arXiv:2302.00896v1 [math.FA] 2 Feb 2023

使 $*$-拟正规算子在 $\mathcal{AN}$-算子闭包中具有正规性的条件

G. RAMESH 和 SHANOLA S. SEQUEIRA

Abstract. 本文首先证明，达到范数的 $*$-拟正规算子存在一个不变子空间。然后给出闭包中的 $*$-拟正规算子的表示，其中闭包由绝对范数达到算子构成；并进一步研究这类算子具有正规性的若干充分条件。最后，我们讨论 Toeplitz 算子和 Hankel

在 Hardy 空间上绝对范数达到算子的闭包中的 $*$-拟正规算子。

1. Introduction

算子理论中一个颇具吸引力的研究领域是非正规算子的研究。非正规算子包括次正规算子、拟正规算子等，这些算子已在文献中得到广泛研究 [4, 10, 14, 28]。另一类重要的非正规算子是 $*$-拟正规算子。希尔伯特空间 H 上的有界线性算子 T称为 $*$-拟正规算子，若

$$\|T^*x\|^2 \leq \|T^2x\|\|x\|,\ x \in\ H.$$

S.C. Arora 和 J.K. Thukral 开创了对 $*$-超正规算子的研究 [1]。随后，随着 Weyl 定理的发展，这一类算子受到了广泛关注 [12, 13]。人们也研究了包含 $*$-超正规算子的更一般类（更多详情见[19, 20, 29] ）。在 [29], 中，作者给出了一个可逆的 $*$-超正规算子，但其逆算子并非 $*$-超正规算子。然而，对于超正规算子而言，情况并非如此，因为可逆超正规算子的逆算子仍是超正规的 [14]。这表明，尽管这两类算子都包含次正规算子，但它们并不相同。因此，对 $*$-超正规算子的研究与对其他非正规算子类的研究同样引人关注。

众所周知，紧次正规算子是正规算子 [4, 28], ，紧超正规算子也同样是正规算子 [18]。此外，紧的 $*$-超正规算子也为正规算子 [19]。这意味着，在紧性的假设下，这些非正规算子会成为正规算子。因此，自然会提出以下问题:

问题 1.1. 在什么假设下，非正规算子会成为正规算子?

这个问题也受到 Berberian [4], Putnam [17], Qiu [18], 和 Stampfli [28], 的研究结果的启发，他们讨论了若干可推出拟正规

2010 *Mathematics Subject Classification.* 47A10, 47A15, 47B07, 47B20, 47B35.

Key words and phrases. 范数达到算子、绝对达到范数算子、 $*$-超正规算子、不变子空间、本质谱、Toeplitz算子、Hankel算子。

算子和亚正规算子正规性的条件，其中包括谱的可数性、谱的面积测度为零等。因此，将紧性替换为一种较弱的性质，即绝对达到范数性质，来回答问题 1.1 中关于 $*$-拟正规算子的问题，也很有意义。

在全文中，令 H、H_1、H_2 表示无限维复希尔伯特空间，并令 $\mathcal{B}(H_1, H_2)$表示从 H_1 到 H_2的所有有界线性算子构成的巴拿赫空间。若 $H_1 = H_2 = H$，则将 $\mathcal{B}(H_1, H_2)$记作 $\mathcal{B}(H)$。

定义 1.2. [7, 定义 1.1、1.2] 称算子 $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$达到范数，若存在单位向量 $x \in H_1$ 使得 $\|T\| = \|Tx\|$。若 $T|_M \colon M \to H_2$ 对 H_1的每个非零闭子空间 M 均达到范数，则称 T 为绝对达到范数算子，或称 $\mathcal{AN}$-算子。

这一类包含紧算子、等距算子，以及零空间为有限维的部分等距算子。从 H_1 到 H_2 的达到范数算子和绝对范数达到算子集合分别记为 $\mathcal{N}(H_1, H_2)$ 和 $\mathcal{AN}(H_1, H_2)$。将 $\mathcal{N}(H, H)$记作 $\mathcal{N}(H)$，并将 $\mathcal{AN}(H, H)$记作 $\mathcal{AN}(H)$。关于 $\mathcal{AN}$-算子理论的近期综述，可参见 [7, 16, 21, 30]。l^2 上的右移算子是 $*$- 超正规算子，也是等距算子。因此，并非每个绝对达到范数的 $*$-超正规算子都是正规算子。于是，[3] 中的作者成功给出了 $*$-超正规 $\mathcal{AN}$-算子的表示，并提出了若干使其成为正规算子的条件。

与算子的范数概念类似，我们还有最小模的概念，其定义如下:

$$m(T) := \inf\{\|Tx\| : x \in H_1, \|x\| = 1\}.$$

类似于达到范数的算子和绝对范数达到算子，我们有以下几类算子。

定义 1.3. [8, 定义 1.1、1.4] 若存在单位向量 $x \in H_1$ 使得 $m(T) = \|Tx\|$，则称算子 $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ 达到最小模。若 $T|_M \colon M \to H_2$在 H_1的每个非零闭子空间 M 上都达到最小模，则称 T 为绝对达到最小模算子，或称 $\mathcal{AM}$-算子。

从 H_1 到 H_2 的所有达到最小模算子和绝对达到最小模算子分别记为 $\mathcal{M}(H_1, H_2)$ 和 $\mathcal{AM}(H_1, H_2)$；当 $H_1 = H_2 = H$时，我们记 $\mathcal{M}(H, H) := \mathcal{M}(H)$，以及 $\mathcal{AM}(H, H) := \mathcal{AM}(H)$。此类算子包含有限秩算子、等距算子以及零空间有限维的部分等距算子。关于这些算子的更多信息，请参见 [2, 8, 11] 。

本文针对一个更大的类来考察问题 1.1，即 $\mathcal{AN}$-算子的算子范数闭包。该类同时包含 $\mathcal{AN}$-算子和 $\mathcal{AM}$-算子。此外，$\mathcal{AN}$-算子与 $\mathcal{AM}$-算子的算子范数闭包相同。再者，$\mathcal{AN}$-算子的闭包既不包含范数达到算子的类，也不包含于该类之中。以上内容均见 [23]。此外，该类还包含本质谱为单元素集的算子，例如拟幂零算子和高斯协方差算子。

协方差算子 [5]。本文的结果推广了 [3], 的结论，不过 [3] 所采用的方法有所不同。

在这项研究的第一步中，我们证明，存在一个不变子空间，属于一个达到范数的 $*$-超正规算子，且该算子不同于 [3] 中讨论的算子。然后，我们给出 $\mathcal{AN}(H)$ 中一个 $*$-超正规算子的表示，它推广了 [25] 中亚正规算子的表示。由此，我们得到以下结果。

(1) $*$-超正规 $\mathcal{AM}$-算子的表示。(2) $*$-超正规 $\mathcal{AM}$-
算子的表示。

我们进一步证明， $\mathcal{AN}(H)$ 中任意可逆的 $*$-超正规算子都是正规算子，并给出若干其他的正规性条件。所有这些结果都在第 2 节中讨论。

最后，在第 3 节中，我们证明，$\mathcal{AN}(H^2)$ 中的 $*$-超正规 Toeplitz算子是等距算子的一个数乘，而 $\mathcal{AN}(H^2)$ 中的 $*$-超正规汉克尔算子是正规算子，其中 H^2 是复平面单位圆上的 Hardy 空间。

本节余下部分将给出本文所需的全部定义和结果。

1.1. 预备知识。对于任意 $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$，伴随算子 $T^* \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$ 定义为

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle,\ \forall x \in H_1,\ \ y \in H_2.$$

