arXiv:2302.00889v1 [math.CV] 2 Feb 2023

与抛物区域相关的一类非单叶函数

MRIDULA MUNDALIA 和 S. SIVAPRASAD KUMAR

Abstract. 在本研究中，我们引入并研究了一类解析函数的几何性质，该类函数与一个主要位于左半平面的抛物区域相关。进一步地，我们为所研究的函数类建立了半径结果和主控结果，并通过图示说明了其中一些特殊情形。此外，我们还为所考虑的函数类推导出了一些充分条件。

1. Introduction

设 $\mathcal{A}$ 为定义在开单位圆盘 $\mathbb{D} = \{z$ 上的解析函数 $f(z)$ 类: $|z|< 1\}$，其归一化条件为 $f(0) = 0$ 且 $f'(0) = 1.$ 。设 $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$ 为单叶函数类。令 $f(z)$ 和 $g(z)$ 为两个解析函数，则称 $f(z)$ 从属于 $g(z)$，记作 $f \prec g$，如果存在开单位圆盘 $\mathbb{D}$ 中的施瓦茨函数 $w(z)$，满足 $w(0) = 0$，使得 $f(z) = g(w(z))$。此外，如果 $g(z)$ 在 $\mathbb{D}$ 中是单叶的，则 $f \prec g$ 当且仅当 $f(\mathbb{D}_r) \subset g(\mathbb{D}_r)$，其中 $\mathbb{D}_r = \{z : |z|< r < 1\}.$ 。回顾一下，如果函数 $f \in \mathcal{A}$ 满足 $f(\mathbb{D})$ 关于 0 为星形，则称其为星形函数。从解析角度看，如果函数 $f \in \mathcal{A}$ 为星形函数，则

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \frac{1+z}{1-z}.$$

我们将此类记为 $\mathcal{S}^*.$ 。Ma 和 Minda [17] 通过用更一般的函数 $\phi(z)$ 替换超函数 $(1+z)/(1-z)$，为各种星形函数子类给出了统一的表示，相应的类记为 $\mathcal{S}^*(\phi)$。这里， $\phi(z)$ 的选取满足：它是单叶的，关于 $\phi(0)$ 星形，且 $\operatorname{Re}\phi(z) > 0$ ，其中 $\phi'(0) > 0$；此外， $\phi(\mathbb{D})$ 关于实轴对称。此前已有若干 Ma-Minda 子类得到研究（见表1）。与 $\mathcal{S}^*(\phi)$ 相比，Uralegaddi [28]引入并研究了类

$$\mathcal{M}(\beta) = \{f \in \mathcal{A} : \operatorname{Re}(zf'(z)/f(z)) < \beta,\ \beta > 1\}.$$

注意， $\mathcal{M}(\beta) \not\subseteq \mathcal{S}^*$ 也包含非单叶函数。2006年，Ravichandran 等[25] 计算了类 $\mathcal{M}(\beta)$ 的星形半径。受上述类的启发，Kumar 等人 [15] 对包含非单叶函数的类 $\mathcal{F}(\psi)$ 进行了系统研究，该类定义如下:

$$\mathcal{F}(\psi) := \left\{ f \in \mathcal{A} : \frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \prec \psi(z) \right\},$$

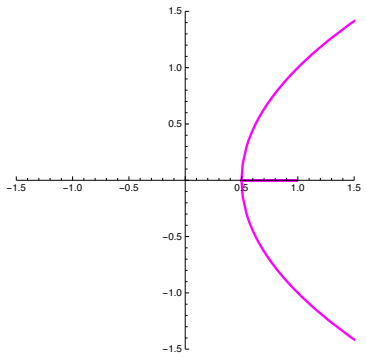
其中， $\psi(z)$ 是一个解析单叶函数，使得 $\psi(\mathbb{D})$ 关于 0 星形，且$\psi(0) = 0.$一般而言， $\mathcal{F}(\psi) \not\subseteq \mathcal{S}^*(\phi)$。 此外，若 $\phi(z) = 1+\psi(z) \prec (1+z)/(1-z)$， 则 $\mathcal{F}(\psi)$ 化为 $\mathcal{S}^*(1+\psi)$。 下面列出在上述函数类中所考虑的函数 $\psi_i(z)$ $i = 1, \ldots, 4,$

2010 *Mathematics Subject Classification.* 30C45, 30C80.*Key words and phrases.* 单叶函数、星形函数、对数函数、半径问题、微分不等式。第一作者Ídðsu德里理工大学（新德里）的资助。1

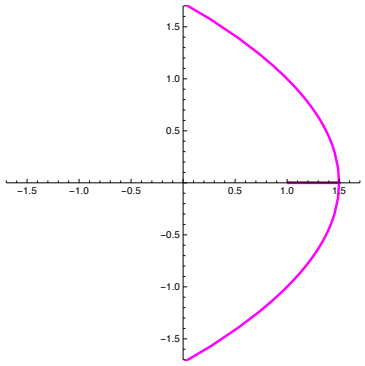
的背景下的 $\mathcal{F}(\psi)$ 类，

$$\psi_i(z) = \begin{cases} \gamma z(1+\eta z)^{-2} & , i = 1 \\ z(1-\alpha z^2)^{-1} & , i = 2 \\ z(1-z)^{-1}(1+\beta z)^{-1} & , i = 3 \\ (A-B)^{-1}\log((1+Az)/(1+Bz)) & , i = 4, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $A = \alpha e^{i\tau}$、$B = \alpha e^{-i\tau}$满足 $\tau \in (0, \pi/2]$，且 α、β、$\eta \in (0, 1]$、$\gamma > 0$（见 [12, 15, 16, 19]）。Kumar 和 Gangania 在 [15], 中引入了类 $\mathcal{S}_\gamma(\eta) = \mathcal{F}(\psi_1)$，并求得了星形半径。Cho 等人 [2] 研究了类 $\mathcal{BS}(\alpha) = \mathcal{F}(\psi_2)$ 的一些尖锐半径问题。事实上，Masih 等人 [19] 研究了类 $\mathcal{S}_{cs}(\beta) = \mathcal{F}(\psi_3)$，其中 $0 \le \beta < 1$，讨论了增长定理，并为 $0 \le \beta \le 1/2$. 建立了对数系数的尖锐估计。此外，对于 $1/2 < \beta \le 1$，类 $\mathcal{S}_{cs}(\beta)$ 包含非单叶函数；事实上，对于 $0 \le \beta \le 1/2$ ，类$\mathcal{S}_{cs}(\beta) \subset \mathcal{S}^*$.。2022年，Kumar 等人 [16]引入了类 $\mathcal{F}(A, B) = \mathcal{F}(\psi_4)$，并建立了一些半径结果。



(A)



(B)

FIGURE 1. 展示以同一焦点 (1,0) 为焦点的不同抛物线的图形 (a) $1 + \mathcal{P}_{0,\pi}(\partial\mathbb{D})$, (b) $1 + \mathcal{P}_{0,0}(\partial\mathbb{D})$.

