 Feb 2023

属于伽罗瓦点的可延拓双有理变换

三浦圭

Abstract. 我们研究属于伽罗瓦点的双有理变换。设 P 是平面曲线 C 的一个伽罗瓦点，且 G_P 是 P处的伽罗瓦群。那么， G_P 中的一个元素会诱导 C的一个双有理变换。一般而言，确定这些双有理变换何时能够延拓为克雷莫纳变换（或射影变换）并非易事。本文将证明，若伽罗瓦群同构于三阶循环群，则该群的任意元素都可表示为 de Jonqui`ères 变换。特别地，它们都可以延拓为克雷莫纳变换。

1. Introduction

设 k 为复数域 $\mathbb{C}$。我们将其固定为本文讨论的基域。首先，我们简要回顾伽罗瓦点的概念。设 C 是 $\mathbb{P}^2$ 中次数为 d（$d \geq 3$）的不可约（可能是奇异）曲线，且 k（C）是 C的函数域。取 P $\mathbb{P}^2$上的一点，我们考虑投影 π_P： $C \dashrightarrow \mathbb{P}^1$，它是以 P为中心的投影 $\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ 的限制。于是，我们得到由 π_P诱导的域扩张，即 π_P^*： k（$\mathbb{P}^1$） $\hookrightarrow k$（C）。注意，$\deg \pi_P^* = d - m_P$，其中 m_P是 C在 P 处的重数（若 $P \notin C$，则令$m_P = 0$）。令 $K_P = \pi_P^*$（k（$\mathbb{P}^1$）），得到以下定义。

定义 1. 若域扩张 $k(C)/K_P$ 是伽罗瓦扩张，则称点 P 为 C 的伽罗瓦点。记 $G_P = \mathrm{Gal}(k(C)/K_P)$ 为 P 处的伽罗瓦群。

2020年数学主题分类。主要分类 14E07；次要分类 14H50。关键词与短语：伽罗瓦点、双有理变换、克雷莫纳变换、德·若基耶尔变换。

Yoshihara（参见[5]）引入了 C 的伽罗瓦点这一概念，以从几何角度研究域扩张 $k(C)/k$ 。

我们在一些情形下研究了伽罗瓦点（参见 [1], [2], [3], [5], [8], [9], [10], 等）。例如，我们确定了 C 的伽罗瓦点数量，并找到了具有伽罗瓦点的 C 的特征。另一方面，在 P 不是伽罗瓦点的情形下，我们确定了单值群，并构造了与伽罗瓦闭包对应的簇。

此后，假设 P 是 C的伽罗瓦点。本文旨在研究 G_P 在 C上的作用。具体而言，我们的问题如下。设 σ 是 G_P的一个元素。那么，σ诱导出一个在 $\mathbb{P}^1$上方的 C 的双有理变换，我们用同一个字母 σ 表示它。我们称 σ 为属于伽罗瓦点 P的双有理变换。

问题 1. 研究 σ的性质。

关于这个问题，我们首先提及以下定理。

定理 A（Yoshihara [8], [9]）。设 V 是 $\mathbb{P}^n$ 中次数为 d （$d \geq 4$）的光滑超曲面。那么， $\sigma \in G_P$ 中的每个元素都是某个 $\mathbb{P}^n$ 射影变换的限制。换言之，存在 $\tilde{\sigma} \in \mathrm{PGL}(n+1, k)$，使得 $\tilde{\sigma}|_V = \sigma$。此外， G_P 是一个循环群。

要使该定理成立，光滑性和 $d \geq 4$ 这两个条件都是必需的。然而，当 C 有奇点时，G_P 不一定是循环群，其元素也不一定总能扩张为射影变换（参见 [3], [8]）。特别是，在 [3], 中，我们运用饭高的 L-极小性构造了若干例子，其中 G_P 无法扩张为克雷莫纳变换。确定一个元素能否扩张为 $\mathbb{P}^2$ 的双有理变换，似乎是一个重要问题。但这个问题多年来一直悬而未决。此外，Yoshihara [10] 通过给出若干例子，对一般情形给出了否定答案。

