arXiv:2302.00928v1 [cs.LG] 2 Feb 2023

重新思考使用预测进行热启动：学习接近最优解集合的预测，以更快地进行 L-/L♮-凸函数最小化

ShinsakuSakaue TaiheiOki东京大学
东京大学日本东京 日本东京sakaue@mist.i.u-tokyo.ac.jp
oki@mist.i.u-tokyo.ac.jp

摘要

一项新兴研究表明，机器学习预测对于为离散优化问题（如二分图匹配）的算法进行热启动非常有用。先前研究表明，时间复杂度界与预测和最优解之间的某种距离成正比，而我们可以通过从过去的最优解中学习预测来近似最小化该距离。然而，当存在多个最优解时，这类保证可能并无实际意义。事实上，二分图匹配的对偶问题，以及更一般的 *L-/L♮-凸函数最小化* 具有任意多个 最优解，从而使这类依赖于预测的界任意增大。为解决这一理论上的关键问题，我们提出了一种用于 L-/L♮-凸函数最小化的新型带预测的热启动框架。我们的框架提供了与预测和所有最优解的集合之间距离成正比的时间复杂度界。其主要技术难点在于学习能够被证明接近所有最优解集合的预测，为此我们提出了一种基于在线梯度下降的方法。因此，我们首次实现了预测的多项式时间可学习性，并且能够证明无论存在多少个最优解，这些预测都可以为算法进行热启动。

1 引言

带预测的算法 [Mitzenmacher 和 Vassilvitskii, 2021]——利用从数据中学习到的预测来提升算法性能——是一个快速发展的研究领域。由 Dinitz 等人 [2021] 开展的开创性工作，开启了利用预测对离散优化算法进行热启动的研究。下面简要介绍他们关于加权完美二分图匹配问题的结果。考虑在一个二分图 $(V,\ E)$ 中寻找最大权重完美匹配，其中二分划分两侧的顶点数相同，为 $V = L \cup R$，边权重为 $w \in \mathbb{Z}^E$。[1] 该问题的对偶形式可写为一个含变量 $p = (s,\ t) \in \mathbb{R}^V$ 的线性规划（LP）：

$$\begin{aligned} \underset{s\in\mathbb{R}^L, t\in\mathbb{R}^R}{\text{minimize}} \quad & \sum_{i\in L} s_i - \sum_{j\in R} t_j \\ \text{subject to} \quad & s_i - t_j \geq w_{ij} \quad \forall ij \in E. \end{aligned} \tag{1}$$

作者证明，给定对某个最优对偶解 p^* 的预测 $\hat{p} \in \mathbb{R}^V$，我们可以高效地将 $\hat{p}$ 转换为初始可行解 p°，而以 p° 为热启动的匈牙利算法可在 $O(|E|\sqrt{|V|}\|p^* - \hat{p}\|_1)$ 时间内运行，相比之下，最坏情况下的运行时间为 $O(|E||V|)$。此外，给定从固定分布 $\mathcal{D}$ 中独立同分布抽取的大约 $\Omega(|V|^3)$ 个最优解 p^*，我们可以通过经验风险最小化学习出能近似最小化 $\mathbb{E}_{p^*\sim\mathcal{D}}[\|p^* - \hat{p}\|_1]$ 的预测 $\hat{p}$。简而言之，从过去的最优解中学习预测，可以确切地加速匈牙利算法。

[1] 虽然 最小权重设定最初受到研究，但我们按照 [Sakaue 和 Oki, 20 来描述最大权重设定 22].

