非厄米弗洛凯无关的可解析求解时变系统

HamedGhaemi-Dizicheh, HamidrezaRamezani*Department of Physics and Astronomy, University of Texas Rio Grande Valley, Edinburg, Texas 78539, USA

在宇称（P）和时间反演（T）算符下保持对称的非厄米模型，是制造新型超灵敏光电子器件的基石。然而，为这类系统提供增益通常需要精确控制非线性过程，从而限制了它们的应用。本文为绕过这一障碍，提出一类时变非厄米哈密顿量（不一定是弗洛凯型），可用于描述具有时变调制格点势和耦合的两能级系统。我们表明，实施适当的非幺正规范变换，可将原系统转化为具有平衡增益与损耗的有效系统。这使我们能够解析地推导态的演化。我们提出的这类哈密顿量可应用于电子电路、声学和光子学等不同平台，以设计具有隐藏 PT对称性的结构，并有望在不采用虚部格点增益与吸收机制的情况下获得例外点。

arXiv:2302.00877v1 [quant-ph] 2 Feb 2023

I. 引言

近年来，物理学中的非厄米模型已成为一个庞大的研究领域，涵盖凝聚态物理 [1], 光子学 [2, 3], 生物物理学 [4], 和声学 [5]等领域。其中，拓扑紧束缚系统的非厄米推广引入了许多厄米系统中不存在的新现象，例如非厄米皮肤效应 [6], 独特的输运效应 [7], 拓扑边缘态的重新定位 [8], 以及抗噪声特性[9], ，仅举数例。

使紧束缚模型具有非厄米性的一种广为人知的方法，是引入复数格点势，其在光子学模型中起到增益（损耗）的作用 [10]。还可以交错设置胞间（胞内）跃迁振幅，并在系统中形成非互易性[6, 11, 12]。

在具有增益和损耗的非厄米哈密顿量中，具有平衡放大与吸收的系统被称为宇称-时间反演（PT）对称哈密顿量，并受到了更多关注。 PT对称系统已在连续模型和离散模型中得到研究 [13, 14] ，并在光子晶格 [15–18], 微环谐振器 [19–21], 和电路 [22–24]中进行了广泛的理论与实验研究。

在具有 PT 对称性的非厄米系统中，某些奇异点称为例外点（EPs），在这些点上，哈密顿量的至少两个本征值及其对应的本征矢量会合并。近年来，人们在不同的物理系统中观察到了例外点引发的许多有趣现象 [25–30]。

事实上，例外点将破缺的 PT对称区域与未破缺的 PT对称相分隔开来；在前者中，非厄米哈密顿量的本征值变为复数，而在后者中，本征值为实数。通过构建和发展 PT对称结构，可以研究许多非平凡特性，例如单向隐形、 [31], 隐形传感器 [32], 单模激射 [33], 灵敏读出 [34]以及稳健的无线电能传输 [35], 这些特性可通过构建和发展 PT对称结构进行研究——究。然而，从实际角度来看，构造精细的平衡增益与损耗是一项严格要求，阻碍了在特定量子系统中实现 PT 对称性并研究其有趣特性的可能性。

此外，增益诱导噪声和不稳定性等根本障碍促使人们寻求另一种途径，以在无增益的情况下实现 PT 对称性。具有隐藏 PT 对称性的无增益模型引起了广泛的研究兴趣 [19, 36–41]。

设计具有隐藏 PT 对称性的系统，主要有两种方法：利用非线性现象 [42]，或采用时间调制耦合。后一种方法中，幺正规范变换会得到一个有效系统，其哈密顿量在宇称和时间反演下保持不变。探索此类规范变换的一个知名平台是电子系统。例如，开关电子器件 [43] 可以触发瞬态 PT 对称性。

通过放宽通向有效哈密顿量的变换所需满足的幺正性条件，可以构建并研究一类更广泛的具有隐藏 PT 对称性的哈密顿量。这一方法构成了本文的核心思想。

在本研究中，我们提出了一类通用的时间依赖型二能级非厄米哈密顿量，它具有隐藏的 PT 对称性，可通过实施非幺正规范变换将其揭示出来。这种方法的主要特点是具有普适性。事实上，我们提出的哈密顿量不一定是弗洛凯型，因此适用于范围广泛的时间依赖型二能级系统。此外，我们构建的二能级哈密顿量包含任意位点势。当位点势的虚部为零时，系统可以变换为具有平衡增益与损耗的有效系统。因此，我们提出的方法可以避开实现放大与吸收机制时通常遇到的困难。本信中研究的二能级哈密顿量可用于模拟声学、电子学和光子学系统，其中耦合随时间或

* hamidreza.ramezani@utrgv.edu

坐标变化。
此外，我们证明，无论是否满足绝热条件，都可以对这类哈密顿量所描述的状态演化进行解析分析。当系统环绕例外点 [44] 时，精确解有助于准确预测和操控系统的行为。

本文安排如下。第二节介绍哈密顿量和非幺正规范变换，并揭示模型中的 PT 对称性。第三节将我们的方法应用于电子系统，以展示不同的 PT 对称相。附录中对系统的时间演化进行了解析研究。

II. 时变模型

考虑一类由下列时变哈密顿量描述的二能级系统

$$H(t)=\begin{pmatrix}\omega_1(t) & \dfrac{\nu f_1(t)}{f_2(t)}\\ \dfrac{\nu' f_2(t)}{f_1(t)} & \omega_2(t)\end{pmatrix}, \tag{1}$$

其中 ν，ν' 为表示时间无关耦合的实数常量，$\omega_1(t)$ 和 $\omega_2(t)$ 为复数时变位点势；我们还引入非零有限程、随时间调制的耦合 $f_{1,\,2}(t)$，它们通常线性独立；在电子系统中，它们表示时变电容和电感 [43]。下文将说明，这种特殊类型的耦合与适当的非幺正规范变换相结合，可产生具有平衡增益与损耗的有效哈密顿量。时变薛定谔方程写作

$$i\partial_t\Psi(t)=H(t)\Psi(t), \tag{2}$$

其中，$\Psi(t)=(\psi_1(t)\ \psi_2(t))^T$ 是态矢量，对于给定的初始值 $\Psi(t_0)$，模态 $\psi_{1,\,2}$ 的动力学演化由线性微分方程 (2) 给出。

