arXiv:2302.00874v2 [math.CO] 6 Sep 2024

偏序集的无交叉划分中的最少链数

Ricky X. F. Chen *
合肥工业大学数学学院，中国安徽合肥230601
xiaofengchen@hfut.edu.cn

摘要

本文引入偏序集（poset）的非交叉划分这一概念。当所讨论的偏序集为 $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ 且其上赋予自然数的全序时，便得到传统的非交叉划分。偏序集的无交叉划分中所含链的最小可能数量，显然反映了该偏序集的结构复杂度。对于偏序集 $[n]$，这个数量恰为一。然而，对于一般的偏序集，确定其最小数量是一项具有挑战性的任务。本文的主要结果是对这一数量给出了一种刻画。

关键词：偏序集；链分解；无交叉划分；线性扩张；132-避免；下降 数学主题分类：06A07、06A11、05D05

1 引言

偏序集是离散数学中研究充分的对象，本文基本沿用 Stanley [13]中的记号。偏序集（poset）是一个集合 P，其元素之间定义了二元关系‘$\leq$’，该二元关系定义在集合 P 的元素之间，并满足自反性、反对称性和传递性。偏序集记作（P, $\leq$）或简写为 P。为简便起见，本文讨论的所有偏序集均假定为有限集。

若 x 和 y 在 P 中满足 $x \leq y$，则称 x 和 y 可比较。若 $x \leq y$ 但 $x \neq y$，我们记作 $x < y$。P 的链是由一些元素构成的子集，其中任意两个元素都可比较；而反链则是由一些元素构成的子集，其中任意两个元素都不可比较。P的链分解是由互不相交的链 $\{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ 组成的一个族，且满足 $\bigcup_{i=1}^{k} C_i = P$。令 $Min(P)$表示包含在 P的某个链分解中的链的最小数量，令 $Anti(P)$表示 P中一个反链所能包含的元素的最大数量。这些量反映了

*ORCID：0000-0003-1061-3049

中相关偏序集的结构复杂度。例如，若 P中存在全序，则 $Min(P) = 1$；若完全没有序关系，则 $Min(P) = |P|$（即 P中的元素数量）。著名的狄尔沃斯定理 [6] 指出，对于所有有限 $Min(P) = Anti(P)$ P。

带有各种约束的链分解已有研究，例如对称链分解、[7], 典范对称链分解 [8], 等；这些研究从不同角度反映了偏序集的结构性质与复杂性。本文介绍一种新的链分解，它可以视为组合学中无处不在的对象——无交叉划分的推广（例如参见 Armstrong [1] 和 Simion [10]）。因此，我们将这种新的分解称为偏序集的非交叉划分。具体而言，集合 $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ 的非交叉划分仅仅是带有自然序的偏序集 $[n]$ 的非交叉划分。注意，$[n]$ 本身就是 $[n]$的非交叉划分。也就是说，在这种情形下，一个非交叉划分所包含的链的最小数量显然为一。然而，对于一般偏序集，确定一个非交叉划分中的链的最小数量是一项具有挑战性的任务。

本文的主要目标是为一般偏序集的无交叉划分中所包含的链的最少可能数量提供一些刻画。

2 偏序集的无交叉划分

回顾一下，集合 $[n]$ 的无交叉划分（见 [1, 10]）是将 $[n]$ 划分为 $k \geq 1$ 个块 B_1、B_2、...、B_k 的一种划分，使得不存在元素 a、$b \in B_i$ 和 c、$d \in B_j$ $(i \neq j)$ 满足 $a < c < b < d$。例如，对于 $n = 5$、$B_1 = \{1, 5\}$ 和 $B_2 = \{2, 3, 4\}$，它们给出了将 $[5]$ 划分为两个块的无交叉划分，而 $B_1 = \{1, 3, 5\}$ 和 $B_2 = \{2, 4\}$ 则不能给出无交叉划分。显然，该定义取决于 $[n]$ 上的自然序。将 $[n]$ 视为偏序集时，B_i 就是一个链，而划分就是一个链分解。如果将 $[n]$ 替换为任意偏序集，又会怎样呢?

在继续之前，介绍哈斯图以表示偏序集会很方便。对于偏序集 P 中的两个元素 x 和 y，如果 $x < y$，且不存在 z 使得 $x < z < y$，那么我们称 y 覆盖 x。偏序集 P 的哈斯图是这样一张图：其顶点为 P 的元素，边由覆盖关系给出；若 y 覆盖 x，则将 y 画在 x 的“上方”（并在 x 和 y 之间画一条边）。注意，整个偏序关系都可以通过基于哈斯图应用传递性推导出来。

定义 2.1。偏序集 P, $\{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ 的链分解称为 P 的非交叉划分，如果不存在元素 $a, b \in C_i$ 和 $c, d \in C_j$ $(i \neq j)$，使得 $a < c < b < d$ 属于 P。

例如，对于图1中的偏序集，$\{\{a, b, c, e\}, \{d, f, g\}\}$ 是一个无交叉划分，而 $\{\{a, c, e\}, \{b, d, f, g\}\}$ 不是，因为 $a < b < c < g$。我们用 $Min_{nc}(P)$表示 P的无交叉划分中所含链的最少数量。对于 P 图1中的$Min_{nc}(P) = 2$。显然，$Min_{nc}(P) = 1$ 当且仅当 $P \sim [n]$。然而，对于一般的偏序集，要精确确定这个数并不容易。尽管如此，通过将无交叉划分与其他概念联系起来，我们能够证明一些界。