主要受上述类和观察结果的启发，我们现在研究一个包含非单叶函数的 $\mathcal{A}$ 子类。对于 $\tau, \theta \in (-\pi, \pi]$, 该变换

$$\omega = ((2e^{i\theta/2}\sqrt{2}/\pi)(\tan^{-1}(e^{i(\tau-\pi/2)}\sqrt{z})))^2$$

将 $\mathbb{D}$ 的边界映射到一条抛物线上（见**图 1**），其方程为

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\tau,\theta}(z) &:= \frac{2e^{i(\theta+\pi)}}{\pi^2}\left(\log\left(\frac{1+e^{i\tau}\sqrt{z}}{1-e^{i\tau}\sqrt{z}}\right)\right)^2 \\ &= \frac{8e^{i(\theta+\pi)}}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e^{2i\tau n}}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2k+1}\right)z^n, \end{aligned}$$

其中，选择 $\sqrt{z}$ 的分支，使得 $\mathrm{Im}\,\sqrt{z} \ge 0$. 。注意，函数 $\mathcal{P}_{\tau,\,\theta}(z)$ 在 $\mathbb{D}$ 中是单叶的，而 $1 + \mathcal{P}_{0,\,\pi}(z)$（见**图 1(a)**）是由 Ma-Minda [18] 和 Ronning [26], 独立引入的抛物函数，他们将其广泛用于抛物型星形函数的研究（见 [10, 26]）。此外，Kanas[11] 讨论了一些微分从属技巧，随后研究了涉及$1 + \mathcal{P}_{0,\,\pi}(z)$。 的容许性结果 [9] 。注意，函数 $\mathcal{P}_{0,\,0}(z)$ 的边界是一条开口朝向左半平面的水平抛物线（见**图 1(b)**）。在本研究中，我们在非单叶函数的背景下考察函数 $1 + \mathcal{P}_{0,\,0}(z)$, ，这与 Ronning、Ma-Minda 和 Kanas 处理抛物区域的方式（见[9, 11, 18, 26]）截然不同。显然， τ 和 θ 的其他取值会导出斜抛物

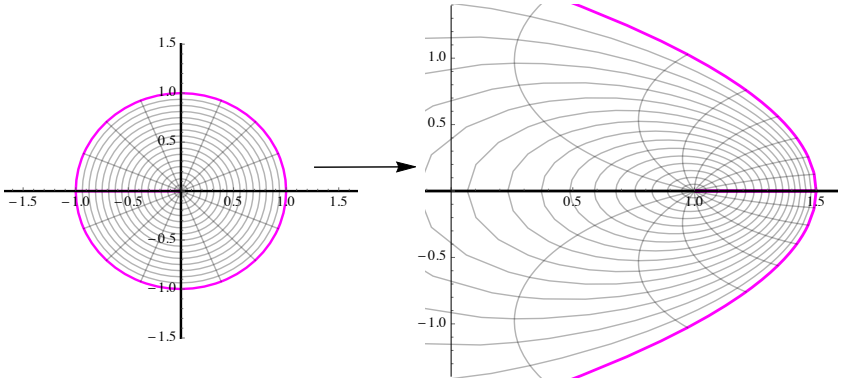


FIGURE 2. 开单位圆盘 $\mathbb{D}$ 在映射 $\mathcal{LP}(z)$下的像。

区域，这超出了本研究的范围，因此此处不予讨论，因为这类情况需要采用不同的处理方式。

为简洁起见，设 $\mathcal{P}_0(z) := \mathcal{P}_{0,\ 0}(z)$ 且 $\mathcal{LP}(z) := 1 + \mathcal{P}_0(z)$，则水平抛物区域$\mathcal{LP}(z)$（见**图** 2）由下式给出

$$\Omega_{\mathcal{LP}} := \{\omega \in \mathbb{C} : (\operatorname{Im}\omega)^2 < 3 - 2\operatorname{Re}\omega \text{ or } |1-\omega| < 2 - \operatorname{Re}\omega\}.$$

由于上述区域的大部分位于左半平面，因此有必要求出定义域圆盘的最优半径，使其能被完全映射到右半平面。下面我们定义一个由非单叶函数组成的解析函数类。

De定义 1.1. 设类 $\mathcal{F}_{\mathcal{LP}}$ 由满足从属关系的函数 $f \in \mathcal{A}$ 组成 n

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \mathcal{LP}(z) = 1 - \frac{2}{\pi^2}\left(\log\left(\frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}}\right)\right)^2.$$

注意，若 $f_0 \in \mathcal{F}_{\mathcal{LP}}$，则可表示为

$$f_0(z) = z\left(\exp\int_0^z \frac{\mathcal{P}_0(t)}{t}dt\right), \tag{1.2}$$

它在许多半径结果中充当极值函数。显然，星形函数子类$\mathcal{S}^*_{SG}$， $\mathcal{S}^*_{\mathcal{RL}}$ 和 $\mathcal{SL}^*(\alpha)$ $(0 \le \alpha < 1)$（见表1）均包含于 $\mathcal{F}_{\mathcal{LP}}$，不过 $\mathcal{F}_{\mathcal{LP}} \not\subseteq \mathcal{S}$. 在第2节中，我们考察函数 $\mathcal{LP}(z)$ 的一些几何性质。

2. MAIN RESULTS

2.1. 函数的几何性质 $\mathcal{LP}(z)$。 在引理 2.1 中，我们给出了函数 $\mathcal{P}_0(z)$ 实部的最大值和最小值界。

引理 2.1。 设 $z \in \mathbb{D}_r = \{z : |z| = r\}$，则对于每个 $0 \le r < 1$ 和 $\alpha \in (-\pi、\ \pi]$，有

$$\mathcal{P}_0(r) \le \operatorname{Re}\mathcal{P}_0(re^{i\alpha}) \le \mathcal{P}_0(-r).$$

证明。 假设 $z = re^{i\alpha}$， 其中 $-\pi < \alpha \leq \pi$， 则对于 $|z| = r < 1$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(\mathcal{P}_0(z)) &= -\frac{2}{\pi^2}\left\{\mathrm{Re}\left(\log\left(\frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}}\right)\right)^2\right\}\\ &= -\frac{2}{\pi^2}\left(\log\left(\sqrt{\frac{\mu_1(r,c)}{\mu_2(r,c)}}\right)\right)^2 + \frac{2}{\pi^2}\left(\tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{1-c^2}\sqrt{r}}{1-r}\right)\right)^2\\ &=: \mathcal{G}(r,c).\end{aligned}$$

其中 $c := \cos(\alpha/2)$ 且

$$\mu_i(r,c) := \begin{cases} 1+r+2c\sqrt{r}, & i=1,\\ 1+r-2c\sqrt{r}, & i=2.\end{cases}$$

注意到 $c \in [-1,1]$, 事实上，容易验证 $\partial\mathcal{G}(r,\ c)/\partial c = 0$ 当且仅当 $c = 0$，此外$\partial^2\mathcal{G}(r,\ 0)/\partial c^2 < 0$，由此得到

$$\max_{c\in[-1,1]} \mathcal{G}(r,c) = \mathcal{G}(r,0) = \mathcal{P}_0(-r) = 1 + \frac{2}{\pi^2}\left(\tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{r}}{1-r}\right)\right)^2. \tag{2.1}$$

此外，对于每个 $R \leq r < 1$，方程 (2.1) 得出 $\mathcal{G}(r,\ 0) \geq \mathcal{P}_0(r) = \mathcal{G}(r,\ 1)$。由于 $\mathcal{G}(r,\ 0)$ 是递增函数，而 $\mathcal{G}(r,\ 1)$ 是关于 r，的递减函数，因此得到不等式 $\mathcal{G}(r,\ 1) < \mathcal{G}(r,\ 0)$，对每个$r < 1$均成立。因此，所需的界得以实现。 ∎

由引理 2.1 以及 [15, 定理 2.1 & 推论 2.2], ，我们得到类 $\mathcal{F}_{\mathcal{LP}}$. 的增长定理和覆盖定理

定理 2.2。 设 $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{LP}}$，则以下结论成立

I.（增长定理）对于 $|z| = r < 1$，设

$$\max_{|z|=r} \mathrm{Re}\,\mathcal{P}_0(z) = \mathcal{P}_0(-r) \ \textit{and}\ \min_{|z|=r} \mathrm{Re}\,\mathcal{P}_0(z) = \mathcal{P}_0(r),$$

