arXiv:2302.00888v1 [math.AP] 2 Feb 2023

六阶 Boussinesq 方程解的适定性与解析性

AMIN ESFAHANI 和 ACHENEF TESFAHUN

摘要。本文研究六阶 Boussinesq 方程。我们将该方程在高维情形下具有二次和三次非线性项的局部适定性理论加以推广。尽管方程中含有“坏”的四阶项 Δu，我们仍推导出一些色散估计，从而证明局部解的存在，并改进了三次情形下的既有结果。此外，我们证明了三次非线性项解的空间解析性具有保持性。

1. 引言

Boussinesq 方程

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{xxxx} + (u^2)_{xx} = 0 \tag{1.1}$$

该方程最早由 Joseph Boussinesq 于 1872年 从 Euler 运动方程推导得出[3]，用于描述水面小振幅长波的传播。文献中称该方程为坏的 Boussinesq 方程，这是因为 $-u_{xxxx}$ 它会导致方程 (1.1) 在无界空间区域 $\mathbb{R}$上不存在局部解。通过改变 u_{xxxx}的符号，(1.1) 也可改写为好的 Boussinesq 方程

$$u_{tt} - u_{xx} + u_{xxxx} + (u^2)_{xx} = 0. \tag{1.2}$$

上述两个 Boussinesq 方程不仅出现在薄无黏层自由表面动力学的研究中，也出现在弦上的非线性振动、形状记忆合金、弹性杆中的波传播、晶格动力学的连续极限以及非线性介电材料中的电磁波研究中（[34, 38]）。

过去几十年来，与（1.2）相关的初值问题的数学研究已经取得了充分发展。关于适定性的结果，请读者参阅 [17, 18, 24, 25], 及其中的参考文献。

方程（1.1）和（1.2）可以推广为六阶 Boussinesq 方程

$$u_{tt} = u_{xx} - \beta u_{xxxx} + u_{xxxxxx} - (u^2)_{xx}, \tag{1.3}$$

其中 $\beta = \pm 1$。方程（1.3）由 [5] 推导出来，旨在说明原始 Boussinesq 方程可用于对浅流体层中的水波以及非线性原子链进行物理建模。此外，Maugin 在 [27] 提出了（1.3），用于模拟弹性晶体中的非线性晶格动力学（另见 [8]）。

2020 数学学科分类。 35B30, 35Q53, 76B15, 35L70, 37K10。关键词和短语。 Boussinesq 方程，局部适定性，色散估计，解的解析半径。

最初在 [12] 中研究了与（1.3）相关的初值问题，其中 $u(x,0)=f(x)$ 和 $u_t(x,0)=g(x)$，以及具有 $0<p<4$ 的一般非线性项 $\pm|u|^p u$。研究证明，通过应用 Strichartz 型估计，（1.3）在 $L^2(\mathbb{R})\times\dot{H}^{-3}(\mathbb{R})$ 中局部适定。他们还将结果推广到一般情形 $p>0$ 下的 $H^1(\mathbb{R})\times L^2(\mathbb{R})$。进而，利用（1.3）的能量守恒，在具有散焦型非线性项 $|u|^p u$ 的情形 $H^2(\mathbb{R})$ 下可得整体解；而在聚焦情形 $-|u|^p u$ 下，当初始数据足够小时也可得整体解。最近，Geba 和 Witz[18] 将 [35] 中关于非线性项 $|u|^2 u$ 的结果推广到具有 $p\in\mathbb{N}$ 的情形 $|u|^{2p}u$，并证明了（1.3）在具有 $2-2/(2p)<s<2$ 的 $H^s(\mathbb{R})\times H^{s-2}(\mathbb{R})$ 中整体适定。考虑到初始数据 $u(x,0)=f(x)$和 $u_t(x,0)=g(x)$，[11] 通过采用适当的 Bourgain 型空间证明了，对于 $s>-1/2$，（1.3）在 $H^s(\mathbb{R})\times H^{s-2}(\mathbb{R})$ 中局部适定。在 [14] 中，借助 $[k;Z]$-乘子范数方法 [32]，（1.3）的局部适定性结果得到了改进，达到 $s>-3/4$。由于存在六阶导数，这一适定性指标在某种程度上是自然的。事实上，忽略（1.3）的四阶项后，线性化方程可以分解为

$$u_{tt}-u_{xxxxxx}=(\partial_t-\partial_{xxx})(\partial_t+\partial_{xxx})u,$$

这可以视为一组耦合线性 KdV 型方程。将六阶项替换为 εu_{xxxxxx}，文献 [36] 还证明了，当 $\beta=1$时，方程（1.3）的局部解 $\beta=1$ 收敛于方程（1.2）在 $C([0,T]$ 中的解；$H^s(\mathbb{R}))$ 其中 $s\geqslant 0$ 当$\varepsilon\to 0$时。

本文旨在研究方程（1.3）的高维情形，即

$$\begin{cases} u_{tt}=\Delta(u-\beta\Delta u+\Delta^2 u+f(u)),\\ u(x,0)=u_0(x),\quad u_t(x,0)=u_1(x), \qquad x\in\mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{1.4}$$

其中我们关注二次非线性项 $f(u)=\pm u^2$ 和三次非线性项$f(u)=\pm u^3$。据作者所知，这个问题尚未得到研究。关于方程（1.4）的唯一适定性结果见 [37], ，其中在调制空间框架下研究了初值问题（1.4）。

回到文献1.2中的好 Boussinesq 方程（ $\mathbb{R}^n$，Geba 和 Witz 在[19] 中证明，在 $n=2$和 3 维情形下，对于二次非线性项 $\pm u^2$，方程（1.2）在 $(u,u_t)|_{t=0}\in H^s(\mathbb{R}^n)\times H^{s-2}(\mathbb{R}^n)$ 且 $s>-1/4$时局部适定。事实上，受 Kishimoto 和 Tsugawa 的一种方法启发 [25],，他们将相应的初值问题改写为一个非局部非线性薛定谔方程的柯西问题，其初始数据属于 $H^s(\mathbb{R}^n)$，并利用 Tao 在 [32]中的方法，在 Bourgain空间中证明了相应的双线性估计。依托薛定谔群的 Strichartz 型估计，Farah 在 [15] 中将好 Boussinesq 方程改写为以下形式：

$$u_{tt}+\Delta^2 u=\Delta(u+f(u))$$

并证明了在 $(u,u_t)|_{t=0}\in H^s(\mathbb{R}^n)\times H^{s-2}(\mathbb{R}^n)$中 $s\geqslant 0$，在对非线性项作出某些假设的条件下，局部（无条件）适定性成立。需要指出的是，由于三调和算子的存在，这种方法并不适用于（1.3）。

为了研究（1.4），我们将推导色散估计，以便找到适定性的较低 Sobolev指标。通常，这些估计与

（1.4）的相位函数密切相关，即

$$m(\xi)=\sqrt{|\xi|^2+\beta|\xi|^4+|\xi|^6}.$$

与一维情形不同，直接推导一致估计并不容易。在 $n=1$的情况下， $\beta>-2$采用范德科普特引理[13, 引理 4。3]来推导以下一致估计

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\int_{\mathbb{R}} e^{i(tm(\xi)+x\xi)}d\xi\right|\lesssim\begin{cases}|t|^{-\frac{1}{3}}, & \beta\neq 0\\ |t|^{-\frac{1}{3}}+|t|^{-\frac{1}{2}}, & \beta=0\end{cases}\tag{1.5}$$

对所有 $t\neq 0$成立。在 $n\geqslant 2$的情况下，我们利用 m 符号[6] 的径向性，通过贝塞尔函数将问题化为一维振荡积分。这种情形已在多篇论文中研究过。其中，我们参考 Cho 和 Ozawa [6] 以及 Guo、Peng 和 Wang [20], 所发展的技巧，他们考虑了一般的径向（非齐次）相位函数（另见 [7]）。然而，这些文章中的一项主要条件是相关相位函数的径向导数不改变符号。当$\beta=-1$时，条件对（1.4）的相位函数不再成立。我们通过频率局部化克服这一困难，将高频和低频分开，并得到局部化$t^{-\frac{n}{2}}$ 的衰减率 n维版本（1.5）的衰减率（见引理 4）。接下来，我们利用二进分解和贝塞尔函数的衰减性质，适当地推导出衰减估计。由于我们的结果在一维情形下也成立，值得指出的是，我们的色散估计在局部改进了 [13]中得到的结果。

我们的第一个结果如下。

定理 1。 设 $n\geqslant 2$， $\beta=\pm 1$ 且 $f(u)=\pm u^2$。初值问题 （1.4）在 $H^s(\mathbb{R}^n)\times H^{s-3}(\mathbb{R}^n)$ 中对

$$s>\begin{cases}(n-3)/4, & \text{for}\quad 2\leqslant n\leqslant 6,\\ (n-5)/2, & \text{for}\quad n\geqslant 7.\end{cases}$$

注1。 仿照一维情形下定理 1 的证明（见引理 6）， 可以观察到， 该定理对于 $n=1$ 且 $s\geqslant -1/8$也成立。定理 1 中的适定性 Sobolev指标与[14] 的结果之间的差距表明，我们的结果在 $n\geqslant 2$情形下可能还可以改进。我们将在未来研究这一问题。

我们还推导出了适当的局部化斯特里哈茨估计，以将定理 1推广到三次情形。以下定理改进了 [12]中得到的结果。

定理 2。 设 $n\geqslant 1$， $\beta=\pm 1$ 且 $f(u)=\pm u^3$。初值问题 （1.4）在 $H^s(\mathbb{R}^n)\times H^{s-3}(\mathbb{R}^n)$ 中对

$$s>\begin{cases}-1/6, & \text{for}\quad n=1,\\ (2n-3)/6, & \text{for}\quad 2\leqslant n\leqslant 4,\\ (2n-5)/4, & \text{for}\quad n\geqslant 5.\end{cases}$$

注 2： 可以注意到，由（2）得到的局部解可以在全局时间内延拓。更确切地说，利用（1.4）的能量守恒，有

$f(u) = \pm u^3$,

$$E(u(t)) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |(-\Delta)^{-\frac{1}{2}} u_t|^2 + |u|^2 + \beta|\nabla u|^2 + |\Delta u|^2 dx \pm \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^n} u^4 dx = E(u(0)),$$

可以证明，方程（1.4）在非线性项 $f(u) = u^3$ 下于能量空间 $H^2(\mathbb{R}^n) \times \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^n)$ 中整体适定， $n \leqslant 6$。在初始数据大小满足适当条件时，这一结果也可推广至 $f(u) = -u^3$ （例如，参见 [12]）。

本文的第二个目标是研究方程（1.4）的解的空间解析性的保持性。许多论文研究了空间解析性。读者可参阅 [2, 21, 22, 30, 31] 及其中的参考文献。由于 Paley-Wiener 定理通过函数傅里叶变换的衰减性质刻画其解析半径，因此自然地令初始数据属于 Gevrey空间 $G^{\sigma,s}(\mathbb{R}^n)$。该空间由以下范数引入

$$\|f\|_{G^{\sigma,s}(\mathbb{R}^n)} = \left\| e^{\sigma|\xi|}\langle\xi\rangle^s \hat{f}(\xi) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