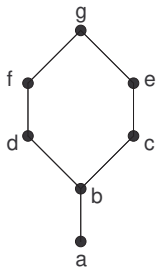


图1：一个由哈斯图表示的、含7个元素的偏序集。

定义 2.2. 设 $(P, \leq)$ 是一个偏序集。偏序集 P 的齐次链分解（HCD） $\mathcal{C}$是由互不相交的链 C_1、C_2、.....、C_n 组成的集合，满足 $\bigcup_i C_i = P$；并且，如果 $s_i \in C_i$ 和 $s_j \in C_j$ 可比较，那么 C_i 和 C_j 中的所有元素两两可比较。

在图1的例子中，$\{\{a, b, g\}, \{c, e\}, \{d, f\}\}$ 给出了一个 HCD。当两条链中的所有元素 C_i 和 C_j 两两可比较时，也就是说，$C_i \bigcup C_j$ 是一条链，我们简称 C_i 与C_j 可比较。我们还用 $C = (\xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_s)$ 简写 C 是链 $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s\}$ 且 $\xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_s$。

记 $|\mathcal{C}|$ 为 $\mathcal{C}$中所含链的数量。令 $Min_h(P) = \min_{\mathcal{C}} |\mathcal{C}|$，其中最小值取遍 P的所有 HCD。恰含 P条 $Min_h(P)$ 链的 PHCD 称为 P图1中 $Min_h(P) = 3$ 且 $\{\{a, b, g\}, \{c, e\}, \{d, f\}\}$ 实际上是唯一的 MHCD。

命题 2.1. 对于任意偏序集 P， P 都存在唯一的 MHCD。

证明。设 $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \ldots, C_m\}$ 是 P 的一个 MHCD。若对所有 $1 \leq i \leq m$ 都有 $|C_i| = 1$，则无需证明。因此，我们假设至少存在一个 i，使得$|C_i| > 1$。设 $\mathcal{C}' = \{C'_1, C'_2, \ldots, C'_m\}$ 是 P 的另一个 MHCD。首先，存在 k 和 s_{k1}、 $s_{k2} \in C_k$，使得 $s_{k1} \in C'_{j1}$、 $s_{k2} \in C'_{j2}$ 和 $C'_{j1} \neq C'_{j2}$。否则，不难证明 $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$。接下来，由于 s_{k1} 和 s_{k2} 可比较， C'_{j1} 和 C'_{j2} 也可比较。因此，$C^* = C'_{j1} \bigcup C'_{j2}$ 是 P 的一条链。

我们断言（$\mathcal{C}' \setminus \{C'_{j1}, C'_{j2}\}$）$\bigcup\{C^*\}$ 是 P的一个 HCD。对于任意 $j \notin \{j1, j2\}$， C'_j要么与 C'_{j1} 可比较，要么与 C'_{j1}不可比较。对于前一种情形，存在 $s_j \in C'_j$与 s_{k1}可比较。由于 s_{k1} 和 s_{k2} 来自同一条链 C_k，无论$s_j \in C_k$是否成立， s_{k2} 也必定与 s_j 可比较。因此， C'_j 也与 C'_{j2} 可比较，从而 C'_j 与 C^*可比较。对于后一种情形，类似地可以证明 C'_j 与 C^*不可比较。因此，断言成立。然而，这与$\mathcal{C}'$ 是最小的这一假设矛盾。因此， $\mathcal{C}$ 是 P唯一的 MHCD。

□

HCD 最初由 Chen 和 Reidys [5] 在研究偏序集的关联代数与线性序列动力系统之间的相互作用时引入；特别是，他们证明任何偏序集的 M¨obius 函数都可以通过序贯动力系统高效地

计算，并且关于偏序集 HCD 的割定理成立。

我们还需要了解一个概念，它是 132-避免排列的推广；132-避免排列是组合学和计算机科学中另一个无处不在的对象。

定义 2.3. 元素为 P 的一个排列 $\pi = \pi_1\pi_2\cdots\pi_n$ 称为 132-避免的，如果其中不存在满足 $i_1 < i_2 < i_3$ 的三元素子序列 $\pi_{i_1}\pi_{i_2}\pi_{i_3}$，且 $\pi_{i_1} < \pi_{i_3} < \pi_{i_2}$ 在 P 中。

在 $P = [n]$ 的情形下，会得到传统的 132-避免排列。例如，当 $P = [5]$ 时，53241 是一个 132-避免排列，而 21453 不是。因为在后一种情形中，我们发现子序列 243、253、143、153 都不符合定义。 的线性扩张是一个排列 $e = e_1e_2\cdots e_n$，由 P 个元素组成，且满足 $e_i < e_j$ 蕴含 $i < j$。例如，对于图 P 中的偏序集（见图 1），$abcdefg$ 和 $abcedfg$ 都是线性扩张。除非 $P \sim [n]$，否则线性扩张不止一个。

定义 2.4. 设 $e = e_1e_2\cdots e_n$是 P的一个线性扩张。若 P的元素的一个排列 $\pi = \pi_1\pi_2\cdots\pi_n$中不存在满足 $i_1 < i_2 < i_3$且$j_1 < j_3 < j_2$的子序列 $\pi_{i_1}\pi_{i_2}\pi_{i_3} = e_{j_1}e_{j_2}e_{j_3}$，则称该排列为 132^e-避免的（即相对于e而言是 132-避免的）。