我们引入含时变换 $\Psi(t)=A(t)\chi(t)$，将哈密顿量 (1) 转换为有效哈密顿量

$$H\to H_{\rm eff}(t):=A^{-1}HA-i\partial_t\ln A, \tag{3}$$

其中，A 是一个可逆的（$\det A\neq 0$）矩阵。对于位点之间存在互易耦合的封闭双能级系统，其哈密顿量由厄米矩阵给出（即，$H=H^\dagger$）。对于此类系统，为了保持态的范数（即，$\|\Psi(t)\|=\|\chi(t)\|$），变换 A 必须由幺正矩阵给出；在这种情况下，式（3）右侧的两项也是厄米的。然而，在本研究中，我们不将方法局限于相似条件，而是考虑一般的含时变换。具体而言，通过选择适当形式的含时变换 $A(t)$，可以将哈密顿量 $H(t)$ 化为无迹矩阵（即，$\mathrm{Tr}(H_{\rm eff})=0$），该矩阵描述了具有平衡增益与损耗的有效系统。实现这一点的方法是

$$A(t)=\exp\left(-i\int^t\Omega_-(t')dt'\right)\begin{pmatrix}\sqrt{\frac{f_1(t)}{f_2(t)}} & 0\\ 0 & \sqrt{\frac{f_2(t)}{f_1(t)}}\end{pmatrix}, \tag{4}$$

其中，$\Omega_\pm(t):=(\omega_1(t)\pm\omega_2(t))/2$。将 $A(t)$ 代入 (3) 后，非对角项变为与时间无关，有效哈密顿量则变为

$$H_{\rm eff}(t)=-i\Gamma\sigma_z+\nu\sigma_++\nu'\sigma_-, \tag{5}$$

其中

$$\Gamma(t):=i\Omega_-+\frac{1}{2}\partial_t\ln\frac{f_1}{f_2}, \tag{6}$$

是一个复值有效位点势，且 $\sigma_\pm:(\sigma_x\pm i\sigma_y)/2$ 用泡利矩阵 $\sigma_{x,\,y,\,z}$ 表示（变换示意图见图 1）。对于有效哈密顿量 (5)，薛定谔方程可写为

$$i\partial_t\chi(t)=H_{\rm eff}(t)\chi(t), \tag{7}$$

其中，变换后的矢量态定义为 $\chi(t)=(\zeta_-(t)\ \zeta_+(t))^T$。

通过选择特定形式的时间变换 A givenby(4)，薛定谔方程（7）可改写为如下关于 $\zeta_\mp$ 的二阶微分方程

$$\frac{d^2\zeta_\mp}{d\tau^2}\pm\left[\partial_\tau\Gamma(\tau)\mp i\Gamma(\tau)^2\pm 1\right]\zeta_\mp=0. \tag{8}$$

在推导上述微分方程时，我们对变量进行了缩放，例如

$$\left(\frac{\Gamma(t)}{\sqrt{\nu'\nu}},\sqrt{\nu'\nu}t\right)\to(\Gamma(\tau),\tau). \tag{9}$$

若假设 $\omega_2(t)=0$，则矢量态 $\Psi(t)$ 为

$$(\psi_1,\psi_2)=e^{\int^\tau\Gamma(\tau')d\tau'}(f_1f_2^{-1}\zeta_-,\zeta_+). \tag{10}$$

对于非零的 $\omega_2(t)\neq 0$，$\psi_{1,\,2}$ 的演化可通过将 $\Gamma(\tau)$ 替换为 $\to\omega_2(\tau)-\Gamma(\tau)$，由上述方程得到。在附录中，通过考虑有效位点势 $\Gamma(t)$ 的三种不同形式，我们展示了由方程（7）描述的系统演化可以解析地获得。在此基础上，实施逆时间变换即可得到原始系统（1）的动力学。

作为本节的总结，我们来考察原哈密顿量 (1) 及其有效对应形式 (5) 的本征基和本征值。对于有效系统，随时间变化的本征值为

$$\bar\lambda_\mp=\mp\sqrt{\nu\nu'-\Gamma^2(t)}. \tag{11}$$

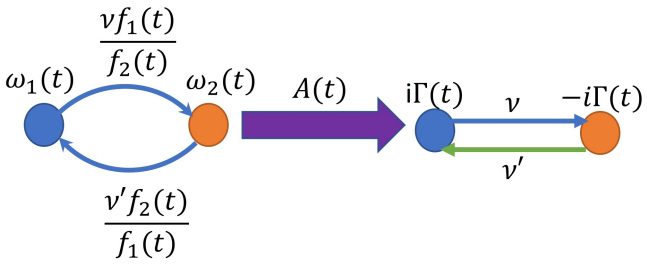

图 1. 由哈密顿量 1 描述的双能级模型，通过含时变换 $A(t)$ 转换为具有平衡增益与损耗的模型。该系统可描述两个彼此非互易耦合的光学谐振腔，其耦合随时间调制。在此模型中，当 $\mathrm{Im}(\omega_{1,2}) < 0$ ($\mathrm{Im}(\omega_{1,2}) > 0$) 时，谐振腔 1 或 2 提供动态增益（损耗）。

对于静态的 PT-对称情形，若 Γ 与时间无关且 $\nu = \nu'$，则当 $|\nu| > \Gamma$ ($|\nu| < \Gamma$) 时，系统处于 PT 未破缺（破缺）相，其中 $|\nu| = \Gamma$ 为例外点。对于周期性哈密顿量，则可通过考察弗洛凯哈密顿量的例外点，确定 PT 未破缺（破缺）相。

