arXiv:2302.00881v1 [quant-ph] 2 Feb 2023

浅层量子电路能否将局部噪声扰乱为全局白噪声?

Jonathan Foldager[1, 2, *] 和 B´alint Koczor[2,3, †]

[1] *Department of Applied Mathematics and Computer Science, Technical University of Denmark, Denmark*
[2] *Department of Materials, University of Oxford, Parks Road, Oxford OX1 3PH, United Kingdom* [3] *Quantum Motion, 9 Sterling Way, London N7 9HJ, United Kingdom*

人们认为，浅层量子电路是实现早期实用量子优势最有希望的候选方案，这推动了多种误差缓解技术的发展；当量子态可由全局退极化（白噪声）模型很好地近似时，这些技术的表现通常会更好。随机电路能够将局部噪声扰乱为全局白噪声，这一性质已得到严格证明；它对于展示量子霸权至关重要。本文研究实用浅层量子电路在多大程度上能够将局部噪声扰乱为全局白噪声。我们定义了两个关键指标：(a) 密度矩阵本征值均匀性，以及 (b) 对易子范数。前者决定了与白噪声的距离，后者决定了基于纯化的误差缓解的表现。我们推导了这两个指标随规模变化的解析近似界，并发现多数情况下，这些界与数值结果吻合良好。另一方面，我们模拟了一大类实用量子电路，发现某些情况下白噪声并非良好的近似，这对一些较简单的误差缓解方案的表现造成了显著限制。值得注意的是，我们发现所有情况下的对易子范数都足够小，能够确保基于纯化的误差缓解具有非常好的表现。最后，我们指出了一些可能降低这两个指标的技术，例如通过插入门或随机编译来增加动力学李代数的维数。

I. 引言

当前一代量子硬件在随机采样任务中已能显著超越经典计算机 [1, 2] ，我们也希望未来硬件的发展能在量子机器学习 [3], 、基础物理学 [4, 5]以及新型药物和材料的开发 [6–9]中实现强大的应用。然而，如今这项技术的规模和精度仍不足以满足完全容错量子计算的要求：在含噪中等规模量子（NISQ）时代，由于噪声不断累积 [10], ，我们只能使用电路深度较浅的量子电路，这促使人们开发了种类繁多的量子—经典混合协议和量子机器学习算法 [11–13]。

这一范式旨在通过参数化的浅层量子电路，避免误差过度累积，然后进行一系列重复测量，以提取期望值。随后，在经典计算机上对这些期望值进行后处理，以更新电路参数，例如将其作为训练过程的一部分。一项主要挑战是可能需要过多次重复运行电路；不过，采用先进的训练算法 [14–16] 或基于经典影子的协议 [17–19], 可以显著减少所需次数。因此，近期应用的主要局限在于门噪声对估算期望值造成的损害，而只有采用先进的误差缓解技术 [12, 20] 才能减轻这种损害。

误差缓解涵盖了种类繁多的技术，通常旨在通过抑制硬件缺陷的影响来估算精确的期望值 [12, 20]。鉴于技术种类繁多，且适用范围存在显著差异，近期研究强调了性能指标的必要性 [20]。这促使本研究对典型实用电路中的噪声进行表征，例如量子模拟或量子机器学习中的电路，并定义了两个决定一大类误差缓解技术性能的关键指标：(a) 特征值均匀性，即与全局退极化（白）噪声的接近程度；(b) 理想量子态与含噪量子态之间对易子的范数。其中，(b) 决定了基于纯化的误差缓解技术的性能 [21, 22], ，而 (a) 则意味着所有误差缓解技术都能取得良好性能。

我们的主要动机是，复杂量子电路中的门误差会被搅乱，转化为全局白噪声 [1, 23]。通过建立误差界呈指数衰减的结论，这一性质已在随机电路中得到证明；令人惊讶的是，在数值模拟中我们发现，在许多实际场景下，同样的界也相当适用。具体而言，我们发现，我们的两种度量——（a）与全局退极化噪声的距离，以及（b）对易子范数——均可近似为

$$f(\nu) = \alpha \frac{e^{-\xi}\xi}{(1-e^{-\xi})\sqrt{\nu}} = \frac{\alpha}{\sqrt{\nu}} + O(\xi), \qquad (1)$$

其中， ν 是量子电路中的量子门数量，ξ 是整个电路中预期误差的数量， α 是一个常数。因此，如果保持较低的错误率 $\xi \ll 1$ ，同时增加电路中的量子门数量，那么预计 (a) 和 (b) 都会减小。这在实际应用中是非常理想的特性，例如白噪声

* jonf@dtu.dk
† balint.koczor@materials.ox.ac.uk

不会给期望值测量引入偏差，只会造成微不足道的全局缩放，正如我们将在本引言的后文中详细说明的那样。

在本研究中，我们模拟了实践中常用的多种量子电路，并通过考察门参数和电路结构是否足够随机，确定了这种近似能够很好成立的情形。我们还找到了能改善将局部门噪声扰乱为全局白噪声的策略，例如在电路中插入额外的量子门，以增加其李代数的维数 [24]。然而，在大多数情况下，我们得出结论：由于式 α （1）中的前因子较大，白噪声未必是良好的近似。因此，依赖全局退极化噪声假设的一些误差缓解技术，其性能受到限制。另一方面，我们发现，在所有情况下，对易子范数这一另一项关键指标都至少小 1–2 个数量级，从而确保基于纯化的误差缓解技术具有非常出色的性能。

本文结构如下。在本引言余下部分，我们将简要回顾全局退极化噪声及其在误差缓解中的应用，随后简要回顾基于纯化的误差缓解技术及其性能。在第II节中，我们将介绍理论概念，最后在第III节中展示模拟结果。

A. 全局退极化与误差缓解

在 NISQ 时代，我们尚无全面的纠错解决方案，因此该领域开始发展误差缓解技术。这些技术旨在针对理想的无噪声量子态 ρ_{id}，提取可观测量（通常是某个感兴趣的哈密顿量）的期望值 $\langle O\rangle_{ideal} := \mathrm{tr}[O\rho_{id}]$ 。

一种非常简单的误差模型——全局退极化噪声信道——常被视为复杂量子电路的一种相对良好的近似。对于量子比特态，该信道将理想的无噪声态与维数为$d = 2^N$ 的最大混合态 Id/d 混合，形式如下：

$$\rho_{wn} := \eta\rho_{id} + (1-\eta)\mathrm{Id}/d. \tag{2}$$

此处， $\eta \approx F$ 是一个概率，用于近似保真度 $F = \eta + (1-\eta)/d$。白噪声信道常用于文献中对近期量子计算机的误差进行建模 [25]；特别是，研究表明，它可以很好地近似随机电路中的噪声 [1, 23]。白噪声极为便利，因为用户只需经过η缩放，即可提取任意无迹厄米可观测量 O 的理想期望值，形式如下：

$$\langle O\rangle_{ideal} = \mathrm{tr}[O\rho_{wn}]/\eta. \tag{3}$$

当然，对于较低的保真度，期望值 $\mathrm{tr}[O\rho_{wn}]$ 需要显著增加采样量，才能抑制散粒噪声。在这个模型中，缩放因子 η 是一个全局属性，可以通过实验估算，例如通过随机化测量 [25]，、外推 [26] 或基于学习的技术 [27]。

然而，全局退极化模型可能不足以准确捕捉门噪声的更微妙影响，因此，对实验估计的期望值进行缩放会导致理想值的估计产生偏差，如$\langle O\rangle_{bias} := \mathrm{tr}[O\rho]/\eta - \langle O\rangle_{ideal}$。这里的偏差 $\langle O\rangle_{bias}$ 并非全局性质，即它针对每个可观测量各不相同，需要使用更先进的误差缓解技术来抑制。

直观而言，对于能够用全局退极化模型 $\rho \approx \rho_{wn}$ 良好近似的量子态，人们预期偏差较小；事实上，我们得到了一个以迹距离表示的一般上界：

$$|\langle O\rangle_{bias}| = \frac{|\,\mathrm{tr}[O\rho] - \mathrm{tr}[O\rho_{wn}]|}{\eta} \le \frac{\|O\|_\infty \|\rho - \rho_{wn}\|_1}{\eta}. \tag{4}$$

这里， $\|O\|_\infty$ 是无迹 O的算子范数，即其绝对值最大的特征值；证明请参见参考文献 [28]。因此，较小的迹距离可保证偏差较小，从而间接决定所有误差缓解技术以及其他协议 [19, 29]的性能。

在这项工作中，我们刻画了实际应用中的含噪量子态 ρ 与白噪声态 ρ_{wn} 的接近程度，并考察了含噪中等规模量子应用中常见的各种变分量子电路。当上述迹距离较小时，就能保证期望值的偏差较小，从而几乎可以不费力地缓解门噪声的影响，即通过简单的缩放来实现。

B. 基于纯化的误差缓解与对易子范数

我们还将考察另一个核心指标：理想量子态与含噪量子态之间的对易子范数 $\mathcal{E}_C := \|[\rho_{id}, \rho]\|_1$，它决定了基于纯化的误差缓解技术 [28] 的性能——较小的对易子范数具有重要的实际意义，因为它保证可以使用 ESD/VD [21, 22] 误差缓解技术准确地确定期望值。具体而言，独立制备n 份含噪量子态副本，并应用一个重排电路将这些副本纠缠起来，即可估计期望值

$$\frac{\mathrm{tr}[\rho^n O]}{\mathrm{tr}[\rho^n]} = \langle O\rangle_{ideal} + \mathcal{E}_{ESD}.$$

