arXiv:2302.00917v2 [quant-ph] 4 Feb 2025

从戴森模型到多体量子混沌

Alexei Andreanov,[1, 2, *] Matteo Carrega,[3, †] Jeff Murugan,[4, 5, ‡] Jan Olle,[6, §] Dario Rosa,[7, 1, 2, ¶] 以及 Ruth Shir[8, **]

[1] *Center for Theoretical Physics of Complex Systems, Institute for Basic Science (IBS), Daejeon - 34126, Korea*

[2] *Basic Science Program, Korea University of Science and Technology (UST), Daejeon - 34113, Korea*[3] *CNR-SPIN, Via Dodecaneso 33, 16146 Genova, Italy*[4] *The Laboratory for Quantum Gravity & Strings, Department of Mathematics and Applied Mathematics, University of Cape Town, South Africa*

[5] *The National Institute for Theoretical and Computational Sciences, Private Bag X1, Matieland, South Africa*

[6] *Max Planck Institute for the Science of Light, Erlangen, Germany*

[7] *ICTP South American Institute for Fundamental Research*_Instituto de Física Teórica, UNESP - Univ. Estadual PaulistaRua Dr. Bento Teobaldo Ferraz 271, 01140-070, São Paulo, SP, Brazil*

[8] *Department of Physics and Materials Science, University of Luxembourg, L-1511 Luxembourg*（日期：2025年2月5日）

深入理解多体量子混沌背后的机制，是当代理论物理面临的重大挑战之一。我们在一组定义于图上的受微扰二次 Sachdev-Ye-Kitaev (SYK) 哈密顿量中探讨这一问题。这使我们能够厘清底层单粒子问题的几何性质与相互作用项的重要性，并表明前者是促成单粒子到多体混沌转变的主导因素。我们利用先进的数值技术对结果进行了数值验证，这些技术能够从非常大的哈密顿量中提取所需能量窗口内的本征值。我们的方法本质上提供了一种从单粒子视角理解多体混沌的新途径。

I. 引言

20世纪90年代短暂沉寂之后，量子混沌重新成为一个极为活跃的研究领域，其影响广泛，涉及黑洞物理和奇异金属等迥异领域。这个领域早在量子力学诞生之初便已兴起，并随着具有开创性的 Bohigas-Giannoni-Schmit 猜想（BGS）的提出而达到高潮， 1984 [1, 2], 该猜想确立了这样一种观点：量子混沌系统的能级之间存在关联，而从随机哈密顿量中采样得到的能级也会呈现同样的关联；后者由随机矩阵理论（RMT）描述， [3]。进而，这种等价关系催生了普适性这一概念。例如，量子混沌系统的许多动力学特征（尤其是瞬态动力学结束后仍然存在的长时间特征）并不依赖于所研究特定系统的细节。BGS 猜想已在许多情境中接受检验，其中台球系统尤为典型，因此如今它被视为单粒子（或至少是少体）系统中量子混沌的定义。关于单粒子系统中量子混沌的详尽讨论，请参阅文献4 和5 。

量子多体系统，即由许多自由度构成的系统，情况则复杂得多。例如，当前实验装置中大多数相关的多体系统（如由自旋粒子或量子比特构成的系统）并没有经典极限，因此讨论量子混沌会很棘手，因为没有可供比较的经典混沌系统，也无法考察量子到经典的转变。在这种情况下，讨论发生热化的多体系统往往更有用；在本征态热化假说（ETH）的框架下， [6, 7]可以建立热化性质与多体能级之间的随机矩阵理论关联之间的联系 [8]。

另一个复杂性来源在于，由许多 无相互作用的 单粒子系统组合而成的多体系统，从多体角度看总是 非混沌的 ，无论其单粒子组分有多么混沌。产生这一性质的原因在于，多体能级由单粒子能级的大量叠加构成，从而消除了单粒子能级之间可能存在的任何关联。鉴于此，研究单粒子混沌与多体混沌之间的关系就变得很有意义，因为这两种现象彼此相关，但并不完全等价。相应地，这项研究旨在确定相互作用在产生多体随机矩阵理论关联中的作用。近年来，已有研究探讨了这一系列问题，尤其是文献 9–11，其中作者研究了一个典型的随机矩阵理论可观测量——谱形因子（其定义见第 IV 节）——在无相互作用的混沌粒子

* aalexei@ibs.re.kr
† matteo.carrega@spin.cnr.it
‡ jeff.murugan@uct.ac.za§
jan.olle@mpl.mpg.de
¶ dario rosa@ictp-saifr.org
** ruth.shir@uni.lu

系统中的行为。他们的结果表明，单粒子关联仍会影响多体统计，使多体谱形因子中出现“指数增长段”，而非线性增长段。

本文进一步探索单粒子混沌与多体混沌之间的联系。我们考察一组定义在连通性和几何结构各不相同的图上的单粒子系统。随后，通过在哈密顿量中加入一个单个四次项，使这些单粒子系统发生形变，成为“最简多体”系统，从而在一个其余部分不含相互作用的系统中实现某种相互作用杂质。在这一框架下，我们研究这个单一杂质在何种条件下足以使多体能级呈现随机矩阵理论型关联。

令人惊讶的是，我们基于大规模稀疏对角化技术所得的数值结果表明，只要单粒子图具有足够强的非局域性，这个单一杂质确实足以使多体能级呈现随机矩阵理论型关联。相比之下，如果单粒子图具有很强的局域几何结构，多体能级则不会呈现随机矩阵理论型关联。总而言之，我们的结果凸显了单粒子物理在形成多体量子混沌过程中的重要性。相互作用项的作用似乎居于次要地位，它主要提供一个局部作用点，使单粒子能级能够发生杂化和混合，进而形成多体随机矩阵理论型关联。我们还将对底层单粒子系统的混沌性质进行初步分析。由此可以清楚地看出，随着图的几何结构变化，该系统呈现单粒子混沌／非混沌交叉。这一观察使我们得出结论：只要底层单粒子问题在单粒子意义上是混沌的，即便单个杂质也足以形成多体量子混沌。

本文安排如下。在第 II 节，我们介绍所研究的系统、其主要特征，以及用于定义单粒子设置的图。在第III 节，我们通过短程随机矩阵理论可观测量表明，所研究的系统会随底层图的几何形状而呈现混沌／可积交叉。我们还基于有限尺寸标度分析，估算了这一交叉在热力学极限下的走向。在第 IV节，我们基于谱形因子分析同一转变；谱形因子探测的是长程关联。我们将这一分析的结果与第 III节的分析进行比较。最后，在第 V节，我们对研究发现给出启发式解释，并展望可能的后续研究方向。

II. 带单个杂质的 SYK：从单粒子到多体

近年来，含无序马约拉纳费米子的 Sachdev-Ye-Kitaev (SYK) 模型已成为一类有用的玩具模型，可用于研究与多体量子混沌相关的问题 [12–16]。