其中，$\hat{f}$ 是 f 和 $\langle\cdot\rangle = 1 + |\cdot|$的傅里叶变换。显然， $G^{0,s}(\mathbb{R}^n) = H^s(\mathbb{R}^n)$。Paley-Wiener定理的一个简单修正（见 [23]）表明，任何满足 $\sigma > 0$ 的函数 $f \in G^{\sigma,s}(\mathbb{R}^n)$ 都可以全纯延拓到对称复条带

$$S_\sigma = \{x + iy \in \mathbb{C}^n;\ |y| < \sigma\}.$$

在此背景下，参数 $\sigma > 0$ 被称为 f的一致解析半径。这些空间由 Foias 和 Temam [16] 引入，用于研究 Navier-Stokes方程解的空间解析性。给定具有一致解析半径 σ_0的初始数据，一个有趣的问题是，解 $u(t)$ 在 $t > 0$ 下是否也具有一致解析半径 $\sigma = \sigma(t) > 0$。对于具有二次非线性的一维情形（1.4），文献 [1] 利用与Gevrey空间相关的Bourgain型空间中的双线性估计研究了这一问题。这里，我们沿用文献 [28] 在一维 Dirac-Klein-Gordon方程背景下采用的方法，为三次非线性 $f(u) = u^3$求得 $\sigma(t)$ 的下界。该论证基于（1.4）的一个近似守恒律。需要指出的是，能量 $E(u(t))$ 在（1.4）的流作用下形式上守恒。借鉴文献 [10], 中的思路，我们引入一个修正Gevrey范数

$$\|f\|_{H^{\sigma,s}(\mathbb{R}^n)} = \left\| \cosh(\sigma|\xi|)\langle\xi\rangle^s \hat{f}(\xi) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

更确切地说，这是由 $\cosh(\sigma|\xi|) \sim e^{\sigma|\xi|}$、范数 $\|\cdot\|_{H^{\sigma,s}(\mathbb{R}^n)}$和 $\|\cdot\|_{G^{\sigma,s}(\mathbb{R}^n)}$ 等价这一事实得出的。 $H^{\sigma,s}(\mathbb{R}^n)$ 的定义思路与 $G^{\sigma,s}(\mathbb{R}^n)$-范数中指数权重的衰减率密切相关。事实上，从技术上可以看出，解析半径 σ 所需的时间衰减率可由代数估计得到

$$e^{\sigma|\xi|} - 1 \leqslant (\sigma|\xi|)^\ell e^{\sigma|\xi|}, \qquad \ell \in [0,1],$$

这可以为 $\ell \in (0,1]$提供 $t^{-1/\ell}$ 阶的衰减率。在新空间$H^{\sigma,s}(\mathbb{R}^n)$中，如果近似守恒律的非线性估计能够消除权重 $|\xi|^{2\ell}$，那么估计

$$\cosh(\sigma|\xi|) - 1 \leqslant (\sigma|\xi|)^{2\ell}\cosh(\sigma|\xi|), \qquad \ell \in [0,1]$$

可用于给出 $\ell \in (0,1]$ 的 $t^{-1/(2\ell)}$ 阶衰减率。

现在陈述我们的第二个结果。

定理 3. 设 $n = 1$ 和 $\sigma_0 > 0$。给定初始数据 $(u_0, u_1) \in H^{\sigma_0,\,2}(\mathbb{R}) \times H^{\sigma_0,\,0}(\mathbb{R})$, 则对于任意 $u(t)$，方程 (1.4) 的解 $T > 0$ 满足

$$u \in C([0,T]; H^{\sigma_0,2}(\mathbb{R})) \cap C^1([0,T]; H^{\sigma_0,0}(\mathbb{R})),$$

其中 $\sigma = \sigma(T) = \text{最小值} \left\{\sigma_0,\ CT^{-\frac{1}{2}}\right\}$ 满足 $C = C\left(\|u_0\|_{H^{\sigma_0,2}(\mathbb{R})}, \|u_1\|_{H^{\sigma_0,0}(\mathbb{R})}\right)$。

由注记 2 可知，方程 (1.4) 在 $H^{\sigma_0,2}(\mathbb{R}) \times H^{\sigma_0,0}(\mathbb{R})$ 中的整体适定性是通过 $H^{\sigma,2}(\mathbb{R}) \hookrightarrow H^{\sigma}(\mathbb{R})$, $\sigma \geqslant 0$推导得出的。

在本文余下部分，我们首先求出方程 (1.4)的相位函数的衰减估计，然后在第 2节推导出一些色散估计及相应的 Strichartz 估计。双线性和三线性估计分别在第 4 节和第 5节证明。最后一节用于证明定理3。

2. 衰减估计

本节中，我们推导相位函数 （1.4） 的一些导数估计，

$$m(r) = \sqrt{r^2 + \beta r^4 + r^6} \qquad (r = |\xi| \geqslant 0).$$

这些估计有助于我们找到相应振荡 y
积分的适当估计。

首先，我们观察 m 的一些基本性质。

引理 1. 假设 m 如上所述给出。

(i) 对任意 $r \geqslant 0$，有

$$m(r) \sim r\langle r\rangle^2. \tag{2.1}$$

(ii) 若 $\beta = 1$，则

$$m'(r) \sim \langle r\rangle^2, \qquad r^3\langle r\rangle^{-2} \lesssim m''(r) \lesssim r.$$

(iii) 若 $\beta = -1$和 $r \geqslant 1$，则

$$m'(r) \sim r^2, \qquad m''(r) \sim r, \tag{2.2}$$

and

$$\left|m^{(j)}(r)\right| \underset{j}{\lesssim} r^{3-j} \qquad (j \geqslant 3). \tag{2.3}$$

证明。 这些估计由下式得出

$$m'(r) = \frac{r\left[1 + 2\beta r^2 + 3r^4\right]}{m(r)},$$

$$m''(r) = \frac{r\left(3\beta + (2\beta^2 + 10)r^2 + 9\beta r^4 + 6r^6\right)}{(1 + \beta r^2 + r^4)^{\frac{3}{2}}}.$$

□

现在回顾范德科普特引理（参见 [29]）。

引理 2. 假设对所有 $r \in (a,b)$, $g \in C^1(a,b)$、 $\psi \in C^2(a,b)$ 和 $|\psi''(r)| \geqslant A$ 均成立。那么

$$\left|\int_a^b e^{it\psi(r)} g(r)\, dr\right| \leqslant C(At)^{-1/2} \left[|g(b)| + \int_a^b |g'(r)|\, dr\right], \tag{2.4}$$

对于某个与 a、 b 和 t 无关的常数 $C > 0$ 。

引理 2 即使 $\psi'(r) = 0$ 对于某个 $r \in (a,b)$也成立。然而，如果 $|\psi'(r)| > 0$ 对于所有 $r \in (a,b)$，则可通过分部积分得到以下引理。

引理 3 ([9])。 假设 $g \in C_0^\infty(a,b)$ 且 $\psi \in C^\infty(a,b)$ 满足 $|\psi'(r)| > 0$ 对所有$r \in (a,b)$均成立。如果

$$\max_{a\leqslant r\leqslant b} |\partial_r^j g(r)| \leqslant A, \qquad \max_{a\leqslant r\leqslant b} \left|\partial_r^j \left(\frac{1}{\psi'(r)}\right)\right| \leqslant B \tag{2.5}$$

对于所有 $0 \leqslant j \leqslant N \in \mathbb{N}_0$，则

$$\left|\int_a^b e^{it\psi(r)} g(r)\, dr\right| \lesssim AB^N |t|^{-N}. \tag{2.6}$$

记号。我们固定一个偶的光滑函数 $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ，使得

$$0 \leqslant \chi \leqslant 1, \quad \chi_{|_{[-1,1]}} = 1 \quad \text{and} \quad \operatorname{supp}(\chi) \subset [-2,2]$$

并设

$$\rho(s) = \chi(s) - \chi(2s).$$

对于二进数 $\lambda \in 2^{\mathbb{Z}}$，设 $\rho_\lambda(s) := \rho(s/\lambda)$，因此 supp $\rho_\lambda = \{s \in \mathbb{R} : \lambda/2 \leqslant |s| \leqslant 2\lambda\}$。现在通过以下方式定义频率投影 P_λ

$$\widehat{P_\lambda f}(\xi) = \rho_\lambda(|\xi|)\widehat{f}(\xi).$$

我们有时记作 $f_\lambda := P_\lambda f$，于是

$$f = \sum_\lambda f_\lambda,$$

本文中的求和均是对 $2^{\mathbb{Z}}$ 中的二进数进行的。

2.1. **色散估计**。 本节将推导一些局部色散估计，它们是获得 Strichartz 估计的主要工具。为此，我们将为与 ($L_x^1 - L_x^\infty$相关的线性传播子推导一个频率局部化1.4) 的衰减估计，即

$$S_m(t) := e^{itm(D)},$$

其中，符号 D 表示算子 $i\nabla$。

引理 4 （局部色散估计）。 设 $n \geqslant 1$ 和 $\lambda \gg 1$。则

$$\|S_m(t)P_\lambda f\|_{L_x^\infty(\mathbb{R}^n)} \lesssim (\lambda|t|)^{-\frac{n}{2}} \|f\|_{L_x^1(\mathbb{R}^n)} \tag{2.7}$$

对所有 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 均成立。

我们可以写成

$$[S_m(t)f_\lambda](x) = (I_\lambda(\cdot,t) * f)(x),$$

其中

$$I_\lambda(x,t) = \lambda^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda x\cdot\xi + itm(\lambda\xi)}\rho(|\xi|)\,d\xi. \tag{2.8}$$

由杨氏不等式

$$\|S_m(t)f_\lambda\|_{L^\infty_x(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|I_{\lambda(\cdot,t)}\|_{L^\infty_x(\mathbb{R}^n)}\|f\|_{L^1_x(\mathbb{R}^n)}, \tag{2.9}$$

因此，（2.7）归结为证明

$$\|I_\lambda(\cdot,t)\|_{L^\infty_x(\mathbb{R}^n)} \lesssim (\lambda|t|)^{-\frac{n}{2}}. \tag{2.10}$$

我们仅给出 $n \geqslant 2$ 和 $\beta = -1$ 的证明，因为一维情形或情形 $\beta = 1$ 更容易处理。

2.2. **证明** (2.10)**.** 不失一般性，假设 $t > 0$。利用极坐标，我们可以写成

$$I_\lambda(x,t) = \lambda^n \int_{1/2}^2 e^{itm(\lambda r)}(\lambda r|x|)^{-\frac{n-2}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(\lambda r|x|) r^{n-1}\rho(r)\,dr, \tag{2.11}$$

其中 $J_k(r)$ 是贝塞尔函数：

$$J_k(r) = \frac{(r/2)^k}{(k+1/2)\sqrt{\pi}} \int_{-1}^1 e^{irs}\left(1-s^2\right)^{k-1/2} ds \quad \text{for } k > -1/2.$$

贝塞尔函数 $J_k(r)$ 对于 $k > -1/2$ 和 $r > 0$满足以下性质，

$$J_k(r) \leqslant Cr^k, \tag{2.12}$$

$$J_k(r) \leqslant Cr^{-1/2}, \tag{2.13}$$

$$\partial_r\left[r^{-k}J_k(r)\right] = -r^{-k}J_{k+1}(r) \tag{2.14}$$

此外，我们可以写成

$$r^{-\frac{n-2}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(s) = e^{is}h(s) + e^{-is}\bar{h}(s) \tag{2.15}$$

对于某个满足衰减估计的函数 h

$$|\partial_r^j h(r)| \leqslant C_j\langle r\rangle^{-\frac{n-1}{2}-j} \quad \text{for all } j \geqslant 0. \tag{2.16}$$