表 1：Sakaue 和 Oki [Sakaue 和 Oki 的 2022] 所研究问题的改进时间复杂度界（另见其中的表 1）。对于加权完美二分图匹配和离散能量最小化，n 和 m 分别表示顶点集和边集的大小。对于加权拟阵交，r 表示拟阵的秩，n 表示基集大小，而τ 表示独立性预言机的运行时间。

问题	时间复杂度
加权完美二分图匹配	O($m\sqrt{n} \cdot \bar{\mu}(\hat{p}; g)$)
加权拟阵交	O($\tau nr^{1.5} \cdot \bar{\mu}(\hat{p};\ g)$)
离散能量最小化	O($mn^2 \cdot \bar{\mu}(\hat{p}; g)$)

然而，上述论证存在一个微妙但至关重要的漏洞：最优对偶解总是有任意多个。为此，设 p' 是问题 (1) 的一个最优解。那么，在 p' 上加上任意一个全一方向的向量，都不会改变目标函数值以及约束的左端，因此，对于所有 $\zeta \in \mathbb{R}$，$p' + \zeta\mathbf{1}$ 也都是最优解。因此，O($|E|\sqrt{|V|}\|p^* - \hat{p}\|_1$) 的时间界要求我们选取一个最优解 p^*；如果选取的 p^* 与 $\hat{p}$ 相距很远，那么时间界就可能任意大。有人或许会认为这种担忧没有必要，因为以 $\hat{p}$ 为热启动的匈牙利算法会返回一个与 $\hat{p}$ 接近的 p^*。然而，这种做法会使所选的 p^* 取决于 $\hat{p}$，而现有关于预测 $\hat{p}$ 可学习性的结果都无法处理这种依赖关系。我们在附录 A 中进一步详细讨论这一问题。

造成这一棘手局面的原因是，对于给定的二分图匹配实例，最优解 p^* 并不唯一。相比之下，所有最优解的集合 是唯一的。因此，$\hat{p}$ 到所有最优解集合的距离（等价地，$\hat{p}$ 到某个最优解的最小距离）是一个定义明确的度量，可用于量化使用预测 $\hat{p}$带来的加速效果。此外，通过在所有最优解中取最小值，这一思路还能加强依赖距离的时间复杂度界。

1.1 我们的贡献

我们提出了一种新的框架，其时间复杂度界与预测 $\hat{p}$ 到所有最优解集合的距离成正比。基于近期对 [Sakaue 和 Oki, 2022] 对 [Dinitz 等人, 2021], 的改进，我们将该框架拓展到 L-/$L^\natural$-凸函数最小化这一广泛的离散优化问题类别，其中包括加权完美二分图匹配、加权拟阵交和离散能量最小化。上述陷阱在 L-/$L^\natural$-凸最小化中同样存在（见注释 1），而此前的研究尚未解决这一问题。

为方便起见，我们先给出一些非正式定义（详情请参见第2节）。设 g 是一个待最小化的 L-/$L^\natural$-凸函数，它同时表示目标函数和约束；当不可行时取值为 $+\infty$。我们使用 $\ell_\infty^{\natural}$-范数来度量预测 $\hat{p}$ 与集合 conv(极小值点集合 g)（即所有最优解的集合）之间的距离；令 $\bar{\mu}(\hat{p};\ g)$ 表示该距离。我们的总体思路是使用 $\bar{\mu}(\hat{p}; g)$，而不是使用基于某个固定最优 p^* 所定义的任意距离。尽管这一思路很简单，但它涉及两个前所未有的挑战：(i) 证明以 $\hat{p}$ 进行热启动的算法能够在与 $\bar{\mu}(\hat{p}; g)$ 成正比的时间内运行，以及 (ii) 学习一个能够近似最小化 $\mathbb{E}_g[\bar{\mu}(\hat{p}; g)]$ 的 $\hat{p}$。我们将介绍如何实现这两点。

第3节表明，以$\hat{p}$ 为热启动的 L-/$L^\natural$-凸最小化方法具有与 $\bar{\mu}(\hat{p}; g)$成正比的时间复杂度界。与 [Sakaue 和 Oki 2022], 一样，我们采用最速下降法求解 L-/$L^\natural$- 凸最小化问题，并进一步利用这样一个事实：该方法会收敛到距离初始可行解最近的最优解。我们的分析适用于 [Sakaue 和 Oki 2022] 研究的所有问题， 2022] 并改进了他们的时间复杂度界；这些界与$\hat{p}\|_\infty$和某个固定最优 p^*之间的 ℓ_∞-距离$\hat{p}\|_\infty$成正比。表 1 汇总了我们改进后的时间复杂度界，图1则展示了我们的思路如何改进他们此前的界。