在此背景下，我们考察如何通过对多体 量子混沌性质进行最小修改，使其从单粒子 问题中涌现。为此，我们考虑以下哈密顿量

$$\hat{\mathcal{H}} = -\mathrm{i}\sum_{G(E,V)} J_{ij}\hat{\gamma}^i\hat{\gamma}^j + \hat{\gamma}^1\hat{\gamma}^2\hat{\gamma}^3\hat{\gamma}^4 \,, \tag{1}$$

其中，在图上定义并由无序邻接矩阵 J_{ij} 表示的单粒子问题，受到一个四次项的扰动，我们将其称为杂质。算符 $\hat{}\gamma^i$（其中 $i = 1, \ldots\ldots, N$）是马约拉纳费米子，满足 $\{\hat{}\gamma^i, \hat{}\gamma^j\} = \delta^{ij}$。图 $G(E,V)$由一组 N 个顶点 V 和边 $E \subseteq V \otimes V$ 构成，并通过以下规则编码式（1）中二次项的连通性。我们为每个顶点 $i \in V$指定一个马约拉纳算符 $\hat{}\gamma^i$ ，并为每条边（i, j）指定一个耦合 J_{ij}。耦合 J_{ij} 是从均值为零、方差为$\langle J_{ij}^2\rangle = (N-1)/2n_E$的高斯分布中抽取的随机变量，其中 n_E 是 $\hat{}G(E, V)$中的边数。为使 H 厄米，我们施加条件 $J_{ij} = -J_{ji}$。

在所有可能的图 G中，我们选择小世界图 [17, 18], ，因为文献 19 已表明，式 (1) 中哈密顿量二次部分的某些动力学特征（例如算符离域）对定义这一类图的参数 k 和 p 十分敏感。更具体地说，这些参数分别是一个整数 k 和一个概率 $p \in [0, 1]$。小世界图样本由 Watts-Strogatz 算法 [17]生成，其步骤如下：给定 k的值，首先生成一个规则循环网络，其中每个顶点都与其 $2k$ 个最近邻相连。随后以概率 p随机重连边，同时保持图连通，并避免出现自环和边重复[20]。值得注意的是，图中的边数仅取决于 k ，即 $n_E = kN$；而其局域性则由 p控制，该参数使网络在规则晶格（当 $p = 0$时）与随机 Erd¨os-Renyi 图 [21, 22]（当 $p \approx 1$时）之间连续变化。下文中，我们固定 $k = 2$，以便在保留局部环的同时尽可能保持模型稀疏。然后令 p 在 0 到 1 之间变化。

式（1）中出现的两类项，其作用截然不同。二次项本质上是单粒子的。与标准 SYK_2 哈密顿量非常相似，它以厄米的无序邻接矩阵 $-\mathrm{i}J_{ij}$ 为基础定义；该矩阵本身可视为定义了一个存在于图 $G(E,V)$上的无序单粒子量子问题。这个问题是 Dyson 型的，即无序体现在跃迁项 [23–26], 中；格点现场能量全为零，因为 $J_{ii} = 0$，而另一层

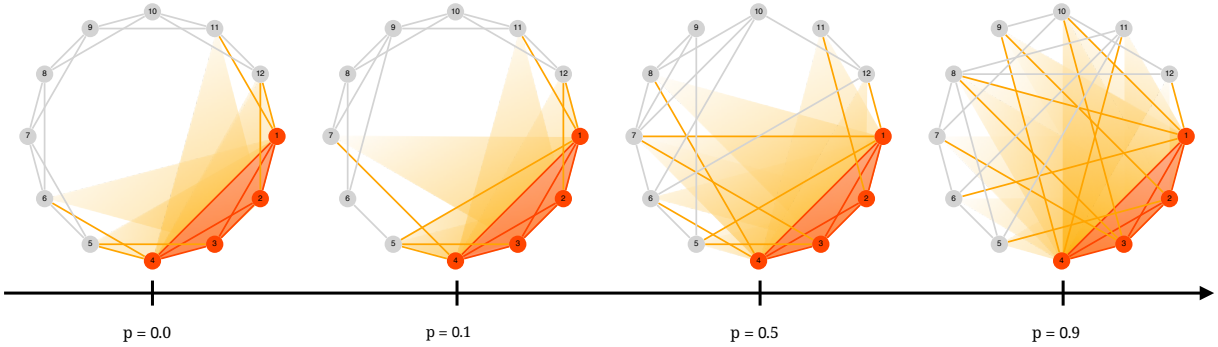

图 1. 哈密顿量（1）的示意图，其中包含 $N = 12$ 马约拉纳费米子。在由具有 $k = 2$ 和重连概率 p（灰色边）的 Watts-Strogatz 图描述的二体相互作用之上，马约拉纳费米子 1、2、3 和 4 通过四体相互作用（红色）相互作用；橙色边表示相互作用的费米子与系统其余部分之间的连接。随着重连概率增加，这一单独四体相互作用的影响也随之增强（橙色阴影）。

无序则来自图的随机几何结构。在这一设定中，后者是唯一可调的无序。二次项由乘积 $\hat{\gamma}^i\hat{\gamma}^j$ 补全。注意，鉴于算符 $\hat{\gamma}^i$ 具有马约拉纳性质，二次哈密顿量 $h_{\text{single}} = -\mathrm{i}J_{ij}\hat{\gamma}^i\hat{\gamma}^j$ 不会守恒粒子数，但会守恒粒子数的宇称。稍微宽泛地使用术语，我们因此可以将 h_{single} 视为把单粒子 Dyson 哈密顿量嵌入多体体系的一种平凡方式。然而，这种嵌入之所以必须被视为平凡，是因为多体能级只是由 Dyson 问题所定义的单粒子能级线性组合而成，并不存在相互作用。因此，从多体的角度看，它们始终是非混沌的，即不会表现出能级排斥和/或谱刚性。

因此，只需最少限度地加入单项 $\hat{\gamma}^1\hat{\gamma}^2\hat{\gamma}^3\hat{\gamma}^4$ 即可形成真正的多体图景。该项为四次项，会使单粒子能级发生混合。然而，这种混合程度很小，因为它只发生在 $G(E, V)$ 的 4 个顶点上，无论底层单粒子问题有多大，换言之，无论 N 有多大。图 1以示意图形式展示了这种四体相互作用对系统的影响。我们的目标是探究这一最小相互作用项是否足以在能级之间诱发多体量子混沌，以及在什么条件下能够做到这一点。