我们使用简写

$$m_\lambda(r) = m(\lambda r), \qquad \tilde{J}_\alpha(r) = r^{-\alpha}J_\alpha(r), \qquad \tilde{\rho}(r) = r^{n-1}\rho(r).$$

因此，

$$I_\lambda(x,t) = \lambda^n \int_{1/2}^2 e^{itm_\lambda(r)}\tilde{J}_{\frac{n-2}{2}}(\lambda r|x|)\tilde{\rho}(r)\,dr. \tag{2.17}$$

我们分别讨论 $|x| \lesssim \lambda^{-1}$ 和 $|x| \gg \lambda^{-1}$ 的情形。

2.2.1. 情形 *1*： $|x| \lesssim \lambda^{-1}$。由（2.12）和（2.14），对所有 $r \in (1/2, 2)$ 都有如下估计

$$\left|\partial_r^j \left[\tilde{J}_{\frac{n-2}{2}}(\lambda r|x|)\tilde{\rho}(r)\right]\right| \lesssim_j 1 \qquad (j \geqslant 0). \tag{2.18}$$

由引理 1可直接看出

$$\max_{1/2\leqslant r\leqslant 1}\left|\partial_r^j\left(\frac{1}{m'_\lambda(r)}\right)\right| \lesssim_j \lambda^{-3} \qquad (j \geqslant 0). \tag{2.19}$$

将引理 3 与 (2.18)-(2.19) 及 $N = n/2$ 应用于 (2.17，得到

$$|I_\lambda(x,t)| \lesssim \lambda^n \cdot \lambda^{-\frac{3n}{2}} t^{-\frac{n}{2}} \lesssim (\lambda t)^{-\frac{n}{2}}. \tag{2.20}$$

2.2.2. 情形 *2*： $|x| \gg \lambda^{-1}$。在 (2.15) 中使用 (2.11)，可写为

$$I_\lambda(x,t) = \lambda^n \left\{ \int_{1/2}^2 e^{it\phi_\lambda^+(r)} h(\lambda r|x|)\tilde{\rho}(r)\, dr + \int_{1/2}^2 e^{-it\phi_\lambda^-(r)} \bar{h}(\lambda r|x|)\tilde{\rho}(r)\, dr \right\},$$

其中

$$\phi_\lambda^\pm(r) = \lambda r|x|/t \pm m(\lambda(r).$$

令 $H_\lambda(|x|, r) = h(\lambda r|x|)\tilde{\rho}(r)$。由 (2.16) 可得

$$\max_{1/2\leqslant r\leqslant 2}\left|\partial_r^j H_\lambda(|x|, r)\right| \lesssim (\lambda|x|)^{-\frac{n-1}{2}} \qquad (j \geqslant 0), \tag{2.21}$$

其中还用到了这一事实： $\lambda|x| \gg 1$

现在我们写成

$$I_\lambda(x,t) = I_\lambda^+(x,t) + I_\lambda^-(x,t),$$

其中

$$I_\lambda^+(x,t) = \lambda^n \int_{1/2}^2 e^{it\phi_\lambda^+(r)} H_\lambda(|x|, r)\, dr,$$

$$I_\lambda^-(x,t) = \lambda^n \int_{1/2}^2 e^{-it\phi_\lambda^-(r)} \bar{H}_\lambda(|x|, r)\, dr.$$

注意到

$$\partial_r \phi_\lambda^\pm(r) = \lambda\left[|x|/t \pm m'_\lambda(r)\right], \qquad \partial_r^2 \phi_\lambda^\pm(r) = \pm\lambda^2 m''_\lambda(r),$$

因此根据引理1,

$$|\partial_r \phi_\lambda^+(r)| \gtrsim \lambda^3 \qquad |\partial_r^2 \phi_\lambda^\pm(r)| \sim \lambda^3 \tag{2.22}$$

对于所有 $r \in (1/2, 2)$，其中还用到了 $\lambda \gg 1$ 这一事实，并且 m' 为正。

对 $I_\lambda^+(x,t)$ 的估计。类似于估计式（2.19），我们注意到

$$\max_{1/2\leqslant r\leqslant 2}\left|\partial_r^j\left(\left[\partial_r \phi_\lambda^+(r)\right]^{-1}\right)\right| \lesssim_j \lambda^{-3} \qquad (j \geqslant 0). \tag{2.23}$$

将引理 3 与（2.21）、（2.23）以及 $N = n/2$ 应用于 $I_\lambda^+(x,t)$，可得

$$|I_\lambda^+(x,t)| \lesssim \lambda^n \cdot (\lambda|x|)^{-\frac{n-1}{2}} \cdot \lambda^{-\frac{3n}{2}} t^{-\frac{n}{2}} \lesssim (\lambda t)^{-\frac{n}{2}}, \tag{2.24}$$

其中我们还用到了这一事实： $\lambda|x| \gg 1$。

对 $I_\lambda^-(x,t)$ 的估计。 我们分别处理非定常情形和定常情形。在非定常情形中，

$$|x| \ll \lambda^2 t \quad \text{or} \quad |x| \gg \lambda^2 t,$$

我们有

$$|\partial_r \phi_\lambda^-(r)| \gtrsim \lambda^3,$$

因此， $I_\lambda^-(x,t)$ 可以完全按照上文估计 $I_\lambda^+(x,t)$ 的方式进行估计，并满足相同的界。

因此，只需考虑定常情形：

$$|x| \sim \lambda^2 t.$$

在这种情况下，我们使用引理 2， （2.22）和（2.21）得到

$$\begin{aligned} |I_\lambda^-(x,t) &\lesssim \lambda^n \left(\lambda^3 t\right)^{-\frac{1}{2}} \left[|H_\lambda^-(x,2)| + \int_{1/2}^2 |\partial_r H_\lambda^-(x,r)|\, dr \right] \\ &\lesssim \lambda^{n-\frac{3}{2}} t^{-\frac{1}{2}} \cdot (\lambda|x|)^{-\frac{n-1}{2}} \\ &\lesssim (\lambda t)^{-\frac{n}{2}}. \end{aligned} \tag{2.25}$$

这里我们还用到了以下事实： $H_\lambda^-(x,2) = 0$。

2.3. **Strichartz 估计**。 有了局部色散估计，我们现在可以推导局部 Strichartz 估计。

引理 5 (局部 Strichartz 估计)。 设 $\lambda \gg 1$，并假设数对 (q,r) 满足

$$q > 2,\ r \geqslant 2 \quad \textit{and} \quad \frac{2}{q} + \frac{n}{r} = \frac{n}{2}. \tag{2.26}$$

Then

$$\|S_m(t) f_\lambda\|_{L_t^q L_x^r(\mathbb{R}^{n+1})} \lesssim \lambda^{-\frac{1}{q}} \|f_\lambda\|_{L_x^2(\mathbb{R}^n)}, \tag{2.27}$$

对所有 $f \in S(\mathbb{R}^n)$ 均成立。此外，若 $b > 1/2$，则有

$$\|u_\lambda\|_{L_t^q L_x^r(\mathbb{R}^{n+1})} \lesssim \lambda^{-\frac{1}{q}} \|u_\lambda\|_{X^{0,b}}, \tag{2.28}$$

其中

$$\|u\|_{X^{s,b}} := \left\| \langle \xi \rangle^s \langle |\tau| - m(\xi) \rangle^b \widetilde{u}(\xi,\tau) \right\|_{L^2_{\tau,\xi}}.$$

证明。 我们将使用哈代-利特尔伍德-索博列夫不等式，该不等式断言

$$\left\| |\cdot|^{-\gamma} * f \right\|_{L^a(\mathbb{R})} \lesssim \|f\|_{L^b(\mathbb{R})} \tag{2.29}$$

只要 $1 < b < a < \infty$ 和 $0 < \gamma < 1$ 满足尺度条件

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{a} + 1 - \gamma.$$

首先注意到，(2.27)对这一对 $(q,r) = (\infty, 2)$ 成立，因为这正是能量不等式。因此，我们可以假设 $q \in (2,\infty)$。

令 q' 和 r' 分别为 q 和 r的共轭，即 $q' = \frac{q}{q-1}$ 和$r' = \frac{r}{r-1}$。由标准的 TT*–论证，(2.27) 等价于以下估计

$$\|TT^* F\|_{L_t^q L_x^r(\mathbb{R}^{n+1})} \lesssim \lambda^{-\frac{2}{q}} \|F\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}(\mathbb{R}^{n+1})}, \tag{2.30}$$

其中

$$\begin{aligned} TT^*F(x,t) &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi+i(t-s)m(\xi)}\rho_\lambda^2(\xi)\widehat{F}(\xi,s)\,ds d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} K_{\lambda,t-s} * F(\cdot,s)\,ds, \end{aligned} \tag{2.31}$$

with

$$K_{\lambda,t}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi+itm(\xi)}\rho_\lambda^2(\xi)\,d\xi.$$

由于

$$K_{\lambda,t} * g(x) = S_m(t)P_\lambda g_\lambda(x)$$

由（2.7）可得

$$\|K_{\lambda,t} * g\|_{L_x^\infty(\mathbb{R}^n)} \lesssim (\lambda|t|)^{-\frac{n}{2}}\|g\|_{L_x^1(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.32}$$

另一方面，由普朗歇尔定理可得

$$\|K_{\lambda,t} * g\|_{L_x^2(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|g\|_{L_x^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.33}$$

因此，对（2.32）和（2.33）进行插值可得

$$\|K_{\lambda,t} * g\|_{L_x^r(\mathbb{R}^n)} \lesssim (\lambda|t|)^{-\frac{n}{2}(1-\frac{2}{r})}\|g\|_{L_x^{r'}(\mathbb{R}^n)} \tag{2.34}$$

对所有 $r \in [2,\infty]$ 均成立。

对 (2.31) 应用闵可夫斯基不等式，再结合 (2.34) 和 (2.29)，取$(a,b) = (q,q')$ 和 $\gamma = n/2 - n/r = 2/q$，得到

$$\begin{aligned} \|TT^*F\|_{L_t^qL_x^r(\mathbb{R}^{n+1})} &\leqslant \left\| \int_{\mathbb{R}} \|K_{\lambda,t-s,} * F(s,\cdot)\|_{L_x^r(\mathbb{R}^n)}\,ds \right\|_{L_t^q(\mathbb{R})} \\ &\lesssim \lambda^{-\frac{2}{q}} \left\| \int_{\mathbb{R}} |t-s|^{-\frac{2}{q}}\,\|F(s,\cdot)\|_{L_x^{r'}(\mathbb{R}^2)}\,ds \right\|_{L_t^q(\mathbb{R})} \\ &\lesssim \lambda^{-\frac{2}{q}} \left\| \|F\|_{L_x^{r'}(\mathbb{R}^n)} \right\|_{L_t^{q'}(\mathbb{R})} \\ &= \lambda^{-\frac{2}{q}}\,\|F\|_{L_t^{q'}L_x^{r'}(\mathbb{R}^{n+1})}, \end{aligned}$$

这就是所需的估计式 (2.30)。 □

3. Local solution

本节证明一个双线性和三线性估计，它是证明定理 1 的主要组成部分。我们仅证明 $\beta = -1$ 的情形，因为$\beta = 1$ 更容易处理。取 $\beta = -1$ 时，相位函数变为

$$m(\xi) = |\xi|\sqrt{1-|\xi|^2+|\xi|^4}.$$

由杜哈梅尔原理，方程 (1.4) 的解可改写为积分方程

$$u(t) = \partial_t \mathcal{W}_m(t)u_0 + \mathcal{W}_m(t)u_1 + \int_0^t \mathcal{W}_m(t-t')\Delta(f(u)(t'))\,dt', \tag{3.1}$$