对于一般的含时 $\Gamma(t)$，由于非厄米性，系统的本征基并非正交，但可以利用其右本征矢和左本征矢定义双正交本征基，它们定义如下

$$H_{\mathrm{eff}}\chi^r_{\mp} = \bar{\lambda}_{\mp}\chi^r_{\mp}, \qquad H^T_{\mathrm{eff}}\chi^l_{\mp} = \bar{\lambda}_{\mp}\chi^l_{\mp}, \tag{12}$$

其中，T 表示矩阵的转置。然而，对于满足 $\nu = \nu'$ 且转置下不变有效哈密顿量（即 $H^T_{\mathrm{eff}} = H_{\mathrm{eff}}$）的互易系统，可以找到相似的右、左本征基，并只需选取其中一个来构造双正交对。在这种情况下，本征基为 [45]

$$\chi^r_- = \chi^l_- = (-\sin\frac{\bar{g}}{2}, \cos\frac{\bar{g}}{2})^T,$$

$$\chi^r_+ = \chi^l_+ = (\cos\frac{\bar{g}}{2}, \sin\frac{\bar{g}}{2})^T, \tag{13}$$

其中 $\bar{g}$ 满足 $\cot\bar{g} = i\Gamma/\nu$。另一方面，对于原哈密顿量，其本征值为

$$\lambda_{\mp} = \Omega_+ \mp \sqrt{\Omega_-^2 + \nu\nu'}, \tag{14}$$

右本征基为

$$\Psi^r_- = (-f_1(t)\sin\frac{g}{2}, f_2(t)\cos\frac{g}{2})^T,$$

$$\Psi^r_+ = (f_1(t)\cos\frac{g}{2}, f_2(t)\sin\frac{g}{2})^T, \tag{15}$$

其中 g 由 $\cot g = \Omega_-/\nu$给出。 g与 $\bar{g}$ 之间的关系可由下式求得

$$\cot(\bar{g}) = \cot(g) - \frac{iW(f_1 f_2)}{2\nu f_1 f_2}, \tag{16}$$

其中， $W(f_1 f_2)$ 是两个可微函数 f_1 和 f_2的朗斯基行列式。由式 (16) 可得 g关于 $\bar{g}$ 的表达式：

$$g = i\coth^{-1}(\frac{1}{2\nu}\partial_t \ln\frac{f_1}{f_2} + i\cot\bar{g}) + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{17}$$

对于原系统，若 $\Omega_- = \pm i\nu$，则会到达例外点（EPs）。对由哈密顿量 H_{eff}给出的有效系统进行相同的计算后，若满足以下条件，则存在例外点：

$$\Omega_- = \mp i\nu + \frac{i}{2}\partial_t \ln(f_1 f_2). \tag{18}$$

为了研究例外点在含时变换下的动力学，我们进一步定义如下复参数

$$B(t) := \Omega_-(t)/\nu = \cot g. \tag{19}$$

对于原哈密顿量 (1)，复参数 B 在参数空间（Re(B)-Im(B)）中取复数值，其表达式为

$$B^P = \pm i. \tag{20}$$

在变换 $A(t)$ 下，$\bar{\ }$ $\bar{\ }$有效系统在其参数空间（Re(B)-Im(B)）中的例外点轨迹由 $\bar{B}^P = \pm i$ 给出，其中

$$\bar{B}(t) := \frac{i\Gamma(t)}{\nu} = \cot\bar{g}. \tag{21}$$

追踪有效系统在 B 参数空间中的例外点轨迹可以发现，它们不再是常数，而是随时间变化为

$$\bar{B}^P = B^P - ib(t), \tag{22}$$

其中 $b(t) := \frac{\partial_t \ln\frac{f_1}{f_2}}{2\nu} - b_r(t) + ib_i(t)$。为推导式 (22)，我们将 $\cot g = \cot\bar{g} = i$ 代入式 (16)。这表明，在 B 参数空间中，例外点在 $t = t_1$ 处的实部（虚部）坐标分别偏移了 $-b_i(t_1)(b_r(t_1))$ 倍。

在以下部分，我们借助一个电子平台，展示系统中隐藏的 PT 对称性，该系统的动力学由哈密顿量 (1) 给出。

III. 应用： PT 电子系统中的对称性

我们利用由 RLC 电路组成的电子平台，实现了设计 PT 对称模型的方法。根据基尔霍夫定律，可以得到电容器 $V(t)$ 两端的电压与电感器 $I(t)$ 中的电流的耦合方程：

$$\partial_t V(t) = -\frac{I(t)}{C}, \tag{23}$$

$$\partial_t I(t) = \frac{V(t)}{L} + \frac{R}{L} I(t). \tag{24}$$

取 $\Psi(t) = (V(t)\ I(t))^T$ 后， RLC电路的动力学可表示为 $H(t)$

$$H(t) = i \begin{pmatrix} 0 & -1/C \\ 1/L & R/L \end{pmatrix}. \tag{25}$$

对于随时间变化的电阻 $R(t)$、电容 $C(t)$ 和电感 $L(t)$，如果设定

$$L(t) = L_0 f(t), \quad C(t) = C_0 f^{-1}(t), \quad R(t) = g(t). \tag{26}$$

那么用我们的记号表示为

$$f_1(t) := f(t), \quad f_2(t) := 1, \tag{27}$$

$$\omega_1(t) := 0, \quad \omega_2(t) = ig(t)/L_0 f(t), \tag{28}$$

$$\nu := -i/C_0, \quad \nu' := i/L_0. \tag{29}$$

如果我们调制电阻，使得 $g(t) = L_0 \partial_t f$，那么有效哈密顿量（5）可化简为

$$H_{\text{eff}} = i\partial_t \ln f \sigma_z + \omega_0 \sigma_y, \tag{30}$$

其中 $\omega_0 = 1/\sqrt{L_0 C_0}$。为得到上述关系，我们对时间变换（4）进行了修改，使得 $A(t) \to \text{diag}(C_0^{-1/2}, L_0^{-1/2})$ $A(t)$ [46]。我们首先在附录中研究与情况（a）对应的无时间依赖有效哈密顿量。这可以通过设定$f(t) = e^{-\gamma t}$来实现。随后，电子 RLC 电路模拟出一个静态的 PT-对称系统，其哈密顿量为 $H_{\text{eff}}^{PT} = i\gamma\sigma_z + \omega_0\sigma_y$。该哈密顿量的本征值为 $\lambda_\pm = \pm\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$。根据这些本征值，我们可以找到 PT-对称性破缺阈值；当 $\gamma > \omega_0$ 时，该系统被称为处于 PT-破缺相。图 2 展示了电路能量 $U_L + U_C$ 随时间的演化，其中包括 LC（$R(t) = 0$）和 RLC 电路，而

$$U_L := \frac{1}{2} L(t) I^2(t), \qquad U_C := \frac{1}{2} C(t) V^2(t). \tag{31}$$