现在，我们定义算子的谱这一概念，它推广了矩阵特征值的概念。若 $T \in \mathcal{B}(H)$，则谱定义为

$$\sigma(T)\ := \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ is not invertible in } \mathcal{B}(H)\}.$$

T 的谱可分解为以下互不相交集合的并：点谱 $\sigma_p(T) :=\{\lambda \in \mathbb{C} :\ T - \lambda I$ 在 $\mathcal{B}(H)\}$ 中不是单射，剩余谱 $\sigma_r(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I$ 是单射，但 $R(T - \lambda I) \neq H\}$，以及连续谱 $\sigma_c(T) := \sigma(T) \setminus(\sigma_p(T) \cup \sigma_r(T))$。

若 $T \in \mathcal{B}(H)$ 满足 $TT^* = T^*T$，则称其为正规算子；若满足 $T = T^*$，则称其为自伴算子；若其为自伴算子且 $\langle Tx, x\rangle \geq 0$，则称其为正算子。正算子 $T \in \mathcal{B}(H)$ 记作 $T \geq 0$。

若 $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$，则称 $|T| = (T^*T)^{1/2}$ 为 T的模。对于 $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$，存在唯一的偏等距算子 $W \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$，使得 $N(W) = N(T)$，且满足 $T = W|T|$。这称为 T的极分解。

设 $R(T)$ 和 $N(T)$ 分别为 $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ 的值域和零空间。若 $R(T)$ 是有限维的，则称T 为有限秩算子；若对于 H_1 的任意有界集 B， $T(B)$ 的闭包是紧的，则称 T 为紧算子。我们用 $\mathcal{F}(H_1, H_2)$ 和 $\mathcal{K}(H_1, H_2)$ 分别表示从 H_1 到 H_2 的所有有限秩算子和紧算子组成的集合。若$H_1 = H_2 = H$，则 $\mathcal{K}(H_1, H_2) = \mathcal{K}(H)$，且 $\mathcal{F}(H_1, H_2) = \mathcal{F}(H)$。

若 M是 H的闭子空间，则 $M^\perp$分别表示 M的正交补， P_M表示到 M 上的正交投影， I_M 表示 M上的恒等算子。设 $T \in \mathcal{B}$（H）。若 M 是 H 的闭子空间，且 T（M）$\subseteq M$，则称 M 在 $T \in \mathcal{B}$（H）下不变；若 M和 $M^\perp$都在 T下不变，则称其为约化子空间。

关于算子理论中基本定义和结果的详细研究，请参阅[9, 26]。

定义 1.4. [9, 定义 4.1，第 358] 页对于 $T \in \mathcal{B}(H)$， T的本质谱定义为 $\sigma_{ess}(T) = \sigma(\pi(T))$，其中 $\pi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(H)/\mathcal{K}(H)$ 是典范商映射。

对于自伴算子，上述本质谱的定义与以下描述一致。

定理 1.5. [26, 定理 VII.11，第 236] 页设 $T = T^* \in \mathcal{B}(H)$。那么 $\lambda \in \sigma_{ess}(T)$ 当且仅当以下条件中至少一个成立。

(1) λ 是 T 的特征值，且具有无限重数。(2) λ 是 $\sigma_p(T)$的极限点。(3) $\lambda \in \sigma_c(T)$。

对于 $T \in \mathcal{B}(H)$，令 $\pi_{00}(T)$ 表示 T 的所有有限重数孤立特征值构成的集合。对于自伴算子 T， $\sigma(T) \setminus \pi_{00}(T) = \sigma_{ess}(T)$。关于自伴算子本质谱的各种等价定义，参见 [27]。

对于 $T \in \mathcal{B}(H)$， T [6] 的本质最小模定义为

$$m_e(T) = \inf\{\lambda : \lambda \in \sigma_{ess}(|T|)\}.$$

设 $H = H_1 \oplus H_2$ 和 $T \in \mathcal{B}(H)$。设 P_j 是 H 上值域为 H_j、 $j = 1$、2 的正交投影。那么 $T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}$，其中算子 $T_{ij} : H_j \to H_i$ 由 $T_{ij} = P_i T P_j|_{H_j}$、 i、 $j = 1$、2 给出。此外， $T(H_1) \subseteq H_1$ 当且仅当 $T_{12} = 0$，并且 H_1 约化 T 当且仅当 $T_{12} = 0$ 和 $T_{21} = 0$ （更多详情见 [9] ）。

接下来，我们定义几类非正规算子。

定义 1.6. 若 $T \in \mathcal{B}(H)$，则称 T 为

(1) 次正规，如果 $\|T^*x\| \leq \|Tx\|$、 $x \in H$。(2) 超正规，如果 $\|Tx\|^2 \leq \|T^2x\|\|x\|$、 $x \in H$。(3) $*$-超正规，如果 $\|T^*x\|^2 \leq \|T^2x\|\|x\|$、 $x \in H$。

关于这些算子类的详细研究，请参阅 [1, 4, 10, 12, 14, 28, 29]。以下结果给出了 $*$-超正规算子的一个等价定义。

定理 1.7. [1, 12] 设 $T \in \mathcal{B}(H)$。那么 T 是 $*$-超正规算子，当且仅当

$$T^{*2}T^2 - 2kTT^* + k^2 I \geq 0 \ for \ \ all \ k > 0.$$

2. Representation and normality of $*$-paranormal operators

本节中，我们推导出 $\mathcal{AN}(H)$ 中 $*$-超正规算子的一个表示。

设 $M := \{x \in H : \|Tx\| = \|T\|\|x\|\}$。那么根据 [21, 引理 3.1], ，我们有 $M = N(\|T\|^2 I - T^*T) = N(|T| - \|T\|I)$。

在下一个结果中，我们讨论 $*$-超正规算子的幂。

定理 2.1. 若 $T \in \mathcal{N}(H)$ 是 $*$-超正规的，则对所有 $n \geq 1$， $T^n \in \mathcal{N}(H)$。

证明。由于 $T \in \mathcal{N}(H)$，存在一个非零的 $x \in H$ 使得 $\|Tx\| = \|T\|\|x\|$。这等价于 $T^*Tx = \|T\|^2 x$。因此，我们有

$$\|T\|^4\|x\|^2 = \|T^*Tx\|^2 \leq \|T^3x\|\|Tx\| \leq \|T\|\|T^2x\|\|Tx\| \leq \|T\|^2\|Tx\|^2 = \|T\|^4\|x\|^2. \tag{2.1}$$

由上述不等式可得 $\|T^2x\| = \|T\|\|Tx\| = \|T\|^2\|x\|$ 且 $\|T^3x\| = \|T\|\|T^2x\| = \|T\|^3\|x\|$。

按照上述类似步骤，我们得出，对于所有 $n \in \mathbb{N}$，都有 $\|T^nx\| = \|T\|^n\|x\|$ 。由于对于所有 $n \in \mathbb{N}$，都有 $\|T^n\| = \|T\|^n$，因此对于所有 $n \in \mathbb{N}$，都有 $T^n \in \mathcal{N}(H)$。□

如果去掉 $*$-拟正规条件，上述结论未必成立。

例 2.2. 设 $T\colon \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ 定义如下

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, \left(1 - \frac{1}{3}\right)x_3, \left(1 - \frac{1}{4}\right)x_4, \dots), \ \forall (x_1, x_2, x_3, \dots) \in \ell^2(\mathbb{N}).$$