第 4 节介绍了如何学习 $\hat{p}$，使其近似最小化 $\mathbb{E}_g[\bar{\mu}(\hat{p};\ g)]$。与 [Khodak 等人, 2022, Sakaue 和 Oki, 2022], 类似，我们证明了在线梯度下降法（OGD）在学习 $\hat{p}$ 时的遗憾界，并通过在线到批量转换得到样本复杂度界。我们的贡献在于，为$\bar{\mu}(\hat{p};\ g)$得到了这些界，而不是针对 $\hat{p}$ 与某个固定最优解之间的距离。主要困难在于计算次梯度

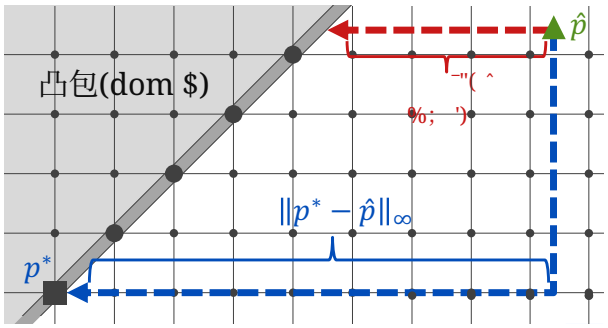


图1：我们的结果 $\bar{\mu}(\hat{p}; g)$ 与 Sakaue 和 Oki $\|p^* - \hat{p}\|_\infty$ [（2022]）的先前结果比较。设想在 $\mathbb{Z}^2$ 中进行 L-凸最小化。设 $\hat{p} \in \mathbb{R}^2$ 是给定的预测，g 是一个 L-凸函数，并且 p^* 是为 g 选取的一个最优解。灰色区域 conv(dom g) 是可行域（的凸包），较深区域 conv(argmin g) 则是所有最优解的集合。如第1节所述，conv(argmin g) 在全一方向上有自由度；因此，如果 p^* 远离 $\hat{p}$，$\|p^* - \hat{p}\|_\infty$ 可以任意大。相比之下，$\bar{\mu}(\hat{p}; g)$ 唯一表示 $\hat{p}$ 与 $p^* \in$ conv(argmin g) 之间的最小 $\ell_\infty^{\pm}$ 距离，其中 $p^* \in$ conv(argmin g) 是距 $\hat{p}$ 最近的集合。

关于 $\bar{\mu}(\cdot;\ g)$ 的计算，这些次梯度用于 OGD。为此，我们利用 $\bar{\mu}(\cdot;\ g)$ 与最短路径问题之间的联系以及 Danskin 定理（见第4.2节）。此外，计算次梯度需要一个不等式系统来表示该集合，凸包(极小值点集合 g)，即所有最优解构成的集合。针对这一需求，我们给出了多项式时间方法（见第 5节）。因此，我们首次证明了预测具有多项式时间可学习性，并且无论存在多个最优解与否，这些预测都能保证热启动算法。此外，正如附录 D所示，我们的遗憾界在常数因子范围内是紧的。

备注与局限性。 由于我们专注于从理论上细化依赖于预测的时间复杂度界，其实际影响会受到一定限制；不过，附录 G 展示了一些有前景的实证结果。此外，我们不讨论最坏情况界，因为可以按照 [Sakaue 和 Oki，2022，第 6]节中的方法，通过并行执行具有最坏情况保证的标准算法来界定最坏情况下的运行时间。我们强调，我们的动机是利用预测对简单算法进行热启动；而理论上运行速度较快的算法通常难以实现且在实践中运行缓慢，但有时可以享有更优的时间复杂度界。

1.2 相关工作

近年来，大量研究致力于利用预测超越算法的最坏情况分析。尽管改进在线算法的竞争比一直占据核心地位 [Purohit 等，2018，Bamas 等，2020，Lykouris 和 Vassilvitskii，2021，Azar 等， 2022]，这一思想也逐渐受到各个领域的关注，包括算法博弈论 [Agrawal 等， 2022] 以及数据结构 [Boffa 等， 2022]。Lindermayr 和 Megow提供了该领域论文的综合列表。