为与近期文献进行比较，我们注意到，文献 27–31 研究了一个由单杂质项扰动的多体可积哈密顿量，例如方程（1）中的四次项。另一方面，文献32 研究了一个单粒子哈密顿量，类似于方程（1）中的二次项，但受到一个广延的多体哈密顿量的扰动。最后，在一种相反的情形中，一个广延的多体哈密顿量受到单粒子哈密顿量的（周期性时间）扰动，这已在文献33和34中有所研究。我们的设置在概念上不同于上述所有情形：广延的这些项仅为二次项，构成一个单粒子问题。随后，这个单粒子无序问题受到一个单一多体杂质的扰动。此外，需要强调的是，这个杂质并非微扰性的，即其大小与众多广延单粒子项处于同一量级。这一设置将使我们能够理解，单粒子混沌如何嵌入并诱导多体混沌。

III. R 比值

为了初步衡量多体能级的混沌性，我们计算众所周知的r 比值 [35]。这些量可以从按升序排列的多体能级 $E_1 < E_2 < E_3, \ldots$ [36] 出发计算。由此可计算相应的能级间距 $s_1 = E_2 - E_1$, $s_2 = E_3 - E_2$。.....最后得到 r 比值

$$r_i \equiv \frac{\min(s_{i+1}, s_i)}{\max(s_{i+1}, s_i)}. \tag{2}$$

文献35表明，平均 r比值在具有随机矩阵理论关联的谱与无关联谱中取不同的特定值。具体而言，记 $\langle r\rangle$ 为对无序实现取平均后得到的 r比值，则 $\langle r\rangle \sim 0.60266$ 对于遵循高斯酉系综关联的混沌谱（例如式（1）中的哈密顿量，其二次项会破坏时间反演对称性），以及 $\langle r\rangle \sim 0.38629$ 对于非混沌哈密顿量，其能级呈现泊松关联。

r-比值具有一些特性，使其成为数值研究中探测短程（能量尺度约为平均能级间距）混沌相关的非常有用的工具。具体而言，它们无需根据平均能级密度对能级进行展开。此外，它们是非常广延的量，也就是说

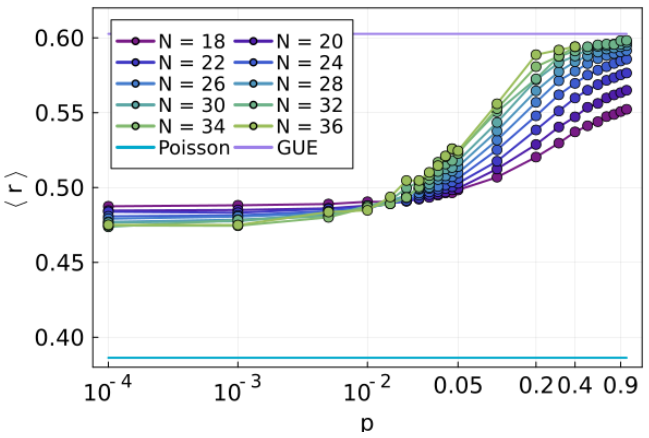

图 2. r 比值 $\langle r\rangle$ 随底层图的重连概率 p 变化的情况，计算所用的哈密顿量为式 $\mathcal{H}$ (1) 中的 ˆ。

ˆ 对于给定的哈密顿量 $\mathcal{H}$，只需取极少数相邻特征值（至少¯3 个），并使其接近某个目标能量 E，即可计算这些比值。随后，可以对许多无序耦合 J_{ij} 的实现和图实现的结果取平均。

这些性质使 r比值成为适合通过稀疏对角化算法研究的量，并且常用于大型对角化研究。本文采用切比雪夫滤波 Lanczos 算法（该算法见参考文献37–39，并在参考文献 40中使用 Julia 语言实现），对式 (1) 的哈密顿量进行数值计算；对于每个系综样本，在目标能量 ¯ 附近获得约 300 个本征值，即 $E = 0$，也就是能带中心 [41]。利用这些技术，我们计算了 r比值在多个重连概率 p 下的结果，系统尺寸从 $N = 18$ 到$N = 36$ 马约拉纳费米子。结果取至少 1000 次系综样本的平均值；对于最大的 $N = 36$，结果见图 2。

从图中可以看出，$\langle r\rangle$ 会发生交叉变化：当 p极低时，其取值远低于高斯酉系综值；当 p足够大时，则接近高斯酉系综值。此外，随着系统尺寸 N增大，交叉变化会变得更加陡峭。最后可以看到，曲线的交点出现在 $p \approx 0.01$ 处，而且没有明显的交点漂移。这两项观察似乎表明，在热力学极限下可能发生的是真正的相变，而非平滑的交叉变化。另一方面，我们看到，当 p 极小时，r-比值仍远未达到预期的泊松值，$\langle r\rangle \approx 0.478$，不过随着系统尺寸增大，其值呈现出下降趋势。这表明有限尺寸效应仍然很强，要研究热力学极限下交叉变化的行为，还需要大得多的系统尺寸。

通过以下方式进一步研究该转变/交叉行为

对 r比值进行有限尺寸标度分析，假设其遵循与通常的三维安德森模型相同的单参数标度假设 [42, 43]。为此，我们基于以下 r比值的标度行为 Ansatz

$$\langle r(N,p)\rangle = \Theta\left(\mathrm{sign}\,(p-p_c)\left(\frac{N}{\xi(N,p)}\right)^{1/\nu}\right), \qquad (3)$$

其中，函数 Θ 未知，临界概率记为 p_c，临界指数记为 ν（并且必须作为拟合参数处理）；最后，对于关联长度 ξ（N， p），我们考虑了以下两种幂律形式 Ans¨atze（分别称为固定无序假设和漂移无序假设）

$$\xi_1 = \frac{1}{\left|p-p_c^{(0)}\right|^{\nu}}, \qquad \xi_2 = \frac{1}{\left|p-(p_c^{(0)}+p_c^{(1)}N)\right|^{\nu}}, \qquad (4)$$

其中临界概率参数 $p_c^{(0)}$ 和 $p_c^{(1)}$ 也作为拟合参数处理。随后，使用参考文献 44 的代价函数法确定拟合参数。该方法引入一个合适的代价函数 $\mathcal{C}(\langle r\rangle,\nu,p_c^{(0)},p_c^{(1)})$，用于衡量按变量 $\chi \equiv \mathrm{sign}(p-p_c)\,(N/\xi)$ 的值排序后， r 比值的非单调性。然后，通过要求拟合参数取值使 $\mathcal{C}(\langle r\rangle,\nu,p_c^{(0)},p_c^{(1)})$ 最小，来确定这些参数；也就是说，要求 $\langle r\rangle$ 关于 χ 的函数关系尽可能单调。