则对于 $|z| = r < 1$ ，以下尖锐不等式成立

$$r\exp\left(\int_0^r \frac{\mathcal{P}_0(t)}{t}dt\right) \leq |f(z)| \leq r\exp\left(\int_0^r \frac{\mathcal{P}_0(-t)}{t}dt\right).$$

II.（覆盖定理）假设 $\min_{|z|=r} \mathrm{Re}\ \mathcal{P}_0(z) = \mathcal{P}_0(r)$ 且 $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{LP}}$. 。设 f_0 由 (1.2)给出，则$f(z)$是 f_0的一个旋转，或 $\{w \in \mathbb{D}:\ |w| \leq -f_0(-1)\} \subset f(\mathbb{D})$，其中 $-f_0(-1) = \lim_{r\to 1} -f_0(-1)$。

注 2.3。 （见**图 3**）若 $f(z)$ 具有 $f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \ldots$， 的形式，属于 $\mathcal{F}_{\mathcal{LP}}$， 则 n

$$\left|\arg\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} - 2\right)\right| > \frac{3\pi}{4}.$$

可以验证，与 $\Gamma: y^2 = 1+2(1-x)$ 对应的切线方程为 $y = \pm(x-2)$。事实上，这些切线与抛物线 Γ 相交于点 $(1,\ \pm 1)$。 因此可以看出，凸区域 $\Omega_{\mathcal{LP}}$ 位于扇形 $|\arg(\omega - 2)| > 3\pi/4$. 内。由此得到属于类 $\mathcal{F}_{\mathcal{LP}}$.的函数的精确辐角估计

注2.4。 由引理 2.1，对于 $|z| = r < 1$，我们有 $\mathcal{LP}(r) \leq \mathrm{Re}\,\mathcal{LP}(z) \leq \mathcal{LP}(-r)$，事实上 $\max_{|z|=r}|\mathcal{LP}(z)| = |\mathcal{LP}(r)| = |\mathcal{P}_0(r)|$.

2.2. 类 的半径问题 $\mathcal{F}_{\mathcal{LP}}$。 根据类 $\mathcal{F}_{\mathcal{LP}}$ 的定义以及 $\mathcal{LP}(\partial\mathbb{D})$ 的图示（见**图 2**），我们有 $\max_{|z|\leq 1} \mathrm{Re}(\mathcal{LP}(z)) = \mathcal{LP}(-1) = 3/2$. 这意味着 $\mathrm{Re}\ zf'(z)/f(z) < 3/2$，因此 $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{LP}}$可能是单叶函数，也可能不是。因此，一个值得研究的问题是确定最大的半径 $r_0 < 1$，使得每个 $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{LP}}$ 在 $|z| \leq r_0$. 中都是星形的。本节针对类 $\mathcal{F}_{\mathcal{LP}}$，以及类 $\mathcal{S}^*(\phi)$ 和 $\mathcal{F}(\psi)$，在选取某些特殊的 $\phi(z)$ 和 $\psi(z)$ 时，研究相应的半径结果，如表1（见附录）和公式（1.1）所述。下面给出一个引理，它给出了可内接于抛物区域 $\Omega_{\mathcal{LP}}$. 中的最大圆盘。

引理 2.5。 设 $a<3/2$，并假设 $\zeta(\eta)$ 定义如下:

$$\zeta=\zeta(\eta)=\log\left(\frac{\sqrt{\eta}}{\sqrt{1-\eta}}\right)\ \ with\ \eta=\frac{e^{-\pi\sqrt{1-2a}}}{1+e^{-\pi\sqrt{1-2a}}},$$

则 $\mathcal{LP}(\mathbb{D})$ 满足以下包含关系

$$\mathcal{D}(a,r_a):=\{\omega\in\mathbb{C}:|\omega-a|<r_a\}\subset\Omega_{\mathcal{LP}},$$

其中

$$r_a=\begin{cases}\sqrt{\left(a-\dfrac{3}{2}+\dfrac{2\zeta^2}{\pi^2}\right)^2+\dfrac{4\zeta^2}{\pi^2}}, & a\le\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{3}{2}-a, & \dfrac{1}{2}<a<\dfrac{3}{2},\end{cases}$$

证明。 我们得到一个以 $(a,0)$, 为中心的最大圆盘，该圆盘可以内接于 $\Omega_{\mathcal{LP}}$. 中心 $(a,0)$ 到边界 $f(\partial(\mathbb{D}))$ 的距离为以下平方根

$$\mathcal{D}_a(X):=\left(a+\frac{2}{\pi^2}\left(\log\left(\frac{\sqrt{X^2}}{\sqrt{1-X^2}}\right)\right)^2-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{4}{\pi^2}\left(\log\left(\frac{\sqrt{X^2}}{\sqrt{1-X^2}}\right)\right)^2,$$

其中 $X=\cos t$. 现在， $\mathcal{D}_a(X)$ 的临界点为

$$X':=\begin{cases}\pm\dfrac{e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{1-2a}}}{\sqrt{1+e^{\pi\sqrt{1-2a}}}},\pm\dfrac{e^{-\frac{1}{2}\pi\sqrt{1-2a}}}{\sqrt{1+e^{-\pi\sqrt{1-2a}}}}, & \text{if } a<1/2,\\ \pm1/\sqrt{2}, & \text{if } 1/2\le a<3/2.\end{cases}$$

可以验证，当 $a<3/2.$ 时， $\mathcal{D}_a''(X)$ 在 $X=X'$, 处取值为 >0。因此， $X=X'$ 是 $\mathcal{D}_a(X),$ 的极小点，由此得到以 a 为中心、半径为 r_a. 的最优圆盘 ∎

定理 2.6。 设 $0\le\alpha<1$ 和 $-1<B<A\le1$, 则对于 $f\in\mathcal{A}$, 类 $\mathcal{S}_p^*$, $\mathcal{S}_s^*$, Δ^*, $\mathcal{S}_\wp^*$, $\mathcal{S}_\rho^*$, $\mathcal{S}_\wp^*$, $\mathcal{BS}^*(\alpha)$ $\mathcal{S}_{\alpha,e}^*$ 和 $\mathcal{S}^*(A,B)$ （参见附录中的表*1*）的精确 $\mathcal{F}_{\mathcal{LP}}-$半径分别为

(i) $\mathcal{R}_{\mathcal{F}_{\mathcal{LP}}}(\mathcal{S}_p^*)=\tanh^2(\pi/4)$。*(ii)* $\mathcal{R}_{\mathcal{F}_{\mathcal{LP}}}(\mathcal{S}_s^*)=\pi/6$.*(iii)* $\mathcal{R}_{\mathcal{F}_{\mathcal{LP}}}(\Delta^*)=5/12$.*(iv)* $\mathcal{R}_{\mathcal{F}_{\mathcal{LP}}}(\mathcal{S}_\wp^*)=(\cosh^{-1}(3/2))^2$.*(v)* $\mathcal{R}_{\mathcal{F}_{\mathcal{LP}}}(\mathcal{S}_\rho^*)=\sinh(1/2)$。*(vi)* $\mathcal{R}_{\mathcal{F}_{\mathcal{LP}}}(\mathcal{S}_\wp^*)\approx0.3517\ldots$.*(vii)* 对于 $0<\alpha<1$, $\mathcal{R}_{\mathcal{F}_{\mathcal{LP}}}(\mathcal{BS}^*(\alpha))=R_{\mathcal{BS}}$, 其中

$$R_{\mathcal{BS}}=\begin{cases}1/2, & \alpha=0\\ (\sqrt{1+\alpha}-1)/\alpha, & 0<\alpha<1.\end{cases}$$