其中

$$\mathcal{W}_m(t) = \frac{\sin(tm(D))}{m(D)} = \frac{e^{itm(D)}+e^{-itm(D)}}{2im(D)} = \frac{S_m(t)-S_m(-t)}{2im(D)}.$$

根据标准论证（例如参见 [26]），已知局部适定性可由以下双线性和三线性估计推出。因此，我们省略定理 1的证明（参见 [11]）。

引理 6。设 $n \geqslant 2$，$1/2 < b < 1$，$0 < T < 1$，且 s 与定理 *1*中的相同。则

$$\left\| |D|\langle D\rangle^{-2}(u_1 u_2) \right\|_{X^{s,b-1}} \lesssim T^{1-b} \|u_1\|_{X^{s,b}} \|u_2\|_{X^{s,b}}. \tag{3.2}$$

引理 7。设 $n \geqslant 1$，$1/2 < b < 1$，$0 < T < 1$ 和 s 与定理 2中的相同。则

$$\left\| |D|\langle D\rangle^{-2}(u_1 u_2 u_3) \right\|_{X^{s,b-1}} \lesssim \prod_{j=1}^{3} \|u_j\|_{X^{s,b}}. \tag{3.3}$$

为证明引理 6 和 7，我们需要下面引理 9 和 10 中的局部化双线性和三线性估计，它们是引理 5中的频率局部化斯特里哈茨估计的推论。

我们回顾伯恩斯坦不等式，它对我们的分析非常有帮助。

引理 8 ([4])。对于 $1 \leqslant r \leqslant q \leqslant \infty$ 和 $k \geqslant 0$,

$$\|D^k P_\lambda f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \lesssim \lambda^{k+n(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})} \|P_\lambda f\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}.$$

引理 9。设 $n \geqslant 1$、$1/2 < b < 1$ 和 $0 < T < 1$。则

$$\left\| |D|\langle D\rangle^{-2} P_{\lambda_3}\left(P_{\lambda_1} u_1 P_{\lambda_2} u_2\right) \right\|_{L_T^2 L_x^2} \lesssim \lambda_3 \langle \lambda_3\rangle^{-2} B(\lambda) \left\|P_{\lambda_1} u_1\right\|_{X^{0,b}} \left\|P_{\lambda_2} u_2\right\|_{X^{0,b}},$$

其中

$$B(\lambda) \sim [\min(\lambda_1, \lambda_2)]^{\frac{n}{2}}. \tag{3.4}$$

此外，若 $\max(\lambda_1, \lambda_2) \gg 1$，则我们可以取

$$B(\lambda) \sim \begin{cases} [\max(\lambda_1, \lambda_2)]^{-\frac{1}{4}} & \text{if} \quad n = 1, \\ [\min(\lambda_1, \lambda_2)]^{\frac{n}{2}-1+2\delta} [\max(\lambda_1, \lambda_2)]^{-\frac{1}{2}+\delta} & \text{if} \quad n \geqslant 2. \end{cases} \tag{3.5}$$

当 $\delta > 0$ 足够小时。

证明。根据伯恩斯坦不等式，只需证明

$$\left\|P_{\lambda_1} u_1 P_{\lambda_2} u_2\right\|_{L_T^2 L_x^2} \lesssim B(\lambda) \left\|P_{\lambda_1} u_1\right\|_{X^{0,b}} \left\|P_{\lambda_2} u_2\right\|_{X^{0,b}},$$

由对称性，不妨设 $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$。根据 Hölder 不等式和 Sobolev 不等式,

$$\begin{aligned} \left\|P_{\lambda_1} u_1 P_{\lambda_2} u_2\right\|_{L_T^2 L_x^2} &\leqslant T^{\frac{1}{2}} \left\|P_{\lambda_1} u_1\right\|_{L_T^\infty L_x^\infty} \left\|P_{\lambda_2} u_2\right\|_{L_T^\infty L_x^2} \\ &\lesssim T^{\frac{1}{2}} \lambda_1^{\frac{n}{2}} \left\|P_{\lambda_1} u_1\right\|_{L_T^\infty L_x^2} \left\|P_{\lambda_2} u_2\right\|_{L_T^\infty L_x^2} \\ &\lesssim T^{\frac{1}{2}} \lambda_1^{\frac{n}{2}} \left\|P_{\lambda_1} u_1\right\|_{X^{0,b}} \left\|P_{\lambda_2} u_2\right\|_{X^{0,b}} \end{aligned}$$

这证明了（3.4）。

接下来，假设 $\lambda_2 \gg 1$。若 $n = 1$，则由 t中的 Hölder 不等式、x中的伯恩斯坦不等式，最后由引理 5，可得

$$\begin{aligned} \left\|P_{\lambda_1} u_1 P_{\lambda_2} u_2\right\|_{L_T^2 L_x^2} &\leqslant T^{\frac{1}{4}} \left\|P_{\lambda_1} u_1\right\|_{L_T^\infty L_x^2} \left\|P_{\lambda_2} u_2\right\|_{L_T^4 L_x^\infty} \\ &\lesssim T^{\frac{1}{4}} \lambda_2^{-\frac{1}{4}} \left\|P_{\lambda_1} u_1\right\|_{X^{0,b}} \left\|P_{\lambda_2} u_2\right\|_{X^{0,b}}. \end{aligned}$$

若 $n \geqslant 2$，我们选择 Strichartz 可容许对

$$q = \frac{2}{1-2\delta}, \qquad r = \frac{2qn}{qn-4}.$$

然后在 t中应用 Hölder 不等式，在 x中应用伯恩斯坦不等式，最后应用引理 5，得到

$$\begin{aligned}
\left\|P_{\lambda_1}u_1 P_{\lambda_2}u_2\right\|_{L_T^2 L_x^2} &\leqslant T^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} \left\|P_{\lambda_1}u_1\right\|_{L_T^\infty L_x^{\frac{qn}{2}}} \left\|P_{\lambda_2}u_2\right\|_{L_T^q L_x^r} \\
&\leqslant T^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} \lambda_1^{\frac{n}{2}-\frac{2}{q}} \lambda_2^{-\frac{1}{q}} \left\|P_{\lambda_1}u_1\right\|_{L_T^\infty L_x^2} \left\|P_{\lambda_2}u_2\right\|_{X^{0,b}} \\
&\lesssim T^{\delta} \lambda_1^{\frac{n}{2}-1+2\delta} \lambda_2^{-\frac{1}{2}+\delta} \left\|P_{\lambda_1}u_1\right\|_{X^{0,b}} \left\|P_{\lambda_2}u_2\right\|_{X^{0,b}}.
\end{aligned}$$

□

引理 10. 设 $n \geqslant 1$、$1/2 < b < 1$ 和 $0 < T < 1$。假设 λ_{min}、λ_{med} 和 λ_{max} 分别表示 λ_1、λ_2 和 λ_3 的最小值、中位数和最大值。那么

$$\left\|\langle D\rangle^{-2} P_{\lambda_4}(P_{\lambda_1}u_1 P_{\lambda_2}u_2 P_{\lambda_3}u_3)\right\|_{L_T^2 L_x^2} \lesssim \lambda_4 \langle\lambda_4\rangle^{-2} B(\lambda) \prod_{j=1}^{3} \left\|P_{\lambda_j}u_j\right\|_{X^{0,b}}$$

其中

$$B(\lambda) = (\lambda_{min}\,\lambda_{med}\,)^{\frac{n}{2}}. \tag{3.6}$$

此外，

- 如果 $n = 1$，我们可以取

$$B(\lambda) = \begin{cases} \lambda_{min}^{\frac{1}{2}}\,\lambda_{max}^{-\frac{1}{4}} & \text{if } \lambda_{max} \gg 1, \\ (\lambda_{med}\,\lambda_{max})^{-\frac{1}{4}} & \text{if } \lambda_{med} \gg 1. \end{cases} \tag{3.7}$$

- 如果 $n \geqslant 2$ 且 λ最大为 $\gg 1$，我们可以取

$$B(\lambda) = \lambda_{min}^{\frac{n}{2}} \lambda_{med}^{\frac{n}{2}-1+2\delta} \lambda_{max}^{-\frac{1}{2}+\delta}. \tag{3.8}$$

证明。 根据伯恩斯坦不等式，只需证明

$$\left\|P_{\lambda_1}u_1 P_{\lambda_2}u_2 P_{\lambda_3}u_3\right\|_{L_T^2 L_x^2} \lesssim B(\lambda) \prod_{j=1}^{3} \left\|P_{\lambda_j}u_j\right\|_{X^{0,b}}.$$

由对称性，不妨设 $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3$。根据 Hölder 不等式和 Sobolev 不等式，

$$\begin{aligned}
\left\|P_{\lambda_1}u_1 P_{\lambda_2}u_2 P_{\lambda_3}u_3\right\|_{L_T^2 L_x^2} &\leqslant T^{\frac{1}{2}} \left\|P_{\lambda_1}u_1\right\|_{L_T^\infty L_x^\infty} \left\|P_{\lambda_2}u_2\right\|_{L_T^\infty L_x^\infty} \left\|P_{\lambda_3}u_3\right\|_{L_T^\infty L_x^2} \\
&\lesssim T^{\frac{1}{2}} (\lambda_1\lambda_2)^{\frac{n}{2}} \prod_{j=1}^{3} \left\|P_{\lambda_j}u_j\right\|_{L_T^\infty L_x^2} \\
&\lesssim T^{\frac{1}{2}} (\lambda_1\lambda_2)^{\frac{n}{2}} \prod_{j=1}^{3} \left\|P_{\lambda_j}u_j\right\|_{X^{0,b}}.
\end{aligned}$$

接下来，假设 $\lambda_3 \gg 1$。

情形： $n=1$：根据 t中的 Hölder 不等式、 x中的伯恩斯坦不等式，最后由引理 5，我们得到

$$\begin{aligned}\left\|P_{\lambda_1}u_1P_{\lambda_2}u_2P_{\lambda_3}u_3\right\|_{L_T^2L_x^2} &\leqslant T^{\frac{1}{4}}\left\|P_{\lambda_1}u_1\right\|_{L_T^\infty L_x^\infty}\left\|P_{\lambda_2}u_2\right\|_{L_T^\infty L_x^2}\left\|P_{\lambda_3}u_3\right\|_{L_T^4L_x^\infty}\\ &\lesssim T^{\frac{1}{4}}\lambda_1^{\frac{1}{2}}\lambda_3^{-\frac{1}{4}}\prod_{j=1}^{3}\left\|P_{\lambda_j}u_j\right\|_{X^{0,b}}.\end{aligned}$$

在 $\lambda_2\gg 1$ 的情况下，

$$\begin{aligned}\left\|P_{\lambda_1}u_1P_{\lambda_2}u_2P_{\lambda_3}u_3\right\|_{L_T^2L_x^2} &\leqslant \left\|P_{\lambda_1}u_1\right\|_{L_T^\infty L_x^2}\left\|P_{\lambda_2}u_2\right\|_{L_T^4L_x^\infty}\left\|P_{\lambda_3}u_3\right\|_{L_T^4L_x^\infty}\\ &\lesssim (\lambda_2\lambda_3)^{-\frac{1}{4}}\prod_{j=1}^{3}\left\|P_{\lambda_j}u_j\right\|_{X^{0,b}}.\end{aligned}$$