例如，在图1中，$gedfbac$相对于 P的线性扩张 $abcdefg$是 132-避免的，而 $abcedfg$ 则不是，因为其中出现了子序列 ced。显然， 132^e-避免排列是 P的一个 132-避免排列。给定 P的一个排列 $\pi = \pi_1\pi_2\cdots\pi_n$，如果 $\pi_i > \pi_{i+1}$或 π_i在 P 中与 π_{i+1} 不可比较，或者 $i = n$，则称 i是 π的一个 p-下降。 π 中的 p-下降数记为 $d_P(\pi)$。对于图 1 中的 P和 $\pi = gedfbac$，可以验证 $d_P(\pi) = 5$，即 $i = 1, 2, 4, 5, 7$。令

$$Min_d(P) = \min\{d_P(\pi) : \pi \text{ is a } 132\text{-avoiding permutation of } P\},$$
$$Min_d^e(P) = \min\{d_P(\pi) : \pi \text{ is a } 132^e\text{-avoiding permutation of } P\}.$$

现在我们可以陈述主要结果了。

定理2.5（主定理）。对于任意偏序集 P，存在一个 P 的线性扩张 e，使得

$$Min_{nc}(P) \le Min_d(P) \le Min_d^e(P) \le Min_h(P). \tag{1}$$

此外，所有不等式都是紧的。

我们指出，对于任意线性扩张，最右边的不等式不一定成立。例如，对于图 $P2$ 中的偏序集 $Min_h(P) = 2$，容易看出 $e = abxy$。然而，对于它的线性扩张 $14\ 132^e$，存在一些 $14\ 132^e$-避免排列，它们的 p-下降都至少有三个。图 2中， 132^e-避免排列的下降数紧随该 132^e-避免排列之后标出。例如，“$baxy$: 3”表示 $baxy$ 有三个 p-下降。此外，我们对$Min_d^e(P)$ 感兴趣的原因如下：尽管生成所有 132-避免排列可能很困难

要计算 $Min_d(P)$，但正如我们将看到的，对于 P 的任意线性扩张 e，生成所有 132^e-避免排列都很容易，因为这实质上就是生成所有平面树。上述定理的证明由我们即将介绍的一系列性质推出。

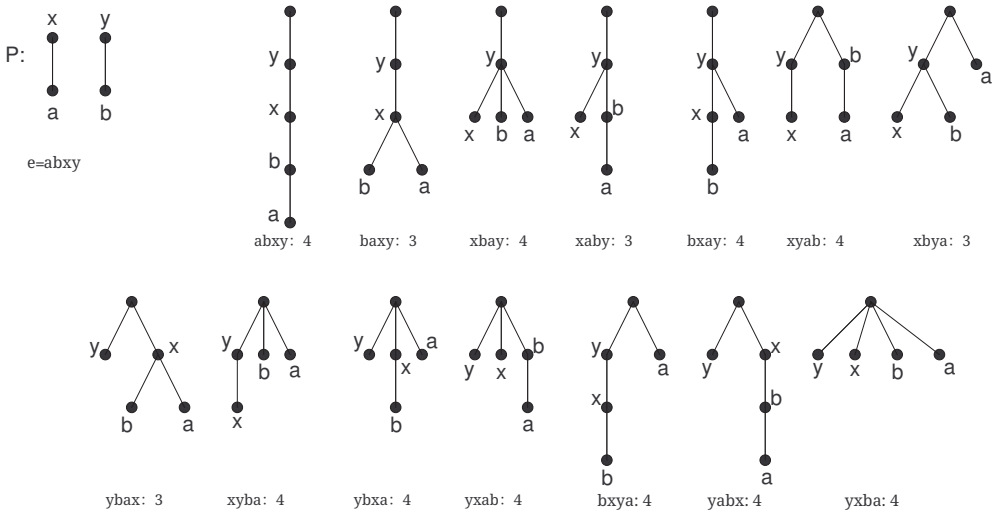


图 2：一个偏序集 P及其线性扩张 e，满足 $Min_d^e(P) > Min_h(P)$。

设 $\pi = \pi_1\pi_2\cdots\pi_n$ 是偏序集 P的一个排列。从左到右读取 π，收集每两个相邻 p-下降之间的元素，不包括第一个 p-下降对应的元素，但包括第二个 p-下降对应的元素。根据 p-下降的定义，这些元素构成一条链。由此，π 的所有 p-下降诱导出 P的一个链分解。

命题 2.2。设 π 是偏序集 P的一个 132-避免排列。那么，由 π 的 p-下降诱导出的链分解是 P的一个无交叉划分。

证明。若不然，不失一般性地，假设来自第一条诱导链的 π_1, π_2 与来自第二条诱导链的 π_3, π_4 相交，即 $\pi_1 < \pi_3 < \pi_2 < \pi_4$ 或 $\pi_3 < \pi_1 < \pi_4 < \pi_2$。显然，两种情形都会在 π 中产生一个 132 模式，这与命题矛盾。 □

因此，对于任意线性扩张 e，我们立即有 $Min_{nc}(P) \le Min_d(P) \le Min_d^e(P)$。除非另有明确说明，本节余下部分均采用以下记号。令 $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ 为 P 的 MHCD，其中

$$C_i = (s_{i1} < s_{i2} < \cdots < s_{im_i}), \quad \sum_{i=1}^{k} m_i = n.$$

Lemma 2.1. 如果 C_i 和 C_j 可比较，那么存在 $0 \le l \le m_i$ 使得 t

$$s_{i1} < s_{i2} < \cdots < s_{il} < s_{j1} < s_{j2} < \cdots < s_{jm_j} < s_{i(l+1)} < s_{i(l+2)} < \cdots < s_{im_i}.$$