尽管这是一个特殊情形，我们仍有关于光滑三次超曲面的以下定理。接着我们注意到，三次超曲面上的任意一点都是伽罗瓦点，其伽罗瓦群同构于二阶循环群。

定理 B（Miura [4]）。设 V 是 $\mathbb{P}^n$中的一个光滑三次超曲面。那么，属于 $P \in V$ 的双有理变换是 $\mathbb{P}^n$ 的射影变换的限制，当且仅当 P 是一个 Eckardt 点。反之，若不是，则 $P \in V$ 处伽罗瓦群的每个元素都可以表示为 $\mathbb{P}^n$的双有理变换。

本文研究 G_P 同构于 $\mathbb{Z}_3$（即三阶循环群）的情形。在这种情况下，我们可以证明， G_P 中的一个元素可扩张为 $\mathbb{P}^2$ 的双有理变换。具体而言，我们的结果如下。

定理 1. 设 C 是一条次数为 d （$d \geq 3$）的不可约（可能是奇异的）平面曲线。假设 P 是 C 的一个伽罗瓦点，且其伽罗瓦群 G_P 同构于 $\mathbb{Z}_3$。那么， G_P 中的任意元素都可表示为 de Jonqui`ères 变换。特别地， G_P 中的任意元素都可扩张为 $\mathbb{P}^2$ 的克雷莫纳变换。

注 1. 只要 $G_P \cong \mathbb{Z}_3$，点 P 就可以是 $P \in C$ 或 $P \in \mathbb{P}^2 \setminus C$。如果 $P \in C$ （分别为 $P \in \mathbb{P}^2 \setminus C$），则称伽罗瓦点 P 为内点（分别为外点）。

克雷莫纳群 Bir($\mathbb{P}^2$) 是代数几何中的一个经典研究对象。因此，关于 Bir($\mathbb{P}^2$）已有许多结果。然而，关于属于伽罗瓦点的双有理变换，我们取得的成果却很少（例如， [2], [3], [10]）。特别是，确定何时一个双有理变换可以扩张为克雷莫纳变换并不容易。

2. de Jonquières transformations

本节参考 Pan 和 Simis [7], 回顾 de Jonqui`ères 变换。根据 [7], ，de Jonqui`ères 映射是一个次数为 $d \geq 2$ 、 $\mathfrak{F}$ 的平面克雷莫纳映射，满足以下任一等价条件：

(i) $\mathfrak{F}$ 具有同调类型（$d; d-1, 1^{2d-2}$）。（ii）存在一点 $o \in \mathbb{P}^2$ ，使得将 $\mathfrak{F}$ 限制在经过 o 的一般直线上时，会将该直线双有理地映到一条经过 o的直线上。

(iii) 在射影坐标变换（源空间和目标空间）下， $\mathfrak{F}$ 由 d次形式 $\{qx_0, qx_1, f\}$ 定义，其中 f、 $q \in k[x_0, x_1, x_2]$是互素的 x_2元式，且至少有一个关于 x_2的次数为 1。

令 $J_o(\mathbb{P}^2) \subset \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$ 为所有以 o 为中心的 de Jonqui`eres 变换构成的子群。取 $o = (0:0:1)$，由第三种情形可得 de Jonqui`eres 变换的显式形式如下:

$$(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (qx_0 : qx_1 : f),$$

其中 $f = a(x_0, x_1)x_2 + b(x_0, x_1)$， $q = c(x_0, x_1)x_2 + d(x_0, x_1)$，且 $a, b, c, d \in k[x_0, x_1]$ 和 $ad - bc \neq 0$。注意，分式 $f/q = (a(x_0, x_1)x_2 + b(x_0, x_1))/(c(x_0, x_1)x_2 + d(x_0, x_1))$ 定义了变量 x_2 上的一个 M¨obius 变换，其系数属于 $\mathbb{P}^1$ 的函数域。