情形： $n\geqslant 2$：我们选择 Strichartz 可容许对

$$q=\frac{2}{1-2\delta},\qquad r=\frac{2qn}{qn-4}\qquad (n\geqslant 2).$$

在 t 中应用 Hölder 不等式，在 x 中应用伯恩斯坦不等式，最后应用引理 5，得到

$$\begin{aligned}\left\|P_{\lambda_1}u_1P_{\lambda_2}u_2P_{\lambda_3}u_3\right\|_{L_T^2L_x^2} &\leqslant T^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\left\|P_{\lambda_1}u_1\right\|_{L_T^\infty L_x^\infty}\left\|P_{\lambda_2}u_2\right\|_{L_T^\infty L_x^{\frac{qn}{2}}}\left\|P_{\lambda_3}u_3\right\|_{L_T^qL_x^r}\\ &\leqslant T^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\lambda_1^{\frac{n}{2}}\lambda_2^{\frac{n}{2}-\frac{2}{q}}\lambda_3^{-\frac{1}{q}}\left\|P_{\lambda_1}u_1\right\|_{L_T^\infty L_x^2}\left\|P_{\lambda_2}u_2\right\|_{L_T^\infty L_x^2}\left\|P_{\lambda_3}u_3\right\|_{X^{0,b}}\\ &\lesssim T^{\delta}\lambda_1^{\frac{n}{2}}\lambda_2^{\frac{n}{2}-1+2\delta}\lambda_3^{-\frac{1}{2}+\delta}\prod_{j=1}^{3}\left\|P_{\lambda_j}u_j\right\|_{X^{0,b}}.\end{aligned}$$

□

4. 引理的证明 6

我们回顾一下（例如参见 [33]）

$$\|u\|_{X^{s,b-1}(T)}\leqslant CT^{1-b}\|u\|_{L_T^2H_x^s}, \tag{4.1}$$

其中 C 与 T无关。因此，根据（4.1），估计式（3.2）归结为证明

$$\left\||D|\langle D\rangle^{-2}(u_1u_2)\right\|_{L_T^2H_x^s}\lesssim \|u_1\|_{X^{s,b}}\|u_2\|_{X^{s,b}}. \tag{4.2}$$

利用对偶性，（4.2）进一步归结为

$$\left|\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}|D|\langle D\rangle^{s-2}\left(\langle D\rangle^{-s}u_1\cdot\langle D\rangle^{-s}u_2\right)u_3\,dxdt\right|\lesssim \|u_1\|_{X^{0,b}}\|u_2\|_{X^{0,b}}\|u_3\|_{L_T^2L_x^2}. \tag{4.3}$$

将 $u_j=\sum_{\lambda_j>0}P_{\lambda_j}u_j$ 分解后，我们得到

$$\text{LHS (4.3)}\lesssim\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}\left|\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}|D|\langle D\rangle^{s-2}P_{\lambda_3}\left(\langle D\rangle^{-s}P_{\lambda_1}u_1\cdot\langle D\rangle^{-s}P_{\lambda_2}u_2\right)P_{\lambda_3}u_3\,dxdt\right|. \tag{4.4}$$

Let

$$a_{\lambda_j} := \left\| P_{\lambda_j} u_j \right\|_{X^{0,b}}, \qquad a_{\lambda_3} := \left\| P_{\lambda_3} u_3 \right\|_{L^2_{T,x}} \qquad (j = 1, 2),$$

Then

$$\left\| u_j \right\|_{X^{0,b}} \sim \| (a_{\lambda_j}) \|_{l^2_{\lambda_j}}, \qquad \| u_3 \|_{L^2_{T,x}} \sim \| (a_{\lambda_3}) \|_{l^2_{\lambda_3}} \qquad (j = 1, 2).$$

因此，估计式（4.3）归结为

$$\text{RHS (4.4)} \lesssim \prod_{j=1}^{3} \| (a_{\lambda_j}) \|_{l^2_{\lambda_j}}. \tag{4.5}$$

我们如下证明（4.5）。由柯西-施瓦茨不等式、引理 9 和伯恩斯坦不等式，得

$$\begin{aligned} \text{RHS (4.4)} &\lesssim \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3} \left\| |D| \langle D \rangle^{s-2} P_{\lambda_3} \left(\langle D \rangle^{-s} P_{\lambda_1} u_1 \cdot \langle D \rangle^{-s} P_{\lambda_2} u_2 \right) \right\|_{L^2_{T,x}} \left\| P_{\lambda_3} u_3 \right\|_{L^2_{T,x}} \\ &\lesssim \underbrace{\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3} C(\lambda) a_{\lambda_1} a_{\lambda_2} a_{\lambda_3}}_{:= S}, \end{aligned} \tag{4.6}$$

其中

$$C(\lambda) = B(\lambda) \lambda_3 \langle \lambda_3 \rangle^{s-2} \langle \lambda_1 \rangle^{-s} \langle \lambda_2 \rangle^{-s}$$

其中 $B(\lambda)$ 如（3.4）-（3.5）所示。

因此，要证明（4.5），只需证明

$$S \lesssim \prod_{j=1}^{3} \| (a_{\lambda_j}) \|_{l^2_{\lambda_j}}. \tag{4.7}$$

根据论证的对称性，不妨设 $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$。
如果 $\lambda_2 \lesssim 1$，那么 $B(\lambda) \lesssim 1$，从而

$$C(\lambda) \lesssim \lambda_3 \lambda_1^{\frac{n}{2}} \lesssim \lambda_3 (\lambda_1 \lambda_2)^{\frac{n}{4}}.$$

然后在 λ_1、λ_2 和 λ_3中应用柯西-施瓦茨不等式，我们得到

$$S \lesssim \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \lesssim 1} \lambda_3 (\lambda_1 \lambda_2)^{\frac{n}{4}} a_{\lambda_1} a_{\lambda_2} a_{\lambda_3} \lesssim \prod_{j=1}^{3} \| (a_{\lambda_j}) \|_{l^2_{\lambda_j}}.$$

因此，从现在起我们假设 $\lambda_2 \gg 1$。我们考虑两种情况：

(i) $\lambda_3 \ll \lambda_1 \sim \lambda_2$,
(ii) $\lambda_1 \ll \lambda_2 \sim \lambda_3$。

4.1. **(i):** $\lambda_3 \ll \lambda_1 \sim \lambda_2$。

4.1.1. $\underline{n=1}$: 在这种情况下，我们有

$$C(\lambda) \sim \lambda_3 \langle \lambda_3 \rangle^{s-2} \lambda_2^{-2s-1/4}.$$

- 若 $\lambda_3 \lesssim 1$，则

$$S \lesssim \sum_{\lambda_3 \lesssim 1 \ll \lambda_1 \sim \lambda_2} \lambda_3 \lambda_2^{-2s-1/4} a_{\lambda_1} a_{\lambda_2} a_{\lambda_3} \lesssim \prod_{j=1}^{3} \|(a_{\lambda_j})\|_{l^2_{\lambda_j}}$$

  满足 $s > -1/8$。
- 若 $\lambda_3 \gg 1$，则

$$S \lesssim \sum_{1 \ll \lambda_3 \ll \lambda_1 \sim \lambda_2} \lambda_3^{s-1} \lambda_2^{-2s-1/4} a_{\lambda_1} a_{\lambda_2} a_{\lambda_3} \lesssim \prod_{j=1}^{3} \|(a_{\lambda_j})\|_{l^2_{\lambda_j}}$$

  满足 $-1/8 < s < 1$。在 $s \geqslant 1$ 的情况下，我们记作 $\lambda_3^{s-1}\lambda_2^{-2s-1/4} = (\lambda_3/\lambda_2)^{s-1}\lambda_2^{-s-5/4}$，可用来估计该和。

4.1.2. $\underline{n \geqslant 2}$: 在此情况下，我们有

$$C(\lambda) \sim \lambda_3 \langle \lambda_3 \rangle^{s-2} \lambda_2^{-2s+n/2-3/2+3\delta}.$$

- 首先假设 $\lambda_3 \lesssim 1$。则

$$S \lesssim \sum_{\lambda_3 \lesssim 1 \ll \lambda_1 \sim \lambda_2} \lambda_3 \lambda_2^{-2s+n/2-3/2+3\delta} a_{\lambda_1} a_{\lambda_2} a_{\lambda_3} \lesssim \prod_{j=1}^{3} \|(a_{\lambda_j})\|_{l^2_{\lambda_j}}.$$

  provided $s > (n-3)/4 + (3/2)\delta$.
- Next, assume $\lambda_3 \gg 1$.
  - If $n \leqslant 6$ and $(n-3)/4 + (3/2)\delta < s < 1$, then

$$S \lesssim \sum_{1 \ll \lambda_3 \ll \lambda_1 \sim \lambda_2} \lambda_3^{s-1} \lambda_2^{-2s+n/2-3/2+3\delta} a_{\lambda_1} a_{\lambda_2} a_{\lambda_3} \lesssim \prod_{j=1}^{3} \|(a_{\lambda_j})\|_{l^2_{\lambda_j}}.$$

  - If $n \leqslant 6$ and $s \geqslant 1$, then

$$S \lesssim \sum_{1 \ll \lambda_3 \ll \lambda_1 \sim \lambda_2} \lambda_3^{-\delta} \lambda_2^{-s+n/2-5/2+4\delta} a_{\lambda_1} a_{\lambda_2} a_{\lambda_3} \lesssim \prod_{j=1}^{3} \|(a_{\lambda_j})\|_{l^2_{\lambda_j}}$$

    since $-s + (n-5)/2 + 4\delta \leqslant -1/2 + 4\delta$.
  - If $n \geqslant 7$ and $s > (n-5)/2 + 4\delta$ (which implies $s > 1$), then it is clear from the proceeding estimate that S is summable.

4.2. **(ii):** $\underline{\lambda_1 \ll \lambda_2 \sim \lambda_3}$。

4.2.1. $\underline{n=1}$:

- 若 $\lambda_1 \lesssim 1$，则 $B(\lambda) \sim \lambda_1^{1/2}$，从而 $C(\lambda) \sim \lambda_1^{1/2}\lambda_2^{-1}$。因此，

$$S \lesssim \sum_{\lambda_1 \lesssim 1 \ll \lambda_2 \sim \lambda_3} \lambda_1^{1/2} \lambda_2^{-1} a_{\lambda_1} a_{\lambda_2} a_{\lambda_3} \lesssim \prod_{j=1}^{3} \|(a_{\lambda_j})\|_{l^2_{\lambda_j}}$$

- 若 $\lambda_1 \gg 1$，则 $B(\lambda) \sim \lambda_1^{-1/4}$，从而 $C(\lambda) \sim \lambda_1^{-s-5/4}$。因此，

$$S \lesssim \sum_{1 \ll \lambda_1 \ll \lambda_2 \sim \lambda_3} \lambda_1^{-s-5/4} a_{\lambda_1} a_{\lambda_2} a_{\lambda_3} \lesssim \prod_{j=1}^{3} \|(a_{\lambda_j})\|_{l^2_{\lambda_j}}$$

在 $s > -5/4$ 条件下。

4.2.2. $n \geqslant 2$: 在这种情况下，我们有

$$C(\lambda) \sim \lambda_1^{n/2-1+2\delta} \langle \lambda_1 \rangle^{-s} \lambda_2^{-3/2+3\delta}.$$

- 首先假设 $\lambda_1 \lesssim 1$。那么

$$S \lesssim \sum_{\lambda_1 \lesssim 1 \ll \lambda_2 \sim \lambda_3} \lambda_1^{n/2-1+2\delta} \lambda_2^{-3/2+3\delta} a_{\lambda_1} a_{\lambda_2} a_{\lambda_3} \lesssim \prod_{j=1}^{3} \|(a_{\lambda_j})\|_{l^2_{\lambda_j}}.$$