(*viii*) $\mathcal{R}_{\mathcal{F}_{\mathcal{LP}}}(\mathcal{S}_{\alpha,e}^*)=R_{\alpha,e}$, 其中

$$R_{\alpha,e}=\begin{cases}\log(1-1/2(\alpha-1)), & 0\le\alpha<1-1/2(e-1)\\ 1, & 1-1/2(e-1)\le\alpha<1.\end{cases}$$

特别地， $\mathcal{R}_{\mathcal{F}_{\mathcal{LP}}}(\mathcal{S}_e^*)=\log(3/2)$。

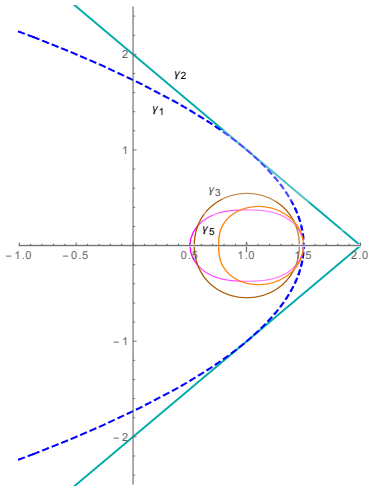
(*ix*) $\mathcal{R}_{\mathcal{F}_{\mathcal{LP}}}(\mathcal{S}^*(A,B))=:\tilde{R}$, 其中

$$\tilde{R}=\begin{cases}1/(2A-3B), & when\ ((-1<B\le(2A-1)/3)\wedge(-1<A<0))\\ & \quad\vee((-1<B<(2A-1)/3)\wedge(0\le A\le1)),\\ 1, & when\ ((2A-1)/3<B<A\le1)\wedge(-1<A<0))\\ & \quad\vee(((2A-1)/3\le B<A\le1)\wedge(0\le A\le1)).\end{cases}$$

证明。对于部分（i），当 $f \in \mathcal{S}_p^*$，由于函数 $1+\mathcal{P}_0$ 的几何性质，$\pi(z) = 1 + 2/\pi^2(\log((1+\sqrt{z})/(1-\sqrt{z})))^2$，可以观察到

$$\max_{|z|=r} \mathrm{Re}(1+\mathcal{P}_{0,\pi}(z)) = 1+\mathcal{P}_{0,\pi}(r).$$

现在，若要使 $f(z)$ 属于类 $\mathcal{F}_{\mathcal{LP}}$，，我们必须有



$\gamma_1 : \mathcal{LP}(z)$
$1 - 2/\pi^2(\text{对数}((1+\sqrt{z})/(1-\sqrt{z}))^2$
$\gamma_2 : |\arg(u-2)| = 3\pi/4$
γ_3: 修正 Sigmoid 函数
$2/(1+e^{-z})$
γ_4: 心形线函数
$1+ze^z$ 在 $|z| < r^*$,
$r^* \approx 0.351734$
γ_5 : $\alpha = 0.8$的 Booth 双纽线
$1+5z/(5-4z^2)$ 属于 $|z| < r_0$,
$r_0 = |z| < (1/4)(3\sqrt{5}-5)$。

FIGURE 3. 与抛物函数 $\mathcal{LP}(z)$ 相关的包含结果的边界示意图

$$1 + \frac{2}{\pi^2}\left(\log\left(\frac{1+\sqrt{r}}{1-\sqrt{r}}\right)\right)^2 \leq \frac{3}{2},$$

当 $r \leq \mathcal{R}_{\mathcal{F}_{\mathcal{LP}}}(\mathcal{S}_p^*)$。时成立。显然，对于满足 $zf'(z_0)/f(z_0) = 1+\mathcal{P}_{0,\pi}(z_0)$ 在 $z_0 = \mathcal{R}_{\mathcal{F}_{\mathcal{LP}}}(\mathcal{S}_p^*)$。的函数 $f(z)$，等式（i）成立。此外还可注意到，若 $p \in \mathcal{P}[A,B] = \{p(z) : p(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 \ldots \prec (1+Az)/(1+Bz)\ -1 \leq B < A \leq 1\}$，则对于 $|z| = r < 1$，，以下是一个已知事实：

$$\left| p(z) - \frac{1-ABr^2}{1-B^2r^2} \right| < \frac{|A-B|r}{1-B^2r^2}. \tag{2.2}$$

因此，根据（2.2），对于部分（ix），若 $f \in \mathcal{S}^*(A,B)$ 位于 $\mathcal{F}_{\mathcal{LP}}$, 内，则

$$\frac{(A-B)r + 1 - ABr^2}{1-B^2r^2} \leq \frac{3}{2}.$$

等价地，我们可以说 $(1-Br)((2A-3B)r-1) \leq 0$，前提是 $r \leq \mathcal{R}_{\mathcal{F}_{\mathcal{LP}}}(\mathcal{S}^*(A,B))$。此时的极值函数为 $\hat{}$ $f \in \mathcal{A}$，满足 $z_0\hat{}f'(z_0)/\hat{}f(z_0) = (1+Az_0)/(1+Bz_0)$，其中 $z_0 = \tilde{R}.$。对于部分 (iv)，当 $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{LP}}$ 时，接下来按前述方法可得，若对 $|z| = r$ 有 $3/2 \geq \cosh\sqrt{r}$，则 f 属于 $\mathcal{S}_\varrho^*$，前提是 $r = \mathcal{R}_{\mathcal{F}_{\mathcal{LP}}}(\mathcal{S}_\varrho^*)$。函数 $f_\varrho \in \mathcal{A}$ 定义为 $zf_\varrho'(z)/f_\varrho(z) = \cosh\sqrt{z}.$，其取等性是尖锐的。进一步，我们知道 $\max_{|z|=r}\mathrm{Re}(1+\sin z) = 1+\sin r$，因此对于部分 (ii)，只需找到一个满足方程 $\sin r = 1/2$ 的 $r < 1$，于是 $r = \mathcal{R}_{\mathcal{F}_{\mathcal{LP}}}(\mathcal{S}_s^*) = \pi/6.$。函数 $f_s(z)$ 定义为 $zf_s'(z)/f_s(z) = 1+\sin z.$，其取等性是尖锐的。后续所有部分的证明思路均相同，因此略去。

■

令 $\mathcal{P}_\alpha$ 由以下形式的函数组成：$p(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$，满足 $\mathrm{Re}\ p(z) > \alpha$，其中 $0 \leq \alpha < 1$，则称 $p(z)$ 为阶数为 α. 的 Carath´eodory 函数。记 $\mathcal{P}(0) =: \mathcal{P}$，通常称为 Carath´eodory 函数类。此外，设 $\mathfrak{P}_{\mathcal{LP}}$ 为以下形式的函数类：$p(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$，满足 $p(z) \prec \mathcal{LP}(z)$。

定理 2.7。 设 $0 \le \alpha < 1$ 和 $0 \le \gamma \le \gamma_\alpha$，其中 $\gamma_\alpha =$ 双曲正切$^2(\pi\sqrt{1-\overline{\alpha/2\sqrt{2}}})$。若 $p \in \mathfrak{P}_{\mathcal{LP}}$，则 $p \in \mathcal{P}_\alpha$，即 $p(z)$ 是单位圆盘 $|z|< \gamma_\alpha$. 中阶数为 α 的 *Carath´eodory* 函数

证明。由于 $p \in \mathfrak{P}_{\mathcal{LP}}$，根据从属关系的定义和施瓦茨引理，存在一个解析函数 $w(z)$，满足 $|w(z)|\le |z|< 1$ 且 $w(0) = 0$，使得 $p(z) = \mathcal{LP}(w(z))$。假设 $w(z) = Re^{i\theta}$ $(-\pi < \theta \le \pi)$，则 $|w(z)|= R \le |z|= r < 1.$。对 $p \in \mathfrak{P}_{\mathcal{LP}}$ 应用引理 2.1，可得 Re $p(z) \ge \mathcal{LP}(r)$。此外，若 $\mathcal{LP}(r) \ge \alpha$，且 $r \le \gamma_\alpha =$ tanh$^2(\pi\sqrt{1-\alpha/2\sqrt{2}})$，则 $p \in \mathfrak{P}_{\mathcal{LP}}$ 是阶为 α $(0 \le \alpha < 1)$ 的 Carath´eodory 函数。由 (1.2) 给出的函数 $f_0(z)$ 是极值函数。 ∎