设 H 是由 $x_2 = 0$ 定义的直线。注意，经过 o 的直线所构成的射影空间可识别为 H。根据定义，我们推得 de Jonqui`eres 变换 $\mathfrak{F} \in J_o(\mathbb{P}^2)$ 诱导出一个双有理映射 $H \dashrightarrow H$。通过识别 $H = \mathbb{P}^1$，我们得到一个群同态

$$\rho : J_o(\mathbb{P}^2) \to \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^1).$$

现在，我们回顾以下两个对象:

- 元素 $\mathfrak{f}_{a,\ b,\ c,\ d} := (ax_2 + b)/(cx_2 + d) \in k[x_0, x_1](x_2)$。
- 有理映射 $\mathfrak{F}_{a,\ b,\ c,\ d} : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ 由 $((cx_2 + d)x_0 : (cx_2 + d)x_1 : ax_2 + b)$ 定义。

随后，Pan 和 Simis 得到了以下定理。

定理 C（Pan 和 Simis [7], 命题 1.2）。设 $\rho : J_o(\mathbb{P}^2) \to \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^1)$ 如上所述。固定 $o = (0:0:1)$ 和 $H = \{x_2 = 0\}$。我们将$K = k(H)$记为 H的函数域。那么，

(i) 克雷莫纳映射 $\mathfrak{F} \in \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$ 属于 $J_o(\mathbb{P}^2)$，当且仅当作为有理映射 $\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$，它具有形式 $(qg_0 : qg_1 : f)$，其中 $(g_0 : g_1)$ 定义了一个 $H \cong \mathbb{P}^1$ 的克雷莫纳映射，而 $q, f \in k[x_0, x_1, x_2]$ 是互素的 x_2-元式，且至少一个具有正的 x_2-次数。(ii) 群 $\mathrm{PGL}(2, K)$ 可视为莫比乌斯群，其元素形式为 $\mathfrak{f}_{a,b,c,d}$。(iii) 映射 $\mathfrak{f}_{a,b,c,d} \mapsto \mathfrak{F}_{a,b,c,d}$ 是一个单射群同态 $\psi : \mathrm{PGL}(2, K) \hookrightarrow J_o(\mathbb{P}^2)$。

(iv) Im(ψ) = Ker(ρ); 特别地，$\mathfrak{F}_{a,\ b,\ c,\ d}$ 将一条经过点 $o = (0 : 0 : 1)$ 的一般直线双有理地映到自身。

3. Proof of Theorem 1

我们证明主要定理。证明策略如下。设 P 是 C 的一个伽罗瓦点，且其伽罗瓦群 G_P 同构于 $\mathbb{Z}_3$，也就是说 $G_P = \mathrm{Gal}(k(C)/K_P) \cong \mathbb{Z}_3$。接下来我们将证明，$G_P \ni \sigma$ 可以表示为射影线性群 PGL(2, K_P) 中的一个元素。因此，由定理 C 可得结论。

这里回顾一下我们的记号。设 $f(x, y) = 0$ 是 C 的定义方程，且 $P = (0, 0)$。设 l_t 为直线 $y = tx$。那么我们可以假设投影 π_P 定义为 $\pi_P(C \cap l_t) = t$。此外，记作 $\frown f(x, t) = f(x, tx)/x^m$，其中 $m = m_P$ 是 C 在 P 处的重数。于是 $k(C) = k(x, t)$ 且 $K_P = k(t)$，扩张 $k(C)/K_P$ 由 $\widehat{\ } f(x, t) = 0$ 给出。