除了 [Sakaue 和 Oki, 2022], Chen 等人 [2022] 改进了 [Dinitz 等人提出的依赖预测的时间复杂度界，2021] 并针对各种图算法的热启动和学习预测给出了通用结果。Polak 和 Zub [2022] 利用预测对最大流算法进行热启动。尽管这些已有研究给出了依赖于最优解 p^* 与预测 $\hat{p}$之间某种距离 $\|p^* - \hat{p}\|$ 的时间复杂度界，但 p^*并非唯一这一普遍存在的现象却尚未得到充分讨论——人们（隐式地）假设p^* 是唯一的。[2] 研究人员还利用预测加速了支持集估计算法 [Eden 等人、最短路径问题 [Feijen 和 Schäfer、 2021], 广义排序 [Lu 等人、2021], 最近邻搜索 [Andoni 和 Beaglehole，以及聚类 [Ergun 等人的算法；不过，这些算法的时间复杂度分析与使用预测进行热启动的分析有所不同。

L-/L$^\natural$-凸性是离散凸分析 [Murota， 2003], 即凸分析的离散类比中的一个基本概念。它使我们能够将各种离散优化算法视为最速下降法。这

[2]在 [Polak 和 Zub中 2022], ，他们的界据称对每个最优解都成立，但在学习预测时，并未正确处理最优解的非唯一性。详见附录A.3 。

一观点为借助预测进行热启动提供了几何层面的理解；也就是说，由于算法会迭代地趋近最优解，因此预测越接近最优解，自然效果越好。尽管 [Sakaue 和 Oki， 2022] 同样基于最速下降法，但他们并未利用一个显著性质：该方法会收敛到距离初始点最近的最优解（见命题2），而这一性质是得到我们结果的关键。

2 预备知识

设 $\lfloor\cdot\rfloor$、$\lceil\cdot\rceil$ 和 $\lfloor\cdot\rceil$ 分别表示逐元素向上取整、向下取整和取整，其中 $\lfloor\cdot\rceil$ 将小数部分小于 0.5 的数向下取整。对于 $n \in \mathbb{N}$，设 $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ 是大小为 n的有限基集。令 $\mathbf{0}, \mathbf{1} \in \mathbb{R}^V$分别表示全零向量和全一向量。对于 $S \subseteq \mathbb{R}^V$，令 $\mathrm{conv}(S) \subseteq \mathbb{R}^V$表示 S 的凸包，并令 δ_S 表示 S的示性函数，即，$\delta_S(p) = 0$当 $p \in S$ 成立时， $+\infty$ 否则。

对于函数 $g\colon \mathbb{Z}^V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$，我们将其有效定义域 定义为 $\mathrm{dom}\ g = \{p \in \mathbb{Z}^V \mid g(p) < +\infty\}$，它表示形式为 $\min_{p\in\mathbb{Z}^V} g(p)$ 的最小化问题的可行域。若 $\mathrm{dom}\, g \neq \emptyset$，则称 g 为适当的 。

2.1 L-/L$^\natural$-凸函数与集合

我们概述 L-/L$^\natural$-凸函数与集合的性质。更多详情请参阅 [Murota， 2003]。

设 $g\colon \mathbb{Z}^V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 是一个适当函数。若对所有$p, q \in \mathbb{Z}^V$，都有 g 是 L-凸函数，即 $g(p) + g(q) \geq g(p \vee q) + g(p \wedge q)$，其中 $\vee$ ($\wedge$) 分别表示逐元素最大值（最小值），并且存在 $r \in \mathbb{R}$，使得对所有 $p \in \mathbb{Z}^V$， $g(p+\mathbf{1}) = g(p)+r$。此外，若 $\tilde{g}(p_0, p) := g(p - p_0\mathbf{1})$ 在 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^V$ 上是 L- 凸函数，则称 g 是 L$^\natural$- 凸函数；这等价于对所有 $p, q \in \mathbb{Z}^V$，都有 $g(p) + g(q) \geq g\left(\left\lceil \frac{p+q}{2} \right\rceil\right) + g\left(\left\lfloor \frac{p+q}{2} \right\rfloor\right)$，这与定义~~在~~ $\mathbb{R}^V$ 上的函数的标准凸性类似。由于在 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^V$ 上的 L-凸性与在 $\mathbb{Z}^V$ 上的 L$^\natural$-凸性等价，我们可以根据需要选用任一种表述。若 g_1和g_2 在 $\mathbb{Z}^V$ 上是 L-/L$^\natural$-凸函数，且 $g_1 + g_1$ 是适当函数，则 $g_1 + g_1$ 是 L-/L$^\natural$-凸函数。