这种方法非常适合含噪中等规模量子设备 [30, 31] ，其近似误差 $\mathcal{E}_{ESD}$ 会随着副本数量的增加而以指数阶趋近于噪声下限n [21]；一般而言，该噪声下限由对易子范数 $\mathcal{E}_C$ 决定，但在制备本征态这一最常见的应用中，噪声下限会小一个二次量级，如 $\mathcal{E}_C^2$ [28]。

请注意，即使量子态与白噪声态相差甚远，这个对易子也可能为零；事实上，当 ρ_{id} 近似于 ρ的一个特征向量时，它通常会为零。量子态接近白噪声近似时，对易子范数必然很小。不过，我们证明，后者的条件宽松得多，且在实践中近似效果远胜前者：在所有情况下，我们发现，对易子范数都显著小于量子态与白噪声态之间的迹距离。

II. 理论背景

本节将介绍主要的理论符号，并回顾文献中最相关的结果。

A. 含噪量子态的一般性质

回顾一下，任意维数为 d 的量子态都可以用其密度矩阵 ρ 表示，该矩阵通常具有如下谱分解：

$$\rho = \sum_{k=1}^{d} \lambda_k \left|\psi_k\right\rangle\!\left\langle\psi_k\right|, \tag{5}$$

这里我们关注维数为 $d = 2^N$的 N量子比特系统。 λ_k 是非负特征值， $|\psi_k\rangle$ 是特征向量。由于$\sum_i \lambda_i = 1$，谱λ也可解释为概率分布。

如果 ρ 由完美、无噪声的酉电路制备，则只有一个特征值非零，对应的特征向量就是理想量子态，如 $|\psi_{id}\rangle$所示。相较之下，非理想电路制备出的含噪量子态 ρ 具有多个非零特征值，因此是纯量子态 $|\psi_k\rangle$的概率混合，例如，这是与周围环境相互作用所致。事实上，我们在实践中通常遇到的噪声量子电路会产生相当特殊的特征值分布结构：一个主导分量近似于理想量子态 $|\psi_1\rangle \approx |\psi_{id}\rangle$ ，并与呈指数增长的许多“误差”特征向量混合，这些特征向量的特征值很小。白噪声是非主导特征值呈指数级小 $\propto 1/d$ 且 $|\psi_1\rangle \approx |\psi_{id}\rangle$时的极限情形。

含噪量子态的质量由理想量子态的概率定义，即保真度 $F := \langle\psi_{id}|\rho|\psi_{id}\rangle$；我们在附录A中证明，对于任意量子态，它都趋近于主特征值 λ_1 ，即

$$\lambda_1 = F + O(\mathcal{E}_C), \tag{6}$$

其中我们根据对易子范数解析地计算误差项 $\mathcal{E}_C = \|[\rho_{id}, \rho]\|_1$，详见第 I A节。事实上，这一性质完全普遍，适用于任意密度矩阵。

B. 实际应用驱动的噪声模型

实践中使用的大多数典型噪声模型，例如局部退极化噪声或退相位噪声，都有如下概率解释：含噪门操作 $\Phi(\rho)$可解释为无噪操作 U 以概率 $1-\epsilon$ 发生，另加一个误差贡献，如下所示

$$\Phi_k(\rho) = (1-\epsilon) U_k \rho U_k^\dagger + \epsilon \Phi_{err}(U_k \rho U_k^\dagger). \tag{7}$$

此处， U_k 是理想量子门，而完全正迹保持（CPTP）映射 Φ_{err} 以概率 ϵ 发生，涵盖了量子门执行期间的所有错误事件。因此，量子电路是由一系列 ν 这样的量子门组合而成，并制备出如下凸组合：

$$\rho = \eta \rho_{id} + (1-\eta)\rho_{err}. \tag{8}$$

此处 $\rho_{id} := |\psi_{id}\rangle\langle\psi_{id}|$ 是理想无噪声态， ρ_{err} 是误差密度矩阵，而 $\eta = (1-\epsilon)^\nu$ 是所有量子门均未发生误差的概率。该概率实际上 [23, 28] 近似于保真度 $F := \langle\psi_{id}|\rho|\psi_{id}\rangle$ 在给定公式（7）中的噪声模型时，

$$F = (1-\epsilon)^\nu + \mathcal{E}_F = e^{-\xi} + \mathcal{E}_F + O(\epsilon^2/\nu). \tag{9}$$

这里，我们在 ϵ 较小、 ν 较大时近似 $(1-\xi/\nu)^\nu = e^{-\xi} + O(\epsilon^2/\nu)$，其中 $\xi := \epsilon\nu$ 表示电路中的预期误差数量，即电路错误率。在实践中，近似误差 $\mathcal{E}_F = \langle\psi_{id}|\rho_{err}|\psi_{id}\rangle$ 通常较小；在白噪声的极限情况下，由于 $\rho_{err} = \mathrm{Id}/d$，它会随着 $\mathcal{E}_F = 1/d$ 指数级下降。

假设电路足够深且复杂，文献 [28] 得到了理想量子态与含噪量子态之间对易子的近似界：

$$\|[\rho_{id}, \rho]\|_1 \lessapprox \text{const} \times e^{-\xi}\xi/\sqrt{\nu}. \tag{10}$$

该界证实，当我们增加电路中的量子门数量 ν 而保持电路错误率 ξ 不变时，对易子范数会随着 $\propto 1/\sqrt{\nu}$ [28]而降低。此外，这一函数与公式（1）十分相似，而探究这一点正是本研究的核心目标。

C. 随机电路中的白噪声

随机电路之所以能够使用含噪量子计算机进行量子霸权实验，主要有两个原因：(a) 这些电路的输出难以通过经典计算进行模拟；(b) 它们能将局部噪声转化为全局白噪声 [1], ，因此只会对理想概率分布引入微不足道的偏差，这与第 IA 节中的情况类似。

Ref [23] 研究了由 s 个双量子比特门组成的随机电路，每个门都会经历两种单量子比特

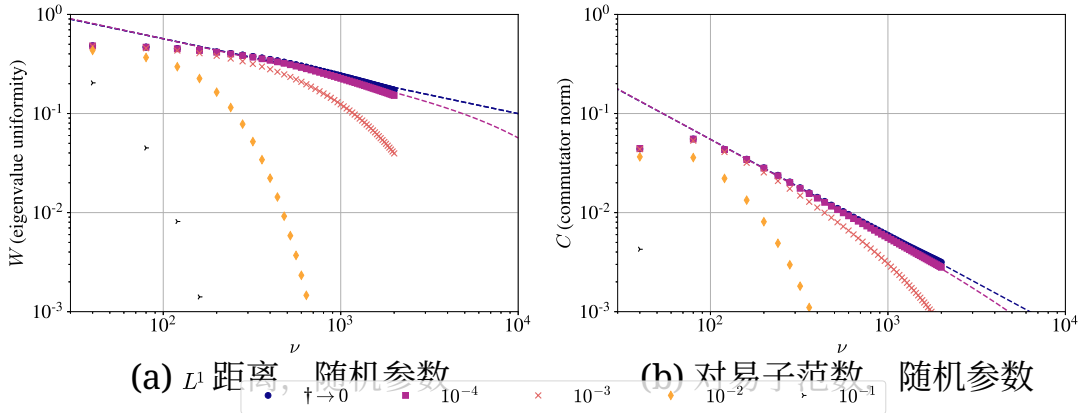


图 1. 模拟 10 量子比特强纠缠层（SEL）试探电路族 [32] 在随机门参数下，逐渐增加 ν 量子门数量和每个量子门的退极化错误率 ϵ。(a) 密度矩阵中误差特征值的均匀性度量 $W(\nu)$，其定义见式（12），与随机电路的理论模型（虚线）高度吻合，并证实增加随机电路中的量子门数量会将局部噪声扰乱为全局白噪声。(b) 对易子范数$C(\nu)$，其定义见式（14），绝对值显著更小，并且随着多项式次数增加（虚线斜率变陡）而减小，相较于均匀性度量更为明显——这表明，即使噪声无法通过白噪声得到良好描述，密度矩阵的主特征向量 ρ 也近似地与 ρ 对易。使用 $\epsilon \to 0$ 进行近似模拟，并在计算$\epsilon = 10^{-8}$ ($\epsilon = 10^{-7}$)时采用 W (C)。

（退极化）误差，每种误差发生的概率为 $\tilde{\epsilon}$ （假设单量子比特门没有噪声）。我们可以将每个双量子比特门之后的局部噪声与式（7）中的错误事件对应起来，从而将其与我们的模型联系起来，概率为$\epsilon = 1 - (1 - \tilde{\epsilon})^2 = 2\tilde{\epsilon} - \tilde{\epsilon}^2$。Ref [23] 随后确定了˜量子态的保真度 F，该量子态由含噪交叉熵得分得出，其表达式为

$$\tilde{F} = e^{-2s\tilde{\epsilon} \pm O(s\tilde{\epsilon}^2)} = e^{-\xi \pm O(\epsilon\xi)}.$$