在定理 2.7 中用 $zf'(z)/f(z)$ 替换 $p(z)$ 后，我们可得以下结果。

推论 2.8. 设 $0 \le \alpha < 1$ 和 $0 \le \gamma \le \gamma_\alpha$，其中 γ_α 如定理 *2.7* 中所定义。若 $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{LP}}$，则$f(z)$ 在圆盘 $|z|< \gamma_\alpha$. 内是阶为 α 的星形函数。此结果是锐利的。

注 2.9。 在定理 2.7 中令 $\alpha = 0$，可得类 $\mathfrak{P}_{\mathcal{LP}}$. 的一个锐利 $\mathcal{P}-$ 半径。事实上，对于类$\mathcal{F}_{\mathcal{LP}}$， 推论 2.8 给出了锐利的星形半径 $\gamma_0 =$ tanh$^2(\pi/2\sqrt{2})$。此外， $r = \gamma_0 < 1$ 是类 $\mathcal{F}_{\mathcal{LP}}$.的锐利单叶半径。

定理 2.10. 假设 $0 < \alpha \le 1$，则类 $\mathcal{F}_{\mathcal{LP}}$ 的锐利 $\mathcal{S}^*(1+\alpha z)-$ 半径为方程的唯一正根 $r_\alpha =$tanh$^2(\pi\sqrt{\alpha}/2\sqrt{2})$

$$2\left(\log((1+\sqrt{r})/(1-\sqrt{r}))\right)^2 - \alpha\pi^2 = 0, \tag{2.3}$$

其中 α 是圆盘 $\{\omega :\ |\omega - 1|< \alpha\}$. 的半径

证明。 根据注2.4，对于圆 $|z|= r < 1$，我们有

$$\max_{|z|\le r<1} |\mathcal{LP}(z)| = 1 - \frac{2}{\pi^2}\left(\log\left(\frac{1+\sqrt{r}}{1-\sqrt{r}}\right)\right)^2 = \mathcal{LP}(r), \tag{2.4}$$

这是一个递减函数。事实上， $\mathcal{LP}(r) = 0$ 当且仅当 $r =$ tanh$^2(\pi/2\sqrt{2}) \approx 0.6469\ldots$。由于 $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{LP}}$，因此存在一个施瓦茨函数 $w(z)$，满足 $w(0) = 0$，使得

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \mathcal{LP}(w(z)).$$

假设 $w(z) = Re^{i\theta}$，其中 $R \le r < 1.$。现在注意，对于 $0 < \alpha \le 1$，方程 (2.4) 给出

$$|\mathcal{LP}(z) - 1| \le |\mathcal{LP}(R) - 1| \le |\mathcal{LP}(r) - 1| = |\mathcal{P}_0(r)| \le \alpha,$$

若 $r \le$ tanh$^2(\pi\sqrt{\alpha}/2\sqrt{2}) = r_\alpha$.，此外，在 $z_0 = r_\alpha$，函数 $f_0(z)$（定义见 (1.2)）满足$zf_0'(z)/f_0(z) = \mathcal{LP}(z)$, 可作为极值函数。 ∎

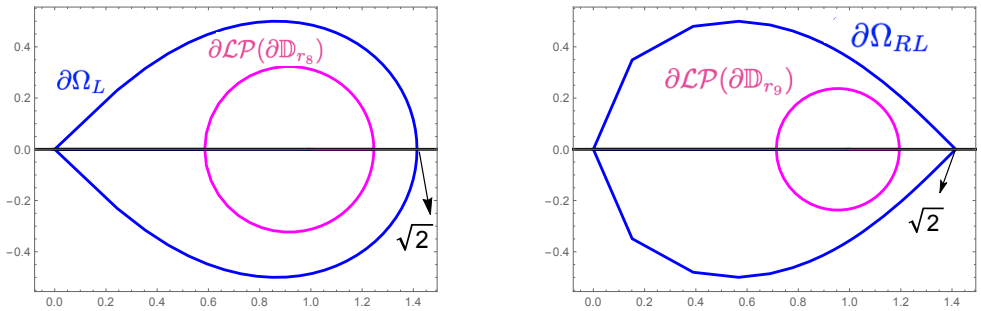
作为定理 2.10 的推论， $\mathcal{S}^*(1+\alpha z)-$ 半径对应于若干著名的 Ma-Minda 星形函数子类，即 $\mathcal{S}_e^*$， $\mathcal{S}_s^*$， $\mathcal{S}_\varrho^*$， $\mathcal{S}_\wp^*$， $\mathcal{S}_\rho^*$， $\mathcal{S}_{SG}^*$和 $\mathcal{S}_{N_e}^*$（见附录中的表1），其结果在推论 2.11 中给出。此外，**图 4** 展示了推论 2.11 的尖锐性。

推论 2.11。 设 $f \in \mathcal{A}$ 属于 $\mathcal{F}_{\mathcal{LP}}$，则对于类 $\mathcal{F}_{\mathcal{LP}}$，以下半径是尖锐的（见图*4*）

(i) $\mathcal{S}_e^*-$半径为 $r_1 = tanh^2(\lambda\pi)$，其中 $\lambda = (1/2)\sqrt{(e-1)/2e}$.*(ii)* $\mathcal{S}_s^*-$半径为 $r_2 = tanh^2(\pi/\lambda)$，其中 $\lambda = 2\sqrt{2}\,csc\,1$。*(iii)* $\mathcal{S}_\varrho^*-$半径为 $r_3 = tanh^2(\pi\lambda/2)$，其中 $\lambda = sin(1/2)$。*(iv)* $\mathcal{S}_\wp^*-$半径为 $r_4 = tanh^2(\pi/2\sqrt{2e})$。*(v)* $\mathcal{S}_\rho^*-$半径为 $r_5 = tanh^2(\pi\sqrt{\lambda}/2)$，其中 $\lambda = (1/2)\,sinh^{-1}1$.*(vi)* $\mathcal{S}_{SG}^*-$半径为 $r_6 = tanh^2(\lambda\pi/2\sqrt{2})$，其中 $\lambda = \sqrt{(e-1)/(e+1)}$。*(vii)* $\mathcal{S}_{N_e}^*-$半径为 $r_7 = tanh^2(\pi/2\sqrt{3})$。

(ii) $f \in \mathcal{S}^*_{\mathcal{RL}}$ *in* $|z| < \tanh^2(\pi \sqrt[4]{\sqrt{2}\,\eta(1-\sqrt{2\eta})}/2\sqrt{2}) \approx 0.283\ldots$.

注2.15。由 **图 5**，显然，推论 2.14 中得到的半径还可以进一步改进。



(A) (B)

FIGURE 5. 上图对应推论 2.14，其中半径 r_8 和 r_9 分别为：(a) $r_8 \approx 0.376\ldots$ (b) $r_9 \approx 0.283\ldots$.