Then

$$T^2(x_1, x_2, x_3, \dots) = (\left(1 - \frac{1}{3}\right)x_3, \left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)x_4, \dots), \ \forall (x_1, x_2, x_3, \dots) \in \ell^2(\mathbb{N}),$$

$$T^*(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, \left(1 - \frac{1}{3}\right)x_2, \left(1 - \frac{1}{4}\right)x_3, \dots), \ \forall (x_1, x_2, x_3, \dots) \in \ell^2(\mathbb{N}),$$

$$T^*T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_2, \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 x_3, \left(1 - \frac{1}{4}\right)^2 x_4, \dots), \ \forall (x_1, x_2, x_3, \dots) \in \ell^2(\mathbb{N}),$$

and

$$T^{2*}T^2(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, 0, \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 x_3, \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2\left(1 - \frac{1}{4}\right)^2 x_4, \dots), \ \forall (x_1, x_2, x_3, \dots) \in \ell^2(\mathbb{N}).$$

由于 $1 = \|T^*(1, 0, 0, \dots)\|^2 \not\leq 0 = \|T^2(1, 0, 0, \dots)\|$，我们得到 T 不是 $*$-超正规。接下来，

$$\|T\| = \sup\left\{1, \left(1 - \frac{1}{n}\right) : n \geq 3\right\} = 1 = \|T(0, 1, 0, 0, \dots)\|$$

因此 $T \in \mathcal{N}(\ell^2(\mathbb{N}))$。此外，

$$\|T^2\| = \sup\left\{\left(1 - \frac{1}{3}\right), \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) : n \geq 3\right\} = 1.$$

*Sin*因为 1 不是 $T^{2*}T^2$ 的特征值，由 [7, 推论 2.4],，我们得到 $T^2 \notin \mathcal{N}(\ell^2(\mathbb{N}))$.

注 2.3. 由定理 2.1 可明显看出，若 $T \in \mathcal{N}(H)$ 是 $*$-超正规，则

$$\{x \in H : \|T^nx\| = \|T\|^n\|x\|, n = 0, 1, 2, \dots\} \neq \{0\}.$$

在 [3], 中，作者通过证明以下结果，说明了一个 $*$-超正规范数达到算子存在不变子空间。

命题 2.4. 若 $T \in \mathcal{N}(H)$ 是 $*$-超正规的，则 $M_* = N(|T^*| - \|T\|I) \neq \{0\}$ 且$M_* \subseteq M$。此外， M_*在 T下是不变的。

接下来我们证明， M 本身在 T下不变。

定理2.5. 若 $T \in \mathcal{N}(H)$是 $*$-拟正规算子，则 M在 T下不变。此外，若M 是有限维的，则 M 约化 T。

证明. 由于 $T \in \mathcal{N}(H)$，我们有 $M \neq \{0\}$。若 $x \in M$，则 $\|Tx\| = \|T\|\|x\|$。由不等式(2.1)，可得 $\|T^2x\| = \|T\|\|Tx\|$。这意味着 $Tx \in M$。

显然， $\frac{T|_M}{\|T\|}$是一个等距算子。若 M是有限维的，则 $T|_M = \|T\|U$，其中 $U \in \mathcal{B}(M)$是酉算子。因此，根据 [20, 定理2.6]， M约化 T。□

现在，我们主要致力于给出 $*$-拟正规算子在$\mathcal{AN}(H)$中的一种表示。我们首先引用一些关于 $\mathcal{AN}(H)$中正算子的重要结果，这些结果将在本文中反复使用。

命题 2.6. 若 $T \in \mathcal{AN}(H)$ 为正，则 T 可对角化。

定理 2.7. [23, 定理 4.6] 设 $T \in \mathcal{B}(H)$ 为正。则 $T \in \mathcal{AN}(H)$ 当且仅当 $\sigma_{ess}(T)$ 是单元素集。

设 $T \in \mathcal{AN}(H)$ 为正，且 $\sigma_{ess}(T) = \{\alpha\}$，其中 $\alpha \geq 0$。则 $\sigma(T) \subseteq [m(T)\ \alpha) \cup [\alpha, \|T\|]$. 显然， $m_e(T) = \alpha$。

命题2.8. 设 $T \in \mathcal{AN}(H)$ 为 $*$-超正规算子，且 $\|T\|$ 是 $|T|$的一个特征值，具有无限重数。设 $M = N(|T| - \|T\|I)$。则

$$T = \begin{pmatrix} M & M^\perp \\ \|T\|V & A \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{matrix} M \\ M^\perp \end{matrix},$$

其中 $V \in \mathcal{B}(M)$ 是等距算子，且 $A \in \mathcal{B}(M^\perp, M)$、 $B \in \mathcal{B}(M^\perp)$ 满足：对所有 $k > 0$, $V^*A = 0$,$A^*A + B^*B \leq \|T\|^2 I_{M^\perp}$ 以及 $(\|T\|^4 + k^2)I_{M^\perp} - 2kBB^* \geq 0$。

证明。设 $T = W|T|$ 是 T 的极分解。由于 $T \in \mathcal{AN}(H)$，根据 [23, 引理 3.14] 和定理 2.7，我们有 $|T| \in \mathcal{AN}(H)$，且 $\sigma_{ess}(|T|)$ 是单元素集。由于 $\|T\|$ 是 $|T|$ 的具有无限重数的特征值， $M \neq \{0\}$ 和 $\sigma_{ess}(|T|) = \{\|T\|\}$。

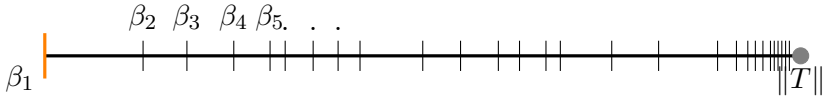

FIGURE 1. $|T| \in \mathcal{AN}(H)$ 的谱图

因此，由定理2.5可得， M在 T下不变。此外，对于所有 $x \in M$,

$$Wx = \frac{W|T|x}{\|T\|} = \frac{Tx}{\|T\|} \in M.$$

因此， M在 W下也不变。此外， $M \subseteq N(|T|)^{\perp} = N(W)^{\perp}$。

因此，关于 $H = M \oplus M^{\perp}$， W 和 $|T|$ 可表示如下。

$$W = \begin{matrix} M & M^{\perp} \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} V & V_1 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} M \\ M^{\perp} \end{matrix}, |T| = \begin{matrix} M & M^{\perp} \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} \|T\| I_M & 0 \\ 0 & T_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} M \\ M^{\perp} \end{matrix},$$

其中， V 是 M 上的等距算子， $V_1 = P_M W P_{M^{\perp}}|_{M^{\perp}}$ 和 $V_2 = P_{M^{\perp}} W P_{M^{\perp}}|_{M^{\perp}}$，且 $T_1 = \bigoplus_{n} \beta_j I_{N(|T|-\beta_j I)}$，其中对于某个 $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$， $\pi_{00}(|T|) = \{\beta_j\}_{i=1}^{n}$。若 $\pi_{00}(|T|) = \emptyset$，则 $|T| = \|T\| I$，因此 $T = V|T| = \|T\| V$。

若 $\pi_{00}(|T|) \neq \emptyset$，则

$$T = \begin{matrix} M & M^{\perp} \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} \|T\| V & A \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{matrix} M \\ M^{\perp} \end{matrix},$$

其中 $A = V_1 T_1$ 和 $B = V_2 T_1$。由于 $T^*T = |T|^2$，我们得到

$$\begin{pmatrix} \|T\|^2 V^*V & \|T\| V^*A \\ \|T\| A^*V & A^*A + B^*B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|T\|^2 I_M & 0 \\ 0 & T_1^2 \end{pmatrix}.$$

比较上述两个矩阵，我们得到 $V^*A = 0$ 以及 $A^*A + B^*B = T_1^2 = \bigoplus_{j=1} \beta_j^2 I_{N(|T|-\beta_j I)} \leq \|T\|^2 I_{M^{\perp}}$.