- 接下来，假设 $\lambda_1 \gg 1$。那么

$$S \lesssim \sum_{1 \ll \lambda_1 \ll \lambda_2 \sim \lambda_3} \lambda_1^{-s+n/2-5/2+2\delta} a_{\lambda_1} a_{\lambda_2} a_{\lambda_3} \lesssim \prod_{j=1}^{3} \|(a_{\lambda_j})\|_{l^2_{\lambda_j}}$$

在 $s > (n-5)/2 + 3\delta$ 条件下。

结论： 由情形 (i) 和 (ii)，我们得出估计式 (4.7) 成立的条件是

$$s > \max(n/4 - 3/4,\ n/2 - 5/2) = \begin{cases} n/4 - 3/4, & \text{for} \quad 2 \leqslant n \leqslant 6, \\ n/2 - 5/2, & \text{for} \quad n \geqslant 7. \end{cases}$$

类似地，对于情形 $n = 1$，(4.7) 成立的条件是

$$s > -1/8.$$

5. Proof of Lemma 7

利用对偶性，(3.3) 可进一步化简为（回忆 (4.1)）

$$\left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |D| \langle D \rangle^{s-2} \left(\langle D \rangle^{-s} u_1 \cdot \langle D \rangle^{-s} u_2 \langle D \rangle^{-s} u_3 \right) u_4 \, dxdt \right| \lesssim T^{1-b} \prod_{j=1}^{3} \|u_j\|_{X^{0,b}} \|u_4\|_{L^2_{T,x}} \tag{5.1}$$

Decomposing $u_j = \sum_{\lambda_j > 0} P_{\lambda_j} u_j$, we have

左端（5.1）

$$\lesssim \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4} \left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |D| \langle D \rangle^{s-2} P_{\lambda_4} \left(\langle D \rangle^{-s} P_{\lambda_1} u_1 \cdot \langle D \rangle^{-s} P_{\lambda_2} u_2 \cdot \langle D \rangle^{-s} P_{\lambda_3} u_3 \right) P_{\lambda_4} u_4 \, dxdt \right|. \tag{5.2}$$

Let

$$a_{\lambda_j} := \left\| P_{\lambda_j} u_j \right\|_{X^{0,b}}, \qquad a_{\lambda_4} := \left\| P_{\lambda_4} u_4 \right\|_{L^2_{T,x}} \qquad (j = 1, 2, 3).$$

Then

$$\|u_j\|_{X^{0,b}} \sim \|(a_{\lambda_j})\|_{l^2_{\lambda_j}}, \qquad \|u_4\|_{L^2_{T,x}} \sim \|(a_{\lambda_4})\|_{l^2_{\lambda_4}} \qquad (j = 1, 2, 3).$$

现在，根据柯西-施瓦茨不等式、引理10和伯恩斯坦不等式，

$$\begin{aligned}\text{RHS (5.2)} &\lesssim \sum_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4} \left\| |D|\langle D\rangle^{s-2} P_{\lambda_4}\left(\langle D\rangle^{-s}P_{\lambda_1}u_1\cdot\langle D\rangle^{-s}P_{\lambda_2}u_2\cdot\langle D\rangle^{-s}P_{\lambda_3}u_3\right)\right\|_{L^2_{T,x}} \left\|P_{\lambda_4}u_4\right\|_{L^2_{T,x}} \\ &\lesssim \underbrace{\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4} C(\lambda) a_{\lambda_1}a_{\lambda_2}a_{\lambda_3}a_{\lambda_4}}_{:=S},\end{aligned} \tag{5.3}$$

其中

$$C(\lambda) = B(\lambda)\cdot\lambda_4\langle\lambda_4\rangle^{s-2}\langle\lambda_1\rangle^{-s}\langle\lambda_2\rangle^{-s}\langle\lambda_3\rangle^{-s}$$

其中 $B(\lambda)$ 如（3.6）-（3.8）所示。

因此（5.1）归结为证明

$$S \lesssim \prod_{j=1}^{4} \|(a_{\lambda_j})\|_{l^2_{\lambda_j}}. \tag{5.4}$$

由于论证具有对称性，不妨设 $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3$。

若 $\lambda_3 \lesssim 1$，则

$$C(\lambda) \lesssim \lambda_4(\lambda_1\lambda_2)^{\frac{n}{2}} \lesssim \lambda_4(\lambda_1\lambda_2\lambda_3)^{\frac{n}{3}}.$$

然后在 λ_1、λ_2、λ_3 和 λ_4 中应用柯西-施瓦茨不等式，得到

$$S \lesssim \sum_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4\lesssim 1} \lambda_4(\lambda_1\lambda_2\lambda_3)^{\frac{n}{3}} a_{\lambda_1}a_{\lambda_2}a_{\lambda_3}a_{\lambda_4} \lesssim \prod_{j=1}^{4} \|(a_{\lambda_j})\|_{l^2_{\lambda_j}}.$$

因此，我们假设 $\lambda_3 \gg 1$。考虑以下三种情况：

(i) $\lambda_1 \sim \lambda_2 \sim \lambda_3$,

(ii) $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \ll \lambda_3$,

(iii) $\lambda_1 \ll \lambda_2 \sim \lambda_3$。

5.1. **(i)：** $\lambda_1 \sim \lambda_2 \sim \lambda_3$。

5.1.1. $n = 1$。在这种情况下，我们有

$$C(\lambda) \sim \lambda_4\langle\lambda_4\rangle^{s-2}\lambda_3^{-1/2-3s}.$$

若 $\lambda_4 \lesssim 1$，则

$$S \lesssim \sum_{\lambda_4\lesssim 1,\ \lambda_1\sim\lambda_2\sim\lambda_3\gg 1} \lambda_4\lambda_3^{-1/2-3s} a_{\lambda_1}a_{\lambda_2}a_{\lambda_3}a_{\lambda_4} \lesssim \prod_{j=1}^{4} \|(a_{\lambda_j})\|_{l^2_{\lambda_j}}$$

条件是 $s > -1/6$。

若 $\lambda_4 \gg 1$，则

$$S \lesssim \sum_{\lambda_4\gg 1,\ \lambda_1\sim\lambda_2\sim\lambda_3\gg 1} \lambda_4^{s-1}\lambda_3^{-1/2-3s} a_{\lambda_1}a_{\lambda_2}a_{\lambda_3}a_{\lambda_4} \lesssim \prod_{j=1}^{4} \|(a_{\lambda_j})\|_{l^2_{\lambda_j}}$$

由 $-1/6 < s < 1$ 给出。在 $s \geqslant 1$ 的情形下，我们可以利用估计 $\lambda_4^{s-1}\lambda_3^{-1/2-3s} \lesssim \lambda_4^{-1}\lambda_3^{-3/2-2s}$ 得到所需的估计。

5.1.2. $n \geqslant 2$. 在这种情况下，我们有

$$C(\lambda) \sim \lambda_4 \langle \lambda_4 \rangle^{s-2} \lambda_3^{n-3/2-3s+3\delta}.$$

- 首先，假设 $\lambda_4 \lesssim 1$。那么

$$\mathcal{S} \lesssim \sum_{\lambda_4 \lesssim 1,\ \lambda_1 \sim \lambda_2 \sim \lambda_3 \gg 1} \lambda_4 \lambda_3^{n-3/2-3s+3\delta} a_{\lambda_1} a_{\lambda_2} a_{\lambda_3} a_{\lambda_4} \lesssim \prod_{j=1}^{4} \|(a_{\lambda_j})\|_{l^2_{\lambda_j}}$$

  provided $s > n/3 - 1/2 + (3/2)\delta$.
- Next, assume $\lambda_4 \gg 1$.
  - If $n \leqslant 4$ and $n/3 - 1/2 + (3/2)\delta < s < 1$, then

$$\mathcal{S} \lesssim \sum_{\lambda_4 \gg 1,\ \lambda_1 \sim \lambda_2 \sim \lambda_3 \gg 1} \lambda_4^{s-1} \lambda_3^{n-3/2-3s+3\delta} a_{\lambda_1} a_{\lambda_2} a_{\lambda_3} a_{\lambda_4} \lesssim \prod_{j=1}^{4} \|(a_{\lambda_j})\|_{l^2_{\lambda_j}}.$$

  - If $n \leqslant 4$ and $s \geqslant 1$, then

$$\mathcal{S} \lesssim \sum_{\lambda_4 \gg 1,\ \lambda_1 \sim \lambda_2 \sim \lambda_3 \gg 1} \lambda_4^{-\delta} \lambda_3^{n-5/2-2s+4\delta} a_{\lambda_1} a_{\lambda_2} a_{\lambda_3} a_{\lambda_4} \lesssim \prod_{j=1}^{4} \|(a_{\lambda_j})\|_{l^2_{\lambda_j}}$$

    since $n - 5/2 - 2s + 4\delta < -1/2 + 4\delta$.
  - If $n \geqslant 5$ and $s > n/2 - 5/4 + 4\delta$ (which implies $s \geqslant 1$), then it is clear that the proceeding estimate that $\mathcal{S}$ is summable.

5.2. **(ii):** $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \ll \lambda_3$. 这意味着 $\lambda_3 \sim \lambda_4$。

5.2.1. $n = 1$. 在这种情况下，我们有

$$C(\lambda) \sim B(\lambda) \langle \lambda_1 \rangle^{-s} \langle \lambda_2 \rangle^{-s} \lambda_3^{-1}$$

- 如果 $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \lesssim 1$，那么我们可以使用估计 $C(\lambda) \sim (\lambda_1\lambda_2)^{1/2} \lambda_3^{-1}$来对 $\mathcal{S}$求和。
- 如果 $\lambda_1 \lesssim 1$、$\lambda_2 \gg 1$，那么只要满足 $s > -1/2$，我们就可以使用估计 $C(\lambda) \sim (\lambda_1\lambda_2)^{1/2} \lambda_2^{-s} \lambda_3^{-1} \lesssim \lambda_1^{1/2} \lambda_2^{-1/2-s}$ 来对 $\mathcal{S}$ 求和。
- 若 $1 \ll \lambda_1 \leqslant \lambda_2$，我们可以取 $B(\lambda) \sim (\lambda_2\lambda_3)^{-1/4}$，因此 $C(\lambda) \sim \lambda_1^{-3/4-s} \lambda_2^{-3/4-s}$。所以，只要 $s > -3/4$，$\mathcal{S}$ 就可求和。

5.2.2. $n \geqslant 2$。在这种情况下，我们有

$$C(\lambda) \lesssim \lambda_1^{\frac{n}{2}} \langle \lambda_1 \rangle^{-s} \lambda_2^{\frac{n}{2}-1+2\delta} \langle \lambda_2 \rangle^{-s} \lambda_3^{-\frac{3}{2}+\delta}.$$

- 若 $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \lesssim 1$，则 $C(\lambda) \sim \lambda_1^{n/2} \lambda_2^{n/2-1+2\delta} \lambda_3^{-3/2+\delta}$。因此，$\mathcal{S}$ 可求和，故（5.4）成立。
- 若 $\lambda_1 \lesssim 1$、$\lambda_2 \gg 1$，则 $C(\lambda) \lesssim \lambda_1^{n/2} \lambda_2^{n/2-5/2-s+3\delta}$，因此只要 $s > n/2 - 5/2 + 3\delta$，$\mathcal{S}$ 就可求和。
- 若 $1 \ll \lambda_1 \leqslant \lambda_2$，则 $C(\lambda) \lesssim \lambda_1^{n/2-s} \lambda_2^{n/2-5/2-s+3\delta}$，因此只要满足 $s > n/2$，$\mathcal{S}$ 就可求和。另一方面，在 $s \leqslant n/2$ 的情况下，我们有 $C(\lambda) \lesssim \lambda_1^{-\delta} \lambda_2^{n-5/2-2s+4\delta}$，所以只要满足 $s > n/2 - 5/4 + 4\delta$，$\mathcal{S}$ 就可求和。