证明。为了证明该引理，只需证明不存在 $0 < l_1 <、m_i$ 和 $0 < l_2 < m_j$ 使得

$$s_{il_2} < s_{jl_1} < s_{i(l_2+1)} < s_{j(l_1+1)}.$$

反设存在这样的 l_1 和 l_2 。对于任意其他的链 C_k，若 C_k 与 C_i 和 $x \in C_k$均可比较，则要么$x < s_{i(l_2+1)}$ ，要么$x > s_{i(l_2+1)}$ 。无论哪种情形，我们都可以得出， C_j 中的某个元素与 x 可比较，因此 C_j 和 C_k 可比较。通过类似的分析，我们可以得出，若 C_k 与 C_i不可比较，则 C_k 与 C_j也不可比较。因此，$(\mathcal{C} \setminus \{C_i, C_j\}) \bigcup \{C_i \cup C_j\}$ 是 P的一个HCD。这与 $\mathcal{C}$ 是最小值的假设矛盾，引理得证。 □

考虑 $\leq_b$ 在 $\mathcal{C}$ 上的关系 $C_i \leq_b C_j$ ：若存在元素 x、 $z \in C_j$ 和$y \in C_i$ ，使得 $x < y < z$ 或 $\min(C_i) > \max(C_j)$。对于第一种情形，我们称 C_j 环绕 C_i ，或称 C_i 可被 C_j环绕。根据引理2.1，留给读者验证$(\mathcal{C}, \leq_b)$是一个定义良好的偏序集。

命题 2.3. 假设 $C_1C_2 \cdots C_k$ 是 $(\mathcal{C}, \leq_b)$ 的一个线性扩张。那么以下排列 π 是 132-避免的，并且有 k 个 p-下降：

$$\pi = s_{11}s_{12} \cdots s_{1m_1}s_{21} \cdots s_{2m_2} \cdots s_{k1} \cdots s_{km_k}.$$

证明。根据定义，容易看出 π 中恰有 k 个 p-下降。我们用反证法证明其余部分。假设 π 中存在一个 132 模式 $\pi_{l_1}\pi_{l_2}\pi_{l_3}$ 。由于每个 C_i 都以递增链的形式出现在 π 中，因此只有以下两种可能的情形：

- $\pi_{l_1}, \pi_{l_2} \in C_i$, $\pi_{l_3} \in C_j$, and $i < j$;
- $\pi_{l_1} \in C_i, \pi_{l_2} \in C_j$, $\pi_{l_3} \in C_k$, and $i < j < k$.

第一种情形不可能发生，因为该条件结合引理 2.1 意味着 $C_j <_b C_i$ ，这与命题的假设矛盾。接下来假设第二种情形发生。首先， $\pi_{l_1} < \pi_{l_2}$ 和 $C_i <_b C_j$ 意味着对于某个 $x_j \in C_j$， $\pi_{l_1} > x_j$ ，即 C_j 环绕 C_i。类似地， C_k 环绕 C_i。其次， $\pi_{l_2} > \pi_{l_3}$ 和 $C_j <_b C_k$ 意味着 $\min(C_j) > \max(C_k)$，或者 C_k 环绕 C_j。由于 C_j 和 C_k 都可以环绕 C_i，前者不可能成立。另一方面， C_k 环绕 C_j，同时 C_j 环绕 C_i ，这使得不可能存在一个 132 模式 $\pi_{l_1}\pi_{l_2}\pi_{l_3}$ ，使得 $\pi_{l_1} \in C_i, \pi_{l_2} \in C_j, \pi_{l_3} \in C_k$。因此， π 中不存在 132 模式，证明完成。 □

由引理 2.1 和命题 2.3，我们得出

$$Min_{nc}(P) \leq Min_d(P) \leq Min_h(P).$$

但对于任意线性扩张 e，我们无法得出 $Min_d^e(P) \leq Min_h(P)$。

下面我们将进一步分析，在此过程中需要用到平面树。平面树 T 可递归地定义为一棵无标号树，其中有一个特殊顶点称为 T的根；从 T 中删除根及其相邻的边后得到的无标号树按线性顺序排列，且它们都是平面树

，其顶点与 T 中 T 根相邻，并分别以这些顶点为根。这些子树被画在根的下方，并按从左到右的顺序排列。没有子节点的非根顶点称为叶节点，否则称为内部顶点。根总是视为内部顶点。带标号平面树是指顶点带有某个标号集合中互不相同标号的平面树。带标号平面树 T 中顶点的先序遍历 T 是按从左到右的深度优先方式遍历，并在首次访问某个顶点时记录其标号所得到的序列。例子见图3 。

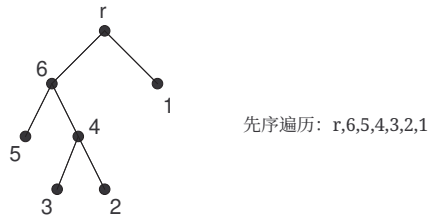


图3：一棵带标号平面树及其顶点的先序遍历。

Jani 和 Rieper 给出了平面树与传统的 132-避免排列之间的双射 [9]。下面介绍其构造方法。设 T 是一棵有 n条边的平面树。我们对 T 进行先序遍历，并用整数n， $n-1$，……，1 标记非根顶点。因此，第一个被访问的顶点标记为 n，最后一个被访问的顶点标记为 1。接下来，通过后序遍历读取带标号的树，将其写成一个排列，也就是说，从左到右遍历这棵树，并在某个顶点最后一次被访问时记录其标号。已有结果表明[9] ，得到的排列是 $[n]$ 上的 132-避免排列。例如，对于图3中的树，得到的 132-避免排列为 532461。