此外，

$$\begin{aligned} TT^* &= \begin{pmatrix} \|T\| V & A \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \|T\| V^* & 0 \\ A^* & B^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \|T\|^2 VV^* + AA^* & AB^* \\ BA^* & BB^* \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} T^{*2}T^2 &= \begin{pmatrix} \|T\|^2 V^{*2} & 0 \\ \|T\| A^*V^* + B^*A^* & B^{*2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \|T\| V^2 & \|T\| VA + AB \\ 0 & B^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \|T\|^4 I_M & \|T\|^3 V^*A + \|T\|^2 V^{*2} AB \\ \|T\|^3 A^*V + \|T\|^2 B^*A^*V^2 & \|T\|^2 A^*A + \|T\| A^*V^*AB + \|T\| B^*A^*VA + B^*A^*AB + B^{*2}B^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \|T\|^4 I_M & 0 \\ 0 & \|T\|^2 A^*A + B^*A^*AB + B^{*2}B^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

由定理 1.7 可知， T是 $*$-超正规，当且仅当对于所有 $k > 0$都有 $T^{*2}T^2 - 2kTT^* + k^2 I \geq 0$。代入后，我们得到

$$0 \leq T^{*2}T^2 - 2kTT^* + k^2 I$$
$$= \begin{pmatrix} (\|T\|^4 + k^2)I_M - 2k(\|T\|^2 VV^* + AA^*) & -2kAB^* \\ -2kBA^* & \|T\|^2 A^*A + B^*A^*AB + B^{*2}B^2 - 2kBB^* + k^2 I_{M^\perp} \end{pmatrix}$$

由上述矩阵的 (4, 4) 元可得

$$\|T\|^2 A^*A + B^*(A^*A + B^*B)B - 2kBB^* + k^2 I_{M^\perp} \geq 0 \text{ for all } k > 0.$$

由于 $A^*A + B^*B \leq \|T\|^2 I_{M^\perp}$，我们得到

$$\|T\|^4 I_{M^\perp} - 2kBB^* + k^2 I_{M^\perp} \geq 0 \text{ for all } k > 0. \tag{2.2}$$

□

注2.9. (1) 由 (2.2) 可知 $BB^* \leq \|T\|^2 I_{M^\perp}$。

(2) 在命题2.8中，如果 $\pi_{00}(|T|)$ 是有限的，那么 $M^\perp$ 是有限维的，且 $A \in \mathcal{B}(M^\perp, M)$ $B \in \mathcal{B}(M^\perp, M^\perp)$ 是有限秩算子。

定理 2.10. 设 $T \in \mathcal{AN}(H)$ 是 $*$-超正规算子。那么存在希尔伯特空间 H_0、H_1 和 H_2，使得 $H = H_0 \oplus H_1 \oplus H_2$ 和 T 可写为

$$T = \begin{array}{c} \begin{matrix} H_0 & H_1 & H_2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} V_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda V & A \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix} \begin{matrix} H_0 \\ H_1 \\ H_2 \end{matrix} \end{array}, \tag{2.3}$$

其中

(1) $\sigma_{ess}(|T|) = \{\lambda\}, \lambda \geq 0$。(2) $H_0 = \bigoplus_{i=1}^{n} N(|T| - \alpha_i I)$，其中 $(\lambda, \|T\|] \cap \sigma(|T|) = \{\alpha_i\}_{i=1}^n$ 对于某个 $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$，$H_1 = N(|T| - \lambda I)$ 和 $H_2 = (H_0 \oplus H_1)^\perp$。(3) $V_0 = \bigoplus_{i=1}^{n} \alpha_i U_i$，其中 $U_i \in \mathcal{B}(N(|T| - \alpha_i I))$ 对所有 $i = 1, 2, \ldots, n$ 都是酉算子，$n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$。(4) 若 $H_1 \neq \{0\}$ 且 $A \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$、$B \in \mathcal{B}(H_2)$ 满足 $V^*A = 0$，$A^*A + B^*B \leq \lambda^2 I_{H_2}$ 和对所有 $k > 0$ 均有 $(\lambda^4 + k^2)I_{H_2} - 2kBB^* \geq 0$，则 $V \in \mathcal{B}(H_1)$ 是等距算子。

证明。为了得到所需结论，我们将定理2.7和定理1.5应用于 $|T|$。由于$T \in \mathcal{AN}(H)$，根据引理3.14]，，我们有 $|T| \in \mathcal{AN}(H)$。因此，由定理2.7可得，$\sigma_{ess}(|T|)$是一个单元素集，设为 $\{\lambda\}$，$\lambda \geq 0$。所以，$(\lambda, \|T\|] \cap \sigma(|T|)$至多可数，设为$\{\alpha_i\}_{i=1}^n$，其中 $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 且 $[m(T)\ \lambda) \cap \sigma(|T|)$ 也至多可数，设为 $\{\beta_j\}_{j=1}^m$，其中 $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$。注意，只要 $i < j$，$\alpha_j < \alpha_i$ 和 $\beta_i < \beta_j$。

令 $H_0 = \bigoplus_{i=1}^{n} N(|T| - \alpha_i I)$。若 $(\lambda, \|T\|] \cap \sigma(|T|) = \emptyset$，则 $H_1 = \{0\}$；若 $[m(T)\ \lambda) \cap \sigma(|T|) = \emptyset$，则 $H_2 = \{0\}$

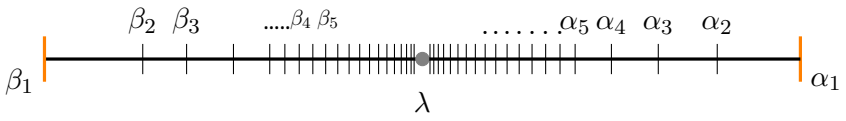

FIGURE 2. $|T| \in \mathcal{AN}(H)$ 的谱图

不失一般性，设 $\alpha_1 = \|T\|$。由于 T 是 $*$-超正规算子，根据定理2.5，我们有$N($ $|T|-\alpha_1 I)$在 T下不变，且$\frac{T}{\alpha_1}$是 $N(|T|-\alpha_1 I)$上的等距算子。由于 $\alpha_1 \in \pi_{00}(|T|)$，我们有 $N($ $|T|-\alpha_1 I)$是有限维的。因此， $N(|T|-\alpha_1 I)$约化 T，且$T|_{N(|T|-\alpha_1 I)} = \alpha_1 U_1$，其中 U_1是 N $(|T| - \alpha_1 I)$上的酉算子。接下来定义$T_1 = T|_{N(|T|-\alpha_1 I)^\perp}$。那么 T_1是一个 $*$-超正规算子，并且 $\|T_1\| = \alpha_2$。按照上述相同步骤继续，我们$_n$得到 H_0约化 T且 $T|_{H_0} = \bigoplus \alpha_i U_i$，其中 U_i是 $N(|T| - \alpha_i I)$上的酉算子，$_{i=1}i = 1$， 2， ....., n， $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$。

现在， $T_2 = T|_{H_0^\perp}$ 是一个具有 $\|T_2\| = \lambda$ 的 $*$-拟正规算子。于是有以下几种情况。

情况（1）： λ 是 $|T|$ 的一个无限重数特征值：由命题2.8， T_2 可写为

$$T_2 = \begin{matrix} H_1 & H_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} \lambda V & A \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{matrix} H_1 \\ H_2 \end{matrix}, \tag{2.4}$$

其中 $V \in \mathcal{B}(H_1)$ 是一个等距算子，且 $A \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$、 $B \in \mathcal{B}(H_2)$ 满足：对于所有 $k > 0$，有 $V^*A = 0$、$A^*A + B^*B \leq \lambda^2 I_{H_2}$ 和 $(\lambda^4 + k^2)I_{H_2} - 2kBB^* \geq 0$。因此

$$T = \begin{matrix} H_0 & H_1 & H_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} V_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda V & A \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix} \begin{matrix} H_0 \\ H_1 \\ H_2 \end{matrix} \tag{2.5}$$