现在，更一般地，设 G_P 同构于 $\mathbb{Z}_n$，其中 $\mathbb{Z}_n$ 是某个整数 n ($n \geq 3$) 阶的循环群。那么，根据我们的假设，可取 $k(C) = 2K_P(\sqrt[n]{q})$，其中 $q \in K_P$ 为某个元素。显然，对于满足 $\langle\sigma\rangle = G_P$ 的某个 σ，有 $\sigma(\sqrt[n]{q}) = \zeta\sqrt[n]{q}$，其中 ζ 是一个本原 n 次单位根。在这种情况下，我们证明下面的命题。

命题 2. 设 x 是 $K_P(\sqrt[n]{q})$ 中的一个元素，满足 $x = c_0 + c_1\sqrt[n]{q} + c_2(\sqrt[n]{q})^2 + \cdots + c_{n-1}(\sqrt[n]{q})^{n-1}$，其中 c_0、c_1、……、$c_{n-1} \in K_P$。若 c_1、c_2、……、c_{n-1} 构成一个等比数列，则 $\sigma(x)$ 可表示为某个 $M \in$ PGL(2, K_P) 中的元素 $M(x)$ 所对应的莫比乌斯变换 M ¨。

证明。根据几何级数的性质，

$$
\begin{aligned}
&c_1\sqrt[n]{q} + c_2(\sqrt[n]{q})^2 + \cdots + c_{n-1}(\sqrt[n]{q})^{n-1} \\
&= \frac{c_1\sqrt[n]{q}(1 - (\frac{c_2}{c_1}\sqrt[n]{q})^{n-1})}{1 - \frac{c_2}{c_1}\sqrt[n]{q}} \\
&= \frac{c_1\sqrt[n]{q} - c_1\frac{c_2^{n-1}}{c_1^{n-1}}q}{1 - \frac{c_2}{c_1}\sqrt[n]{q}} \\
&= \frac{c_1^{n-1}\sqrt[n]{q} - c_2^{n-1}q}{c_1^{n-2} - c_1^{n-3}c_2\sqrt[n]{q}}.
\end{aligned}
$$

因此,

$$x = c_0 + \frac{c_1^{n-1}\sqrt[n]{q} - c_2^{n-1}q}{c_1^{n-2} - c_1^{n-3}c_2\sqrt[n]{q}}$$
$$= \frac{(c_1^{n-1} - c_0c_1^{n-3}c_2)\sqrt[n]{q} + c_0c_1^{n-2} - c_2^{n-1}q}{-c_1^{n-3}c_2\sqrt[n]{q} + c_1^{n-2}},$$

以便

$$\sigma(x) = \frac{(c_1^{n-1} - c_0c_1^{n-3}c_2)\zeta\sqrt[n]{q} + c_0c_1^{n-2} - c_2^{n-1}q}{-c_1^{n-3}c_2\zeta\sqrt[n]{q} + c_1^{n-2}}.$$

反之,

$$\sqrt[n]{p} = \frac{c_1^{n-2}x - c_0c_1^{n-2} + c_2^{n-1}q}{c_1^{n-3}c_2x + c_1^{n-1} - c_0c_1^{n-3}c_2}.$$

因此我们推知, $\sigma(x)$可表示为某个 $M \in \mathrm{PGL}(2, K_P)$中的莫比乌斯变换 $M(x)$。□

特别地，根据定理 C, σ 可扩展为一个克雷莫纳变换。当 $n = 3$ 时, c_1 和 c_2 总是构成一个等比数列。因此，我们得到了主要结果。

4. 示例

我们给出一些例子。

例 1. 设 C是由 $5x^{12} - 16x^{13} + 18x^{14} - 8x^{15} + x^{16} - 6x^8y^4 + 12x^9y^4 - 6x^{10}y^4 + 4x^4y^8 - 4x^5y^8 - y^{12} = 0$定义的曲线。事实上, C与四次费马曲线 $x^4+y^4+1 = 0$双有理等价，因为$k(C) = k(t)(\sqrt[4]{t^4+1})$。实际上，我们可以通过 $x = 2 + q + q^2 + q^3$得到C的定义方程，其中 $q = \sqrt[4]{t^4+1}$ 且 $t = y/x$。点$P = (0, 0) \in C$ 是重数为 12 的奇点，因此 π_P的次数为 $16 - 12 = 4$。根据构造，显然 P 是一个伽罗瓦点，且其伽罗瓦群 G_P 同构于四阶循环群。我们注意到, 上述 x 满足命题 2 的条件。实际上，对于 $\sigma \in G_P$,