对于 $\langle r\rangle$数据塌缩的结果，无论采用固定还是漂移无序 Ansatz，均报告于图3中。从图中以及最小化后的代价函数值（见图3的图注）可以看出，两种 Ans¨atz 的表现相当，尽管漂移 Ansatz 多了一个拟合参数。与此相关，临界重连概率 p_c对系统尺寸相当不敏感，其取值为 $p_c \approx 0.01$，这与图2中可见的交点大致位置一致。有限尺寸标度分析对方程（4）中标度 Ansatz 具体形式的依赖较弱，这表明有限尺寸下获得的数值数据及相应有限尺寸分析具有可靠性。另一方面，我们注意到所得临界指数值相当低， $\nu \approx 0.35$。对于多体系统而言，如此低的临界指数并非预期之中（回想一下，著名的无序海森堡模型的 Harris 界在 $d = 1$ 预言 $\nu \geq 2$），这暗示有限尺寸效应很强 [45]。最后，我们注意到有限的 N 漂移系数 $p_c^{(1)}$虽然很小，却是负值。如果这一趋势并非有限尺寸效应，而是一种稳健现象，那么这意味着在热力学极限下，临界概率会消失，ˆ$p_c \to 0$，并且多体哈密顿量 $\mathcal{H}$ 始终处于混沌状态。尽管这种情形不太可能，而且

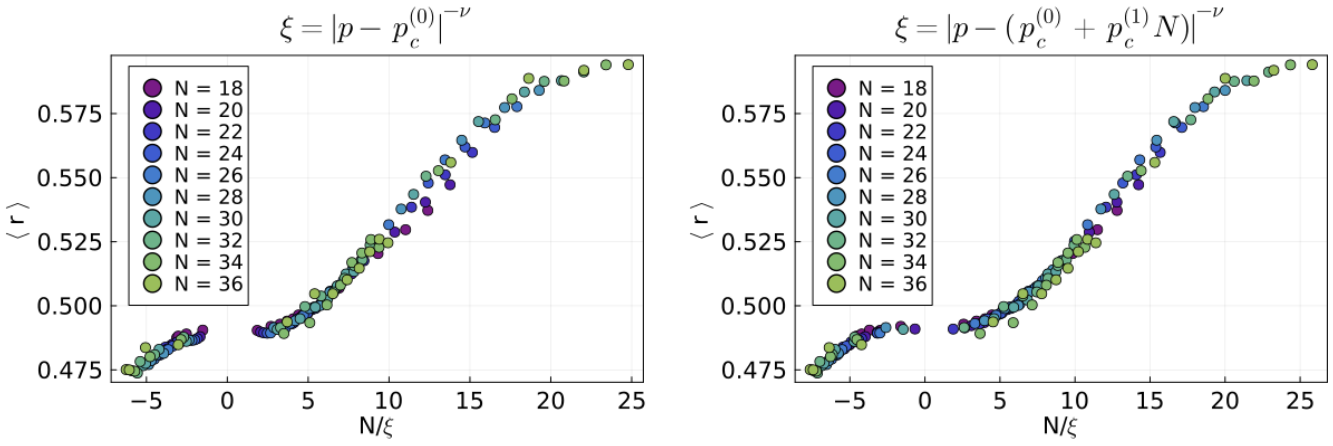

图 3. 采用代价函数法优化自由参数后，计算得到的 r 比值 $\langle r(N,p)\rangle$ 随变量 N/ξ 的数据塌缩（当 p 小于临界概率时，则随 $-N/\xi$ 变化）。左图：通过固定无序 Ansatz 进行最小化（公式（4）中的 ξ_1 ）。临界指数为 $\nu \approx 0.35647$，参数 $p_c^{(0)}$ 为 $p_c^{(0)} \approx 0.012340$ ，代价函数的最小值为 $\mathcal{C} \approx 1.65044$。右图：通过漂移无序 Ansatz 进行最小化（公式（4）中的 ξ_2 ）。临界指数为 $\nu \approx 0.35072$，参数 $p_c^{(0)}$ 为 $p_c^{(0)} \approx 0.02974$ ，而 $p_c^{(1)}$ 为 $p_c^{(1)} \approx -0.00048$，因此得到的临界概率与固定无序 Ansatz 中得到的数值非常接近。代价函数的最小值为 $\mathcal{C} \approx 1.62143$。

更合理的解释是，临界概率的负漂移属于有限尺寸效应，会在大-N极限下消失，但我们目前的数据不足以排除这种可能性。

IV. 谱形因子

根据定义， r-比率探测的是能量尺度约为平均能级间距的能级关联。相反，对于彼此相距甚远的能级之间的关联，它们完全不敏感。为了研究这些方面，我们现在针对若干个 p 值考察谱形因子（SFF）。谱形因子定义如下： [46, 47]

$$G(\tau) \equiv \frac{1}{Z}\left\langle \left| \sum_{n=1}^{D} \rho(\epsilon_n) \exp\left(-i2\pi\epsilon_n \tau\right) \right|^2 \right\rangle , \qquad (5)$$

其中符号 $\langle\cdot\rangle$ 表示对高斯耦合和随机图取平均。此外，我们将给定对称性扇区中的希尔伯特空间维数记为 D（在当前情况下，我们有$D = 2^{\frac{N}{2}-1}$），因子 Z的选取确保了$G(\tau) \to 1$对于 $\tau \to \infty$成立。展开后的能级记为 ϵ_n，函数 $\rho(\epsilon_n)$ 是一个高斯滤波函数，其作用是抑制（展开后的）本征值分布边缘处的贡献，并放大能带中心附近能级的贡献 [48]。关于展开程序、 Z的定义以及滤波函数 $\rho(\epsilon_n)$ 的定义，详见参考文献47 。

容易证明，谱形因子是密度-密度关联函数的傅里叶变换。因此，它可用于研究长程能量关联以及谱刚性 [5] 的存在与否。特别是，可以从中提取所谓的*Thouless* 时间， τ_{Th}，即一个时间尺度（以平均能级间距倒数为单位，也称为海森堡时间），超过该尺度后，混沌量子系统的时间演化便可由随机矩阵理论描述。需要强调的是，按定义，计算谱形因子需要知道整个多体谱。因此，无法使用稀疏对角化技术计算它，而必须采用完全对角化算法。

我们计算了所考虑模型在以下取值下的谱形因子：$p = 0.0$，$0。1$，$0。5$，$1。0$；系统尺寸从 $N = 18$ 到 $N = 32$不等。结果与随机矩阵理论（高斯酉系综）的预测值一同绘于图 4。

从图中可以看出，对于 $p = 0.0$ 和 0.1，谱形因子 没有 表现出任何类似随机矩阵理论的行为。具体而言，它没有呈现谱刚性所决定的线性斜坡。根据第 III节的结果，对于 $p = 0.0$而言，这一结果并不意外。相反，对于 $p = 0.1$ 来说，这多少有些令人惊讶，因为 $p = 0.1$ 远大于临界概率 $p_c \approx 0.012$，这一点可通过 r比率测得。从这一观察中可以得出的结论是，随着 p 增大，系统呈现量子多体混沌性质的过程十分缓慢，并且 $p_c \approx 0.012$ 是诱发短程随机矩阵理论关联所需的概率，但要使这些关联在更大的能量尺度上保持稳健，重新连线的概率还需要大得多。