从 132-避免排列到平面树的逆向过程，在 Jani 和 Rieper [9] 的工作中并未明确给出。 [4] 中提出了一种逆向过程，现将其介绍如下，以备后用。设 π 是 $[n]$ 上的一个 132-避免排列。假设由 π 的 p-下降所诱导的递增链从左到右依次为 τ_1、τ_2、……、τ_k。从 τ_k 开始，将其构造成一条路径，并把 τ_k 中的最大元（即最右侧元素）连接到预期平面树 T 的根上。例如，假设 $\pi = 532461$。那么， $k = 4$ 和 $\tau_k = 1$，这条路径就是图3中从顶点 1 到树根的路径。将 τ_i “整合”到（部分）树中后，我们在当前部分树中从最左侧叶节点到根的路径上，找到大于 x 在 τ_{i-1} 中的最大元的最小元素 u，并将 τ_{i-1} 所诱导的路径连接到树上，使得 u 和 x 相邻；若不存在这样的 u ，则将 τ_{i-1} 所诱导的路径连接到当前树的根上。重复这一过程，最终会得到一棵带标号平面树。（顶点标号由底层平面树唯一确定。）

在下面的结果中，我们将使用一个简单的推广：将线性扩张 e 中的 P 的避开 132^e 排列推广到 P 的任意排列 e 。

命题 2.4. 假设 $C_1C_2\cdots C_k$ 是偏序集 $(\mathcal{C}, \leq_b)$ 的线性扩张。那么，存在一棵带标号平面树 T ，其非根顶点标号来自 P ，使得 π 中

命题 *2.3* 是 132^e-避开的，其中 e 是 T中除根以外各顶点先序遍历的逆序列。

证明。 首先，我们利用链 C_i ，按照上文所述从 132-避免排列的诱导链构造平面树的同一过程，构造一棵带标号平面树。接着我们断言，所得的树正是所需的 T。要明白这一点，需注意 Jani-Rieper 双射本质上编码了非根顶点的先序遍历、后序以及先序遍历逆序之间的关系。换言之，相对于先序遍历的逆序，后序是 132-避免的。 事实上，我们正是以这种方式构造图 2 中所有的 132^e-避免排列2。 特别地，当先序遍历为 n，$n-1$，...，1 时，后序给出了 $[n]$上的一个传统的 132-避免排列。其余部分显而易见，证明完毕。 □

还需证明，存在 $(\mathcal{C}, \leq_b)$ 的一个线性扩张，使其对应的 e 实际上是 P 的一个线性扩张。为此，我们还需要一个重要的引理。

引理 2.2. 假设 $\{C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_{k'}}\}$ 是 $(\mathcal{C}, \leq_b)$ 的子偏序集，且 C_{i_1}、C_{i_2}、.....、C_{i_m} 是该子偏序集的极大元。那么，对于任意 $m+1 \leq j \leq k'$，任何 C_{i_j} 都满足以下情形之一：

（1）对于至少一个 t （$1 \leq t \leq m$），$\min(C_{i_j}) > \max(C_{i_t})$;

（2）对于唯一一个 t （$1 \leq t \leq m$），C_{i_t} 环绕 C_{i_j}。

此外，被不同极大元环绕的两个情形（2）元素不可比较；若可比较，则情形（1）元素小于情形（2）元素，且前者的最小（P-元素）大于后者的极大元。

证明。对于任意 $m+1 \leq j \leq k'$，根据假设，C_{i_j} 小于至少一个极大元。我们首先证明 C_{i_j} 不可能同时满足两种情形。假设对于某个 $1 \leq t \leq m$，$\min(C_{i_j}) > \max(C_{i_t})$。如果 C_{i_j} 可以被另一个极大元 $C_{i_{t'}}$ 环绕，那么显然 C_{i_t} 和 $C_{i_{t'}}$ 可比较，这就产生了矛盾。类似地，满足情形（2）的元素不能同时满足情形（1）。此外，一个元素不能被多个极大元环绕。

如果由不同极大元环绕的两个情形（2）元素可比较，那么其中一个元素的最小 P-元素（即属于 P 的元素）大于另一个元素的最大 P-元素，或者其中一个环绕另一个。任一情形都意味着涉及的两个不同极大元可比较，这与极大性矛盾。其余结论可类似验证，证明完毕。 □

命题 2.5. 存在 $(\mathcal{C}, \leq_b)$ 的一个线性扩张，仍记为 $C_1C_2\cdots C_k$，其中相应的 e （命题 *2.4* 中提及的）是 P 的一个线性扩张。

证明。我们的策略是先构造 $(\mathcal{C}, \leq_b)$ 的一个线性扩张，然后论证相应的 e 是 P 的一个线性扩张。

构造 $(\mathcal{C}, \leq_b)$ 的线性扩张。首先，应用以下步骤。

(i) 初始化 $j=0, W_0=(\mathcal{C},\leq_b)$ 和 $F=W_0$;

(ii) 以任意方式将 F 的极大元排列在一条直线上;

(iii) 将关于 F 的每个情形（2）元素放在 F 中环绕它的极大元之前（并置于前一个极大元之后），然后将这些元素按顺序排列在稍后放置于同一极大元之前的位置。接着，将关于 F 的情形（1）元素组成的集合记为 W_{j+1}，并以任意方式将它们放在当前"部分线性化"的序列前面。将 F 更新为 W_{j+1}，并将 j 更新为 $j+1$;