L-/L$^\natural$-凸函数最小化问题 $\min_{p\in\mathbb{Z}^V} g(p)$ 已知涵盖了广泛的问题，例如加权二分图匹配的对偶问题、加权拟阵交的对偶问题，以及离散能量最小化问题；后者推广了最小费用流问题（见 [Murota，2003年，第 9] 章）。下文作出以下基本假设。

假设 1。 *L-/L$^\natural$-凸函数* g 总是至少有一个极小点，即 极小值点集合 $g \neq \emptyset$。

非空集合 $S \subseteq \mathbb{Z}^V$是 *L-/L$^\natural$-凸的*，当且仅当其示性函数 $\delta_S\colon \mathbb{Z}^V \to \{0, +\infty\}$ 是 L-/L$^\natural$-凸的。反之，如果 $g\colon \mathbb{Z}^V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 是 L-/L$^\natural$-凸的，定义域$g \subseteq \mathbb{Z}^V$是一个 L-/L$^\natural$-凸集；此外，所有极小点构成的集合 极小值点集合 $g \subseteq \mathbb{Z}^V$ 也是 L-/L$^\natural$-凸的，Murota，2003年，定理 7。17]。我们在第 4.2 节使用这一事实。L-/L$^\natural$-凸集具有如下有用的不等式组表示。

命题 1 (Murota [2003, 第 5.3 节和第 5.5])。 对于非空集合 $S \subseteq \mathbb{Z}^V$，以下两者等价：*(i)* S 是一个 $L^\natural$-凸集，且 *(ii)* S 可写为

$$\left\{ p \in \mathbb{Z}^V \;\middle|\; \begin{array}{l} \alpha_i \leq p_i \leq \beta_i \text{ for } i \in V, \\ p_j - p_i \leq \gamma_{ij} \text{ for distinct } i, j \in V \end{array} \right\} \tag{2}$$

其中某个 $\alpha_i \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$， $\beta_i \in \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$，且 $\gamma_{ij} \in \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$。此外， S 是 *L-*凸的，当且仅当 S 在没有盒约束的情况下可写成 (2) 的形式，即 $\alpha_i = -\infty$ 且 $\beta_i = +\infty$。*L-/L*凸包$(S) \subseteq \mathbb{R}^V$，即 *L-/L$^\natural$-*凸集 S 的凸包，也可按上述方式刻画，只需将 $\mathbb{Z}^V$ 在 (2) 替换为 $\mathbb{R}^V$。

例1。加权二分图匹配的对偶线性规划 (1) 的变量为 $(s, t) \in \mathbb{R}^V$，其约束为 $s_i - t_j \geq w_{ij}$， 其中 $ij \in E$。这些约束具有形式 (2)，并表示 L凸可行域的凸包，即 $\mathrm{conv}(\mathrm{dom}\, g)$。此外，给定一个最大权匹配 $M^* \subseteq E$，对偶可行解 (s, t) 是最优解，当且仅当 $s_i - t_j = w_{ij}$， 其中 $ij \in M^*$（见命题4）。因此，我们可以用附加不等式 $s_i - t_j \leq w_{ij}$ （其中 $ij \in M^*$）表示最优对偶解的 L-凸集，即 $\mathrm{conv}(\mathrm{argmin}\ g)$。