这与我们在公式 (9) 中得到的近似一致，但指数中存在加性误差；不过，随着门错误率降低，该误差也会减小。接下来我们将 ˜因此假设 $F \equiv F$。

在标准测量基底 $\{|j\rangle\}_{j=1}^{d}$ 下测量这些含噪量子态，会得到含噪概率分布 $\tilde{p}_{noisy}(j) = \langle j|\rho|j\rangle$。参考文献 [23] 证明，该概率分布会迅速趋近于白噪声近似 $\tilde{p}_{wn} = Fp_{id} + (1 - F)p_{unif}$。具体而言，两个概率分布之间的全变差距离（通过 l_1 范数$\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$）有如下上界：

$$\tfrac{1}{2}\|\tilde{p}_{noisy} - \tilde{p}_{wn}\|_1 \leq O(F\epsilon\sqrt{\nu}) = O(e^{-\xi}\xi/\sqrt{\nu}). \quad (11)$$

该表达式在形式上与公式 (10) 中对易子范数的上界完全相同；事实上，如果量子态中的噪声趋近于白噪声近似，这意味着对易子范数也必定以相同的阶趋于零。

另一方面，反向命题未必成立，因为式（11）比式（10）的条件更强；后者只能保证主特征向量趋近于 $|\psi_1\rangle \approx |\psi_{id}\rangle$，却未对 ρ 或 ρ_{err}的特征值分布作出任何说明。

III. 数值模拟

A. 目标指标

在 NISQ 时代，全面纠错将难以实现，因此希望主要寄托于变分量子算法 [11–13, 33, 34]。在这种范式下，人们使用浅层、带参数的量子电路制备参数化量子态，以近似给定问题的解，通常是问题哈密顿量的基态。由于深度较浅，人们认为试探电路具有较强的抗误差能力；而其易于处理的参数化形式，则使人们能够探索解附近的希尔伯特空间。另一方面，这类电路在结构上与随机量子电路大不相同，文献 [23]中已有人提出，白噪声近似的误差界是否适用于这些浅层量子电路。

我们模拟受局部退极化噪声影响的此类量子电路——需要注意的是，广泛一类局部相干与非相干误差模型都可以通过随机化技术或随机编译等方法有效地转化为局部退极化噪声 [35——38]。我们通过计算以下两个量来分析由此产生的含噪密度矩阵 ρ 。首先，我们通过计算均匀性度量 W，量化其与公式（2）中的白噪声态的“接近程度”。该度量是均匀分布与输出态非主导特征值之间的 l_1距离，定义如下：

$$W := \frac{1}{2}\|p_{err} - p_{unif}\|_1 = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{d}\left|\frac{\lambda_k}{1-\lambda_1} - \frac{1}{d-1}\right|, \quad (12)$$

其仅取决于《量子》态的谱性质，

因此可以直接计算。我们在声明2 中证明 W 与白噪声量子态之间的迹距离成正比：

$$\|\rho - \rho_{wn}\|_1 = (1-\lambda_1)W + \mathcal{E}_w, \tag{13}$$

达到有界误差 $\mathcal{E}_w$。均匀性度量 W因此决定了估计任意无迹期望值时的偏差，详见第IA节。

其次，我们计算第 $\mathcal{E}_C$ 节IA 中相对于 $1-\lambda_1$ 的对易子范数，如下所示：

$$C := \frac{\|[\rho_{id}, \rho]\|_1}{1-\lambda_1} = \|[\rho_{id}, \rho_{err}]\|_1 + \mathcal{O}(\mathcal{E}_q), \tag{14}$$

根据引理 ρ_{err} ，我们将其与态ρ_{id} 的“误差部分”与理想量子态1之间的对易子范数联系起来。下文将 C 称为对易子范数——并回顾一下，正如第IA节所述，它决定了基于纯化的误差缓解所能达到的最终性能。

B. 通过强纠缠拟设生成随机态

我们首先考虑一种强纠缠拟设（SEA）：它由参数化单量子比特旋转层与一系列最近邻 CNOT 门交替构成，如图5 所示；并假设存在概率为 ϵ的局部退极化噪声。我们通过随机生成参数 $|\theta_k| \leq 2\pi$ 来模拟随机量子电路——请注意，这些电路不一定服从 Haar 随机分布，因此第IIC 节中的结果不一定适用。

我们模拟了 10 量子比特电路，并在图 1 (a) 中绘制了特征值均匀性 $W(\nu)$，同时在图 1 (b) 中绘制了随着量子门数量 $C(\nu$增加时的对易子范数 ν——所有数据点均为十个随机种子的平均值。这些结果出人意料地很好地重现了随机量子电路的预期行为：对于较小的错误率 $\epsilon \to 0$ ，这两个量 $W(\nu)$ 和 $C(\nu)$ 均可用公式（1）中的函数近似，如下文所述。

在第 IIC 节中，我们给出了参考文献 [23] 中关于 $\tilde{p}_{noisy}$ 与 $\tilde{p}_{wn}$之间距离的界。基于这些界同样适用于概率分布 $p_{noisy} = \langle\psi_k|\rho|\psi_k\rangle$和 p_{wn}的假设：$= \langle\psi_k|\rho_{wn}|\psi_k\rangle$我们在命题 4 中推导出特征值均匀性的近似界：

$$W = O\left(\frac{e^{-\xi}\xi/\sqrt{\nu}}{1-e^{-\xi}}\right).$$

此外，结合式（14）和式（10）中的界，我们发现，对易子范数 C 同样受同一函数的约束。另一方面，图 1（b）表明，对易子范数会随多项式次数增大而减小，因此我们用函数W（ν）和 C（ν）来近似

$$f(\nu) = \alpha\frac{\xi e^{-\xi}}{\nu^\beta(1-e^{-\xi})} = \alpha/\nu^\beta + \mathcal{O}(\xi) \tag{15}$$

其中，我们将两个参数 α 和 β 拟合到模拟数据集上。上面的第二个方程是对较小电路错误率 ξ的展开，详见附录A 2a。事实上，在图 1（蓝色圆圈）中，对于较小的 $\epsilon \to 0$ ，我们在图1 的双对数图中观察到近乎线性的函数，因此，当多项式指数趋近于 $b \to 1/2$ 时，我们非常准确地恢复了理论界。

此外，对比图1 （b，蓝色圆圈）和图1 （a，蓝色圆圈）可知，对易子范数的绝对值显著更小（更小α），且其以更快的多项式速率（更大的 beta）下降。相比均匀性度量，对易子范数的数值事实上小了两个以上数量级，这表明，即使ρ_{err} 无法被白噪声态很好地近似，它仍几乎与理想纯态对易ρ_{id}。

最后，我们考察绝对因子 α 如何依赖于量子比特的数量：我们在较小的错误率下进行 $\epsilon \to 0$ 模拟，并拟合我们的模型函数 $\alpha\nu^\beta$以提取 α（N），并逐步增加量子比特的数量。结果绘于图7 （e）中，表明前因子 α（N）起初缓慢增长，随后达到饱和；同时请注意，多对数深度足以达到反集中 [23]。

C. 哈密顿量变分拟设

理论结果保证，以随机参数初始化的 SEL 变分形式随着深度增加会趋近于酉 2-设计，从而重现随机量子电路的性质 [39, 40]。因此，第IIC 节介绍的模型中，SEL 变分形式（图1中的点）与真正的随机电路（图1中的连续曲线拟合）高度吻合，也就不足为奇了。

这里我们考虑采用更实用参数设置的哈密顿量变分拟设（HVA） [41, 42]：HVA 的优点是，我们能够高效地获得一组参数，使其对问题哈密顿量基态的近似效果随着拟设深度的增加而不断提升——我们将这些参数称为 VQE 参数。我们还希望将该电路与随机电路进行比较，因此也会对 HVA 进行模拟，使每个门都接收一个随机参数，具体细节见附录B1。

虽然在逐渐接近解的过程中，VQE 参数设置能够在实践中捕捉到相关行为，但随机参数在例如 VQE 参数优化的早期阶段更为相关。此外，由于该电路完全由问题哈密顿量中的泡利项组成，其动力学李代数的维数完全由问题哈密顿量决定，这与 SEL 变分形式中代数呈指数增长的情况形成对比 [24]。