在 $\gamma < \omega_0$ ($\gamma < 2\omega_0$) 区间内，该区间定义了未破缺的 PT 对称相。从图中可以看出，RLC（LC）系统的能量会振荡；而在破缺相中，两个系统的能量都会增大。

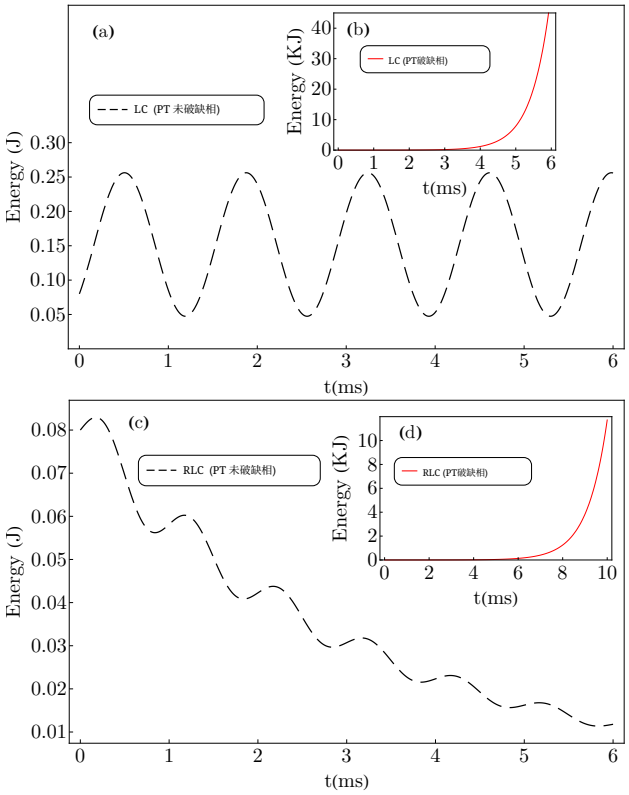

图 2. LC 电路（a、b）和 RLC 电路（c、d）的电路能量随时间的演化。在 $\gamma < \omega_0$ （$\gamma < 2\omega_0$）区间内，系统处于未破缺的 PT 对称相，能量呈振荡。这种振荡见图（a）和（c）；在后者中，电阻导致了阻尼振荡。在破缺相中，这两种电子系统的能量都会放大。

请注意，在 RLC 系统中，振荡会因电阻而按因子 $e^{-R/2L}$ 衰减。

第二步，我们考虑具有周期 $T = 2\pi/\Omega_0$ 的周期性含时 $f(t) = \epsilon_1 \cos(\Omega_0 t) + \epsilon_2$。在这种情况下，有效哈密顿量变为周期性的，因此其动力学由以下时间序乘积得到的单周期非幺正时间演化算符决定 [47],

$$U(T) = \mathbb{T} e^{-i\int_0^T H_{\text{eff}}(\tau')d\tau'} \equiv e^{-iTH_F}, \tag{32}$$

其中，时间无关算符 H_F 就是所谓的弗洛凯哈密顿量，其本征值和本征态分别称为准能量和准态[48]。相应的弗洛凯哈密顿量 H_F 可以确定系统 PT 的破缺相与未破缺相。为此，我们考察弗洛凯哈密顿量$\varepsilon_{1,\ 2}$ 的本征值，以及时间演化$\lambda_{1,\ 2}$，二者通过$\lambda_{1,\ 2} = e^{-iT\varepsilon_{1,\ 2}}$相互关联。在系统在宇称与时间反演变换下保持不变的相中，准能量$\varepsilon_{1,\ 2}$ 取实值。在这一相中，演化算符U_F 的本征值满足 $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$ （见图 3）。能量

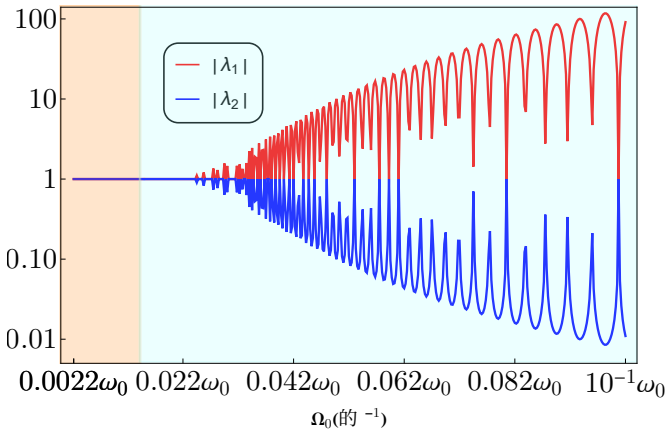

图 3. 本征值 λ_k （属于时间演化算符 U_F ）的模随 Ω_0 的变化。橙色和蓝色区域分别表示系统的 PT 未破缺相和破缺相。

在这一相中，时变 RLC 电路振荡；而当弗洛凯哈密顿量进入破缺 PT 相时，电路则会衰减。

我们注意到，对于呈阶跃函数形式的含时耦合，文献 [49] 已研究了 LC 电路中的 PT （未）破缺相。然而，我们的方法能够涵盖一大类具有隐藏 PT对称相的含时系统。