现在，我们借助两个解析函数 f，$g \in \mathcal{A}$，的比值来定义类 $\mathfrak{F}$；Mundalia 和 Kumar [21]曾研究过该类。

$$\mathfrak{F} = \left\{ f \in \mathcal{A} : \mathrm{Re}\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right) > 0 \ \&\ \mathrm{Re}\left(\frac{(1-z)^{1+A}g(z)}{z}\right) > 0, -1 \le A \le 1 \right\}.$$

特别 地，对于 $A = -1$ 和 $A = 1$，类 $\mathfrak{F}$ 分别归结为以下各类 y,

$$\mathfrak{F}_1 = \left\{ f \in \mathcal{A} : \mathrm{Re}\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right) > 0 \ \&\ \mathrm{Re}\left(\frac{g(z)}{z}\right) > 0 \right\}$$

and

$$\mathfrak{F}_2 = \left\{ f \in \mathcal{A} : \mathrm{Re}\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right) > 0 \ \&\ \mathrm{Re}\left(\frac{(1-z)^2 g(z)}{z}\right) > 0 \right\}.$$

为了证明下一个定理，我们需要 Ravichandran 等的以下引理 [24]。

引理 2.16。若 $p \in \mathcal{P}_n[A,B]$，则对于 $|z| = r$

$$\left| p(z) - \frac{1 - ABr^{2n}}{1 - B^2 r^{2n}} \right| \le \frac{|A-B| r^n}{1 - B^2 r^{2n}}.$$

特别地，若 $p \in \mathcal{P}_n(\alpha)$，则

$$\left| p(z) - \frac{1 + (1-2\alpha)r^{2n}}{1 - r^{2n}} \right| \le \frac{2(1-\alpha) r^n}{1 - r^{2n}}.$$

Theo注 2.17。设 $-1 \le A \le 1$，并假设 $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{LP}}$，则其最佳 $\mathfrak{F}$–半径为 y

$$\mathcal{R}_{\mathfrak{F}}(\mathcal{F}_{\mathcal{LP}}) = \frac{1}{2A+3}\left(\sqrt{A^2 + 12A + 28} - (5+A)\right) =: R_{\mathfrak{F}}.$$

证明。由于 $f \in \mathfrak{F}$，根据类 $\mathfrak{F}$的定义，有 $f(z) = p_1(z)g(z)$ 且 $g(z) = zp_2(z)(1-z)^{-(1+A)}$，其中对于每个 $i = 1, 2$，$p_i : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ 都是解析函数，满足 $p_i(0) = 1$ 且 $\mathrm{Re}\, p_i(z) > 0$.由此得到 $f(z) = zp_1(z)p_2(z)(1-z)^{-(1+A)}$，进而根据对数微分可得

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \frac{1+Az}{1-z} + \frac{zp_1'(z)}{p_1(z)} + \frac{zp_2'(z)}{p_2(z)}.$$

对于每个 $-1 \le A \le 1$，由引理 2.16 可得，

$$\left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - \frac{1+Ar^2}{1-r^2} \right| \le \frac{(5+A)r}{1-r^2} = R. \tag{2.5}$$

此外，对于每个 $|z|=r\leq R_{\mathfrak{F}}$，可以观察到

$$\frac{1}{2}\leq 1\leq a=\frac{1+Ar^2}{1-r^2}\leq\frac{1+AR_{\mathfrak{F}}^2}{1-R_{\mathfrak{F}}^2}<\frac{3}{2}. \tag{2.6}$$

事实上，不等式 (2.5) 和 (2.6) 得出不等式：

$$\frac{(5+A)r}{1-r^2}\leq\frac{3}{2}-\frac{1+Ar^2}{1-r^2},$$

给定 $r\leq R_{\mathfrak{F}}$. 由于引理 2.5，显然圆盘 $|u-a|<R$ 位于 $\Omega_{\mathcal{LP}}$. 此外，在 $z_0=R_{\mathfrak{F}}$处，定义为 $f_{\mathfrak{F}}(z)=z(1+z)^2/(1-z)^{3+A}$ 的函数 $f_{\mathfrak{F}}(z)$ 充当极值函数。 ∎

推论 2.18。 设 $f\in\mathcal{F}_{\mathcal{LP}}$，则类 $\mathcal{F}_{\mathcal{LP}}$ 的尖锐 $\mathfrak{F}_1-$ 半径和 $\mathfrak{F}_2-$ 半径分别为

(i) $\mathcal{R}_{\mathfrak{F}_1}(\mathcal{F}_{\mathcal{LP}})=\overline{=}\sqrt{17}-4\approx 0.123...$
(ii) $\mathcal{R}_{\mathfrak{F}_2}(\mathcal{F}_{\mathcal{LP}})=(\sqrt{41}-6)/5\approx 0.080...$

定理 2.19。 设 $\delta=(\pi\sqrt{\beta-1}\overline{/\sqrt{2)}}$，其中 $1<\beta<3/2$，并假设 $f\in\mathcal{F}_{\mathcal{LP}}$，则 $\mathcal{M}(\beta)-$ 半径为$r_\beta=1+2(\cot\delta)^2-2|\sec\delta/(\tan^2\delta)|$.

证明。 由引理 2.1 可知

$$\operatorname{Re}\mathcal{LP}(z)\leq\mathcal{LP}(-r)=1-\frac{2}{\pi^2}\left(\log\left(\frac{1+i\sqrt{r}}{1-i\sqrt{r}}\right)\right)^2=1+\frac{2}{\pi^2}\left(\tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{r}}{1-r}\right)\right)^2.$$

由于 $f\in\mathcal{F}_{\mathcal{LP}}$，因此假设 $zf'(z)/f(z)=p(z)$。由上述不等式可得 Re $p(z)\leq\mathcal{LP}(-r)$。此外，$\mathcal{LP}(-r)\leq\beta$成立的条件是 $r\leq r_\beta$，其中 r_β是方程 $(1-\beta)\pi^2+2(\tan^{-1}(2\sqrt{r}/(1-r)))^2=0$ 的根，$1<\beta<3/2$. 取等号。这里的等号在函数 $f_0\in\mathcal{A}$ 处成立，该函数由 (1.2) 给出。 ∎

若 $f(z)$ 和 $g(z)$ 是 $|z|<r$中的解析函数，则称 $f(z)$ 被 $g(z)$ 主导，记作$f(z)\ll g(z)$，在 $|z|<r$中，当且仅当 $|f(z)|\leq|g(z)|$ 属于 $|z|<r$.等价地，若存在解析函数 $\Psi(z)$，满足 $|\Psi(z)|\leq 1$ 属于 $\mathbb{D}$ 且对所有 $z\in\mathbb{D}.$，都有 $f(z)=\Psi(z)f(z)$，则称函数 $f(z)$ 被 $g(z)$ 主导。关于星形函数和凸函数主导关系的最新进展，参见 [4, 5]。在下一个定理中，我们将确定类 $\mathcal{F}_{\mathcal{LP}}$.的精确主导半径。

定理 2.20. 设 $f\in\mathcal{A}$，并假设 $g\in\mathcal{F}_{\mathcal{LP}}.$。进一步假设 $f(z)$在$\mathbb{D}$中被 $g(z)$主导，即 $f(z)\ll g(z)$，则对于 $|z|\leq r_m\approx 0.4220\ldots$，

$$|f'(z)|\leq|g'(z)|,$$

其中 r_m 是下列方程的唯一正根

$$2\pi^2r-(1-r^2)(\pi^2-2(\log((1+\sqrt{r})/(1-\sqrt{r})))^2)=0. \tag{2.7}$$

证明。 设 $0\leq r<r^*=\tanh^2(\pi/2\sqrt{2})\approx 0.\overline{646}\ldots$，那么根据注 2.9，我们得出，$g\in\mathcal{F}_{\mathcal{LP}}$ 符合在 $|z|<r^*$. 中的 Ma-Minda 型函数。进一步设 $w(z)$ 是 $\mathbb{D}$中的一个施瓦茨函数，且 $w(0)=0$，则根据从属关系的定义，

$$\frac{zg'(z)}{g(z)}=\mathcal{LP}(w(z)).$$

注意，对于每个 $|z|=r<1$，不等式 $|\mathcal{LP}(w(z))|\leq|\mathcal{LP}(r)|$ 成立。现在，对于 $|z|=r<r^*$，我们得到

$$\left|\frac{g(z)}{g'(z)}\right|=\frac{|z|}{|\mathcal{LP}(z)|}\leq\frac{r}{1-|\mathcal{P}_0(r)|}=\frac{r}{\mathcal{LP}(r)}. \tag{2.8}$$