注1. 事实 极小值点集合 g 按（2）中的形式表示，立即意味着最优解的非唯一性。具体而言，如果 g 是 L-凸的，那么沿 $p^* \in$ 极小值点集合 g 全一方向平移，永远不会离开 极小值点集合 g，如第 1 节所述；对于 L$^\natural$- 凸情形，如果这种平移不会超出盒约束，同样的推理也适用。

算法 1 最速下降法

1: $p \leftarrow p^\circ$ ▷ $p^\circ \in \operatorname{dom} g$ 是一个初始可行解。
2: **当** 尚未收敛时:
3: $d \leftarrow$ 极小值点集合$\{g(p+d') \mid d' \in \mathcal{N}\}$
4: **如果** $g'(p;d) = 0$:
5: **返回** p
6: $\lambda \leftarrow \sup\{\lambda' \in \mathbb{Z}_{>0} \mid g'(p;\lambda' d) = \lambda' g'(p;d)\}$
7: $p \leftarrow p + \lambda d$

2.2 L-/L$^\natural$-凸最小化的最速下降法

我们可以使用算法 1 中的最速下降法求解 L-/L$^\natural$-凸最小化问题，即 $\min_{p\in\mathbb{Z}^V} g(p)$。该算法通过迭代沿局部最速下降方向前进。局部方向集合 $\mathcal{N}$ 定义为 $\mathcal{N} := \{0,+1\}^V$（若 g 是 L-凸函数）；以及 $\mathcal{N} := \{0,-1\}^V \cup \{0,+1\}^V$（若 g 是 L$^\natural$-凸函数）。令 $g'(p;d) := g(p+d) - g(p)$ 表示 g 在 $p \in \operatorname{dom} g$ 处沿方向 $d \in \mathbb{Z}^V$ 的斜率。

下面详细说明算法 1 的工作原理。从初始点 $p^\circ \in \operatorname{dom} g$ 出发，算法迭代执行以下步骤：通过求解局部优化问题找到最速方向 d（步骤 3），计算步长 $\lambda \geq 1$（步骤6），[3] 并将 λd 加到当前解 p 上，以更新当前解（步骤 7）。如果某个最速方向 d 上的斜率 $g'(p;d)$ 为零（步骤 4），则可保证 p 是最优解（这是由于 g 的 L-/L$^\natural$-凸性）。简言之，算法 1 通过在步骤 3 中迭代求解局部优化问题，最小化 L-/L$^\natural$-凸函数 g。

算法1 的一个显著性质是，迭代次数有上界，该上界为初始点 p° 与最优解 $p^* \in$ 极小值点集合 g 中距离 p°最近的点之间的距离。为更精确地描述这一性质，我们引入一些定义。对于任意 $p \in \mathbb{R}^V$，定义 $\ell_\infty^\pm$-范数如下:

$$\|p\|_\infty^\pm = \max_{i\in V} \max\{0,+p_i\} + \max_{i\in V} \max\{0,-p_i\},$$

它满足范数公理。对于任意 L-/L$^\natural$-凸函数 $g: \mathbb{Z}^V \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$，定义 $\mu(\cdot;g): \mathbb{Z}^V \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 为一个函数，返回输入 $p \in \mathbb{Z}^V$ 与最优解 $p^* \in$ 极小值点集合 g 中距离 p最近的点之间的距离，即:

$$\mu(p;g) := \min\left\{ \|p^* - p\|_\infty^\pm \;\middle|\; p^* \in \operatorname{argmin} g \right\}.$$

于是，算法1 收敛 到距离 p° 最近的最优解，所需迭代次数为 $\mu(p^\circ;g)+1$，如下一个命题所示 .