IV. 结论

总之，本文提出了一类描述具有隐藏 PT 对称性的双能级系统的时变哈密顿量。通过实施特定的非幺正规范变换，可揭示这种隐藏对称性；该变换将具有时间调制耦合和格点势的原始哈密顿量转化为具有平衡增益与损耗的有效哈密顿量。有效系统的动力学可以解析求出。含时系统通常无法解析求解。因此，利用我们的方法，可以提出一类能够解析推导例外点存在条件的系统，进而将其用于确定例外点的其他应用，包括传感。本文的方法可提供一种方案，用于设计和开发具有 PT 对称特征的不同类型系统，同时避免注入增益所带来的障碍。我们展示了如何将该方法应用于电子器件。不过，光子学模型可能具有潜在应用。开发光子学应用的主要实验挑战在于设计具有时变耦合和格点势的系统。微波领域中平滑变形的金属波导以及光学中的螺旋波导有望用于设计驱动光子学系统。在此类系统中，变形波导沿 x 轴延伸，使我们能够实现空间调制耦合 [50, 51], ，其中 x 在我们的方法中表示时间。

致谢

H. R. 感谢美国陆军研究办公室资助（项目编号 W911NF-20-1-0276），以及美国国家科学基金会资助（项目编号 PHY-2012172 和 OMA-2231387）。

附录：解析解

在本附录中，我们通过考虑 $\Gamma(t)$ 的不同形式，研究式 (5) 的解析解。

情形 (a)。我们选择有效势，使原哈密顿量 (1) 变换为与时间无关的有效哈密顿量。这对应于令 $\Gamma(\tau) = \gamma$，其中 $\gamma \in \mathbb{C}$ 是实常数。通常，式 (4) 中的含时变换 $A(t)$ 是一种非相似变换，因此系统的本征值不会保持不变。鉴于此，我们可以设计一个哈密顿量随时间线性调制的系统，例如 $H(t)$，它实际上表现为一个本征能量恒定的含时系统。实现这一方案的一种实用方式是利用电子平台。对于这种有效位点势的选择，根据微分方程 (8)，可以求得 $\zeta_\mp$ 的如下解：

$$\zeta_\mp = c_1^{(\mp)} e^{i\bar{\gamma}\tau} + c_2^{(\mp)} e^{-i\bar{\gamma}\tau}, \tag{33}$$

其中 $\bar{\gamma} := \sqrt{1-\gamma^2}$，且 $c_j^{(\mp)}$ 是由 $\zeta_-(0) := a$ 和 $\zeta_+(0) := b$ 的初始值给出的常数，例如

$$\begin{aligned} c_1^{(-)} &= \frac{\bar{\gamma}(1+i)a + i\nu b}{2\bar{\gamma}}, \quad c_2^{(-)} = \frac{\bar{\gamma}(1-i)a - i\nu b}{2\bar{\gamma}}, \\ c_1^{(+)} &= \frac{i\nu' a + \bar{\gamma}(1-i)b}{2\bar{\gamma}}, \quad c_2^{(+)} = \frac{-i\nu' a + \bar{\gamma}(1+i)b}{2\bar{\gamma}}. \end{aligned} \tag{34}$$

若 $\omega_2(t) = 0$，根据 (10)，矢量态 $\Psi(\tau)$ 可表示为

$$\Psi(\tau) = e^{-\gamma\tau}(f_1 f_2^{-1}\zeta_-, \zeta_+)^T. \tag{35}$$

现在令 $\gamma := (\gamma_1+\gamma_2)/2\sqrt{\nu\nu'}$，那么根据 $\Omega(\tau)$ 和 $\Gamma(\tau)$ 的定义，可以得出单点势 $\omega_j(t)$ 与耦合 $f_j(t)$ 之间的关系：

$$\omega_1(t) - \frac{i f_1'(t)}{f_1(t)} = -i\gamma_1, \quad \omega_2(t) - \frac{i f_2'(t)}{f_2(t)} = -i\gamma_2. \tag{36}$$

由此得到以下方程

$$\frac{f_1(t)}{f_2(t)} = f_0 u(t) e^{i\int[(\omega_1(t)-\omega_2(t))]dt}, \tag{37}$$

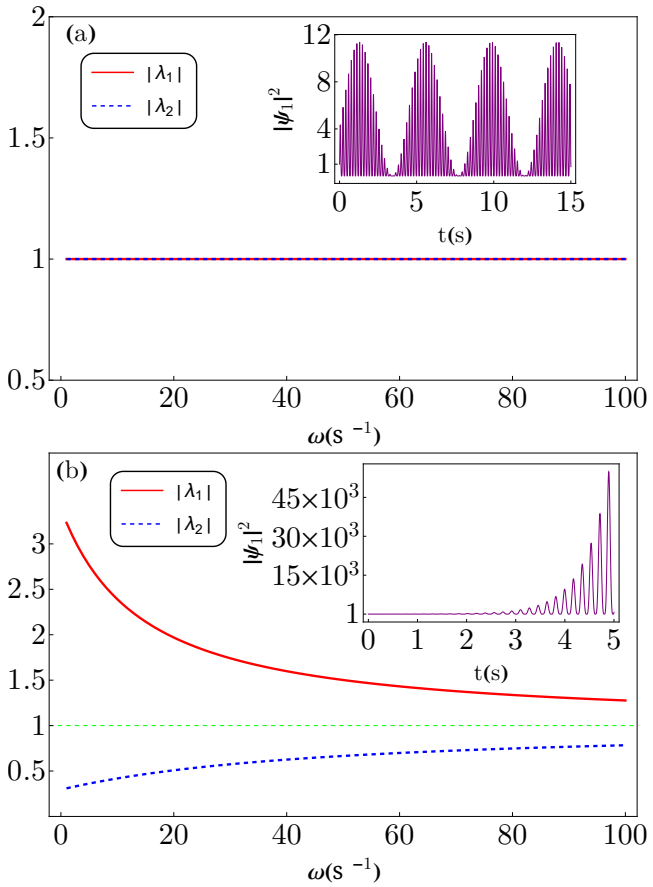

图 4. 在未破缺 (a) 和破缺 (b) PT 相中，参数取关系式 (38) 和 (39) 所给定值时，玩具模型的准能量和模态密度。

其中 $f_0 := \sqrt{f_1(0)\, f_2(0)}$ and $u(t) := e^{2(\gamma_1-\gamma_2)t}$。这表明，对于给定的 $f_j(t)$，我们可以找到相应的格点势 $\omega_j(t)$，使系统转变为定态模型。此外，对于给定的时变 $\omega_j(t)$，方程 (37) 给出了相应的时变耦合，通过这些耦合可以将系统转变为定态系统。可以利用这一方案设计一个典范的 PT-对称系统。