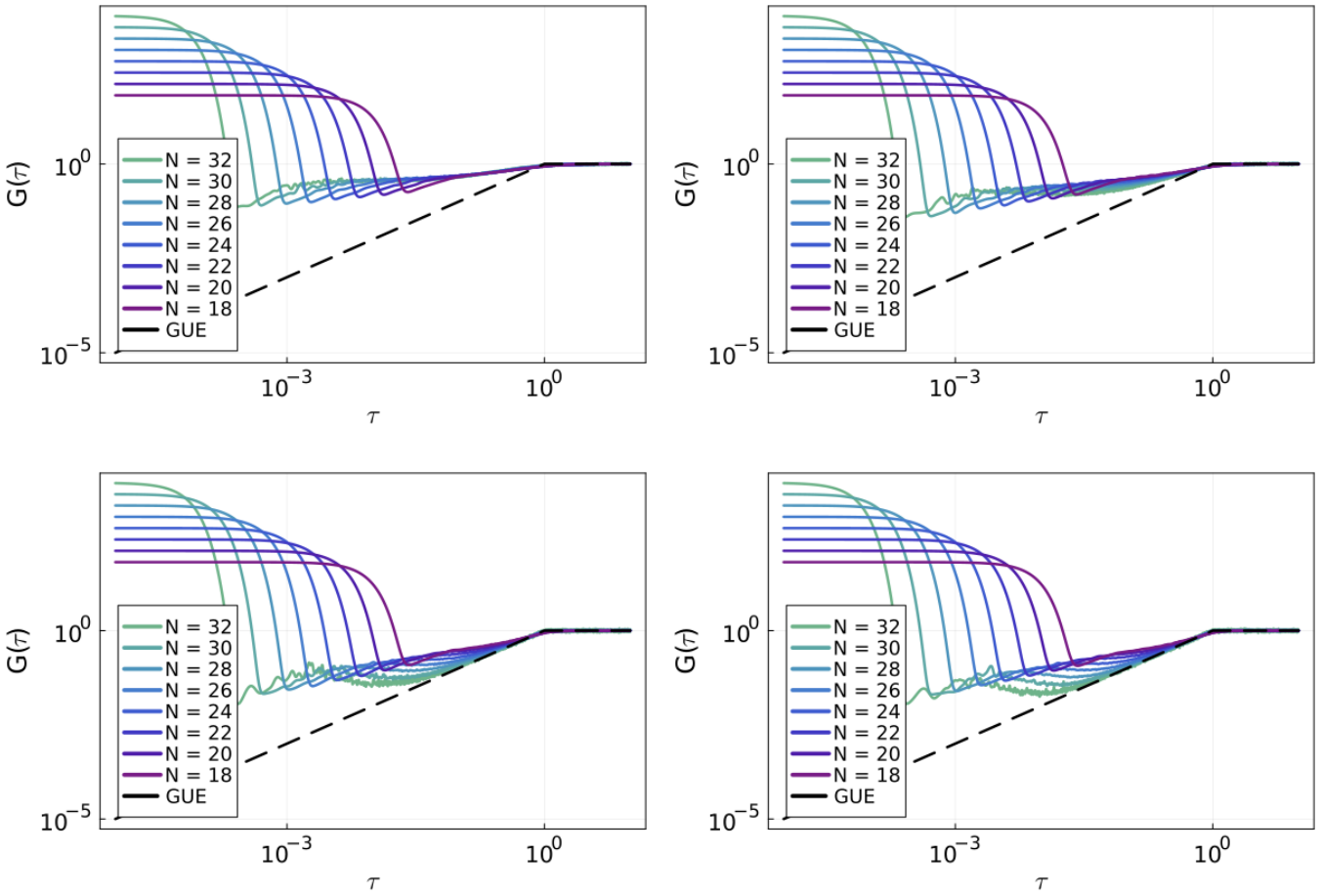

图4. 对于 $p = 0.0$ (左上)、 $p = 0.1$ (右上)、 $p = 0.5$ (左下) 和 $p = 1.0$ (右下) 的取值，计算了系统尺寸从 $N = 18$ 到 $N = 32$ 的谱形因子。系综平均是对数千个无序和图实现取平均，其中 $N = 32$ 至少取 5000 个。

这些随机矩阵理论关联在更大的能量尺度上保持稳健。

通过观察 $p = 0.5$ 和$p = 1.0$可以证实这一图景。在这种情况下，谱形因子呈现出高斯酉系综预期的类似斜坡行为。特别是，我们看到τ_{Th} （定义为谱形因子与高斯酉系综曲线相符的时刻）随着系统尺寸增大而不断减小（以海森堡时间为单位），这表明模型在这些 p取值下具有遍历性。值得注意的是，与标准 SYK 模型（包括其稀疏推广）不同，谱形因子呈现出一个中间区间，位于初始下降结束与由 Thouless 时间界定的线性斜坡之间。在这一时间窗口内，谱形因子表现出某种混合行为，让人想起质量变形SYK模型的谱形因子所呈现的类似行为 [47, 49, 50]，后者在质量变形强度取中间值时会出现这种行为。值得强调的是，对于质量变形SYK模型，这个中间区间并不排斥在质量变形参数足够小时出现完全遍历的 SYK_4 谱形因子，正如参考文献51中的解析证明所示。另一方面，根据在此呈现的数值结果中，我们未能找到足够大的 p 值，使谱形因子完全呈现遍历性。

V. 讨论与展望

总而言之， r比值和谱形因子的分析结果清楚地表明，式（1）所描述的多体模型会随着重连概率的变化，在可积与混沌之间发生交叉 p，进而改变定义哈密顿量二次部分的图的几何结构。

从启发式角度看，这可以解释如下：首先，哈密顿量的二次部分总可以通过正则玻戈留波夫变换 $\hat{\mathcal{U}}$对角化为如下形式

$$\hat{\hat{H}}_2 = -\mathrm{i} \sum_{i \in \mathrm{odd}} \epsilon_i \hat{\chi}^i \hat{\chi}^{i+1}, \tag{6}$$

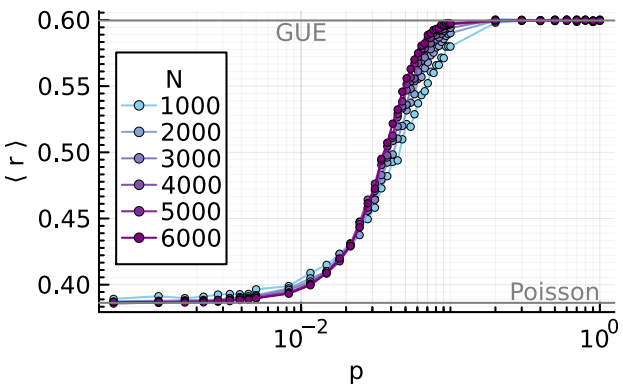

图 5. 随着底层图的重连概率变化，$\langle r\rangle$ 的泊松值向耦合矩阵 iJ_{ij} 的高斯酉系综值转变。对于每个 N，我们生成一张重连概率为 p的连通图。随后针对该图，对权重 J_{ij}的 30 或 50 个随机实现进行系综平均。对于每个 N，我们至少重复这一过程 10 次，并再次取平均。