$$\sigma(x) = \frac{-\zeta q + 1 - t^4}{-\zeta q + 1}.$$

因此我们推断, σ 可表示为以下 M¨obius 变换

$$M = \begin{pmatrix} -\zeta & 1 - t^4 \\ -\zeta & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{PGL}(2, K_P).$$

特别地，根据定理 C，σ 可以扩展为克雷莫纳变换。

例2. 假设 C 是一条具有三重普通尖点的平面四次曲线。那么，众所周知，C 射影等价于以下曲线之一（参见 [6]）：

(a) $X^4 - X^3Y + Y^3Z = 0$,
(b) $X^4 - Y^3Z = 0$。

在(a)的情形下，C 有两个一阶拐点。事实上，Q_1 =(0 : 1 : 0)和 Q_2 = (8 : 16 : 3)是拐点。这些拐点处的切线分别与 C 交于 P_1 = (1 : 1 : 0)和 P_2 = (8 : -16 : 3)。容易验证，π_{P_i} 给出一个全分歧三重覆盖。因此，P_i 是 C (i = 1, 2)的伽罗瓦点。根据 C拐点的条件，不存在其他内伽罗瓦点。在(b)的情形下，我们有一个伽罗瓦点 P_3 = (0 : 1 : 0)，它是一个二阶拐点。由于 C上没有其他拐点，因此不存在其他内伽罗瓦点。

我们指出，类型（b）的曲线有一个外伽罗瓦点P_4 = (1 : 0 : 0) $\in \mathbb{P}^2 \setminus C$，其伽罗瓦群同构于四阶循环群。我们很容易验证，对于 C，P_4 是类型（b）曲线上唯一的外伽罗瓦点。也就是说，类型（a）的曲线有两个内伽罗瓦点，而类型（b）的曲线有一个内伽罗瓦点和一个外伽罗瓦点。

P_i 处的伽罗瓦群都同构于三阶循环群，$\mathbb{Z}_3$ (i = 1,2,3)。令 $G_{P_i} = \langle \sigma_i \rangle$ (i = 1,2,3)，我们将证明变换 σ_1、σ_2和 σ_3 是 de Jonqui`ères 变换。

首先，我们证明类型（a）的情形。

断言 1. 假设 C 是类型 (a) 的曲线。那么，存在一个 C 的线性自同构 A，使得 $A(P_1) = P_2$。
证明. 通过设定 $A = \begin{pmatrix} 16 & -8 & 0 \\ 0 & -16 & 0 \\ 4 & -1 & 16 \end{pmatrix}$，我们可以很容易地验证 $A(C) = C$ 以及 $A(P_1) = P_2$。 □

因此，只需研究 σ_1。我们可以将 σ_1 具体表示如下。

断言2. σ_1 在射影坐标变换下可表示为 $(X:\ Y:\ Z) \mapsto (XY:\ Y((\omega-1)X+\omega Y):Z((\omega-1)X+\omega Y))$，其中 ω 是本原三次单位根。

证明。通过选取适当的射影坐标，我们可以假设P_1被平移到 $P_1' = (1:0:0)$。于是，$\pi_{P_1'}$表示为 $(X:\ Y:\ Z) \dashrightarrow (Y:\ Z)$，而 C 由 $(X+Y)^3Z - X^3Y = 0$定义。令 $x = X/Z$, $y = Y/Z$，我们可以得到由 $\pi_{P_1'}$ 诱导的域扩张：

$$\begin{array}{ccc} k(C) & = & k(x,y) \\ \cup & & \cup \\ k(\mathbb{P}^1) & = & k(y) \end{array}$$