为说明这一点，我们考虑一个可描述一对波导的玩具模型，其动力学由哈密顿量 (1) 给出，其中函数如下：

$$f_1(t) = \sin(\omega t) + \epsilon_1, \qquad f_2(t) = \cos(\omega t) + \epsilon_2, \tag{38}$$

$$\omega_1 = \frac{i\omega\cos(\omega t)}{\sin(\omega t)+\epsilon_1} + i\gamma, \quad \omega_2 = -\frac{i\omega\sin(\omega t)}{\cos(\omega t)+\epsilon_2} - i\gamma, \tag{39}$$

其中 γ、ϵ_1、ϵ_2 和 ω 为实常数，并且我们还假设 $\nu = \nu'$。利用变换$A(t)$，系统变换为一个有效的静态 PT 对称哈密顿量；当 $\nu > \gamma$ 时处于未破缺相，当 $\nu < \gamma$ 时处于破缺相。这些相可以通过考察 $H(t)$ 的准能量以及未破缺相和破缺相中的模态分布来观察。图 4 展示了该系统的各相。

情形 (b)。在第二种情形中，我们选择 $\Gamma(\tau)$，使得对于每个对应于定态解的有效矢量态 $\zeta_\mp$，方程 (8) 中括号内的项均为零。由此得到如下选择

$$\Gamma^{(\mp)} = \mp\tanh(\tau). \tag{40}$$

可以证明，对于有效位点势 $\Gamma^{(-)}$，矢量态 $\zeta_\pm$ 为

$$\zeta_- = c_1^{(-)}\tau + c_2^{(-)}, \quad \zeta_+ = c_1^{(+)}\tanh\tau + c_2^{(+)}(\tau\tanh\tau - 1), \tag{41}$$

其中，在此情形下，系统的常数为

$$\begin{aligned} c_1^{(-)} &= -i\nu b, \qquad c_2^{(-)} = -a, \\ c_1^{(+)} &= -i\nu' a + b, \; c_2^{(+)} = -b. \end{aligned} \tag{42}$$

对于 $\Gamma^{(+)}$，矢量态与（41）相同，其中常数由（42）给出，且 $a \leftrightarrow b$ 和 $\nu \leftrightarrow \nu'$。如果$\omega_2(\tau) = 0$，那么对于原始矢量态，我们得到

$$\Psi(\tau)_\mp = (\cosh\tau)^{\pm 1}(f_1 f_2^{-1}\zeta_-, \zeta_+)^T. \tag{43}$$

情形（c）。以下关系给出了我们研究的第三个模型的有效格点势

$$\Gamma(\tau) = \alpha e^{i\gamma\tau} - \beta. \tag{44}$$

引入 $\zeta_\mp := e^{-\eta_\mp/2} W_\mp(\eta_\mp)$后，方程（8）变为

$$\eta_\mp^2 \frac{d^2 W_\mp}{d\eta_\mp^2} + \eta_\mp(1-\eta_\mp)\frac{dW_\mp}{d\eta_\mp} \pm \left[\frac{\alpha_1^{-1}+\alpha_2}{\gamma} \mp \frac{\alpha_2^2}{\gamma^2}\right] W_\mp = 0, \tag{45}$$

其中

$$\eta_\mp := \mp\frac{2i\alpha}{\gamma} e^{i\gamma\tau}, \quad \alpha_1 := (-i\beta + \sqrt{1-\beta^2})^{-1}, \tag{46}$$

$$\alpha_2 := \sqrt{1-\beta^2}. \tag{47}$$

由此可得 $W_\mp$的通解，使得

$$\begin{aligned} W_- = \eta_-^{\alpha_2/\gamma}[c_1^{(-)} U(\frac{\alpha_1}{\gamma}, 1+\frac{2\alpha_2}{\gamma}, \eta_-) + \\ c_2^{(-)} L(\frac{\alpha_1^{-1}+2\alpha_2}{\gamma}, \frac{2\alpha_2}{\gamma}, \eta_-)], \end{aligned} \tag{48}$$

$$\begin{aligned} W_+ = \eta_+^{\alpha_2/\gamma}[c_1^{(+)} U(\frac{\alpha_1^{-1}}{\gamma}, 1+\frac{2\alpha_2}{\gamma}, \eta_+) + \\ c_2^{(+)} L(-\frac{\alpha_1^{-1}}{\gamma}, \frac{2\alpha_2}{\gamma}, \eta_+)], \end{aligned} \tag{49}$$

其中，U 表示第二类合流超几何函数，L 表示拉盖尔多项式

其满足以下性质 [52]

$$\frac{d}{dz}U(m_1,m_2,z) = -m_1 U(m_1+1,m_2+2,z), \tag{50}$$

$$\frac{d}{dz}L(m_3,m_2,z) = -m_3 L(m_3-1,m_2+1,z), \tag{51}$$

$$L(m_3,m_2,z) = \frac{(m_2+1)_{m_3}}{m_1!}F_1(-m_3,m_2+1,z). \tag{52}$$

在第三个关系式中，$(m_2+1)_{m_1}$ 是波赫哈默符号， F_1 表示第一类合流超几何函数。系数 $c_{1\,2}^{(\mp)}$ ，取决于初始条件。按照 [44], 中给出的方法，我们可以使用传递矩阵法求得常数

$$\begin{pmatrix} c_1^{(-)} \\ c_2^{(-)} \end{pmatrix} = z_0^{-m} e^{z_0} \left[\mathbf{M}_0 - z_1 \mathbf{M}_1\right]^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \tag{53}$$