由于 $f(z)$ 在 $\mathbb{D}$ 中被 $()$ 主导，根据主导的定义，我们得到，

$$f(z)=\psi(z)g(z).$$

对上述等式求导并适当整理各项后，我们得到

$$f'(z)=g'(z)\left(\psi'(z)\frac{g(z)}{g'(z)}+\psi(z)\right). \tag{2.9}$$

此外，由施瓦西不等式可得

$$|\psi'(z)|\leq \frac{1-|\psi(z)|^2}{1-|z|^2}, \quad (z\in\mathbb{D}). \tag{2.10}$$

此外，由方程 (2.8)–(2.10)，我们可推出

$$|f'(z)|\leq \left(|\psi(z)|+\frac{r(1-|\psi(z)|^2)}{(1-r^2)(\mathcal{LP}(r))}\right)|g'(z)|.$$

代入 $|\psi(z)|=\sigma$ $(0\leq\sigma\leq 1)$，得到

$$|f'(z)|\leq \Psi(r,\sigma)|g'(z)|,$$

其中

$$\Psi(r,\sigma)=\sigma+\frac{r(1-\sigma^2)}{(1-r^2)(\mathcal{LP}(r))}.$$

我们需要确定 $r_m\leq r^*$，使得

$$r_m=\max\{r\in[0,r^*]:\Psi(r,\sigma)\leq 1\ \forall\sigma\in[0,1]\}.$$

等价地，如果 $\Phi(r,\ \sigma):=(1-r^2)(\mathcal{LP}(r))-r(1+\sigma)$，那么我们需要确定

$$r_m=\max\{r\in[0,r^*]:\Phi(r,\sigma)\geq 0\ \forall\sigma\in[0,1]\}.$$

由于 $\partial\Phi/\partial\sigma=-r<0$，因此 $\max_{\sigma\in[0,1]}\Phi(r,\ \sigma)=\Phi(r,\ 0)=:\ \phi_0(r)$。此外显然，由于 $\phi_0(0)=1>0$ 且 $\phi_0(r^*)=-r^*<0$，因此存在 $r_m\leq r^*$，它是方程（2.7）的最小正根，满足对于每个 $r\in[0,r_m].$，$\phi_0(r)\geq 0$。证明完毕。 ∎

2017年，Peng 和 Zhong [22], 引入了 $\Omega\subset\mathcal{A}$类，定义如下：

$$\Omega=\{f\in\mathcal{A}:|zf'(z)-f(z)|<1/2\}.$$

本节最后，我们确定类 $\mathcal{F}_{\mathcal{LP}}.$ 的尖锐 Ω–半径。

定理2.21。设 $f\in\mathcal{F}_{\mathcal{LP}}$，则 $f\in\Omega$ 在 $|z|<r_{\mathcal{L}}\approx 0.522\ldots$ 中是以下方程的最小正根

$$4f_0(r)(\log((1+\sqrt{r})/(1-\sqrt{r})))^2=\pi^2$$

and

$$g_0(z)=z\left(\exp\int_0^z\frac{\mathcal{P}_0(-t)}{t}dt\right)=z+\frac{8}{\pi^2}z^2-\frac{8}{3\pi^4}(\pi^2-12)z^3+\frac{8}{135\pi^6}(1440 -360\pi^2+23\pi^4)z^4-\cdots. \tag{2.11}$$

这是一个精确估计。

证明。由于 $f\in\mathcal{F}_{\mathcal{LP}}$，因此根据 $|z|=r<1$ 的注2.4，我们有

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}-1\right|<|\mathcal{LP}(r)-1|=|\mathcal{P}_0(r)|.$$

由于 [15, 定理 1] 和定理 2.2 中提到的增长定理，我们注意到 $|f(z)|\leq g_0(r)$，其中 $g_0(r)$ 由 (2.11) 给出。进一步

$$|zf'(z)-f(z)|=|f(z)|\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}-1\right|\leq g_0(r)|\mathcal{P}_0(r)|.$$

因此 $g_0(r)|\mathcal{P}_0(r)|\leq 1/2$ 条件是 $|z|<r_{\mathcal{L}}\approx 0.522864.$ 由此得证 . ∎

2.3. 该类的充分条件 $\mathcal{F}_{\mathcal{LP}}$。 本节将为类 $\mathcal{F}_{\mathcal{LP}}$. 建立一些充分条件。下面给出 Jack 提出的一个引理 [7], , 该引理将用于讨论所考虑的类。

引理 2.22。 [7, 引理 1，第470] 设 $\nu(z)$ 是 $\mathbb{D}$中的非常数解析函数，满足 $\nu(0) = 0$.若 $|\nu(z)|$ 在圆 $|z| = r$ 上于点 z_0取得其最大值，则 $z_0\nu'(z_0) = k\nu(z_0)$，其中 k 为实数，且 $k \geq 1$.

定理 2.23。 设 $0 \leq t \leq 1$，并令 $f \in \mathcal{A}$ 满足以下微分不等式

$$\left| t\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) + (1-t)\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right| < \frac{1}{6}(3+2t), \quad z \in \mathbb{D}, \tag{2.12}$$

则 $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{LP}}$.

证明。 考虑解析函数 $\nu(z)$，其中 $\nu(0) = 0$. 假设 $f \in \mathcal{A}$ 使得

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 = \frac{1}{2}\nu(z).$$

我们证明 $|\nu(z)| < 1$ 在 $\mathbb{D}$. 中。反设 $|\nu(z)| \geq 1$，则应用引理 2.22，可得存在 $z_0 \in \mathbb{D}$，使得当 $k \geq 1$, $|\nu(z_0)| = 1$ 且 $z_0\nu'(z_0) = k\nu(z_0)$。 代入 $\nu(z_0) = e^{i\mu}$, $-\pi < \mu \leq \pi$ 可得

$$\begin{aligned}
&\left| t\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) + (1-t)\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right| \\
&= \left| t\left(1 + \frac{\nu(z_0)}{2} + \frac{k\nu(z_0)}{2 + \nu(z_0)}\right) + (1-t)\left(1 + \frac{\nu(z_0)}{2}\right) - 1 \right| \\
&= \left| \frac{tke^{i\mu}}{2 + e^{i\mu}} + \frac{e^{i\mu}}{2} \right| \geq \frac{1}{6}(3+2t).
\end{aligned}$$

这与 (2.12) 中给出的假设矛盾。因此 $|\nu(z)| < 1$，这意味着 $zf'(z)/f(z)$ 位于圆盘 $|(zf'(z)/f(z)) - 1| < 1/2$. 因此，根据引理 2.5（其中 $a = 1$），所需结果得证。 ∎

对于定理 2.23 中的 $t = 1/2$, $t = 0$ 和 $t = 1$，我们得到以下推论,

推论 2.24. 设 $f \in \mathcal{A}$ 满足以下微分不等式

(i) $|(zf'(z)/f(z) + zf''(z)/f'(z)) - 1| < 4/3$, 或
(ii) $|(zf'(z)/f(z)) - 1| < 1/2$, 或 *(iii)* $|zf''(z)/f'(z)| < 5/6$,

那么 $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{LP}}$.