ˆ 其中 ϵ_i 是单粒子能级。由于 $\mathcal{U}$是正则的，新的马约拉纳费米子 ˆχ^i 满足标准的反对易关系 $\{\hat{\chi}^i,\ \hat{\chi}^j\} = \delta^{ij}$，也就是说，它们与算符 ˆ$\gamma^i$同样基础。用新的费米子 ˆ$\chi^i$表示时，模型对图的几何结构的依赖被掩盖了，因为这种依赖编码在单粒子能级 ϵ_i和新的马约拉纳费米子的定义 ˆχ^i中。

为了进一步深入理解，考虑完整的 哈密顿量 H，见式（1）。用费米子χ^i 表示，可写为

$$\hat{\mathcal{H}} = -\mathrm{i}\sum_{i\in\mathrm{odd}} \epsilon_i \hat{\chi}^i\hat{\chi}^{i+1} + \hat{\tilde{H}}_4(\hat{\chi}^i)\,, \tag{7}$$

ˆ 其中，表达式 $\tilde{H}_4$(ˆχ^i) 表示通过对相互作用项 ˆγ^1ˆγ^2ˆγ^3ˆγ^4 施加 $\mathcal{U}$ 而得到的四次哈密顿量。

由此我们可以得出结论：一旦将模型改写为式（7）的形式，若 $\tilde{H}_4$(ˆχ^i)包含广延数量的项，则模型具有多体混沌性质。这一结论与关于稀疏版 SYK 的研究一致；这些研究表明，只要保留广延数量的项，稀疏化过程的具体细节大体上无关紧要 [52–56]。不过请注意，在 $p = 0.5,\ 1$。0 处可以观察到的谱形因子的中间时间行为，在稀疏四次 SYK 模型 [55, 56]，中并不可见，其起源必须追溯到式（7）中的随机质量项。

这一推理引出了一个问题：在什么条件下，玻戈留波夫变换 $\mathcal{U}$ 作用于 ˆγ^1ˆγ^2ˆγ^3ˆγ^4 时，会产生广延数量的四次项？为回答这个问题，我们注意到，$\mathcal{U}$ 的 ˆ 列由本征向量 $|\psi_i\rangle$ 构成，它们是单粒子问题的定义是耦合矩阵 iJ_{ij}。如前所述，这可以视为定义在瓦茨–斯特罗加茨图上的 Dyson型问题。因此，我们认为，当本征向量 $\mathcal{H}$ 在瓦茨–斯特罗加茨图上是多体混沌的，且 $|\psi_i\rangle$ 在整个图上延展时，$\mathcal{U}$ 会有广延数量的列，其分量在瓦茨–斯特罗加茨图的所有顶点上都不为零。这又会在作用于 ˆγ^1ˆγ^2ˆγ^3ˆγ^4时产生广延数量的项。事实上，耦合矩阵 iJ_{ij} 呈现出可积到混沌的转变；当 p 从 0 增至 1 时会发生这一转变，见图5。这一转变将在其他工作中研究，其定性特征类似于参考文献 57 中定义在 Erd¨os-R´enyi 图上的 Dyson型模型所观察到的类似转变。

单粒子视角也可以解释在重新连线消失或很弱时，r 比值为何会大幅偏离预期的泊松值。这类具有最近邻相互作用的晶格 Dyson 型哈密顿量，在 $E_{\mathrm{sp}} = 0$ 处具有发散的态密度和局域长度，同时还存在反常局域化的 $E_{\mathrm{sp}} = 0$ 态 [58–60]。我们推测，这些大幅偏离源于这些反常局域化态的存在。因此，这些偏离属于有限尺寸效应；不过它们非常显著，只有在极大系统尺寸下才会趋于消失，而如此大的系统无法通过最先进的精确对角化技术进行研究。

尽管这种启发式图像颇具吸引力且合乎情理，但仍有若干悬而未决的问题有待进一步研究。当然，最迫切的问题是确定由 r比值所揭示的混沌／可积交叉的性质。在热力学极限下，这究竟是真正的相变，还是平滑的交叉？我们的结果在某些方面对此给出了相互矛盾的信号：一方面，漂移临界无序假设与固定临界无序假设所得的数据塌缩表现出惊人的一致性，这表明，与其他情形相比，有限尺寸效应可能并不十分显著，例如备受争议的多体局域化转变 [46, 61, 62]。另一方面，较小的临界指数以及 $p \to 0$ 的 r 比值所呈现的中间统计表明，该系统可能仍远未达到标度行为。此外，数据塌缩是在通常假设单参数标度假设（例如低维安德森模型中的情形）适用的前提下实现的。近期文献63 和64指出，不应想当然地认为这一假设成立；研究离域化／局域化这类转变时，更为审慎的做法是考察完整的 β 函数。对该模型开展这类分析将具有直接意义。

另一个值得进一步研究的潜在问题是，我们使用漂移无序 Ansatz 发现，临界无序度随系统尺寸增加而出现极其微小的负向漂移。这种漂移是有限尺寸效应吗？是数值伪影吗？还是模型的真实特征？对此，我们预计，回答这个问题将

直接影响长期以来关于热力学极限下多体局域化命运的争论。式（1）确实描述了一个带有单个相互作用位点的单粒子问题（关于单个杂质能显著改变所研究系统物理性质的其他情形，参见文献 65、66和 67）。由图 5可知，单粒子问题存在一个局域化区域，因此显然，这个多体问题可以视为多体局域化研究中标准情形的一个极简版本。事实上，式（7）正是研究多体局域化的出发点：将其视为福克空间中的局域化问题，而非实空间中的局域化问题；这一思路始于文献 68。若能证明，至少在这种相互作用仅发生于单个位点的极简设置中，局域化能够抵御相互作用的影响，而这种负向漂移仅仅是有限尺寸效应，那将非常有趣。

最后，进一步探索该模型的热化性质，并全面刻画谱形因子（SFF）所呈现的中间区间，也将颇有意义。对此，我们认为，解析方法近期在参考文献 69 中提出的方法将非常有用。

致谢

我们感谢 Boris Altshuler、William Salazar、Antonello Scardicchio、Marco Tarzia 和 Davide Venturelli 进行的精彩讨论。AA 和 DR 感谢韩国基础科学研究院（IBS-R024-D1）的支持。DR 感谢 FAPESP 提供 ICTP-SAIFR 资助（2021/14335-0）和青年研究者资助（2023/11832-9），并感谢西蒙斯基金会为 ICTP-SAIFR 提供的定向资助。JO 感谢 PCS-IBS 通过 PCS-IBS 访问学者计划提供的接待。JO 的工作得到慕尼黑量子谷的支持；该项目由巴伐利亚州政府通过巴伐利亚高科技议程Plus提供资金支持。JM 感谢南非国家理论与计算科学研究所（NITHECS）提供的“可持续发展量子技术”资助。AA、MC 和 DR 感谢 IBS 与 CNR-SPIN 之间的谅解备忘录协议。