其中，传递矩阵 $\mathbf{M}_j$ 的求法如下

$$\mathbf{M}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{U}^{(0)} & \mathbf{L}^{(0)} \\ z_3\mathbf{U}^{(0)} & z_3\mathbf{L}^{(0)} \end{pmatrix}, \mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{U}^{(1)} & \mathbf{L}^{(1)} \end{pmatrix}. \tag{54}$$

在上述关系中，我们引入

$$z_0 := \frac{-2i\alpha}{\gamma}, \qquad z_1 := 2\alpha, \tag{55}$$

$$z_3 := (\frac{z_1 m - z_1 z_0}{2z_0} - i\beta), \qquad m := \frac{\alpha_2}{\gamma}, \tag{56}$$

而在传递矩阵的各个元素中，$\mathbf{U}$ 和 $\mathbf{L}$ 分别表示

$$\mathbf{U}^{(j)} := U(m_1+j, m_2+j, z=0), \tag{57}$$

$$\mathbf{L}^{(j)} := L(m_3-j, m_2+j, z=0). \tag{58}$$

对于 $\alpha = -\rho$ 和 $\beta = -1$，精确解可化为 [44]中给出的解。

[1] W. B. Rui、M. M. Hirschmann 和 A. P. Schnyder, $\mathcal{PT}$-对称非厄米狄拉克半金属，《物理评论B》**100**, 245116（2019）。[2] S. Longhi，复晶体中的谱奇点与布拉格散射，《物理评论A》**81**，022102（2010）。[3] K. Ding、Z. Q. Zhang 和 C. T. Chan，一维 $\mathcal{PT}$ **92**, -对称光子晶体的例外点合并与相图，《物理评论B》（）。[4] T. 235310 2015 Chou、K. Mallick 和 R. Zia，非平衡统计力学：从典范模型到生物输运，《物理学进展报告》**74**，116601（2011）。[5] X. Zhu、H. Ramezani、C. Shi、J. Zhu 和 X. Zhang， $\mathcal{PT}$-对称声学，《物理评论X》**4**，031042（2014）。[6] S. Yao 和 Z. Wang，非厄米系统的边缘态与拓扑不变量，《物理评论快报》**121**，086803 2018（）。[7] H. Ghaemi-Dizicheh 和 H. Schomerus，非厄米非互易系统中输运效应的相容性，《物理评论A》**104**，023515（2021）。[8] H. Ramezani，拓扑态的反常迁移，arXiv 预印本 arXiv:2207.12193（2022）。[9] W. Tuxbury、R. Kononchuk 和 T. Kottos，非共振例外点助力开发抗噪传感器，《通信物理》**5**，210（2022）。[10] H. Schomerus，复光子晶格中受拓扑保护的中隙态，《光学快报》**38**，1912（2013）。[11] T. E. Lee，非厄米晶格中的反常边缘态，《物理评论快报》**116**，133903（2016）。[12] S. Lieu，非厄米 Su-Schrieffer-Heeger 模型中的拓扑相，《物理评论B》**97**，045106（2018）。[13] L. Feng、R. El-Ganainy 和 L. Ge，基于宇称–时间对称性的非厄米光子学，《Nature Photonics》**11**，752（2017）。[14] R. El-Ganainy、K. G. Makris、M. Khajavikhan、Z. H. Musslimani、S. Rotter 和 D. N. Christodoulides，非厄米物理学与PT 对称性，《自然·物理》**14**, 11 2018( )。[15] R. El-Ganainy, K. G. Makris, D. N. Christodoulides, and Z. H. Musslimani，耦合光学PT对称结构理论，《Opt. Lett.》**32**, 2632 (2007)。[16] K. G. Makris, R. El-Ganainy, D. N. Christodoulides, and Z. H. Musslimani， $\mathcal{PT}$对称光学晶格中的光束动力学，《Phys. Rev. Lett.》**100**, 103904 (2008)。[17] C. E. R¨uter, K. G. Makris, R. El-Ganainy, D. N. Christodoulides, M. Segev, and D. Kip，光学中宇称-时间对称性的观测，《Nature physics》**6**, 192 (2010)。[18] A. Regensburger, C. Bersch, M.-A. Miri, G. On- ishchukov, D. N. Christodoulides, and U. Peschel，宇称-时间合成光子晶格，《Nature》**488**, 167 (2012)。[19] B. Peng, S.¸ ¨Ozdemir, S. Rotter, H. Yilmaz, M. Liertzer, F. Monifi, C. Bender, F. Nori, and L. Yang，损耗诱导的激光抑制与复兴，《Science》**346**, 328 2014( )。[20] H. Hodaei, M.-A. Miri, M. Heinrich, D. N. Christodoulides, and M. Khajavikhan, 宇称-时间对称微环激光器，《Science》**346**, 975 (2014)。[21] B. Peng, S¸. K. ¨Ozdemir, F. Lei, F. Monifi, M. Gianfreda, G. L. Long, S. Fan, F. Nori, C. M. Bender, and L. Yang，宇称-时间对称回音壁微腔，《自然·物理》**10**, 394 (2014)。[22] J. Schindler, A. Li, M. C. Zheng, F. M. Ellis, and T. Kot- tos，具有 $\mathcal{PT}$对称性的有源LRC电路实验研究，《Phys. Rev. A》**84**, 040101 (2011)。[23] M. Chitsazi, H. Li, F. M. Ellis, and T. Kottos，弗洛凯 $\mathcal{PT}$对称系统的实验实现，《Phys. Rev. Lett.》**119**, 093901 (2017)。[24] R. d. J. Le´on-Montiel, M. A. Quiroz-Ju´arez, J. L. Dom´ınguez-Ju´arez, R. Quintero-Torres, J. L. Arag´on, A. K. Harter, and Y. N. Joglekar，在弗洛凯耗散合成电路中观测到无例外点的缓慢衰减本征模，《通信物理》