子情形 (a)：如果 λ 不是 $\sigma(|T|)$ 的极限点，那么 H_0 和 H_2 都是有限维的，而 V_0、A 和 B 都是有限秩算子。

子情形 (b)：如果 λ 是 $\sigma(|T|)$ 的极限点，那么根据 $\{\alpha_i\}$ 和 $\{\beta_j\}$ 是有限还是无限，H_0 或 H_2 或二者都可能是无限维的。

情形（2）： λ 是 $|T|$ 的有限重数特征值：在这种情形下， λ 是 $\sigma(|T|)$的极限点。此外， $N(|T| - \lambda I)$约化 T。因此， $A = 0$且 V是H_1上的酉算子。所以 T 可以写成

$$T = \begin{array}{c} \begin{matrix} H_0 & H_1 & H_2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} V_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda V & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix} \begin{matrix} H_0 \\ H_1 \\ H_2 \end{matrix} \end{array} \tag{2.6}$$

且 B 满足情形（1）中的条件。此外，情形（1）的子情形（a）和（b）在此处也成立。

情形（3）： λ 是 $\sigma(T)$ 的极限点，但不是具有无限重数的特征值：于是 $H_1 = \{0\}$，进而 $V = 0$ 和 $A = 0$。在这种情况下，

$$T = \begin{array}{c} \begin{matrix} H_0 & H_2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} V_0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{matrix} H_0 \\ H_2 \end{matrix} \end{array} \tag{2.7}$$

此外， H_0 或 H_2 或二者都可能是无限维的，这取决于 $\{\alpha_i\}$ 和 $\{\beta_j\}$是有限还是无限。

如果 $m(T) = \lambda = \|T\|$，那么 $T = \|T\|V$。 □

注 2.11. 如果 $T \in \mathcal{K}(H)$ 是 $*$-超正规，那么$T \in \mathcal{AN}(H)$ 且 $\overline{\sigma_{ess}(|T|) = \{0\}}$。因此，由定理 2.10 可得 $A = B = 0$ 和 T 是正规的。所以每个 $*$-超正规紧算子都是正规的。

在 [3], 中，作者给出了 $*$-超正规 $\mathcal{AN}$-算子的一个表示。这里我们给出 $*$-超正规 $\mathcal{AN}$-算子的一个表示，这是定理 2.10 的一个特例。

定理 2.12。若 $T \in \mathcal{AN}(H)$ 是 $*$-超正规的，则 T 具有以下表示。

$$T = \begin{array}{c} \begin{matrix} H_0 & H_1 & H_2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} V_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda V & A \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix} \begin{matrix} H_0 \\ H_1 \\ H_2 \end{matrix} \end{array}, \tag{2.8}$$

其中

(1) $\sigma_{ess}(|T|) = \{\lambda\}, \lambda \geq 0.$

(2) $H_0 = \bigoplus_{i=1}^{n} N(|T| - \alpha_i I)$, *where* $(\lambda, \|T\|] \cap \sigma(|T|) = \{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$ *for some* $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $H_1 = N(|T| - \lambda I)$ *and* $H_2 = (H_0 \oplus H_1)^{\perp}$ *is finite dimensional.*

(3) $V_0 = \bigoplus_{i=1}^{n} \alpha_i U_i$, *where* $U_i \in \mathcal{B}(N(|T| - \alpha_i I))$ *is unitary for all* $i = 1, 2, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

(4) 若 $V \in \mathcal{B}(H_1)$ 是等距算子，且 $H_1 \neq \{0\}$ 和 $A \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$、 $B \in \mathcal{B}(H_2)$ 是有限秩算子，并且对所有 $k > 0$， $V^*A = 0$, $A^*A + B^*B \leq \lambda^2 I_{H_2}$ 和 $(\lambda^4 + k^2)I_{H_2} - 2kBB^* \geq 0$。

证明。由 $[30,$ 推论 2.10、2.11$]$, 可知， $T \in \mathcal{AN}(H)$ 当且仅当 $|T| \in \mathcal{AN}(H)$。现在由 $[21,$ 定理 2.4$]$, 可知， $|T| \in \mathcal{AN}(H)$ 当且仅当 $\sigma_{ess}(|T|)$ 是单元素集，并且 $[m(T)\ m_e(T)) \cap \sigma(|T|)$ 仅包含 $|T|$ 的有限多个特征值。因此，按照定理 2.10 中类似的步骤，我们得到所需的表示。□

注 2.13。我们注意到，在定理 2.12 中，空间 H_2 是有限维的，这保证了算子 A 和 B 具有有限秩，而在 $[3]$ 中并非如此。

由于 $\mathcal{AM}$-算子包含于 $\mathcal{AN}(H)$ 中，利用定理 2.10，可得到 $\mathcal{AM}$-算子的如下表示。

定理 2.14. 若 $T \in \mathcal{AM}(H)$ 是 $*$-超正规算子，则 T 具有如下表示。

$$T = \begin{array}{c} \begin{matrix} H_0 & H_1 & H_2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} V_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda V & A \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} H_0 \\ H_1 \\ H_2 \end{matrix}, \tag{2.9}$$

其中

(1) $\sigma_{ess}(|T|) = \{\lambda\}, \lambda \geq 0.$

(2) $H_0 = \bigoplus_{i=1}^{n} N(|T| - \alpha_i I)$, *where* $(\lambda, \|T\|] \cap \sigma(|T|) = \{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$ *for some* $n \in \mathbb{N}$ *is finite dimensional,* $H_1 = N(|T| - \lambda I)$ *and* $H_2 = (H_0 \oplus H_1)^{\perp}$.

(3) $V_0 = \bigoplus_{i=1}^{n} \alpha_i U_i$ *is a finite rank normal operator, where* $U_i \in \mathcal{B}(N(|T| - \alpha_i I))$ *is unitary for all* $i = 1, 2, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

(4) $V \in \mathcal{B}(H_1)$ *is an isometry if* $H_1 \neq \{0\}$ *and* $A \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$, $B \in \mathcal{B}(H_2)$ *are such that* $V^*A = 0$, $A^*A + B^*B \leq \lambda^2 I_{H_2}$ *and* $(\lambda^4 + k^2)I_{H_2} - 2kBB^* \geq 0$ *for all* $k > 0$.

证明. 根据 $[11,$ 定理 5.14$]$, , $T \in \mathcal{AM}(H)$ 当且仅当 $|T| \in \mathcal{AM}(H)$。现在由$[2,$ 定理 3.10$]$ 可知， $|T| \in \mathcal{AM}(H)$ 当且仅当 $\sigma_{ess}(|T|)$ 是一个单元素集，且 $(m_e(T)\ \|T\|] \cap \sigma(|T|)$ 仅包含有限个 $|T|$ 的特征值。因此，按照定理 2.10 中类似的步骤，我们得到所需的表示。□

接下来，我们要给出 $T \in \mathcal{AN}(H)$ 在 T^* 是 $*$-超正规的情况下的表示。

Coro推论 2.15. 若 $T \in \overline{\mathcal{AN}(H)}$ 满足 T^* 是 $*$-超正规，则 $T^* \in \mathcal{AN}(H$ $)$.