[1]O. Bohigas 和 M.-J. Giannoni，《混沌运动与随机矩阵理论》，载于 *Mathematical and Computational Methods in Nuclear Physics*，J. S. De- hesa、J. M. G. Gomez 和 A. Polls 编（Springer Berlin Hei- delberg，柏林、海德堡，1984年），第 1–99 页。[2] G. Casati、F. Valz-Gris 和 I. Guarnieri，《不可积系统的量子化与谱统计理论之间的联系》，《新物理评论快报》（1971-1985）28，279（1980）。[3] M. L. Mehta，《 *Random matrices* 》（爱思唯尔，2004年）。[4] F. Haake，《 *Quantum Signatures of Chaos*》，物理与天文学在线图书馆（Springer，2001年）。[5] T. Guhr、A. M¨uller–Groeling 和 H. A. Weidenm¨uller，《量子物理中的随机矩阵理论：共同概念》，《物理学报告》299，189（1998年）。[6] J. M. Deutsch，《封闭系统中的量子统计力学》，《物理评论A》43，2046（1991）。[7] M. Srednicki，《混沌与量子热化》，《物理评论E》50，888（1994）。[8] L. D’Alessio、Y. Kafri、A. Polkovnikov 和 M. Rigol，《从量子混沌和本征态热化到统计力学与热力学》，《物理学进展》65，239（2016年）。[9] M. Winer、S.-K. Jian 和 B. Swingle，《二次 Sachdev-Ye-Kitaev 模型中的指数增长段》，《物理评论快报》125，250602（2020）。[10] Y. Liao、A. Vikram 和 V. Galitski，《单粒子量子混沌的多体能级统计》，《物理评论快报》125，250601（2020）。[11] Y. Liao 和 V. Galitski，《多体量子混沌的普适退相干机制》，《物理评论研究》4，L012037（2022年）。[12] J. Maldacena 和 D. Stanford，《关于 Sachdev- Ye-Kitaev 模型的评论》，《物理评论D》94，106002（2016年）。[13] D. Chowdhury、A. Georges、O. Parcollet 和 S. Sachdev，《Sachdev-Ye-Kitaev 模型及其拓展：窥探非费米液体》，《现代物理评论》94，035004（2022年）。[14] A. M. Garc´ıa-Garc´ıa 和 J. J. M. Verbaarschot，《Sachdev-Ye-Kitaev 模型的谱与热力学性质》，《物理评论D》94，126010（2016年）。[15] J. S. Cotler、G. Gur-Ari、M. Hanada、J. Polchinski、P. Saad、S. H. Shenker、D. Stanford、A. Streicher 和 M. Tezuka，《黑洞与随机矩阵》，《高能物理学杂志》2017，118（2017年）。[16] A. Kitaev 和 S. J. Suh，《 Sachdev-Ye-Kitaev 模型中的软模及其引力对偶》，《高能物理学杂志》2018，183（2018年）。[17] D. J. Watts 和 S. H. Strogatz，《“小世界”网络的集体动力学》，《自然》393，440（1998年）。[18] R. Albert 和 A.-L. Barab´asi，《复杂网络的统计力学》，《现代物理评论》74，47（2002年）。[19] J. Kim、J. Murugan、J. Olle 和 D. Rosa，《量子网络中的算符离域》，《物理评论A》105，L010201（2022年）。[20] 需要强调的是，在参考文献17中，要求图在重新连线过程 *is not* 后仍保持连通。正因如此，在小世界图相关文献中，有时更倾向于采用该算法的 Newman-Watts 变体 [70]。本研究使用 Julia 软件包 Graphs.jl[71], 生成图；该软件包提供了一个例程，可按照 Watts-Strogatz 算法生成图，同时额外要求图保持连通。[21] P. Erd¨os 和 A. R´enyi，《随机图 I》，《德布勒森数学出版物》6，290（1959年）。[22] E. N. Gilbert，《随机图》，《数学统计年刊》30，1141（1959年）。