5.3. **（iii）：** $\lambda_1 \ll \lambda_2 \sim \lambda_3$。

5.3.1. $n = 1$。

(a) 子情形：$\lambda_4 \sim \lambda_3$。在这种情况下，我们有

$$C(\lambda) \sim B(\lambda)\langle\lambda_1\rangle^{-s}\lambda_3^{-1-s}.$$

- 若 $\lambda_1 \lesssim 1$，则取 $B(\lambda) \sim \lambda_1^{1/2}\lambda_3^{-1/4}$，因此可使用估计 $C(\lambda) \sim \lambda_1^{1/2}\lambda_3^{-5/4-s}$ 在 $s > -5/4$ 时对 $\mathcal{S}$ 求和。
- 若 $\lambda_1 \gg 1$，则则取 $B(\lambda) \sim (\lambda_2\lambda_3)^{-1/4}$，因此可使用估计 $C(\lambda) \lesssim \lambda_1^{-3/4-s}\lambda_3^{-3/4-s}$ 在 $s > -3/4$ 的条件下对 $\mathcal{S}$ 求和。

(b) 子情形：$\lambda_4 \ll \lambda_3$。在这种情况下，我们有

$$C(\lambda) \sim \lambda_4\langle\lambda_4\rangle^{s-2}\langle\lambda_1\rangle^{-s}\lambda_3^{-1/2-2s}$$

其中我们取 $B(\lambda) \sim (\lambda_2\lambda_3)^{-1/4} \sim \lambda_3^{-1/2}$。

- 若 λ_4、$\lambda_1 \lesssim 1$，则我们忽略 $\langle\lambda_4\rangle^{s-2}$ 和 $\langle\lambda_1\rangle^{-s}$，以便在$s > -1/4$的条件下对 $\mathcal{S}$ 求和。
- 若 $\lambda_4 \lesssim 1$和 $\lambda_1 \gg 1$，则 $C(\lambda) \sim \lambda_4\lambda_1^{-s}\lambda_3^{-1/2-2s} \lesssim \lambda_4\lambda_1^{-1/6-s}\lambda_3^{-1/3-2s}$，因此对于 $s > -1/6$，可以对 $\mathcal{S}$ 求和。
- 若 $\lambda_4 \gg 1$ 和 $\lambda_1 \lesssim 1$，则 $C(\lambda) \sim \lambda_4^{s-1}\lambda_3^{-1/2-2s}$。如果 $s > -1/4$，则可利用这一点对 $\mathcal{S}$ 求和。
- 最后，若 λ_4、$\lambda_1 \gg 1$，则 $C(\lambda) \sim \lambda_4^{s-1}\lambda_1^{-s}\lambda_3^{-1/2-2s} \lesssim \lambda_4^{s-1}\lambda_1^{-1/6-s}\lambda_3^{-1/3-2s}$，因此对于 $s > -1/6$，可以很容易地对 $\mathcal{S}$ 求和。

5.3.2. $n \geqslant 2$。

子情形：$\lambda_4 \sim \lambda_3$。在这种情况下，我们有

$$C(\lambda) \sim \lambda_1^{\frac{n}{2}}\langle\lambda_1\rangle^{-s}\lambda_3^{\frac{n}{2}-\frac{5}{2}-s+3\delta}$$

- 若 $\lambda_1 \lesssim 1$，则可以忽略 $\langle\lambda_1\rangle^{-s}$，因此 $\mathcal{S}$ 在 $s > n/2-5/2+3\delta$ 条件下可求和。
- 若 $\lambda_1 \gg 1$，则 $C(\lambda) \sim \lambda_1^{n/2-s}\lambda_3^{n/2-5/2-s+3\delta}$，因此在 $s > n/2$ 条件下 $\mathcal{S}$ 可求和。另一方面，若 $s \leqslant n/2$，则有 $C(\lambda) \sim \lambda_1^{-\delta}\lambda_3^{n-5/2-2s+4\delta}$，因此在 $s > n/2-5/4+4\delta$ 条件下 $\mathcal{S}$ 可求和。

子情形：$\lambda_4 \ll \lambda_3$。在这种情况下，我们有

$$C(\lambda) \sim \lambda_4\langle\lambda_4\rangle^{s-2}\lambda_1^{\frac{n}{2}}\langle\lambda_1\rangle^{-s}\lambda_3^{\frac{n}{2}-\frac{3}{2}-2s+3\delta}.$$

- 若 λ_4、$\lambda_1 \lesssim 1$，则忽略 $\langle\lambda_4\rangle^{s-2}$ 和 $\langle\lambda_1\rangle^{-s}$，因此只要满足 $s > (n-3)/4$，就可以对 $\mathcal{S}$ 求和。
- 若 $\lambda_4 \lesssim 1$ 且 $\lambda_1 \gg 1$，则 $C(\lambda) \sim \lambda_4\lambda_1^{n/2-s}\lambda_3^{n/2-3/2-2s+3\delta}$，因此只要满足 $s > n/2$，就可以对 $\mathcal{S}$求和。
  另一方面，若 $s \leqslant n/2$，则 $C(\lambda) \lesssim \lambda_4\lambda_1^{-\delta}\lambda_3^{n-3/2-3s+4\delta}$。因此，当 $s > n/3-1/2+(4/3)\delta$时，可以对$\mathcal{S}$ 求和。
- 若 $\lambda_4 \gg 1$ 且 $\lambda_1 \lesssim 1$，则 $C(\lambda) \sim \lambda_4^{s-1}\lambda_1^{n/2}\lambda_3^{n/2-3/2-2s+3\delta}$。现在，若 $n \leqslant 4$ 且 $(n-3)/4 < s < 1$，则可以对 $\mathcal{S}$ 求和。在 $n \leqslant 4$ 且$s \geqslant 1$的情况下，我们有

$$C(\lambda) \lesssim \lambda_4^{-\delta}\lambda_1^{n/2}\lambda_3^{n/2-5/2-s+4\delta} \lesssim \lambda_4^{-\delta}\lambda_1^{n/2}\lambda_3^{-3/2+4\delta},$$

因此可以对 S 求和。

在 $n \geqslant 5$ 且 $s > n/2 - 5/4 + 4\delta$ （这意味着 $s > 1$）的情况下，我们可以利用估计 $C(\lambda) \lesssim \lambda_4^{-\delta}\lambda_1^{n/2}\lambda_3^{n/2-5/4-s+4\delta}$ 对 S 求和。

- 最后，如果 λ_4，$\lambda_1 \gg 1$，那么 $C(\lambda) \sim \lambda_4^{s-1}\lambda_1^{n/2-s}\lambda_3^{n/2-3/2-2s+3\delta}$，因此对于 $s > n/2$，可以很容易地对 S 求和。

另一方面，如果 $1 \leqslant s \leqslant n/2$，那么我们使用 $C(\lambda) \sim \lambda_4^{-\delta}\lambda_1^{-\delta}\lambda_3^{n-5/2-2s+5\delta}$ 对 S 求和，前提是 $s > n/2 - 5/4 + 5\delta$。

若 $s < 1$，则我们使用 $C(\lambda) \sim \lambda_4^{s-1}\lambda_1^{-\delta}\lambda_3^{n-3/2-3s+4\delta}$ 总结 S，前提是 $s > n/3 - 1/2 + 4\delta$。

结论： 由情形 (i)、(ii) 和 (iii)，我们得出估计式 (5.4) 成立，前提是

$$s > \max\left(n/3-1/2,\ n/2-5/2,\ n/2-5/4,\ n/4-3/4\right) = \begin{cases} n/3-1/2, & \text{for} \quad 2 \leqslant n \leqslant 4, \\ n/2-5/4, & \text{for} \quad n \geqslant 5. \end{cases}$$

类似地，在情形 $n = 1$ 下，(5.4) 成立，前提是

$$s > -1/6.$$

6. 解析性

本节中，我们通过空间 $H^{\sigma,2}(\mathbb{R})$证明定理 3 中所述解的解析性。

如前所述， $H^s(\mathbb{R})$ 中的局部存在性意味着 (1.4) 在 $H^{\sigma,2}(\mathbb{R})$ 中局部适定。我们首先证明这一点。

对 $\cosh(\sigma|D|)$ 式（3.1）应用 $H^2(\mathbb{R})$-范数，并对等式两边取范数，由 $|D|^3 S_m(t) \lesssim 1$ 可知

$$\text{上确界}_{t\in[0,T]} \left(\|u(t)\|_{H^{\sigma,2}(\mathbb{R})} + \|u_t(t)\|_{H^{\sigma,-1}(\mathbb{R})}\right) \lesssim \|u_0\|_{H^{\sigma,2}(\mathbb{R})} + \|u_1\|_{H^{\sigma,-1}(\mathbb{R})} + \int_0^T \|u^3(s)\|_{H^{\sigma,-1}(\mathbb{R})}\,ds$$

对于某个 $T > 0$。现在令 $U = e^{\sigma|D|}u$，由 Plancherel 等式和 Sobolev嵌入可得

$$\begin{aligned} \left\| e^{\sigma|D|}\left(e^{-\sigma|D|}U\right)^3 \right\|_{L^2(\mathbb{R})} &= \left\| \int_{\xi=\xi_1+\xi_2+\xi_3} e^{\sigma(|\xi|-|\xi_1|-|\xi_2|-|\xi_3|)} \prod_{j=1}^{3} \hat{U}(\xi_j)\, d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\leqslant \left\| V^3 \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\lesssim \|V\|_{L^6(\mathbb{R})}^3 \\ &\lesssim \|V\|_{H^2(\mathbb{R})}^3 \lesssim \|U\|_{H^2(\mathbb{R})}^3, \end{aligned}$$

其中 $V = (\widehat{|U|})^\vee$。这意味着

$$\left\| u^3 \right\|_{G^{\sigma,0}(\mathbb{R})} \lesssim \|u\|_{G^{\sigma,2}(\mathbb{R})}^3,$$

若 $n \leqslant 4$。因此，可推出方程（1.4）在 $H^{\sigma,2}(\mathbb{R}) \times H^{\sigma,-1}(\mathbb{R})$ 中的局部适定性。

现在，对于方程 $u(t)$ （1.4）的局部解，我们定义 $v_\sigma(t) = 双曲余弦(\sigma|D|)u(t)$ 以及修正能量

$$E_\sigma(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}(v_\sigma)_t|^2 + |v_\sigma|^2 + \beta|\nabla v_\sigma|^2 + |\Delta v_\sigma|^2 dx + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}} |v_\sigma|^4 dx \quad (6.1)$$

由（1.4）可直接得出

$$E_\sigma(t) = E_\sigma(0) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (v_\sigma)_t \left(f(v_\sigma) - \cosh(\sigma|D|)f(\operatorname{sech}(\sigma|D|)v_\sigma)\right) dx,$$

其中 $f(v) = v^3$。

以下引理给出了定理证明中的主要估计 m 3.