《Physics》**1**, 1 (2018)。[25] M. V. Berry，非厄米简并点的物理学，《捷克斯洛伐克物理学杂志》**54**, 1039 (2004)。[26] C. M. Bender，理解非厄米哈密顿量，《物理学进展报告》**70**, 947 (2007)。[27] I. Rotter，非厄米哈密顿算符与开放量子系统的物理学，《物理学杂志A：数学与理论》**42**, 153001 (2009)。[28] N. Moiseyev，《非厄米量子力学》（剑桥大学出版社，2011）。[29] W. Heiss，例外点的物理学，《物理学杂志A：数学与理论》**45**, 444016 (2012)。[30] H. Cao and J. Wiersig，介电微腔：波混沌与非厄米物理的模型系统，《Rev. Mod. Phys.》**87**, 61 (2015)。[31] Z. Lin, H. Ramezani, T. Eichelkraut, T. Kottos, H. Cao, and D. N. Christodoulides，由 $\mathcal{PT}$对称周期结构诱导的单向隐形，《Phys. Rev. Lett.》**106**, 213901 (2011)。[32] R. Fleury, D. Sounas, and A. Alu，基于宇称-时间对称性的隐形声学传感器，《Nature commu- nications》**6**, 1 (2015)。[33] L. Feng, Z. J. Wong, R.-M. Ma, Y. Wang, and X. Zhang，通过宇称-时间对称性破缺实现的单模激光器，《Sci- ence》**346**, 972 (2014)。[34] Z. Dong, Z. Li, F. Yang, C.-W. Qiu, and J. S. Ho，使用锁定于例外点的无线系统对可植入微传感器进行灵敏读出，《自然·电子学》**2**, 335 (2019)。[35] S. Assawaworrarit and S. Fan，采用非线性宇称-时间对称电路开关模式实现的稳健高效无线电能传输，《自然·电子学》**3**, 273 (2020)。[36] H. Li, A. Mekawy, A. Krasnok, and A. Al`u，虚拟宇称-时间对称性，《Phys. Rev. Lett.》**124**, 193901 (2020)。[37] H. Li, H. Moussa, D. Sounas, and A. Al`u，基于时间调制的宇称-时间对称性，《Phys. Rev. Applied》**14**, 031002 (2020)。[38] A. Guo, G. J. Salamo, D. Duchesne, R. Morandotti, M. Volatier-Ravat, V. Aimez, G. A. Siviloglou, and D. N. Christodoulides，在复光学势中观测宇称-时间对称性破缺，《Phys. Rev. Lett.》**103**, 093902 2009( )。[39] M. Ornigotti and A. Szameit，无源光子晶格中的准对称性，《光学杂志》**16**, 065501 (2014)。[40] L. Feng, Y.-L. Xu, W. S. Fegadolli, M.-H. Lu, J. E. Oliveira, V. R. Almeida, Y.-F. Chen, and A. Scherer，单向反射的实验演示-

光学频率下无损的宇称-时间超材料，《Nature Materials》**12**，108（2013）。[41] H. Liu、D. Sun、C. Zhang、M. Groesbeck、R. Mclaughlin 和 Z. V. Vardeny，磁振子宇称-时间对称器件中例外点的观测，《Science Advances》**5**，eaax9144（2019）。[42] Y. Jiang、Y. Mei、Y. Zuo、Y. Zhai、J. Li、J. Wen 和 S. Du，冷原子中的反宇称-时间对称光学四波混频，《Phys. Rev. Lett.》**123**，193604（2019）。[43] X. Yang、J. Li、Y. Ding、M. Xu、X.-F. Zhu 和 J. Zhu，电子系统中瞬态宇称-时间对称性的观测，《Phys. Rev. Lett.》**128**，065701（2022）。[44] A. U. Hassan、B. Zhen、M. Solja˘ci´c、M. Khajavikhan 和 D. N. Christodoulides，动态环绕例外点：精确演化与偏振态转换，《Phys. Rev. Lett.》**118**，093002（2017）。[45] T. J. Milburn、J. Doppler、C. A. Holmes、S. Portolan、S. Rotter 和 P. Rabl，例外点附近准绝热动力学现象的一般描述，《Phys. Rev. A》**92**，052124（2015）。[46] 可以考虑基尔霍夫定律的一种严格形式，其中将电容的时间导数（$C(t)$）纳入考量。这样便会出现额外的位点势（即，ω_1 不再为零）。然而，在我们将原哈密顿量变换为具有平衡增益与损耗的有效哈密顿量的方法中，我们考虑了任意位点势。因此，这种系统中仍可揭示隐藏的 PT 对称性，并存在不同的破缺相与未破缺相，但例外点的位置会发生偏移。[47] J. H. Shirley，周期性含时哈密顿量的薛定谔方程解，《Phys. Rev.》**138**，B979（1965）。[48] S. Barone、M. Narcowich 和 F. Narcowich，弗洛凯理论及其应用，《Physical Review A》**15**，1109（1977）。[49] M. A. Quiroz-Ju´arez、Z. A. Cochran、J. L. Arag´on、Y. N. Joglekar 和 R. d. J. Le´on-Montiel，通过含时非幺正规范场实现宇称-时间对称性，arXiv 预印本 arXiv:2109.03846（2021）。[50] M. C. Rechtsman、J. M. Zeuner、Y. Plotnik、Y. Lumer、D. Podolsky、F. Dreisow、S. Nolte、M. Segev 和 A. Sza-meit，光子弗洛凯拓扑绝缘体，《Nature》**496**，196（2013）。[51] J. Doppler、A. A. Mailybaev、J. B¨ohm、U. Kuhl、A. Girschik、F. Libisch、T. J. Milburn、P. Rabl、N. Moiseyev 和 S. Rotter，动态环绕例外点以实现非对称模式切换，《Nature》**537**，76（2016）。[52] D. Zwillinger 和 A. Jeffrey，*Table of integrals, series, and products* 2007（Elsevier，）。