[23] G. Theodorou 和 M. H. Cohen，《具有非对角无序的一维系统中的扩展态》，《物理评论B》13，4597（1976年）。[24] T. P. Eggarter 和 R. Riedinger，《具有非对角无序的紧束缚链的奇异行为》，《物理评论B》18，569（1978年）。[25] L. Fleishman 和 D. C. Licciardello，《一维中的涨落与局域化》，《物理学杂志C：固体物理》10，L125（1977年）。[26] A. Krishna 和 R. Bhatt，《超越具有跃迁无序的一维链的普适戴森奇异性》，《物理学年鉴》435，168537（2021年），《局域化2020》特刊。[27]L. F. Santos，《无序海森堡自旋1/2链的可积性》，《物理学杂志A：数学与通论》37，4723（2004年）。[28] E. J. Torres-Herrera 和 L. F. Santos，《相互作用量子系统中具有全局效应的局部量子猝灭》，《物理评论E》89，062110（2014年）。[29] M. Brenes、E. Mascarenhas、M. Rigol 和 J. Goold，《杂质存在时 XXZ链中的高温相干输运》，《物理评论B》98，235128（2018年）。[30] M. Brenes、T. LeBlond、J. Goold 和 M. Rigol，《局部扰动可积系统中的本征态热化》，《物理评论快报》125，070605（2020年）。[31] A. Bastianello，《破坏可积性的杂质导致缺乏热化》，《欧洲物理快报》125，20001（2019年）。[32] V. B. Bulchandani、D. A. Huse 和 S. Gopalakrishnan，《破坏可积性引发多体量子混沌》，《物理评论B》105，214308（2022年）。[33] D. Roy 和 T. c. v. Prosen，《踢型相互作用费米子链中的随机矩阵谱形因子》，《物理评论E》102，060202（2020年）。[34] D. Roy、D. Mishra 和 T. c. v. Prosen，《多体量子混沌的最简玻色子模型中的谱形因子》，《物理评论E》106，024208（2022年）。[35] Y. Y. Atas、E. Bogomolny、O. Giraud 和 G. Roux，《随机矩阵系综中相邻能级间距之比的分布》，《物理评论快报》110，084101（2013年）。[36] 需要指出的是，研究量子混沌相关量时，始终应将谱划分为不同的对称性扇区，并在 *single symmetry sector at a time* 中分析数据。如前所述，式（1）的 SYK哈密顿量保持福克表象中粒子数的 *parity*；具有奇数粒子数的*i.e.* 态与具有偶数粒子数的态彼此分离 [14]。本文仅系统分析了偶数对称性扇区。当然，结果与这一选择无关。[37] G. Nyman 和 H.-G. Yu，《利用谱变换和滤波对角化对大型稀疏矩阵进行迭代对角化》，《科学与工程计算方法杂志》1，229（2001年）。[38] H.-r. Fang 和 Y. Saad，《用于极端及内部特征值问题的滤波兰佐斯过程》，《工业与应用数学学会科学计算杂志》34，A2220（2012年）。[39] A. Pieper、M. Kreutzer、A. Alvermann、M. Galgon、H. Fehske、G. Hager、B. Lang 和 G. Wellein，《用于内部特征值计算的切比雪夫滤波对角化的高性能实现》，《科学与工程计算方法杂志》《计算物理》325, 226 (2016)。[40] Chebyshevfiltering.jl：用于大型稀疏对角化的 Julia 代码，https://github.com/Dario-Rosa85/ ChebyshevFiltering.jl，访问日期：2024-09-17。[41] 我们的算法与参考文献 72 中的 POLFED 算法非常相似，但并不完全等价。[42] E. Abrahams、P. W. Anderson、D. C. Licciardello 和 T. V. Ramakrishnan，局域化的标度理论：二维中不存在量子扩散，《物理评论快报》42, 673 (1979)。[43] K. Slevin 和 T. Ohtsuki，安德森跃迁处的标度修正，《物理评论快报》82, 382 (1999)。[44] J. ˇSuntajs、J. Bonˇca、T. c. v. Prosen 和 L. Vidmar，有限无序自旋链中的遍历性破缺转变，《物理评论B》102, 064207 (2020)。[45] 我们感谢 Antonello Scardicchio 就此问题展开讨论。[46] J. ˇSuntajs、J. Bonˇca、T. c. v. Prosen 和 L. Vidmar，量子混沌对多体局域化提出挑战，《物理评论E》102, 062144 (2020)。[47] D. K. Nandy、T. ˇCadeˇz、B. Dietz、A. Andreanov 和 D. Rosa，质量变形 Sachdev-Ye-Kitaev 模型中的延迟热化，《物理评论B》106, 245147 (2022)。[48] H. Gharibyan、M. Hanada、S. H. Shenker 和 M. Tezuka，混沌扩散系统中随机矩阵行为的起始，《高能物理学杂志》2018, 124 (2018)。[49] A. M. Garc´ıa-Garc´ıa、B. Loureiro、A. Romero-Berm´udez 和 M. Tezuka，Sachdev-Ye-Kitaev 模型中的混沌-可积转变，《物理评论快报》120, 241603 (2018)。[50] T. Nosaka、D. Rosa 和 J. Yoon，质量变形 SYK 的 Thouless 时间，《高能物理学杂志》2018, 41 (2018)。[51] F. Monteiro、T. Micklitz、M. Tezuka 和 A. Altland，多体局域化的最简模型，《物理评论研究》3, 013023 (2021)。[52] S. Xu、L. Susskind、Y. Su 和 B. Swingle，量子全息的一个稀疏模型 (2020)。[53] A. M. Garc´ıa-Garc´ıa、Y. Jia、D. Rosa 和 J. J. M. Verbaarschot，稀疏 Sachdev-Ye-Kitaev 模型、量子混沌与引力对偶，《物理评论D》103, 106002 (2021)。[54] E. C´aceres、A. Misobuchi 和 R. Pimentel，稀疏 SYK 与可穿越虫洞，《高能物理学杂志》2021, 15 (2021)。[55] E. C´aceres、A. Misobuchi 和 A. Raz，稀疏 SYK 模型中的谱形因子，《高能物理学杂志》2022, 236 (2022)。[56] P. Orman、H. Gharibyan 和 J. Preskill，稀疏 SYK 模型中的量子混沌 (2024)，arXiv:2403.13884 [hep- th]。[57] L. F. Cugliandolo、G. Schehr、M. Tarzia 和 D. Ven- turelli，随机 Erd¨os-r´enyi 图加权邻接矩阵中的多重分形相 (2024)，arXiv:2404.06931 [cond-mat.dis-nn]。[58] C. M. Soukoulis 和 E. N. Economou，一维系统中的非对角无序，《物理评论B》24, 5698 (1981)。[59] M. Inui、S. A. Trugman 和 E. Abrahams，具有非对角无序的系统中带中态的异常性质，《物理评论B》49, 3190 (1994)。[60] G. De Tomasi、S. Roy 和 S. Bera，广义 Dyson 模型：零模的性质及其影响……

动力学，《物理评论B》94，144202（2016）。[61] D. J. Luitz、N. Laflorencie 和 F. Alet，随机场海森堡链中的多体局域化边缘，《物理评论B》91，081103（2015）。[62] F. Pietracaprina、N. Mac´e、D. J. Luitz 和 F. Alet，大型多体局域化自旋链的移位反演对角化，SciPost Phys. 5，045（2018）。[63] C. Vanoni、B. L. Altshuler、V. E. Kravtsov 和 A. Scardicchio，随机正则图上安德森模型的重整化群分析，美国国家科学院院刊121，e2401955121（2024），https://www.pnas.org/doi/pdf/10.1073/pnas.2401955121。[64] B. L. Altshuler、V. E. Kravtsov、A. Scardicchio、P. Sier- ant 和 C. Vanoni，高维晶格上安德森局域化的重整化群（2024），arXiv:2403.01974 [cond-mat.dis-nn]。[65] P. Brighi、A. A. Michailidis、K. Kirova、D. A. Abanin 和 M. Serbyn，与安德森绝缘体相互作用的移动杂质的局域化，《物理评论B》105，224208（2022）。[66] Q. Gao、P. Zhang 和 X. Chen，具有单一相互作用的自由费米子系统中的信息扰乱，《物理评论B》。B**110**，035137（2024）。[67] P. Molignini、以及 E. J. Bergholtz，《无序系统中具有单个非厄米杂质的反常皮肤效应》，《物理评论研究》**5**，033058（2023）。[68] B. L. Altshuler、Y. Gefen、A. Kamenev 和 L. S. Levitov，《有限系统中的准粒子寿命：一种非微扰方法》，《物理评论快报》**78**，2803（1997）。[69] A. Altland、T. Micklitz 和 J. T. de Miranda，张量积随机矩阵理论（2024 2404 10919），[ ] arXiv：cond-mat.mes-hall。[70] M. Newman 和 D. Watts，《小世界网络模型的重整化群分析》，《物理快报 A》**263**，341（1999）。[71] Graphs.jl：用于网络与图分析的高性能平台（Julia），`https://github.com/JuliaGraphs/ Graphs.jl`，访问日期：2024-09-17。[72] P. Sierant、M. Lewenstein 和 J. Zakrzewski，《多体局域化的多项式滤波精确对角化方法》，《物理评论快报》**125**，156601（2020）。