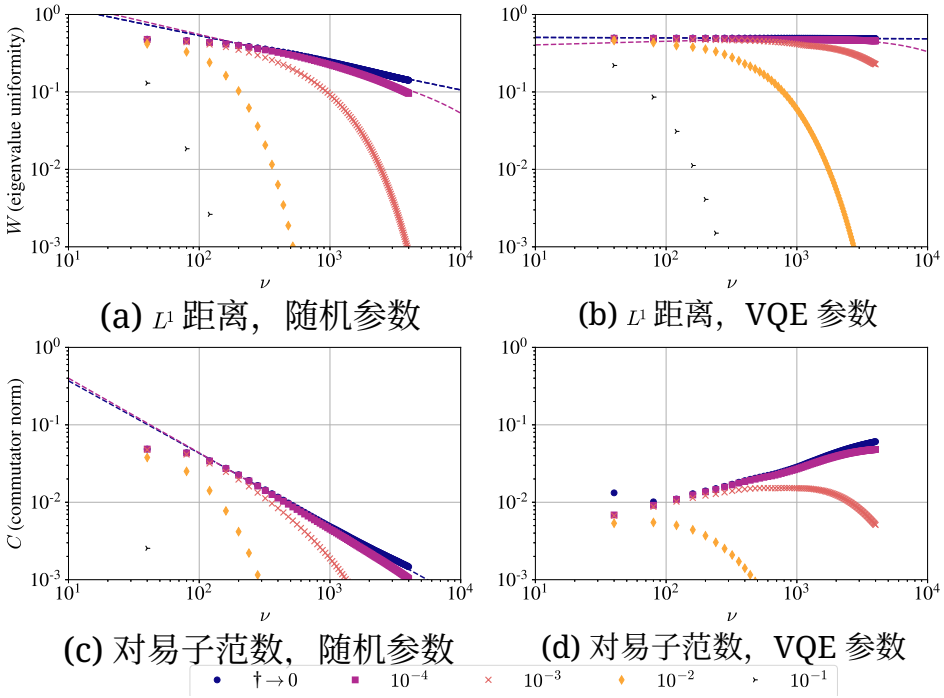


图 2. **XXX哈密顿量：** 与图 1 中的模拟相同，但使用针对XXX自旋问题哈密顿量构建的10量子比特HVA量子线路。(a, c) 对于随机选取的HVA电路参数，我们得出了与图 1中的随机电路相同的结论。(b) 当HVA电路近似于哈密顿量的基态（VQE 参数）时，我们发现电路中的噪声无法用白噪声很好地近似，即均匀性度量 $W(\nu)$ 较大，且不会随 ν的增加而减小。(d) 另一方面，对易子范数 $C(\nu)$ 显著小于 $W(\nu)$，这证实理想量子态与含噪量子态近似对易。计算 $\epsilon \to 0$时，使用 $\epsilon = 10^{-8}$ ($\epsilon = 10^{-7}$) 对模拟进行近似；计算 $W(C)$ 时亦如此。

D. 海森堡 XXX 自旋模型

我们首先考虑一个 VQE问题：求解一维 XXX 自旋链模型的基态。对于该问题哈密顿量，我们根据第 IIIC 节构造 HVA 拟设，使其成为一组 $\mathcal{H}_{\mathrm{XXX}} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1$，即

$$\mathcal{H}_0 = \sum_{k=1}^{N} \Delta_k Z_k, \; \mathcal{H}_1 = \sum_{k=1}^{N} [X_k X_{k+1} + Y_k Y_{k+1} + Z_k Z_{k+1}].$$

泡利算符 XX、YY 和 ZZ 决定了一维链中最近邻自旋之间的耦合，我们将其强度设为单位值。此外，Z_k 是局域位点相互作用 $|\Delta_k| \leq 1$，其取值均匀随机生成，使得哈密顿量具有非平凡基态。

首先，对于 $N = 10$ 个量子比特，我们使用随机生成的电路参数模拟 HVA 拟设，参数为 $|\theta_k| \leq 2\pi$，并在图 2 (a, c) 中绘制量子门数量逐渐增加时的结果。对于特征值均匀性 $W(\nu)$，我们观察到与图 1 (a) 中随机 SEL 电路类似的行为，并使用式（$\epsilon \to 0$ 15）中的模型函数，对 得到了相当好的拟合。图 2 (c) 中的对易子范数，其量级再次显著小于均匀性度量，并且随着多项式阶数增加而下降得更快，这与图 1（b）中的随机 SEL 变分形式。

其次，在图 2(b,d) 中，我们使用近似基态的变分量子本征求解器（VQE）参数模拟该拟设。由于拟设参数在趋近绝热演化时会变得非常小，因此输出密度矩阵无法用白噪声态很好地近似，这并不令人意外：图 2 (b) 中的均匀性度量非常大。图 2 (d) 中的对易子范数再次显著小于 $W(\nu)$；尽管它似乎随着 ν缓慢增大，但随着 $\nu \to \infty$，它似乎会减小。这与文献 [28] 的观察一致：在实践中，电路不必是随机的，对易子范数也能足够小。

此外，在图 7 （a、b）中，我们研究了对 N 的依赖性，并发现前因子 α 增长缓慢，并且对于 $N \geq 10$ 似乎趋于饱和。

E. 横场伊辛

在下一个示例中，我们考虑横场伊辛（TFI）模型 $\mathcal{H}_{\mathrm{TFI}} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1$，其中使用恒定的位点内相互作用 $h_i = 1$ 和随机生成的耦合

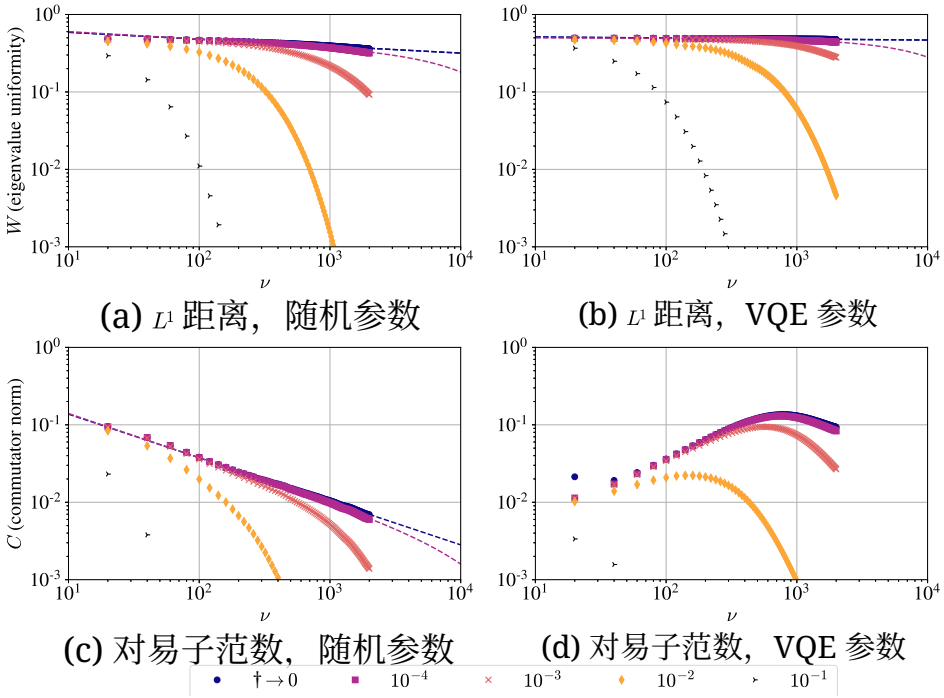


图 3. **横场伊辛** 与图 1 中相同的模拟，但使用针对横场伊辛自旋问题哈密顿量构造的 10量子比特HVA量子线路。(a、c) 对于随机选取的电路参数 $W(\nu$，其下降更慢，多项式阶数也比随机电路更小——详见正文，并参见图 6中添加了 量子门 R_z层后的模拟。(b) 在 VQE 参数下，白噪声仍不是良好的近似，即均匀性度量 $W(\nu$很大，且不会随着 ν的增加而减小。(d) 对易子范数 $C(\nu$的绝对值比 $W(\nu$小一个数量级。计算 $\epsilon \to 0$时，模拟采用 $\epsilon = 10^{-8}$($\epsilon = 10^{-7}$进行了近似。 $W(C)$。

强度 $|J_i| \leq 1$，如下

$$\mathcal{H}_0 = -\sum_i h_i X_i, \quad \mathcal{H}_1 = -\sum_i J_i Z_i Z_{i+1}. \tag{16}$$

我们首先在图中模拟带有随机变分参数的 HVA 拟设。3 (a, c)。当误差率较小 $\epsilon \to 0$ 图 3 (a，蓝色曲线) 可以很好地用我们的多项式近似形式拟合，见式 (15)；但我们观察到，图 $W(\nu)$ 中的特征值均匀性在图 3 (a，蓝色曲线) 中会随着多项式次数较低而下降。

实际上，由于 HVA 拟设针对特定哈密顿量，其动力学李代数的维数可能较低 [24]，因而将局部噪声扰乱成白噪声的能力有限；这解释了为何图 3(a) 中的均匀性度量下降得更慢，也就是说，相较于随机电路，它在较低的多项式阶数下就会下降。因此，我们还在图中模拟了6 中的横场伊辛 HVA 拟设，但在每一层中额外添加 R_z 个生成元不包含在问题哈密顿量中的量子门。动力学李代数维数的增加确实提升了扰乱效果，因为图 6 中的白噪声近似显然更好——不过请注意，维数增加也可能导致电路训练的效率呈指数级降低 [24]。

与均匀性度量的情况截然相反$W(\nu)$，我们发现，图 3 (c，蓝色)中的对易子范数随着 ν 尽管李代数维数较低。这很好地表明，小的对易子范数是一个宽松得多的条件，而白噪声则要求噪声在整个指数级庞大的希尔伯特空间中被彻底搅乱。最后，我们在 VQE 参数下模拟横场伊辛电路，发现其行为在定性上与 XXX 模型问题的情况相同。

F. 量子化学：LiH

我们考虑 Jordan-Wigner 编码下的一个 6 量子比特氢化锂 (LiH) 哈密顿量，它是非局域泡利串的线性组合 $P_k \in \{\mathrm{Id}\ X,\ Y,\ Z\}^{\otimes N}$如下

$$\mathcal{H}_{LiH} = \sum_{k=1}^{r_h} h_k P_k. \tag{17}$$

我们通过将该哈密顿量拆分为两部分来构造 HVA 拟设，其中 $\mathcal{H}_0$ 由式 (17) 中的对角泡利项组成，而 $\mathcal{H}_1$ 由非对角泡利串组成。