Conclusion

在本研究中，我们引入了一类与特定抛物区域相关的解析函数。特别地，我们考虑了抛物线主要位于左半平面且关于实轴对称的情形。其他情形，即斜抛物区域，仍有待进一步研究。

Appendix

本研究中涉及的函数类列举如下，以便读者查阅。

TABLE 1 Ma-Minda 星形函数的特定子类，适用于 $\phi(z)$的特定取值

类 $\mathcal{S}^*(\phi)$	$\phi(z)$	$\phi(\mathbb{D})$	参考文献
$\mathcal{S}^*_{\alpha,e}$	$\alpha+(1-\alpha)e^z$	$\Omega_{\alpha,e}$	[13]Khatter 等人
$\mathcal{SL}^*(\alpha)$	$\alpha+(1-\alpha)\sqrt{1+z}$	$\Omega_{\alpha,L}$	[13]Khatter 等人
$\mathcal{S}^*_{\wp}$	$1+ze^z$	$\Omega_{\wp}$	[14]Kumar 等人
$\mathcal{S}^*_{SG}$	$2/(1+e^{-z})$	Ω_{SG}	[6] Goel 等人
$\mathcal{S}_s$	$1+$正弦 z	Ω_s	[3] Cho 等人
$\mathcal{S}^*_{\rho}$	$1+$双曲正弦$^{-1}$ z	Ω_{ρ}	[1]Arora 等人
$\mathcal{S}^*_{\varrho}$	双曲余弦 $\sqrt{z}$	Ω_{ϱ}	[21]Mundalia 等人
Δ^*	$z+\sqrt{1+z^2}$	Ω_{Δ}	[23]Raina 等人
$\mathcal{S}^*_{\mathcal{L}}$	$\sqrt{1+z}$	Ω_L	[27]Sok´o-l 等人
$\mathcal{S}^*(A,\ B)$	$(1+Az)/(1+Bz)$	$\Omega_{A,B}$	[8] Janowski
$\mathcal{S}^*(N_e)$	$1+z-z^3/3$	Ω_{N_e}	[29]Wani 等人
$\mathcal{S}^*_p$	$1+(2/\pi^2)(\log((1+\sqrt{z})/(1-\sqrt{z})))^2$	Ω_p	[26] Ronning
$\mathcal{S}^*_{\mathcal{RL}}$	$\sqrt{2}-(\sqrt{2}-1)\sqrt{(1-z)/(1+2(\sqrt{2}-1)z)}$	Ω_{RL}	[20] Mendiratta 等人

REFERENCES

[1] Arora K.、Kumar, S. S.：与花瓣形域相关的星形函数，《韩国数学会通报》**59(4)**，903-1010（2022年）[2] Cho, N. E.、Kumar, S.、Kumar, V.、Ravichandran, V.：与 Booth 双纽线相关的星形函数的微分从属与半径估计，《土耳其数学杂志》**42**，1380-1399（2018年）[3] Cho, N. E.、Kumar, V.、Kumar, S. S.、Ravichandran, V.：与正弦函数相关的星形函数的半径问题。《伊朗数学会通报》**45(1)**，213-232（2019年）[4] Gangania, K.、Kumar, S. S.：关于某些推广 $\mathcal{S}^*(\psi)$《计算方法与函数理论》。（2021年）。https://doi.org/
10 1007 40315 021 00386 5 。/s - - - Tang, H.、Deng, G.：某些星形函数子类的主控问题。《数[5]
学研究与应用》**39**，153-159（2019年）[6] Goel, P.、Kumar, S. S.：与修正 Sigmoid 函数相关的某类星形函数。《Bull. Malays. Math. Sci. Soc.》**43(1)**，957-991（2020年）[7] Jack, I. S.： α阶星形函数与凸函数。《伦敦数学会》杂志（第2辑）2，469-474（1971年）[8] Janowski, W.：某些解析函数族的若干极值问题。I.《波兰数学年刊》**28(3)**，297-326（1973年）[9] Kanas, S.：与圆锥曲线相关的微分从属，《数学分析与应用杂志》**317**，650-658（2006年）[10] Kanas, S.、Wi´sniowska, A.：《罗马尼亚纯粹与应用数学评论》**45**，第4期，647-657（2000年）[11] Kanas, S.：由圆锥曲线围成的域上的微分从属技术，《国际数学与数学科学杂志》**38**，2389-2400（2003年）[12] Kargar, R.、Ebadian, A.、Sok´o-l, J.：关于 Booth 双纽线与星形函数。《数学分析与物理》**9(1)**，143-154（2019年）[13] Khatter, K. 、 Ravichandran, V. 、 Sivaprasad Kumar, S.：与指数函数和伯努利双纽线相关的星形函数。《西班牙皇家精确、物理与自然科学学院杂志 A辑：数学》**113(1)**，233-253（2019年）[14] Kumar, S. S.、Kamaljeet, G.：心形域与星形函数。《数学分析与物理》**11(2)**，1-34（2021年）[15] Kumar, S. S.、Gangania, K.：关于某些解析函数的几何性质，《伊朗科学技术杂志 A辑：科学》**45(4)**，1437-1445（2021年）[16] Kumar, S. S.、Yadav, P.：与非 Ma-Minda 函数相关的星形函数。（2022年）。预印本 arXiv:2208.01245[17] Ma, W. C.、Minda, D.：统一处理某些特殊的单叶函数类。载于：《复分析会议论文集》（天津，1992年），第157-169页，《分析学会议论文·讲义》，I，国际出版社，马萨诸塞州剑桥 [18] Ma, W.、Minda, D.：一致凸函数 II，《波兰数学年刊》**58**，275-285（1993年）

[19] Masih, V. S.、Ebadian, A.、Yal.cin, S.：与某类星形函数相关的一些性质，《Math. Slovaca》**69**(6), 1329-1340（2019年）[20] Mendiratta, R.、Nagpal, S.、Ravichandran, V.：与伯努利双纽线左半部相关的星形函数子类。《Int. J. Math.》**25**(9)，17（2014年）[21] Mundalia, M.、Kumar, S. S.：关于与双曲余弦函数相关的星形函数子族。（2022年）预印本 arXiv:2201.05811[22] Peng, Z.、Zhong, G.：由微分不等式定义的某些单叶函数类的若干性质，《Acta Math. Sci. Ser. B》（英文版）**37B**，69-78（2017年）[23] Raina, R. K.、Sok´o-l, J.：与某类星形函数相关的一些性质。《C. R. Math. Acad. Sci. Paris》**353**(11)，973-978（2015年）[24] Ravichandran, V.、Rønning F.、Shanmugam, T. N.：某些解析函数类的凸性半径和星形半径。《Complex Var. Theory Appl.》**33**(1-4), 265-280（1997年）[25] Ravichandran, V.、Silverman, H.、Hussain Khan, M.、Subramanian, K. G.：一类解析函数的半径问题。《Demonstratio Math.》**39**(1)，67-74（2006年）[26] Rønning F.：一致凸函数及其对应的星形函数类，《Proc. Amer. Math. Soc.》**118**(1)，189-196（1993年）[27] Sok´o-l, J.、Stankiewicz, J.：某些强星形函数子类的凸性半径。《Zeszyty Nauk. Politech. Rzeszowskiej Mat.》第**19**号，101-105（1996年）[28] Uralegaddi, B. A.、Ganigi, M. D.、Sarangi, S. M.：具有正系数的单叶函数。《Tamkang J. Math.》**25**(3), 225-230（1994年）[29] Wani, L. A.、Swaminathan, A.：与肾形域相关的星形函数和凸函数，《Bull. Malays, Math. Sci. Soc.》**44**(1)，79-104（2021年）

Department of Applied Mathematics, Delhi Technological University, Delhi–110042, India
Email address: mridulamundalia@yahoo.co.in

Department of Applied Mathematics, Delhi Technological University, Delhi–110042, India
Email address: spkumar@dce.ac.in