(iv) 重复执行 (ii) 和 (iii)，直至 F 为空集。

此时，$(\mathcal{C},\leq_b)$ 中的所有元素在某种意义上都被分组成互不相交的有序组。涉及的极大 $\mathcal{C}$-元素（相对于某次迭代而言）起到了组标记的作用。（一个组的组标记位于其右侧。）图 4给出了示例，其中 C_m 以及被 C_m 环绕的情形（2）元素构成一个组。迄今得到的群称为 I 型组。根据构造，组标记中包含的最大 P-元素大于同一组中各链所含的其他所有 P-元素（就 $(P,\leq)$ 而言）。此外，根据引理 2.2，如果可比较，则左侧组中的任何 $\mathcal{C}$-元素都小于右侧组中的任何 $\mathcal{C}$-元素，因此当前序列仍有可能成为 $(\mathcal{C},\leq_b)$ 的线性扩张。

对每个排除组标记的 I型组，以及过程中新生成的每个群（排除组标记），反复应用上述过程，直至每个非空群仅包含一个元素。这是一种逐步的"线性化"。最终，我们得到 $(\mathcal{C},\leq_b)$ 的一个线性扩张。

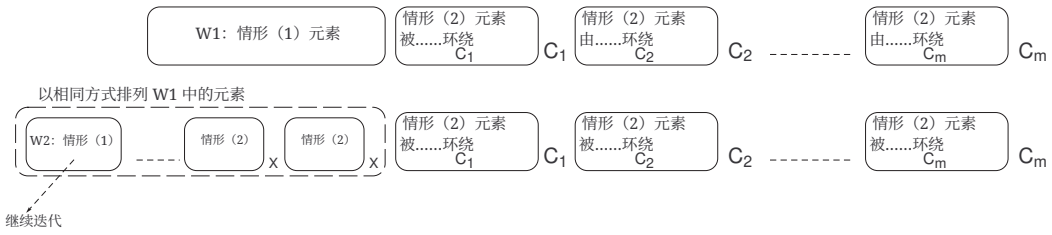


图 4：构造 $(\mathcal{C},\leq_b)$ 的线性扩张。

假设所得的线性扩张为 $C_1C_2\cdots C_k$，其对应的树由 Jani-Rieper 双射的逆向过程得到，为 T。注意，就图 4而言，C_k 这里实际上是 C_m，也就是最右链。接下来我们证明，对 T 中除根以外的顶点作先序遍历后，将所得序列 e 逆序排列，便是 P的一个线性扩张；这等价于证明：先序遍历中任意两个条目，如果在 P中可比较，那么左边的条目大于右边的条目。为此，对 T中的任意顶点 u，考虑以 u 为根的子树 T_u。只需证明：(i) u 大于其任意后代（按 P中的标号），其中假设 T 的根是一个

添加到 P 中的人工最大元；(ii) 若可比较，则 T_u 的左子树中的任意顶点都大于 T_u 的右子树中的任意顶点。

假设 u 是 T 的根。那么， $T_u = T$。根据线性扩张 $C_1C_2\cdots C_k$ 和树 T 的构造，属于不同 I 型组的链中的 P-元素（包括相应的组标记）位于 T 的不同子树中。因此，如果可比较，那么 T_u 的左子树中的 P-元素大于 T_u 的右子树中的 P-元素。所以，对于这种情形，上述两个要求 (i) 和 (ii) 均成立。

接下来考察 u 是 T 的某棵子树的根的情形。回顾一下，组标记中包含的最大 P-元素就是整个组的最大元素。鉴于 T 的构造过程， T 中由该组的 P-元素构成的相应子树的根必定是最大的 P-元素。不失一般性，我们选取最右侧的 I 型组，即以 C_k 为组标记的那个组，继续分析。在这种情形下， $u = s_{km_k}$。要求 (i) 显然成立，因为 s_{km_k} 是最大的 P- 元素。至于要求 (ii)，假设在线性扩张 $C_1C_2\cdots C_k$ 中，子序列 $C_lC_{l+1}\cdots C_k$ 所包含的链构成了以 C_k 为组标记的 I 型组。注意，限制在该子序列上时，所构造的平面树恰好是以 s_{km_k} 为根的子树 T_u 。于是，关于 T_u 子树中的顶点的要求 (ii)，与上文已验证的关于 T 子树的情形完全相同，因而成立。

以“自上而下”的方式，对 u 作为 T 中的一个顶点，重复上述推理，我们得出条件(i)和(ii)对所有顶点都成立。因此， e，即 T 的先序遍历的逆序，是 P的一个线性扩张，证明完毕。 □

现在不难综合以上所有性质，得到定理2.5。显然，当 P 本身是一条链时，所有不等式都成为等式，由此得到紧性结论。

3 MHCD与自同构群

定义3.1. 设 $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ 是 P的一个HCD。 P的 $\mathcal{C}$-图是指图 $G_{\mathcal{C}}$ ，其顶点为 C_i，其中 C_i 和 C_j 在可比较时相邻。

下文中，我们用 G_P 表示与 P 的MHCD对应的 $\mathcal{C}$-图。偏序集 P上的函数 $Min(P)$（以及许多其他函数）是Lipschitz连续的，即对于任意元素 $z \in P$， $|Min(P) - Min(P \setminus \{z\})| \leq 1$。然而， $Min_h(P)$未必具有这一性质。事实上，我们有如下刻画。

T定理 3.2。设 P 是一个偏序集，且 $z \in P$。那么，我们得到紧界 s

$$Min_h(P \setminus \{z\}) \leq Min_h(P) \leq 2Min_h(P \setminus \{z\}) + 1. \tag{2}$$

证明。设 $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ 是 P 的 MHCD。将包含 z 的链 C_i 删除后，我们得到 $P \setminus \{z\}$ 的一个 HCD $\mathcal{C}' = \{C_1, \ldots, C_i \setminus \{z\}, \ldots, C_k\}$。因此， $Min_h(P \setminus \{z\}) \leq Min_h(P)$。显然，如果对于所有 $1 \leq j \leq k$， $G_{\mathcal{C}}$ 和 $|C_j| > 1$ 之间都没有边，那么 $\mathcal{C}'$ 将是 $P \setminus \{z\}$ 的 MHCD，从而等号成立。