证明。由于 $T \in \overline{\mathcal{AN}(H)}$, 根据 $[23,$ 定理 3.15$]$, , 我们有 $T^*T \in \overline{\mathcal{AN}(H)}$; 根据定理 2.7， $\sigma_{ess}(T^*T) = \{\lambda\}$, 其中某个 $\lambda \geq 0$。

根据 $[15,$ 定理 6, 第 173$]$, 页，众所周知 $\sigma_{ess}(T^*T) \setminus \{0\} = \sigma_{ess}(TT^*) \setminus \{0\}$。若 $\lambda = 0$, 则 $T^*T \in \mathcal{K}(H)$， TT^*也如此。因此在这种情况下， $\sigma_{ess}(T^*T) = \sigma_{ess}(TT^*)$。

因此，我们来考虑 $\lambda \neq 0$。若 $0 \in \sigma_{ess}(TT^*)$，则根据 [26, 定理 VII.11，第 236] 页，0 要么是 TT^* 的一个无限重数特征值，要么是 $\sigma(TT^*)$的极限点。

若 0 是 TT^* 的无限重数特征值，则 $N(T^*)$ 是无限维的，因为 $N(TT^*) = N(T^*)$。由 T^* 的 $*$- 超正规性可知，$N(T^*) \subseteq N(T^{*2}) \subseteq N(T) = N(T^*T)$。因此 $0 \in \sigma_{ess}(T^*T)$，这与 $\lambda \neq 0$ 矛盾。

若 0 是 $\sigma(TT^*)$ 的极限点，则存在一个序列 $\{\lambda_n\} \subseteq \sigma(TT^*)\backslash\{0\}$，使得$\lambda_n \to 0$ 当 $n \to \infty$。由于 $\sigma(TT^*) \setminus \{0\} = \sigma(T^*T) \setminus \{0\}$，我们得到 $0 \in \sigma_{ess}(T^*T)$，这与我们的假设矛盾。因此 $\sigma_{ess}(T^*T) = \sigma_{ess}(TT^*)$。由此，根据 [25, 定理 4.13], 可得 $T^* \in \mathcal{AN}(H)$。□

推论 2.16. 设 $T \in \mathcal{AN}(H)$ 满足 $\overline{T^*}$ 是 $*$-超正规。那么存在希尔伯特空间 H_0, H_1, H_2，使得 $H = H_0 \oplus H_1 \oplus H_2$ 和 T 可写为

$$T = \begin{array}{c} \begin{matrix} H_0 & H_1 & H_2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} V_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda V & 0 \\ 0 & A & B \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} H_0 \\ H_1 \\ H_2 \end{matrix}, \tag{2.10}$$

其中

(1) $\sigma_{ess}(|T^*|) = \{\lambda\}, \lambda \geq 0.$

(2) $H_0 = \bigoplus_{i=1}^{n} N(|T^*| - \alpha_i I)$, *where* $(\lambda, \|T\|] \cap \sigma(|T^*|) = \{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$ *for some* $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $H_1 = N(|T^*| - \lambda I)$ *and* $H_2 = (H_0 \oplus H_1)^{\perp}$.

(3) $V_0 = \bigoplus_{i=1}^{n} \alpha_i U_i$, *where* $U_i \in \mathcal{B}(N(|T^*| - \alpha_i I))$ *is unitary for all* $i = 1, 2, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

(4) $V \in \mathcal{B}(H_1)$ *is a co-isometry if* $H_2 \neq \{0\}$ *and* $A \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$, $B \in \mathcal{B}(H_2)$ *are such that* $VA^* = 0$, $AA^* + BB^* \leq \lambda^2 I_{H_2}$ *and* $(\lambda^4 + k^2)I_{H_2} - 2kB^*B \geq 0$ *for all* $k > 0$.

证明. 根据推论 2.15 和定理 2.10，结论显然成立。 □

命题 2.17. 若 $T = \begin{pmatrix} C & A \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 是次正规算子，则 $A^*A + B^*B - BB^* \geq 0$ 和 $C^*C \geq CC^* + AA^*$。特别地，C 是次正规算子。

证明. 根据 T 次正规性的定义，我们有

$$\begin{aligned} 0 &\leq T^*T - TT^* \\ &= \begin{pmatrix} C^*C - CC^* - AA^* & C^*A - AB^* \\ A^*C - BA^* & A^*A + B^*B - BB^* \end{pmatrix} \end{aligned}$$

由于矩阵的 (1,1) 和 (4,4) 项均为正，因此得到所需结果。□

在 [25], 中，也为 $\mathcal{AN}(H)$ 中的次正规算子给出了类似的表示。这并不意味着 $\overline{\mathcal{AN}(H)}$ 中的每个 $*$- 超正规算子都是次正规的。

例2.18. 设 $T:\ell^2(\mathbb{N})\to\ell^2(\mathbb{N})$ 定义如下:

$$T(x_1,x_2,x_3,\dots)=(0,x_1,\sqrt{2}x_2,2x_3,2x_4,\dots),\ \forall(x_n)\in\ell^2(\mathbb{N})$$

并且 $S:\ \ell^2(\mathbb{N})\to\ell^2(\mathbb{N})$ 定义如下

$$S(x_1,x_2,x_3,\dots)=(0,\sqrt{2}x_1,x_2,2x_3,2x_4,\dots),\ \forall(x_n)\in\ell^2(\mathbb{N}).$$

Then

$$T^*(x_1,x_2,x_3,\dots)=(x_2,\sqrt{2}x_3,2x_4,2x_5,\dots),\ \forall(x_n)\in\ell^2(\mathbb{N})$$

and

$$S^*(x_1,x_2,x_3,\dots)=(\sqrt{2}x_2,x_3,2x_4,2x_5,\dots),\ \forall(x_n)\in\ell^2(\mathbb{N}).$$

此外,

$$T^*T(x_1,x_2,x_3,\dots)=(x_1,2x_2,4x_3,4x_4,\dots),\ \forall(x_n)\in\ell^2(\mathbb{N}),$$

$$S^*S(x_1,x_2,x_3,\dots)=(2x_1,x_2,4x_3,4x_4,\dots),\ \forall(x_n)\in\ell^2(\mathbb{N}).$$

显然，对所有 $x\in\ell^2(\mathbb{N})$，$\|T^*x\|\le\|Tx\|$ 成立，但 $\|S^*(0,1,0,\dots)\|\ge\|S(0,1,0,\dots)\|$。因此，$T$ 是次正规算子，而 S 不是次正规算子，但根据 [29, 例 1]，S 是 $*$-超正规算子。此外，$\sigma_{ess}(T^*T)=\sigma_{ess}(S^*S)=\{4\}$。因此，由定理 2.7，$T^*T$，$S^*S\in\mathcal{AN}(H)$，这又意味着 T，$S\in\mathcal{AN}(H)$ [23, 定理 3.15]。

令 $\{e_n\}$ 为 $\ell^2(\mathbb{N})$ 的标准正交基。显然，$M=N(|T|-\|T\|I)=N(S-\|S\|I)=$张成$\{e_3,e_4,\dots\}$。~~于是~~

$$T=\begin{array}{c}\begin{matrix}M & M^\perp\end{matrix}\\\begin{pmatrix}2R & A_1\\ 0 & B_1\end{pmatrix}\begin{matrix}M\\ M^\perp\end{matrix}\end{array}\qquad S=\begin{array}{c}\begin{matrix}M & M^\perp\end{matrix}\\\begin{pmatrix}2R & A_2\\ 0 & B_2\end{pmatrix}\begin{matrix}M\\ M^\perp\end{matrix}\end{array},$$

其中，对于所有 $(x_n)\in M$，$R(x_1,x_2,\dots)=(0,x_1,x_2,\dots)$，

对于所有 $(x_1,x_2)\in M^\perp$，$A_1(x_1,x_2)=(\sqrt{2}x_2,0,\dots)$，对于所有 $(x_1,x_2)\in$，$B_1(x_1,x_2)=(0,x_1)M^\perp$.