这类化学哈密顿量通常包含数量极多的项，且带有 $r_h \gg 1$，但其中相当大一部分的权重很小 h_k，因此 HVA 将会有

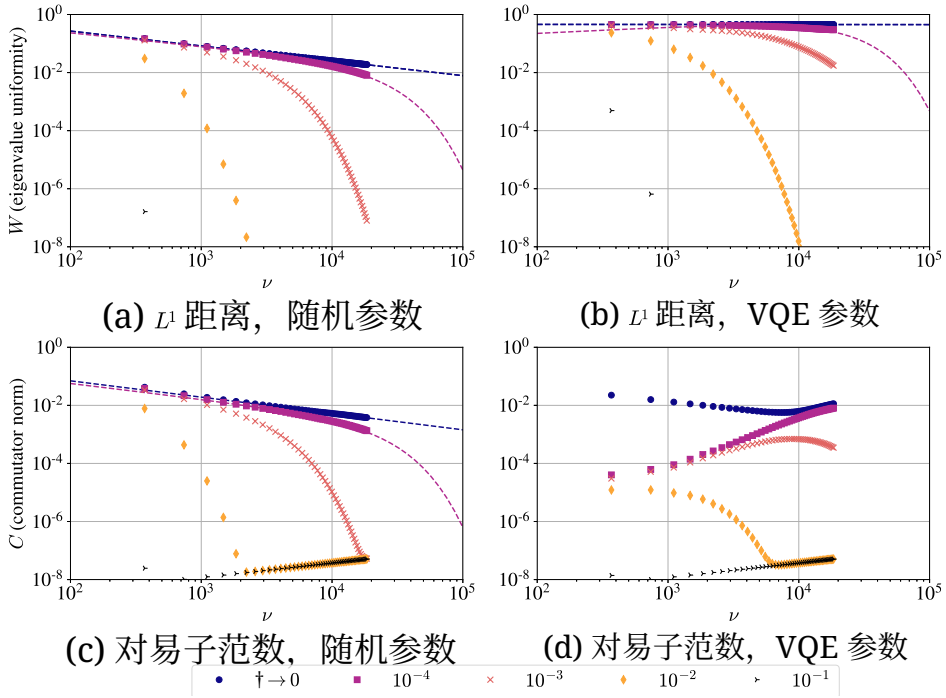


图 4。 **LiH** 与图 1 中的模拟相同，但使用为 LiH 分子哈密顿量构建的 6 量子比特 HVA 量子电路。(a, c) 在随机选取的电路参数下，由于采用了随机编译策略，随机电路中的 $W(\nu)$ 和 $C(\nu)$ 均如预期般减小 [43, 44]。(b) 在 VQE 参数下，白噪声是越来越差的近似，即随着 ν 增大，均匀性度量 $W(\nu)$ 也随之增大 ν。(d) 对易子范数 $C(\nu)$ 的绝对值比 $W(\nu)$ 小 2 个数量级。计算 $\epsilon \to 0$ 时，模拟采用 $\epsilon = 10^{-8}$ ($\epsilon = 10^{-7}$) 进行近似 $W(C)$。

大量旋转角极小的量子门。基于这些原因，我们利用稀疏编译技术构造了一种效率更高的电路，其基本构件由 [43, 44]以下方式构成：HVA 拟设中的每一层都由量子门组成，这些量子门对应于从哈密顿量中随机选取的 100 个项，采样概率 $p_k \propto |h_k|$ 与泡利系数成正比。这种方法还有一个额外优点：它使电路结构具有随机性，而非采用第IIID 节和第III E节中的固定结构。

图中的结果 4 (a,c) 与前面各节的发现一致：在随机选取的电路参数下，均匀性度量按照公式 (15) 递减；对易子范数也以更高的多项式阶数递减，同时其绝对值至少小一个数量级。相比之下，图 4 (b) 表明，误差无法很好地近似为白噪声，且白噪声较大并且不随$W(\nu)$ ≈ 0.5变化。此外，图 4 (b) 再次证实，尽管白噪声不是良好的近似，但对易子范数的绝对值很小，即 $\approx 10^{-3}$ 在实际相关区域内。这保证了 ESD/VD 误差缓解技术具有非常出色的性能，足以满足几乎所有实际用途。

IV. 讨论

随机量子电路是展示量子优势的重要工具；众所周知，当电路深度足够大时，它们会将局部门噪声搅混成全局白噪声 [1]：随着随机电路中量子门数量 ν 的增加，已证明近似误差的一般界会按 $\nu^{-1/2}$ 递减 [23]。

在本研究中，我们考察了浅层变分量子电路，这类电路常见于近期量子计算机的实际应用，并回答了以下问题：变分量子电路能否将局部门噪声扰乱为全局退极化噪声？虽然这个问题的答案关系到我们对近期量子设备中噪声过程的基础理解，但在实践中也有重大意义：局部噪声被扰乱成白噪声的程度，决定了一大类误差缓解技术的性能，而这些技术对于在近期设备上实现实际价值至关重要 [20]。因此，我们推导出两个用于界定性能保证的简单指标：首先，均匀性度量 W 刻画了假设噪声为全局退极化（白）噪声 [25]的误差缓解技术的性能；其次，理想量子态与含噪量子态之间对易子的范数 C ，通过参考文献 [28]中的界限，决定了基于纯化的误差缓解技术 [21, 22] 的性能。

我们进行了一系列全面的数值实验，

以模拟近期量子计算机的典型应用，并根据上述两项指标分析噪声特性。在所有随机初始化变分电路参数的实验中，我们半定量地得出了相同的结论。首先，对于较小的门错误率，这两项指标——特征值均匀性W 和对易子范数 C ——都能用公式（15）中的多项式近似很好地描述。其次，这证实了与真正的随机电路类似，随着量子门数量增加，局部误差会被搅散成全局白噪声，且近似误差按多项式速率递减。第三，对易子 C 以更高的多项式速率递减；在实际相关范围内，其绝对值显著更小，低了 1 至 2 个数量级，特征值均匀性 W则不然。这证实，与误差缓解技术相比，基于纯化的技术预计性能更优；例如，某些误差缓解技术假设存在全局退极化噪声。

接下来，我们研究一种在实践中更具相关性的情形：试探电路初始化于问题哈密顿量基态附近；在所有情形下，我们都半定量地得出了相同结论。首先，误差并未被扰乱成白噪声，且近似误差很大，因此实际上会阻碍，或至少显著限制那些假设存在全局退极化噪声的误差缓解技术的使用。其次，对易子范数的绝对值相当小，即在实践中相关的区域内为$\approx 10^{-2}-10^{-4}$；由于试探电路制备的是基态，对易子范数的平方决定了 ESD/VD 的性能，因此我们预计，对于所模拟的所有应用，ESD/VD 方法都能取得很好的效果。第三，我们确定了随着电路深度增加、改善局域噪声向全局白噪声扰乱的策略：我们发现，向 HVA 中插入问题哈密顿量原本不包含的额外量子门，会增加动态李代数的维数，从而使这两项指标都降低。我们还发现，对这些非随机的实用电路应用随机编译，也能降低这两项指标。

尽管基于纯化的技术 [21, 22] 已被证明在特定示例中表现良好，但当前对电路噪声的系统分析使这些结果更具背景意义，并得出以下结论：第一，ESD/VD 技术的优越性能不一定源于量子电路中的随机性——尽管在深层随机电路中，其性能会进一步提升。第二，尽管一些误差缓解技术在由白噪声 [25充分描述的量子电路上表现良好27], ，我们仍指出了各种预期性能有限的实际场景。

本研究加深了我们对近期量子计算机中噪声本质的理解，并有助于推动含噪量子机器在实际应用中发挥价值。因此，本研究的结果将有助于确定能够在实际应用中实现稳健、容错的设计原则量子电路。

数据可用性

数值模拟代码已在以下存储库中公开：github.com/jfold/shallow-circuit-noise。

致谢

作者感谢 Simon Benjamin 的支持。作者感谢 Richard Meister 提供有关 pyQuEST 的指导，并感谢 Arthur Rattew 就量子模拟开展多次讨论。本文中的所有模拟均使用模拟工具 QuEST [45]及其 Python接口 pyQuEST [46]完成。B.K. 感谢牛津大学提供格拉斯通研究奖学金，并感谢牛津大学玛格丽特夫人学堂提供研究奖学金。B.K. 推导了分析结果，并参与了论文撰写。J.F. 得到了威廉·德曼基金会 [编号为 18-4438]的资助。J.F. 进行了数值模拟，并参与了论文撰写。

附录A：公式（6）的推导

回顾一下，根据 [28] 中的命题 1，任何量子态都可以变换为非负箭头矩阵 $\tilde{\rho}=F|\psi_{id}\rangle\langle\psi_{id}|+D+C$，其中

$$\tilde{\rho}=\begin{pmatrix} F & C_2 & C_3 & \dots & C_d \\ C_2 & D_2 & & & \\ C_3 & & D_3 & & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ C_d & & & \dots & D_d \end{pmatrix}. \tag{A1}$$

我们通过施加适当的酉变换 $\tilde{\rho}:=U\rho U^{\dagger}$得到上述矩阵，使得 $|\tilde{\psi}_{id}\rangle:=U|\psi_{id}\rangle=(1,0,\dots..0)$，其中 F，C_k，$D_k\geq 0$，$k\in\{2,3,\dots,d\}$ 表示维数，d，其余所有矩阵元素均为零。给定量子态的上述箭头形表示，可以将密度矩阵的特征值解析地计算为下述