对于第二个不等式，设 $\mathcal{C}'$ 和 $\mathcal{C}$ 分别是 $P \setminus \{z\}$ 和 P 的 MHCD。我们首先断言

断言。$\mathcal{C}'$ 中每条链的元素至多可以包含在 $\mathcal{C}$中的两条链内。否则，$\mathcal{C}'$ 中存在一条链 C'_i，其元素包含在 $\mathcal{C}$中的至少三条不同的链 C_1、C_2、C_3 内。根据鸽巢原理，它们中至少有两条要么与 z 可比较，要么与之不可比较。不失一般性，假设 C_1、C_2 都与 z可比较。那么，C_1、C_2 都与包含 z的那条链可比较。现在，对于任意满足 $z \notin C$ 的链 $C \in \mathcal{C}$，若 C_1 与 C可比较，则 C_2也与之可比较，因为 C_1 和 C_2 包含在同一条链 C'_i中；反之亦然。因此，将 C_1 和 C_2 合并到 $\mathcal{C}$ 中，通过合并 C_1 和 C_2将得到一组链数更少的新 HCD，这与 $\mathcal{C}$ 是最小的这一假设矛盾。故断言得证。

注意到，z 可能本身就在 $\mathcal{C}$中构成一条链。因此，我们有

$$Min_h(P) \leq 2Min_h(P \setminus \{z\}) + 1.$$

关于该上界的紧性，考虑如下情形：设 $\mathcal{C}' = \{C'_1, \ldots, C'_k\}$ 满足$|C'_i| = 2$，其中 $1 \leq i \leq k$，且 $G_{P\setminus\{z\}}$中没有边。假设对每个 $1 \leq i \leq k$，z 都大于 C_i 中的最小元素，但与C_i中的最大元不可比较。示意见图5 。不难验证，P的 MHCD 中每条链都只包含一个元素。因此，$Min_h(P) = 2k + 1 = 2Min_h(P \setminus \{z\}) + 1$。证明完毕。

□

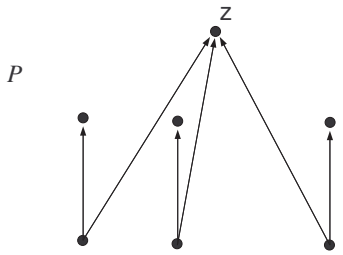


图5：一个达到 $Min_h(P)$上界的例子。

利用 MHCD 的唯一性，我们接下来能够给出偏序集自同构的刻画。关于偏序集自同构的先前研究，参见论文 [2, 3, 11, 12] 及其中的参考文献。本节余下部分均采用以下记号。令 Aut(P) 表示 P 的自同构群，令 Aut(G_P) 表示图 G_P 的自同构群。令 $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \ldots, C_m\}$为 P 的 MHCD。不失一般性，假设集合 $S_i = \{C_{k_i+1}, C_{k_i+2}, \ldots, C_{k_{i+1}}\}$ 中的链具有相同长度 l_i，其中 $0 \leq i \leq t-1$，且 $l_i \neq l_j$当 $i \neq j$ 时，其中 $t \geq 1$、$k_0 = 0$、$k_t = m$和 $\sum_{i=0}^{t-1} l_i\ (k_{i+1} - k_i) = |P|$。记 O_P为由 $V\ (G_P)$ 上的所有排列 π 生成的群，这些排列满足：对于某个 $0 \leq i \leq t-1$，π 的每个循环都包含来自同一集合 S_i 的元素。

定理 3.3. 存在 G_P 的一个无环定向 Asyc(G_P)，使得自同构群 Aut(P) 同构于该群的一个子群

$$\mathrm{Aut}(\mathrm{Asyc}(G_P))\bigcap O_P.$$

证明。注意，Aut(Asyc(G_P)) 和 O_P 都是作用在 V(G_p) 上的置换群。因此，Aut(Asyc(G_P)) $\bigcap O_P$ 确实是一个群。我们首先证明 Aut(P) 同构于 O_P 的一个子群。

断言 1. 对于任意 $g \in$ Aut(P)，MHCD 的同一条链 C_i 中的两个 P-元素，必定映射到 MHCD 中同一条链 C_j 里、具有 $|C_i| = |C_j|$ 的两个 P-元素。容易看出，任意自同构 g 都会将链映射为链，因此将链分解映射为具有相同链数的链分解。由 g 作用于 MHCD 所诱导的链分解 $\mathcal{C}'$ 必定是 HCD。证明如下。设 x'_i 是 $\mathcal{C}'$ 的一条链 C'_i 中的一个元素，x'_j 是 $\mathcal{C}'$ 的一条链 C'_j 中的一个元素。假设 x'_i 与 x'_j 可比较。注意 $g^{-1} \in$ Aut(P)。那么它们各自的原像 $x_i = g^{-1}(x'_i)$ 和 $x_j = g^{-1}(x'_j)$ 也必定可比较。设 y'_j 是 C'_j 中任意另一个元素，并令 $y_j = g^{-1}(y'_j)$。注意，根据构造，y_j 与 x_j 属于同一条链。因此 x_i 与 y_j 可比较。于是，它们在 g 下的像 x'_i 和 y'_j 也必定可比较，由此可知 C'_i 与 C'_j 可比较。类似地，若 x'_i 与 x'_j 不可比较，则 C'_i 与 C'_j 也不可比较。因此，$\mathcal{C}'$ 是一个 HCD。根据 MHCD 的唯一性，MHCD 中的每条链在 g 作用下必定唯一且专一地映射到 MHCD 中的一条链，由此得到断言 1。