引理 11. 设 $f(v) = v^3$。对于 $(v_\sigma)_t \in L^2(\mathbb{R})$ 和 $v_\sigma \in H^2(\mathbb{R})$，有

$$\left|\int_{\mathbb{R}} (v_\sigma)_t \left(f(v_\sigma) - \cosh(\sigma|D|)f(\operatorname{sech}(\sigma|D|)v_\sigma)\right) dx\right| \lesssim \sigma^2 \|v_\sigma\|^3_{H^2(\mathbb{R})} \left\||D|^{-1}(v_\sigma)_t\right\|_{L^2(\mathbb{R})}. \quad (6.2)$$

证明。 首先注意到

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} (v_\sigma)_t \left(v_\sigma^3 - \cosh(\sigma|D|)(\operatorname{sech}(\sigma|D|)v_\sigma)^3\right) dx \\
&\lesssim \||D|^{-1}(v_\sigma)_t\|_{L^2(\mathbb{R})} \left\||D|\left(v_\sigma^3 - \cosh(\sigma|D|)(\operatorname{sech}(\sigma|D|)v_\sigma)^3\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\lesssim \||D|^{-1}(v_\sigma)_t\|_{L^2(\mathbb{R})} \underbrace{\left\||\xi| \int_{\xi=\sum_{j=1}^3 \xi_j} \left(1 - \cosh(\sigma|\xi|)\prod_{j=1}^3 \operatorname{sech}(\sigma|\xi_j|)\right) \prod_{j=1}^3 \widehat{v_\sigma}(\xi_j) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3\right\|_{L^2(\mathbb{R})}}_{:=J}.
\end{aligned}$$

为了估计 J，我们需要用到 [10, 引理 3]中的以下估计：

$$\xi = \sum_{j=1}^p \xi_j \quad \Rightarrow \quad \left|1 - \cosh|\xi| \prod_{j=1}^p \operatorname{sech}|\xi_j|\right| \leqslant 2^p \sum_{j\neq k=1}^p |\xi_j||\xi_k| \qquad (2 \leqslant p \in \mathbb{N}). \quad (6.3)$$

由对称性，不妨设 $|\xi_1| \leqslant |\xi_2| \leqslant |\xi_3|$，从而有 $|\xi| \leqslant 3|\xi_3|$。因此，记 $w_\sigma = \mathcal{F}_x^{-1}(|\widehat{v_\sigma}|)$，由 Plancherel恒等式、Hölder 不等式和 Sobolev嵌入可得

$$\begin{aligned}
J &\lesssim \sigma^2 \left\|\int_{\xi=\sum_{j=1}^3 \xi_j} \widehat{w_\sigma}(\xi_1)\cdot|\xi_2|\widehat{w_\sigma}(\xi_2)\cdot|\xi_3|^2\widehat{w_\sigma}(\xi_3)\, d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\lesssim \sigma^2 \left\|w_\sigma \cdot |D| w_\sigma \cdot |D|^2 w_\sigma\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\lesssim \sigma^2 \|w_\sigma\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \||D| w_\sigma\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \left\||D|^2 w_\sigma\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\lesssim \sigma^2 \|v_\sigma\|^3_{H^2(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

□

现在我们可以完成定理 3 的证明了。

由引理 11 以及 E_σ 的定义可得

$$E_\sigma(t) \leqslant E_\sigma(0) + CT\sigma^2 \||D|^{-1}(v_\sigma)_t\|_{L^\infty_T L^2(\mathbb{R})} \|v_\sigma\|^3_{L^\infty_T H^2(\mathbb{R})}$$

对所有 $0 \leqslant t \leqslant T$均成立。现在，若 T是局部存在时间，则有

$$\begin{aligned}\|v_\sigma\|_{L^\infty_T H^2(\mathbb{R})} + \||D|^{-1}(v_\sigma)_t\|_{L^\infty_T L^2(\mathbb{R})} &\leqslant C\left[\|v_\sigma(\cdot,0)\|_{L^\infty_T H^2(\mathbb{R})} + \||D|^{-1}\partial_t v_\sigma(\cdot,0)\|_{L^\infty_T L^2(\mathbb{R})}\right] \\ &\leqslant C\sqrt{E_\sigma(0)}.\end{aligned}$$

因此，

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} E_\sigma(t) \leqslant E_\sigma(0) + CT\sigma^2 \left[E_\sigma(0)\right]^{\frac{p+1}{2}}.$$

最终可得，当 $t \to +\infty$时，渐近衰减率 $\sigma \sim 1/\sqrt{t}$。

致谢

A. E. 受纳扎尔巴耶夫大学 2023—2025 年教师发展竞争性研究资助计划资助（资助编号：20122022FD4121）。A. T. 受纳扎尔巴耶夫大学 2022—2024 年教师发展竞争性研究资助计划资助：材料科学中的非线性偏微分方程（参考编号：*11022021FD2929*）

参考文献

[1] R.F. Barostichi, R.O. Figueira, A.A. Himonas, 《“良性”Boussinesq方程在解析 Gevrey 空间中的适定性与时间正则性》, J. Diff. Equations 267 (2019) 3181–3198。[2] J.L. Bona, Z. Gruji´c, H. Kalisch, 《广义 KdV 方程空间解析性一致半径的代数下界》, 《亨利·庞加莱年刊》非线性分析 22 (2005) 783–797。[3] J. Boussinesq, 《波与涟漪沿水平矩形水道传播的理论：使水道中连续液体从表面到底部的速度大致相同》, J. Math. Pures Appl. 17 (1872年) 55–108。[4] J.-Y. Chemin, 《完美不可压流体》, 牛津大学出版社，牛津，1998。[5] C.I. Christov, G.A. Maugin, M.G. Velarde, 《具有纯空间高阶导数的适定 Boussinesq 范式》, Phys Rev E. 54 (1996) 3621–3638。[6] Y. Cho, T. Ozawa, 《广义 Boussinesq 方程的小振幅解》, Discrete Contin. Dynam. Systems 17 (2007) 691–711。[7] Y. Cho, S. Lee, 《球坐标中的 Strichartz 估计》, Indiana Univ. Math. J. 62 (2013) 991–1020。[8] P. Daripa, W. Hu, 《求解水波与非线性晶格中出现的病态 Boussinesq 方程的一种数值方法》, Appl. Math. Comput. 101 (1999) 159–207。[9] T. Deneke, T.T. Dufera, A. Tesfahun, 《水波型线性化方程的色散估计》, 载于 $\mathbb{R}^d$。《即将在《亨利·庞加莱年刊》发表（arXiv:2106.02717）。[10] T. Deneke, S. Mebrate, A. Tesfahun, 《梁方程空间解析性的保持性》, J. Math. Anal. Appl. 509 (2022) 126001。[11] A. Esfahani, L.G. Farah, 《六阶 Boussinesq 方程的局部适定性》, J. Math. Anal. Appl., 385 (2012) 230–242。[12] A. Esfahani, L.G. Farah, H. Wang, 《广义六阶 Boussinesq 方程的整体存在性与爆破》, Nonlinear Anal. 75 (2012) 4325–4338。[13] A. Esfahani, S. Levandosky, 《广义高阶 Boussinesq 方程孤立波的稳定性》, J. Dyn. Differ. Equ. 24 (2012) 391–425。[14] A. Esfahani, H. Wang, 《一个应用于六阶 Boussinesq 方程的双线性估计》, Diff. Int. Equations 27 (2014) 401–414。[15] L.G. Farah, 《Sobolev 空间中的局部解及广义 Boussinesq 方程的无条件适定性》, Commun. Pure Appl. Anal. 8 (2009) 1521–1539。

[16] C. Foias, R. Temam, 《Navier-Stokes方程解的 Gevrey类正则性》, J. Funct. Anal. 87 (1989) 359–369。[17] D. Geba, A. Himonas, D. Karapetyan, 《广义 Boussinesq 方程的病态性结果》, Nonlinear Anal. 95 (2014) 404–413。[18] D.-A. Geba, E. Witz, 《散焦六阶Boussinesq方程适定性的改进整体结果》, Nonlinear Anal. 191 (2020) 1–16。[19] D.-A. Geba, E. Witz, 《改进的双线性薛定谔估计及其在广义 Boussinesq 方程中的应用》, Elec. Research Arch. 28 (2020) 627–649。[20] Z. Guo, L. Peng, B. Wang, 《一类波动方程的衰减估计》, J. Funct. Anal. 254 (2008) 1642–1660。[21] Z. Gruji´c, H. Kalisch, 《广义Korteweg-de Vries方程在解析函数空间中的局部适定性》, Differ Integral Equ. 15 (2002) 1325–1334。[22] N. Hayashi, 《非线性薛定谔方程小解析解的整体存在性》, Duke Math. J. 60 (1990) 717–727。[23] Y. Katznelson, 《调和分析导论》, 修订版, Dover Publications, Inc., 纽约, 1976。[24] N. Kishimoto, 《"良性"Boussinesq 方程的尖锐局部适定性》, J. Differ. Equ. 254 (2013) 2393–2433。[25] N. Kishimoto, K. Tsugawa, 《二次非线性薛定谔方程与"良性"Boussinesq 方程的局部适定性》, Diff. Int. Equations 23 (2010) 463–493。[26] F. Linares, G. Ponce, 《非线性色散方程导论》, 第二版, Springer, 纽约, 2015。[27] G.A. Maugin, 《弹性晶体中的非线性波》, 牛津: 牛津大学出版社, 1999。[28] S. Selberg, A. Tesfahun, 《一维 Dirac-Klein-Gordon方程空间解析性的半径》, J. Differ. Equations 259 (2015) 4732–4744。[29] E.M. Stein, 《调和分析: 实变量方法、正交性与振荡积分》, 普林斯顿数学丛书, 第43卷, 普林斯顿大学出版社, 新泽西州普林斯顿, 1993。[30] S. Selberg, 《非线性色散偏微分方程解的空间解析性》, 《非线性偏微分方程、数理物理与随机分析》, 437–454, EMS Ser. Congr. Rep., 欧洲数学会, 苏黎世, 2018。[31] S. Selberg, 《二维空间中 Dirac-Klein-Gordon 方程解的空间解析性半径》, 《亨利·庞加莱年刊》非线性分析 36 (2019) 1311–1330。[32] T. Tao, 《多线性加权卷积》, L^2 函数及其在非线性色散方程中的应用, Amer. J. Math. 123 (2001) 839–908。[33] T. Tao, 《非线性色散方程》, CBMS Reg. Conf. Ser. Math. 106, AMS, 罗得岛州普罗维登斯, 2006。[34] S.K. Turitsyn, 《不稳定孤子与波坍缩的尖锐判据》, Phys. Rev. E 47 (1993) R13。[35] H. Wang, A. Esfahani, 《六阶 Boussinesq 方程的整体粗糙解》, Nonlinear Anal. 102 (2014) 97-104。[36] H. Wang, A. Esfahani, 《六阶 Boussinesq 方程柯西问题解的极限行为》, 《应用数学学报》176 1–19。[37] Y.-Z. Wang, W. Li, 《调制空间框架下六阶 Boussinesq 型方程解的适定性与散射》, Math Meth Appl Sci. 43 (2020) 5507–5521。[38] V.E. Zakharov, 《一维非线性振子链的随机化》, Sov. Phys. JETP 38 (1974) 108–110。

纳扎尔巴耶夫大学数学系, 哈萨克斯坦努尔苏丹 010000电子邮箱地址: saesfahani@gmail.com, amin.esfahani@nu.edu.kz

纳扎尔巴耶夫大学数学系, 哈萨克斯坦努尔苏丹010000电子邮箱地址: achenef.tesfahun@nu.edu.kz