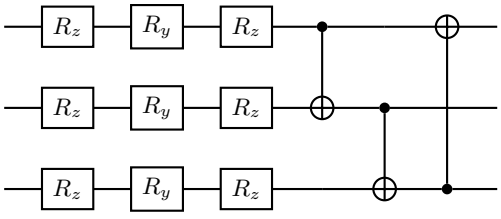


图 5. 三个量子比特的强纠缠层拟设中的一个层：首先对所有量子比特施加单量子比特门 Ry、Rz 和Ry，然后施加最近邻 CNOT门。

世俗方程 [28, 47]的根

$$P(x) = x - F + \sum_{k=2}^{d} \frac{C_k^2}{(D_k - x)} = 0. \tag{A2}$$

由此，我们计算主导特征值 λ_1 与保真度之间的偏差，得到

$$\begin{aligned}\lambda_1 - F =& \sum_{k=2}^{d} \frac{C_k^2}{(\lambda_1 - D_k)} \leq \max_k (\lambda_1 - D_k)^{-1} \sum_{k=2}^{d} C_k^2 \\ \leq& \|[\rho_{id}, \rho]\|^2 (2\lambda_1 - 1)^{-1},\end{aligned} \tag{A3}$$

其中，我们利用了 $D_k \leq \lambda_1$ ，并且由于所有被加项均为非负数，有 D_k、C_k、$\lambda_1 \geq 0$；在第二个不等式中，我们使用了 $\sum_{k=2} C_k^2 = \|C\|_{HS}^2/2 = \|[\rho_{id}, \rho]\|_\infty^2$ 中的矩阵范数级数，该结果已在 [28]中确立。我们还引入了缩写 $\|[\rho_{id}, \rho]\|$，因为矩阵 $[\rho_{id}, \rho]$的所有 p-范数都在一个常数因子范围内等价。特别地，对易子的任意 p-范数都可以计算为$\|[\rho_{id}, \rho]\|_p = 2^{1/p}\sqrt{\mathrm{Var}[\rho]}$，其中我们使用了量子力学方差 $\mathrm{Var}[\rho] := \langle\psi_{id}|\rho^2|\psi_{id}\rangle - F^2$，该结果已在 [28]中确立。此外，在公式（A2）的第二个不等式中，我们利用了 $\max_k(\lambda_1 - D_k)^{-1} = (\lambda_1 - D_2)^{-1} \leq (\lambda_1 - \lambda_2)^{-1} \leq (2\lambda_1 - 1)^{-1}$，这是通过代入一般不等式 $\lambda_2 \leq (1 - \lambda_1)$得到的，其依据是 $\mathrm{tr}[\rho] = 1$。

将对易子范数记为 $\mathcal{E}_C$，由此我们最终可以得出结论：$\lambda_1 - F \in O(\mathcal{E}_C)$，如式 (6) 所示。

1. 白噪声态的迹距离

本节将通过概率分布之间的距离，解析地评估任意量子态 ρ 与式 (2) 中相应白噪声态之间的迹距离。

陈述 1. 我们可以用量子态的主导特征值 λ_1 和主特征向量 $|\psi_1\rangle$ 来近似式 (2) 中的白噪声态：

$$\rho_{wn} = \lambda\,|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + (1 - \lambda_1)\mathrm{Id}/d + \mathcal{E}_w, \tag{A4}$$

近似误差 $\mathcal{E}_w$ 由式 (A6)给出上界。

证明。 我们先利用式 (2) 中的权重 η，通过式 (9) 将其近似为 $\eta \approx F \approx \lambda_1$；同时利用式 (6) 近似主导特征值，然后汇总近似误差，得到：

$$\rho_{wn} = \lambda\,|\psi_{id}\rangle\langle\psi_{id}| + (1 - \lambda_1)\mathrm{Id}/d + \mathcal{E}_F + \mathcal{E}_C + O(\epsilon^2/\nu).$$

现在我们利用 [28] 中的结果来界定理想量子态与含噪量子态之间的距离：

$$\begin{aligned}\||\psi_{id}\rangle\langle\psi_{id}| - |\psi_1\rangle\langle\psi_1|\|_1 &= \sqrt{1 - \langle\psi_{id}|\psi_1\rangle} \\ &= 1 - O\left(\frac{\mathcal{E}_C}{\lambda_1 - \lambda_2}\right),\end{aligned}$$

其中 $\mathcal{E}_C$ 是公式（6）中的对易子范数。由此我们得出近似关系

$$\rho_{wn} = \lambda\,|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + (1 - \lambda_1)\mathrm{Id}/d + \mathcal{E}_w, \tag{A5}$$

其中，我们将所有近似误差汇总为

$$|\mathcal{E}_w| \leq |\mathcal{E}_F| + O(\epsilon^2/\nu) + O\left[\mathcal{E}_C(1 + \frac{1}{1 - \lambda_2/\lambda_1})\right]. \tag{A6}$$

□

陈述 2. 我们将特征值均匀性定义为W：$= \frac{1}{2}\|p_{err}^- - p_{unif}\|_1$通过密度矩阵 p_{err}：$= (\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_d)/(1 - \lambda_1)$中的非主导特征值。该度量与到白噪声态的迹距离（如式 (4)所示）之间的关系为

$$\|\rho - \rho_{wn}\|_1 = (1 - \lambda_1)W + \mathcal{E}_w, \tag{A7}$$

其中，近似误差 $\mathcal{E}_w$ 在陈述 *1*中给出。

证明。我们代入式（A4）中对 ρ_{wn} 的近似，其中包含误差项 $\mathcal{E}_w$，然后利用 ρ 的谱分解，得到迹距离：

$$\begin{aligned}\|\rho - \rho_{wn}\|_1 =& \|\sum_{k=2}^{d} \lambda_k\,|\psi_k\rangle\langle\psi_k| - (1 - \lambda_1)\mathrm{Id}/d\|_1 + \mathcal{E}_w \\ =& \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{d} |\lambda_k - \frac{1 - \lambda_1}{d}| + \mathcal{E}_w \qquad \text{(A8)} \\ =& \frac{1 - \lambda_1}{2}\|p_{err} - p_{unif}\|_1 + \mathcal{E}_w. \qquad \text{(A9)}\end{aligned}$$

在第二个等式中，我们对迹距离进行了解析计算，因此在第三个等式中，我们将结果改写为 p_{err} 的形式；它是我们的“误差概率”分布，表示为 $p_{err} := (\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_d)/(1 - \lambda_1)$。□

陈述 3. 与陈述 *2*不同的是，如果一个量子态可以写成式 (8) 中的分解，那么我们就可以不作近似地给出其迹距离：

$$\|\rho - \rho_{wn}\|_1 = \frac{(1 - \eta)}{2}\|p_\mu - p_{unif}\|_1. \tag{A10}$$

这与陈述 ρ *2*中非主导特征值的均匀性度量直接类似。不过，这个表达式量化的是概率分布 p_μ 的均匀性，其中这些概率是误差密度矩阵 ρ_{err}的特征值。

假设采用式（8）中的分解。我们通过直接计算得到

如下结果：

$$\begin{aligned}\|\rho-\rho_{wn}\|_1 &= (1-\eta)\|\rho_{err}-\mathrm{Id}/d\|_1\\ &= (1-\eta)\|\sum_{k=1}^{d}\mu_k\left|\phi_k\right\rangle\!\left\langle\phi_k\right|-\mathrm{Id}/d\|_1\\ &= \frac{(1-\eta)}{2}\|\sum_{k=1}^{d}|\mu_k-1/d|\\ &= \frac{(1-\eta)}{2}\|p_\mu-p_{unif}\|_1\end{aligned}$$

其中，我们使用了误差密度矩阵的谱分解，并对迹距离进行了解析计算。由于 ρ_{err} 是迹为 1 的半正定矩阵，其特征值 μ_k 构成一个概率分布，我们将其记为 p_μ。

2. 均匀性度量的上界

本节根据量子电路中量子门的数量和错误率，给出均匀性度量的上界。

陈述 4。 我们采用 *[23]* 在方程 (11)中给出的界限，用于标准基 $\frac{1}{2}\|\tilde{p}_{noisy}-\tilde{p}_{wn}\|_1$ 下测得的概率分布之间的距离，并假设相同的界限近似适用于任意测量基。因此可知，陈述 *2* 中的均匀性度量近似满足与以下相同的界限

$$W = O(\frac{e^{-\xi}\xi/\sqrt{\nu}}{1-e^{-\xi}})+O(\frac{\mathcal{E}_w}{1-\lambda_1}),$$

其中，近似误差 $\mathcal{E}_w$ 在陈述 *1*中给出。

证明。考虑在密度矩阵的特征向量构成的基下进行测量，其得到的概率为对应的特征值：

$$p_{noisy} = \langle\psi_k|\,\rho\,|\psi_k\rangle = (\lambda_1,\lambda_2\ldots,\lambda_d).$$

在同一基下测量白噪声态，利用方程（A4）中的误差项，可得到概率的如下近似：

$$\begin{aligned}p_{wn} &:= \langle\psi_k|\,\rho_{wn}\,|\psi_k\rangle\\ &= (\lambda_1,\frac{1-\lambda_1}{d}\ldots,\frac{1-\lambda_1}{d})+\mathcal{E}_w.\end{aligned}$$