其中，$k(x,y)/k(y)$由方程 $(x+y)^3 - x^3y = 0$给出。于是，我们得到 $\left(\dfrac{x+y}{x}\right)^3 = y$，即 $\left(1+\dfrac{y}{x}\right)^3 = y$。令 $G_{P_1'} = \langle\sigma_1'\rangle$。因此，我们推知 $\sigma_1'\left(1+\dfrac{y}{x}\right) = \omega\left(1+\dfrac{y}{x}\right)$。由此得出，$\sigma_1'(x) = \dfrac{yx}{\omega x - x + \omega y}$。由于 $\sigma_1'(x:\ y:1) = (\sigma_1'(x):\ y:1)$，且$x = X/Z, y = Y/Z$，我们得到所要证明的结论。注意，$\sigma_1'$ 在射影坐标变换下与σ_1 共轭。□

接下来，我们证明类型（b）的情形。令 $x = X/Y, y = Z/Y$，得到域扩张 $\pi_{P_3}^*$ 为 $k(x,y)/k(y)$，其中 $x^3 - y = 0$。然后，不难看出 σ_3 可表示为 $\begin{pmatrix} \omega & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{pmatrix}$。

最后，我们提及 P_4。令 $G_{P_4} = \langle\sigma_4\rangle \cong \mathbb{Z}_4$。然后容易验证，$\sigma_4$ 可表示为 $\begin{pmatrix} \eta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，其中 η 是本原四次单位根。由此，我们完成了例2的证明。

5. 问题

最后，我们提出一些问题。

问题2. 令 P 为 C的一个伽罗瓦点。

(1) 找出属于 P 的双有理变换可以扩展为克雷莫纳变换的条件。

(2) 假设属于 P 的双有理变换扩展为克雷莫纳变换。那么，这是否为 de Jonqui`ères 变换?

6. 致谢

作者谨向 Mitsunori Kanazawa 博士致谢，感谢他提出的宝贵意见。作者的研究部分得到了日本学术振兴会科研费项目 JP18K03230 的资助。

References

[1] K. Miura，《奇异平面四次曲线函数域的域论》，Bull. Austral. Math. Soc. 62 (2000), 193–204.[2] K. Miura，《平面曲线的伽罗瓦点与克雷莫纳变换》，J. Algebra 320 (2008), 987–995.[3] K. Miura，《由利萨如曲线产生的二面体伽罗瓦覆盖》，J. Geom. 91 (2009), 63–72.[4] K. Miura，《关于属于伽罗瓦点的双有理变换的注记》，Beitr. Algebra Geom. 54 (2013), 303–309.[5] K. Miura 和 H. Yoshihara，《平面四次曲线函数域的域论》，J. Algebra 226 (2000), 283–294.[6] M. Namba，《射影代数曲线几何》，Marcel Dekker，纽约，巴塞尔，1984.[7] I. Pan 和 A. Simis，《de Jonqui`ères 型克雷莫纳映射》，Canad. J. Math. 67 (2015), 923–941.[8] H. Yoshihara，《通过对偶曲线研究平面曲线的函数域理论》，J. Algebra 239 (2001), 340–355.[9] H. Yoshihara，《光滑超曲面的伽罗瓦点》，J. Algebra 264 (2003), 520–534.[10] H. Yoshihara，《具有伽罗瓦点的有理曲线与可延拓的伽罗瓦自同构》，J. Algebra 321 (2009), 1463–1472。

Department of Mathematics, National Institute of Technology, Ube College, 2-14-1 Tokiwadai, Ube, Yamaguchi 755-8555, Japan电子邮箱: kmiura@ube-k.ac.jp