对于所有 $(x_1,x_2)\in M^\perp$，$A_2(x_1,x_2)=(x_2,0,\dots)$，对于所有 $(x_1,x_2)\in$，$B_2(x_1,x_2)=(0,\sqrt{2}x_1)M^\perp$.

根据命题 2.17，对于所有 $x\in M^\perp$，我们有 $\|A_1x\|^2\ge\|B_1^*x\|^2-\|B_1x\|^2$。但是 $1=\|A_2e_2\|^2<\|B_2^*e_2\|^2-\|B_2e_2\|^2=2$。

接下来，我们考察一些充分条件，这些条件能够推出 $\mathcal{AN}(H)$ 中 $*$-超正规算子的正规性。

定理 2.19. 设 $T\in\mathcal{AN}(H)$ 是一个 $*$-超正规算子。若 T 可逆，则 T 是正规算子。

证明。令 X 表示 $\mathcal{B}(H)$ 中所有 $*$-拟正规算子的集合。则 $X=\cap_{k>0}\{T:T^{*2}T^2-2kTT^*+k^2I\ge0\}$ 是一个闭集。因此，$\mathcal{AN}(H)$ 中所有 $*$-拟正规算子组成的集合是闭的。由于 $\mathcal{B}(H)$ 中所有可逆算子组成的集合是开集，若 $T\in\mathcal{AN}(H)$ 是一个可逆的 $*$-拟正规算子，则存在一个可逆的 $*$-拟正规算子序列

$\mathcal{AN}$-算子 $\{T_n\}$，使得 $T_n \to T$ 在算子范数下成立。根据 [3, 定理 3.14],，对所有 $n \in \mathbb{N}$, T_n 都是正规的。因此 T 是正规的。□

我们进一步改进定理 2.19，如下所示:

推论 2.20. 设 $T \in \mathcal{AN}(H)$ 是一个 $*$-超正规算子。若 $N(T) = N(T^*)$，则 T是正规算子。

证明. 若 $T \in \overline{\mathcal{AN}(H)}$ 是紧算子，则由 [19, 定理 4.6]， T 是正规算子。若 T 不是紧算子，则由 [23, 推论 3.8]， $N(T)$ 是有限维的，且 $R(T)$ 是闭的。由于 $N(T) = N(T^*)$，我们有 $N(T)$ 约化 T。因此

$$T = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} N(T) & N(T)^\perp \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T_1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} N(T) \\ N(T)^\perp \end{array} \end{array},$$

其中 $T_1 \in \overline{\mathcal{AN}(N(T)^\perp)}$ 是一个可逆的、 $*$-超正规算子。因此，由定理 2.19，T_1 是正规算子，这进而意味着 T 是正规算子。□

推论 2.21. 设 $T \in \mathcal{AN}(H)$ 是一个 $*$-超正规算子。若 dim $N(T)$ =dim $N(T^*)$，则 T 是正规的。

证明. 若 T是 $*$-超正规的，则 $N(T) \subseteq N(T^2) \subseteq N(T^*)$。因此，dim $N(T)$ =dim $N(T^*)$ 蕴含 $N(T) = N(T^*)$。故由推论 2.20， T是正规的。□

推论 2.22. (1) 若 $T \in \mathcal{AN}(H)$ 是一个 $*$-超正规算子，且 dim $N(T)$ =dim$N(T^*)$，则 T 是正规的。(2) 若 $T \in \mathcal{AM}(H)$ 是一个 $*$-超正规算子，且 dim $N(T)$ =dim $N(T^*)$，则 T是正规的。

3. $*$-paranormal Toeplitz and Hankel operators in $\overline{\mathcal{AN}(H^2)}$

本节讨论一些具体算子（如 Toeplitz 算子和汉克尔算子）的相关结果，因为它们在许多领域都有应用。$\mathcal{AN}(H^2)$中的 Toeplitz 算子和汉克尔算子见 [22, 24]。在此背景下，我们进一步研究满足 ast-超正规性假设的这类算子。

令 L^2 表示复平面中单位圆 $\mathbb{T}$ 上关于归一化勒贝格测度 μ的所有平方可积函数构成的空间。对于圆上的任意本质有界可测函数 $\varphi \in L^\infty$，定义 Laurent 算子 L_φ : $L^2 \to L^2$ 如下:

$$L_\varphi f(z) = \varphi(z) f(z), \ \forall f \in L^2, z \in \mathbb{T}.$$

令 H^2 表示 L^2 的闭子空间，该子空间由所有负次傅里叶系数为零的函数组成。Laurent 算子可导出另外两个算子，分别称为 Toeplitz算子 $T_\varphi : H^2 \to H^2$，其定义为

$$T_\varphi f = P L_\varphi f \quad \text{for all } f \in H^2,$$

以及汉克尔算子 $H_\varphi : H^2 \to H^2$，其定义为

$$H_\varphi f = J(I-P)L_\varphi f \quad \text{for all } f \in H^2,$$

其中，P 是 L^2 到 H^2 上的正交投影，J 是定义在 L^2 上的酉算子，由 $J(z^{-n}) = z^{n-1}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 定义。众所周知，$\|L_\varphi\| = \|T_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$。

我们证明，在 $\mathcal{AN}(H^2)$ 中的 $*$-拟正规 Toeplitz算子是某个等距算子的数乘，而在 $\mathcal{AN}(H^2)$ 中的 $*$-拟正规汉克尔算子必为正规算子。

定理 3.1. 设 $\varphi \in L^\infty$。若 $T_\varphi \in \mathcal{N}(H^2)$ 是 $*$-拟正规算子，则 T_φ 是某个等距算子的数乘。

证明。由注 2.3 可得

$$\{f \in H^2 : \|T_\varphi^n f\| = \|T_\varphi\|^n \|f\|, n = 0, 1, 2, \ldots, \} \neq \{0\}.$$

因此，由 [31, 定理 6]，T_φ 是某个等距算子的数乘。 □

注 3.2. 设 $\varphi \in L^\infty$ 满足 $T_\varphi \in \mathcal{N}(H^2)$。那么，$T_\varphi$ 是超正规当且仅当 T_φ 是某个等距算子的数乘。

众所周知，根据 [23]，，范数达到算子这一类既不包含 $\mathcal{AN}$-算子的闭包，也不包含于其中。因此，我们刻画 $\mathcal{AN}(H^2)$ 中所有的超正规 Toeplitz 算子 $*$。

推论 3.3. 设 $\varphi \in L^\infty$。若 $T_\varphi \in \mathcal{AN}(H^2)$ 是超正规，则 T_φ 是某个等距算子的数乘。

证明. 设 $T_\varphi \in \mathcal{AN}(H^2)$。由于对所有 $\varphi \in L^\infty$，$\|T_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$，存在一个序列超正规 $*$-Toeplitz 算子 $\mathcal{AN}$，使得 T_{ψ_n} 在算子范数下收敛到 T_φ。由于 $\{T_{\psi_n}\} \subseteq \mathcal{N}(H^2)$，根据定理 3.1，我们有 $T_{\psi_n} = \alpha_n T_{\varphi_n}$，其中对所有 $n \in \mathbb{N}$ 和 $\alpha_n \in \mathbb{C}$，T_{φ_n} 都是等距算子。由于 $T_{\psi_n}^* T_{\psi_n} = |\alpha_n|^2$ 收敛到 $T_\varphi^* T_\varphi$，可知 $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有界，因此它存在一个收敛子列，该子列收敛到某个 $\alpha \in \mathbb{C}$。于是 $T_\varphi^* T_\varphi = |\alpha|^2$。这意味着 T_φ 是某个等距算子的数乘。□