根据断言 1，S_i 中的任意链都会被映射为 S_i中的一条链。此外，一条链的最大元必须被映射为另一条链的最大元；对于 MHCD 的每条链 C_i，一旦确定了最大元在 g 下的像，那么 g 就完全确定了。因此，g 唯一地诱导出 O_P中的一个元素。对于 g，$g' \in$Aut(P)，不难看出，$g \circ g'$所诱导出的元素也属于 O_P。因此，Aut(P)同构于 O_P 的一个子群。

设 $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ 为偏序集 P的 MHCD。那么，($\mathcal{C}, \leq_h$)显然是一个定义良好的偏序集，其中关系 $\leq_h$ 定义如下：$C_i \leq_h C_i$；对于 $i \neq j$，当且仅当 min(C_i) $<$ min(C_j)时，$C_i \leq_h C_j$。令 Asyc(G_P)为由偏序集 ($\mathcal{C}, \leq_h$)诱导的定向，即当且仅当 $C_i \leq_h C_j$时，G_P 中 C_i 与 C_j 之间的边定向为从 C_i 到 C_j。下面我们证明

命题2. Aut(P) 同构于 Aut(Asyc(G_P)) 的一个子群。为证明这一点，我们说明每个 $g \in$ Aut(P) 都唯一地诱导出一个自同构 $\tilde{g} \in$Aut(Asyc(G_P))。由断言 1 可知，g 将链映射到链，从而在 V(G_P) 上诱导出一个双射 $\tilde{g}$。只需验证 $\tilde{g}$保持 Asyc(G_P) 中的有向边。给定一条有向边 $C_i \to C_j$，根据构造，min(C_i) $<$ min(C_j)。因此，g(min(C_i)) $<g$(min(C_j))，且包含 g(min(C_i)) 的链 C'_i 与包含 min(C_j) 的链 C'_j 之间有一条边。根据定向的构造，C'_i 指向 C'_j。注意，在 $\tilde{g}$ 下，C_i 和 C_j 将分别映射到 C'_i 和 C'_j。显然，$\tilde{g}$ 将非邻接对映射为非邻接对。因此，$\tilde{g} \in$ Aut(Asyc(G_P))，命题得证。最后，对于 $g, g' \in$ Aut(P)，容易验证 $g \circ g'$ 诱导出

$$\tilde{g} \circ \tilde{g}' \in \mathrm{Aut}(\mathrm{Asyc}(G_P)).$$

因此，命题2成立，定理得证。 □

显然，Aut(Asyc(G_P)) $\subset$ Aut(G_P)，因此有以下推论 s.

推论3.1。自同构群 Aut(P) 同构于该群的一个子群

$$\mathrm{Aut}(G_P)\bigcap O_P.$$

本文最后提出一些有待进一步研究的问题：（1）在定理2.5中，在哪些更一般的情形下可以达到某些等式？例如，当 $Min_{nc}(P)$ $=Min_h(P)$ 时？（2）给定偏序集 P，有多少个非交叉划分？注意，当 $P=[n]$时，答案由著名的卡特兰数给出；（3）沿用定理3.3中的记号，考虑使得.....成立的充分和/或必要条件

$$\mathrm{Aut}(P)\sim \mathrm{Aut}(\mathrm{Asyc}(G_P))\bigcap O_P.$$

声明

资助声明：本研究得到中国安徽省自然科学基金（编号：2208085MA02）和安徽省海外归国人员创新创业支持项目（编号：11190-46252022001）的资助。

利益冲突：无。数据可用性：无。作者贡献：R.X.F.C.进行了研究并撰写了论文。

致谢

作者谨向匿名审稿人致谢，感谢他们提出的宝贵意见和建议，这些意见和建议改善了论文的呈现效果。

参考文献

[1]Armstrong, D.：广义非交叉划分与 Coxeter 群的组合学。《美国数学会回忆录》202，编号 949，x+159 （2009）。[2] Barmak, J.A., Minian, E.G.：有限偏序集的自同构群。《离散数学》309，3424–3426（2009）。[3] Behrendt, G.：有序集的自同构群与维数。《序理论》12，405–411（1995）。[4] Bai, Z.-W., Chen, R.X.F.：平面树上的新等分布及 132-避免排列的分解，《电子组合学杂志》31(3)，P3.24（2024）。

[5] Chen, R.X.F., Reidys, C.M.：线性序列动力系统、关联代数与 Möbius 函数。《线性代数及其应用》553，270–291（2018）。[6] Dilworth, R.P.：偏序集的一个分解定理。《数学年刊》51，161–166（1950）。[7] Greene, C., Kleitman, D.J.：Sperner 定理的强版本。《组合论杂志 A 辑》20，80–88（1976）。[8] Hsu, T., Logan, M.J., Shahriari, S., Towse, C.：将布尔格划分为最小大小较大的链。《组合论杂志 A 辑》97(1)，62–84（2002）。[9] Jani, M., Rieper, R.G.：连分数与卡特兰问题。《电子组合学杂志》7，R45（2000）。[10] Simion, R.：非交叉划分。《离散数学》217，367–409（2000）。[11] Schr¨oder, B.：小集合与串并联集合的自同构猜想。《序理论》22，371–387（2005）。[12] Stanley, R.P.：群作用于有限偏序集的若干方面。《组合论杂志 A 辑》32，132–161（1982）。[13] Stanley, R.P.：《计数组合学》第1卷。剑桥大学出版社，Cam-bridge（1997）。