上述两个测量概率分布之间的距离为

$$\frac{1}{2}\|p_{noisy}-p_{wn}\|_1 = (1-\lambda_1)W+\mathcal{E}_w,$$

其中 $W=\frac{1}{2}\|p_{err}-p_{unif}\|_1$是命题 2中的特征值均匀性。假设上界

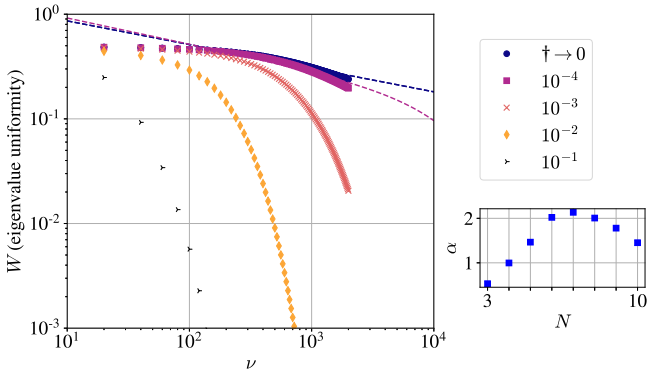


图 6。（左）TFI-HVA ansatz：模拟与图 3 (a) 中相同，但在每一层后添加了参数化的 R_z 量子门。这些附加量子门增大了动力学李代数的维数，从而使局部门噪声更快地扰乱成白噪声，例如，$\epsilon\to 0$ 曲线比图 3 (a) 中的曲线更陡。更多详情见附录 B 。（右）量子比特数量的影响呈现出与未添加 Rz 量子门时非常相似的趋势，即可与图 7 (c) 对比。

式（11）中的测量概率上界 $\frac{1}{2}\|\tilde{p}_{noisy}-\tilde{p}_{wn}\|_1$对于任意测量基都近似成立，我们可以将特征值均匀性界定为

$$\begin{aligned}W &= \frac{1}{2(1-\lambda_1)}\|p_{noisy}-p_{wn}\|_1+\frac{\mathcal{E}_w}{1-\lambda_1}\\ &\le O\left(\frac{F}{1-\lambda_1}\epsilon\sqrt{\nu}\right)+\frac{\mathcal{E}_w}{1-\lambda_1}\\ &= O\left(\frac{e^{-\xi}\xi/\sqrt{\nu}}{1-e^{-\xi}}\right)+O\left(\frac{\mathcal{E}_w}{1-\lambda_1}\right).\end{aligned}$$

在最后一个方程中，我们引入了如下近似： F 由方程（9）得出的近似主导特征值，以及由方程（6）得到的近似值。□

a. *Expanding the upper bound*

现在，我们将命题4中关于 ξ 较小时的上界展开。更具体地说，我们考虑方程（15）中的参数化拟合函数，并代入泰勒展开 $e^{-\xi}=1-\xi+\xi^2+\ldots$，得到

$$\begin{aligned}\alpha\frac{e^{-\xi}\xi/\sqrt{\nu}^{\beta}}{1-e^{-\xi}} &= \alpha\frac{e^{-\xi}}{\nu^\beta}\frac{\xi}{\xi-\xi^2/2+\ldots}\\ &= \alpha\frac{e^{-\xi}}{\nu^\beta}\frac{1}{1-\xi/2+\ldots}\\ &= \alpha\frac{1}{\nu^\beta}\frac{1-\xi+\ldots}{1-\xi/2+\ldots}\\ &= \frac{\alpha}{\nu^\beta}+O(\xi).\end{aligned}$$

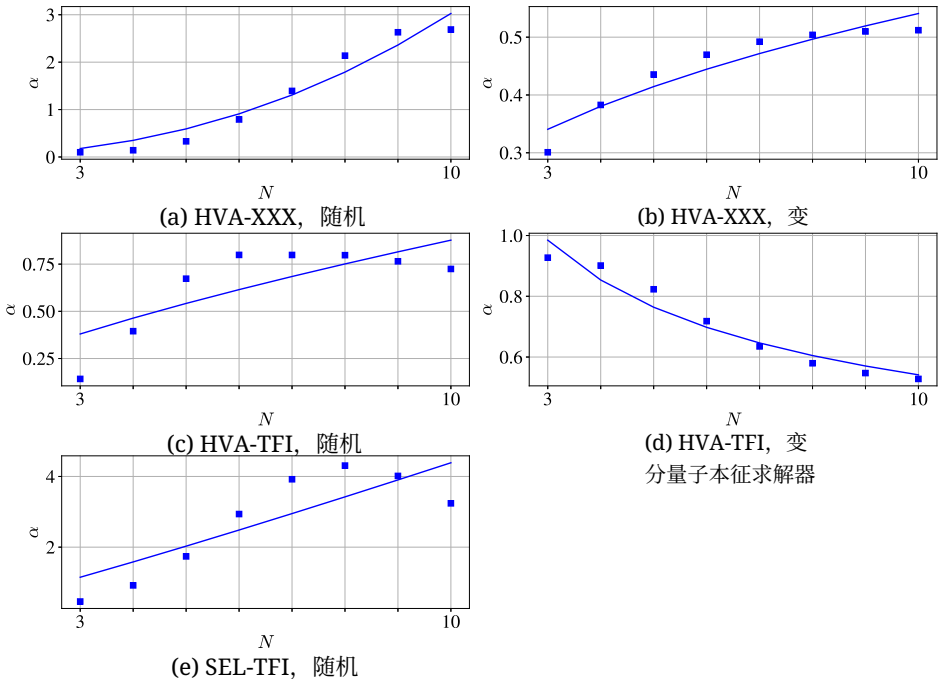


图7. 拟合参数 α 来自公式（15），针对数量不断增加的量子比特：对图中的电路1 至4 在 $\epsilon \to 0$ 下进行了模拟，采用不断增加的量子比特数，并对公式（15）中的曲线进行了拟合。

3. 对易子范数

引理 1。 对易子范数近似满足以下关系：

$$\frac{\|[\rho_{id},\rho]\|_1}{1-\lambda_1} = \|[\rho_{id},\rho_{err}]\|_1 + \mathcal{E}_q, \tag{A11}$$

直到近似误差 $\mathcal{E}_q$。

证明。 利用式（8）中的分解，我们得到

$$\begin{aligned}\|[\rho_{id},\rho]\|_1 &= \|[\rho_{id},\eta\rho_{id}] + [\rho_{id},(1-\eta)\rho_{err}]\|_1 \\ &= (1-\eta)\|[\rho_{id},\rho_{err}]\|_1\end{aligned}$$

我们可以通过式和式（ $\eta = \lambda_1 + \mathcal{O}(\mathcal{E}_F) + \mathcal{O}(\mathcal{E}_C)$ (9) 进行近似，并得到6）

$$\frac{\|[\rho_{id},\rho]\|_1}{1-\lambda_1} = \|[\rho_{id},\rho_{err}]\|_1 + \mathcal{E}_q. \tag{A12}$$

误差项可通过三角不等式$|\mathcal{E}_q| \le [\mathcal{O}(\mathcal{E}_F\mathcal{E}_C) + \mathcal{O}(\mathcal{E}_C^2)]/(1-\lambda_1)$ 得到。 □

附录 B：数值模拟的更多细节

1. SEL 与 HVA 拟设

图中所用 SEL 变分形式的电路结构1如图所示5：它由交替排列的层组成这些层由参数化单量子比特旋转和一串最近邻受控非门构成。

现在我们来定义 HVA 拟设。特别需要回顾的是，HVA 拟设是对绝热演化进行离散化，

$$U(\underline{\beta},\underline{\gamma}) = \prod_{k=1}^{\nu} e^{-i\gamma_k\mathcal{H}_1}e^{-i\beta_k\mathcal{H}_0},$$

并将其作用于作为平凡哈密顿量 $\mathcal{H}_0$ 基态的初态。

随后，对各个演化进行 Trotter 分解，将一段时间演化 $e^{-i\gamma_k\mathcal{H}_1}$ 拆分为在各个哈密顿量项作用下的演化算符的乘积，形式如下：

$$e^{-i\gamma_k\mathcal{H}_1} \to \prod_{l=1}^{r_h} e^{-i\gamma_k h_l P_l}.$$

上文利用了将哈密顿量 $\mathcal{H}_1 = \sum_{l=1}^{r_h} h_l P_l$ 的非平凡部分分解为泡利串 $P_l \in \{\mathrm{Id}\ X,\ Y,\ Z\}^{\otimes N}$ 的方法。

我们将电路参数设为 $\gamma_k = k/\nu$ 和 $\beta_k = 1 - k/\nu$，使电路能够近似从 $\mathcal{H}_0$ 到 $\mathcal{H}_1$ 的离散绝热演化——我们将这些参数称为变分量子本征求解器（VQE）参数。

对于 HVA 拟设的随机参数化，每个实现单个泡利串 $e^{-i\gamma_k h_l P_l}$ 演化的量子门都会被赋予一个随机参数 $e^{-i\theta_q P_l}$，其中 $|\theta_q| \le 2\pi$。

2. 向 TFI 拟设中插入额外的量子门

在图 6 中，我们重复了图 3(a) 中的同一项模拟，即在随机电路参数下使用 TFI 自旋模型的 HVA 拟设，但我们在每一层后附加了一系列作用于每个量子比特的参数化 Rz 量子门。这确保了通过加入泡利 Z 算符，式（16）中 TFI 问题的泡利项所生成的动态李代数得以扩展。因此，增加 HVA 拟设的电路深度会使李代数维数增长得更快，而这显然会使局部扰乱得更快将噪声转化为全局白噪声，例如，$\epsilon \to 0$ 图中的拟合斜率比图 6 更陡。3