注记 3.4. 设 $\varphi \in L^\infty$ 满足 T_φ 是 $*$-超正规。则 $T_\varphi \in \mathcal{N}(H^2)$ 当且仅当 $\mathcal{AN}(H^2)$。

证明. 证明可由定理 3.1 和推论 3.3 得出。 □

对于汉克尔算子，我们有如下结果。

定理 3.5. 设 $\varphi \in L^\infty$。若 $H_\varphi \in \mathcal{N}(H^2)$ 是 $*$-超正规，则 H_φ 是正规算子。

证明. 由注 2.3 和 [31, 定理 7], 可知，H_φ 是正规算子。 □

注记 3.6. 设 $\varphi \in L^\infty$ 满足 $H_\varphi \in \mathcal{N}(H^2)$。则 H_φ 是 $*$-超正规，当且仅当 H_φ 是正规算子。

Coro推论 3.7. 设 $\varphi \in L^\infty$。如果 $H_\varphi \in \mathcal{AN}(H^2)$ 是 $*$-超正规算子，那么 H_φ 是正规算子。

证明。设 $H_\varphi \in \overline{\mathcal{AN}(H^2)}$。由于对所有 $\varphi \in L^\infty$都有 $\|H_\varphi\| \leq \|\varphi\|_\infty$，存在一列 $*$-超正规 $\mathcal{AN}$- 汉克尔算子 $\{H_{\varphi_n}\}$，使得 $\{H_{\varphi_n}\}$ 在算子范数下收敛于 H_φ。由于 $\{H_{\varphi_n}\} \subseteq \mathcal{N}(H^2)$，根据定理 3.5，对于所有 $n \in \mathbb{N}$，我们有 H_{φ_n} 是正规算子。因此，H_φ 是正规算子。□

注 3.8. 设 $\varphi \in L^\infty$ 满足 H_φ 是 $*$-超正规。则 $H_\varphi \in \mathcal{N}(H^2)$ 当且仅当 $H_\varphi \in \mathcal{AN}(H^2)$。

证明. 证明可由定理 3.5 和推论 3.7 得出。 □

Funding

第一作者获得印度政府 SERB 项目资助，项目编号为 MTR/2019/001307。第二作者获得科学技术部 INSPIRE 奖学金资助（项目编号：DST/INSPIRE FELLOWSHIP/2018/IF180107）。

Data Availability

由于本研究未生成或分析任何数据集，因此本文不适用数据共享。

Conflict of interest

作者声明不存在利益冲突。

References

[1] S. C. Arora 和 J. K. Thukral，关于一类算子，Glas. Mat. Ser. III 21(41) (1986)，第 2 期，381–386。[2] N. Bala 和 R. Golla，绝对最小值达到算子的谱性质，Banach J. Math. Anal. 14 (2020)，第 3 期，630–649。[3]N. Bala， $*$-拟正规绝对范数达到算子的表示与正规性，arXiv:2203.14021。[4] S. K. Berberian，关于亚正规算子的一则注记，Pacific J. Math. 12 (1962)，1171–1175。[5] B. V. Rajarama Bhat、T. C. John 和 R. Srinivasan，无限模量子高斯态，Rev. Math. Phys. 31 (2019)，第 9 期，1950030，共 33 页。[6] R. Bouldin，本质最小模，Indiana Univ. Math. J. 30 (1981)，第 4 期，513–517。[7] X. Carvajal 和 W. Neves，达到范数的算子，Integral Equations Operator Theory 72 (2012)，第 2 期，179–195。[8] X. Carvajal 和 W. Neves，达到其最小值的算子，Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.) 45 (2014)，第 2 期，293–312。[9] J. B. Conway， *A course in functional analysis*，第二版，Graduate Texts in Mathematics，第 96 卷，Springer-Verlag，纽约，1990。[10] T. Furuta，关于拟正规算子类，Proc. Japan Acad. 43 (1967)，594–598。[11] J. Ganesh、G. Ramesh 和 D. Sukumar，绝对最小值达到算子的刻画，J. Math. Anal. Appl. 468 (2018)，第 1 期，567–583。[12] Y. M. Han 和 A.-H. Kim，关于 $*$-拟正规算子的一则注记，Integral Equations Operator Theory 49 (2004)，第 4 期，435–444。[13] A.H. Kim，
A note on Weyl's theorem for $*$-paranormal operators，Commun. Korean Math. Soc. 27 (2012)，第 3 期，565–570。

[14] V. Istr˘at.escu、T. Sait^o 和 T. Yoshino，关于一类算子，Tohoku Math. J. (2) 18 (1966)，410–413。[15] V. M¨uller， *Spectral theory of linear operators and spectral systems in Banach algebras*，第二版，算子理论：进展与应用，第 139 卷，Birkh¨auser Verlag，巴塞尔，2007。[16] S. K. Pandey 和 V. I. Paulsen，$\mathcal{AN}$-算子的谱刻画，澳大利亚数学会杂志 102 (2017)，第 3 期，369–391。[17] C. R. Putnam，关于亚正规谱面积的不等式，数学杂志 116 (1970)，323–330。[18] C. Qiu，具有可数谱的拟正规算子是正规算子，数学研究与评论 7 (1987)，第 4 期，591–594。[19] M. H. M. Rashid，关于 n-$*$-拟正规算子，Commun. Korean Math. Soc. 31 (2016)，第 3 期，549–565。[20] M. H. M. Rashid，关于全 n-$*$-拟正规算子的一些结果，海湾数学杂志 5 (2017)，第 3 期，1–17。[21] G. Ramesh，绝对范数达到的拟正规算子，J. Math. Anal. Appl. 465 (2018)，第 1 期，547–556。[22] G. Ramesh 和 S. S. Sequeira，绝对范数达到的 Toeplitz 算子与绝对最小值达到的汉克尔算子，J. Math. Anal. Appl. 516 (2022)，第 1 期，论文编号 126497。[23] G. Ramesh 和 S. S. Sequeira，关于绝对范数达到算子的闭包，已被《线性与多重线性代数》接收，https://doi.org/10.1080/03081087.2022.2126426。[24] G. Ramesh 和 S. S. Sequeira，绝对最小值达到的 Toeplitz 算子与绝对范数达到的汉克尔算子，即将在巴黎科学院数学报告发表。[25] G. Ramesh 和 S. S. Sequeira，闭包中的亚正规算子的表示与正规性$\mathcal{AN}$-算子，https://doi.org/10.48550/arXiv.2208.06574。[26] M. Reed 和 B. Simon， *Methods of modern mathematical physics. III*，学术出版社，纽约，1979。[27] B. Simon， *Operator theory*，分析学综合课程，第 4 部分，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2015。[28] J. G. Stampfli，亚正规算子，Pacific J. Math. 12 (1962)，1453–1458。[29] K. Tanahashi 和 A. Uchiyama，关于 $*$-拟正规算子及相关算子类的一则注记，韩国数学会会刊 51 (2014)，第 2 期，357–371。[30] D. Venku Naidu 和 G. Ramesh，关于绝对范数达到算子，印度科学院数学科学论文集 129 (2019)，第 4 期，论文编号 54，共 17 页。[31] T. Yoshino，达到范数的 Toeplitz 算子与汉克尔算子的结构，日本海数学杂志 13 (2002)，第 1 期，43–55。

G. Ramesh, Department of Mathematics, IIT Hyderabad, Kandi, Sangareddy, Telangana-502284, India.*Email address*: rameshg@math.iith.ac.in
Shanola S. Sequeira, Department of Mathematics, IIT Hyderabad, Kandi, Sangareddy, Telangana- 502284, India.

Email address: ma18resch11001@gmail.com