3. 随量子比特数目的扩展

在图 7 中，我们针对不断增加的量子比特数，模拟了图 1至4中的相同电路，错误率为 $\epsilon \to 0$，并绘制拟合参数 α——即公式（15）中的前因子。结果似乎证实了渐近非递增趋势，与以下理论预期一致：[23]对于随机电路，α 是一个有界常数，其界限由量子比特数目决定。

[1] F. Arute、K. Arya、R. Babbush、D. Bacon、J. C. Bardin、R. Barends、R. Biswas、S. Boixo、F. G. Brandao、D. A. Buell、 *et al.*，使用可编程超导处理器实现量子霸权，《自然》574，505（2019）。[2] M. Tillmann、B. Daki´c、R. Heilmann、S. Nolte、A. Sza-meit 和 P. Walther，实验玻色子采样，《自然·光子学》7，540（2013）。[3] J. Biamonte、P. Wittek、N. Pancotti、P. Rebentrost、N. Wiebe 和 S. Lloyd，量子机器学习，《自然》549，195（2017）。[4] D. Jafferis、A. Zlokapa、J. D. Lykken、D. K. Kolch-meyer、S. I. Davis、N. Lauk、H. Neven 和 M. Spiropulu，量子处理器上的可穿越虫洞动力学，《自然》612，51（2022）。[5] C. Kokail、C. Maier、R. van Bijnen、T. Brydges、M. K. Joshi、P. Jurcevic、C. A. Muschik、P. Silvi、R. Blatt、C. F. Roos 和 P. Zoller，晶格模型的自验证变分量子模拟，《自然》569，355（2019）。[6] Y. Cao、J. Romero、J. P. Olson、M. Degroote、P. D. John-son、M. Kieferov´a、I. D. Kivlichan、T. Menke、B. Per-opadre、N. P. Sawaya、 *et al.*，量子计算时代的量子化学，《化学评论》119，10856（2019）。[7] S. McArdle、S. Endo、A. Aspuru-Guzik、S. C. Benjamin 和 X. Yuan，量子计算化学，《现代物理评论》92，015003（2020）。[8] B. Bauer、S. Bravyi、M. Motta 和 G. K.-L. Chan，量子化学与量子材料科学的量子算法，《化学评论》120，12685（2020）。[9]M. Motta 和 J. E. Rice，量子化学的新兴量子计算算法，《WIREs 计算分子科学》12，e1580（2022）。[10] J. Preskill，NISQ 时代及之后的量子计算，《量子》2，79（2018）。[11] M. Cerezo、A. Arrasmith、R. Babbush、S. C. Benjamin、S. Endo、K. Fujii、J. R. McClean、K. Mitarai、X. Yuan、L. Cincio、 *et al.*，变分量子算法，《自然评论·物理》3，625（2021）。[12] S. Endo、Z. Cai、S. C. Benjamin 和 X. Yuan，量子-经典混合算法与量子误差缓解，《日本物理学会志》90，032001（2021）。[13] K. Bharti、A. Cervera-Lierta、T. H. Kyaw、T. Haug、S. Alperin-Lea、A. Anand、M. Degroote、H. Heimonen，J. S. Kottmann，T. Menke，W.-K. Mok，S. Sim，L.-C. Kwek，and A. Aspuru-Guzik，《含噪中等规模量子算法》，《现代物理评论》94，015004（2022年）。[14] M. Cerezo，G. Verdon，H.-Y. Huang，L. Cincio，and P. J. Coles，《量子机器学习的挑战与机遇》，《自然·计算科学》2，567（2022年）。[15] B. van Straaten and B. Koczor，《度量感知变分量子算法的测量成本》，PRX Quantum 2，030324（2021年）。[16] B. Koczor and S. C. Benjamin，《量子解析下降》，《物理评论研究》4，023017（2022年）。[17] H.-Y. Huang，R. Kueng，and J. Preskill，《从极少量测量中预测量子系统的多种性质》，《自然·物理》16，1050（2020年）。[18] G. Boyd and B. Koczor，《使用 covar 训练变分量子电路：基于经典影子的协方差求根》，《物理评论X》12，041022（2022年）。[19] H. H. S. Chan，R. Meister，M. L. Goh，and B. Koczor，《算法影子光谱学》，arXiv 预印本 arXiv:2212.11036（2022年）。[20] Z. Cai，R. Babbush，S. C. Benjamin，S. Endo，W. J. Huggins，Y. Li，J. R. McClean，and T. E. O’Brien，《量子误差缓解》，arXiv 预印本 arXiv:2210.00921（2022年）。[21] B. Koczor，《近期量子设备的指数误差抑制》，《物理评论X》11，031057（2021年）。[22] W. J. Huggins，S. McArdle，T. E. O’Brien，J. Lee，N. C. Rubin，S. Boixo，K. B. Whaley，R. Babbush，and J. R. McClean，《用于量子误差缓解的虚拟蒸馏》，《物理评论X》11，041036（2021年）。[23] A. M. Dalzell，N. Hunter-Jones，and F. G. Brand˜ao，《随机量子电路将局部噪声转化为全局白噪声》，arXiv 预印本 arXiv:2111.14907（2021年）。[24] M. Larocca，P. Czarnik，K. Sharma，G. Muraleedharan，P. J. Coles，and M. Cerezo，《利用量子最优控制工具诊断贫瘠高原》，《量子》6，824（2022年）。[25] J. Vovrosh，K. E. Khosla，S. Greenaway，C. Self，M. S. Kim，and J. Knolle，《量子模拟中全局退极化误差的简单缓解方法》，《物理评论E》104，035309（2021年）。[26] S. Endo，S. C. Benjamin，and Y. Li，《面向近期应用的实用量子误差缓解》，《物理评论X》8，031027（2018年）。

[27] A. Strikis, D. Qin, Y. Chen, S. C. Benjamin, and Y. Li, 《基于学习的量子误差缓解》, PRX Quantum 2, 040330（2021年）。[28] B. Koczor, 《含噪量子态的主特征向量》, 《新物理学杂志》23, 123047（2021年）。[29] B. Koczor and S. C. Benjamin, 《推广至含噪和非幺正电路的量子自然梯度》, 《物理评论A》106, 062416（2022年）。[30] T. E. O'Brien, G. Anselmetti, F. Gkritsis, V. Elfving, S. Polla, W. J. Huggins, O. Oumarou, K. Kechedzhi, D. Abanin, R. Acharya, *et al.*, 《基于纯化的量子误差缓解用于电子对关联模拟》, arXiv 预印本 arXiv:2210.10799（2022年）。[31] H. Jnane, B. Undseth, Z. Cai, S. C. Benjamin, and B. Koczor, 《多核量子计算》, 《物理评论应用》18, 044064（2022年）。[32] M. Schuld, A. Bocharov, K. M. Svore, and N. Wiebe, 《以电路为中心的量子分类器》, 《物理评论A》101, 032308（2020年）。[33] B. Koczor, S. Endo, T. Jones, Y. Matsuzaki, and S. C. Benjamin, 《变分态量子计量》, 《新物理学杂志》22, 083038（2020年）。[34] J. Foldager, A. Pesah, and L. K. Hansen, 《噪声辅助变分量子热化》, 《科学报告》12, 1（2022年）。[35] M. Silva, E. Magesan, D. W. Kribs, and J. Emerson, 《可纠正码识别的可扩展协议》, 《物理评论A》78, 012347（2008年）。[36] E. Magesan, J. M. Gambetta, and J. Emerson, 《通过随机基准测试表征量子门》, 《物理评论A》85, 042311（2012年）。[37] Z. Cai and S. C. Benjamin, 《为任意误差通道构造更小的泡利随机化集合》, 《科学报告》9, 1 (2019)。[38] Z. Cai、X. Xu 和 S. C. Benjamin, 《使用泡利共轭缓解相干噪声》, npj Quantum Info. 6, 1（2020）。[39] J. R. McClean、S. Boixo、V. N. Smelyanskiy、R. Babbush 和 H. Neven, 《量子神经网络训练景观中的贫瘠高原》, Nature communications 9, 1 2018( )。[40] M. Cerezo、A. Sone、T. Volkoff、L. Cincio 和 P. J. Coles, 《浅层参数化量子电路中依赖于代价函数的贫瘠高原》, Nature communica- tions 12, 1（2021）。[41] D. Wecker、M. B. Hastings 和 M. Troyer, 《实用量子变分算法的进展》, Physical Review A 92, 042303（2015）。[42] R. Wiersema、C. Zhou、Y. de Sereville、J. F. Carrasquilla、Y. B. Kim 和 H. Yuen, 《探索哈密顿量变分拟设中的纠缠与优化》, PRX Quantum 1, 020319（2020）。[43] E. Campbell, 《用于快速哈密顿量模拟的随机编译器》, Phys. Rev. Lett. 123, 10.1103/phys- revlett.123.070503（2019）。[44] Y. Ouyang、D. R. White 和 E. T. Campbell, 《通过随机哈密顿量稀疏化进行编译》, Quantum 4, 235（2020）。[45] T. Jones、A. Brown、I. Bush 和 S. C. Benjamin, 《QuEST 与量子计算机的高性能模拟》, Scientific reports 9, 1（2019）。[46] R. Meister, 《pyquest——量子精确模拟工具包的 Python 接口》（2022）。[47] D. O'leary 和 G. Stewart, 《对称箭头矩阵特征值与特征向量的计算》, Jour- nal of Computational Physics 90, 497（1990）。