命题2([Murota and Shioura，2014，定理 1。2] 以及 [Fujishige 等人，2015，定理 6。2])。算法1返回一个最优解 $p^* \in$ 极小值点集合 g，满足 $\|p^* - p^\circ\|_\infty^\pm = \mu(p^\circ;g)$ 至多经过 $\mu(p^\circ;g)+1$ 次迭代。

例2。我们再次考虑加权完美二分图匹配的对偶线性规划 (1)。由于 w_{ij} 是整数，我们可以将定义域限制为 $\mathbb{Z}^V$，并将线性规划化简为最小化一个 L-凸函数 g；该函数由一个线性目标函数和 L凸可行域的示性函数相加构成。与 [Sakaue 和 Oki，2022年，第3节1], 中一样，我们可以将步骤 3 中的局部优化化简为最大基数匹配问题。若使用 $O(m\sqrt{n})$ 时间的Hopcroft–Karp 算法求解该问题，则算法 1 的运行时间为 $O(m\sqrt{n}\cdot\mu(p^\circ;g))$，当 $\mu(p^\circ;g)$ 较小时，这可能比运行时间为 $O(mn)$ 的匈牙利算法更快。事实上，使用固定可行 p° 的算法 1 与匈牙利算法非常相似（参见 [Schrijver，2003年，第18.5b节]）。

为后续使用，我们还定义 $\bar{\mu}(\cdot;g): \mathbb{R}^V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 如下:

$$\bar{\mu}(p;g) := \min\left\{ \|p^* - p\|_\infty^\pm \;\middle|\; p^* \in \operatorname{conv}(\operatorname{argmin} g) \right\},$$

它是 $\mu(\cdot;g)$ 的连续扩展，有助于利用实值预测。注意，与使用 μ 相比，使用 $\bar{\mu}$ 只会使时间复杂度界更强，因为对于所有 $p \in \mathbb{Z}^V$，都有 $\bar{\mu}(p;g) \leq \mu(p;g)$。事实上，对于所有 $p \in \mathbb{Z}^V$，都有 $\bar{\mu}(p;g) = \mu(p;g)$；我们可以通过确认存在一个属于 $\operatorname{conv}(\operatorname{argmin} g)$ 的整数 $p^* \in$，且它能达到最小 $\ell_\infty^\pm$-距离，来证明这一点。证明见附录B。

引理 1. 令 $g: \mathbb{Z}^V \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ 是一个 *L-/L$^\natural$*-凸函数。对于每个 $p \in \mathbb{Z}^V$，都有 $\mu(p;g) = \bar{\mu}(p;g)$.

[3]步骤 6 计算所谓的 长步长 λ [Fujishige 等人，2015，Shioura，2017]。如果计算 λ 代价高昂，我们也可以改为设置 $\lambda \leftarrow 1$，且不影响命题 2及后续分析。

3 时间复杂度界

我们为 L-/L♮-凸最小化给出了更优的依赖预测的时间复杂度界。与 [Dinitz 等人，2021，Sakaue 和 Oki，2022], 类似，我们将框架分解为三个阶段：(i) 将一个预测 $\hat{p} \in \mathbb{R}^V$ 转换为初始可行解 $p^\circ \in \mathbb{Z}^V$，(ii) 使用以 p°为热启动的算法求解问题，以及 (iii) 学习预测 $\hat{p}$。下一个定理对阶段 (i) 和 (ii) 给出了形式化保证，第 4 节研究阶段 (iii)。

定理 1. 设 $g\colon \mathbb{Z}^V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 是一个 *L-/L♮-凸函数*，且 $\hat{p} \in \mathbb{R}^V$ 是一个可能不可行的预测。

(i) 如果我们能计算出预测 $\hat{p}$ 在 $\operatorname{conv}(\operatorname{dom} g)$ 上的 $\ell_\infty^\pm$-投影 $\hat{q}$，其定义如下：

$$\hat{q} \in \operatorname{argmin}\left\{ \|q - \hat{p}\|_\infty^\pm \;\middle|\; q \in \operatorname{conv}(\operatorname{dom} g) \right\}, \tag{3}$$

in T_{prj} 时间内，我们可以在 $O(T_{\mathrm{prj}} + |V|)$ 时间内得到一个初始可行解 $p^\circ = \lfloor \hat{q} \rceil \in \operatorname{dom} g$.

(ii) 如果我们能在 *3*步中的局部优化 T_{loc} 时间内求解，算法 *1* 从 $p^\circ = \lfloor \hat{q} \rceil$ 出发，可在 $\min_{p \in \mathbb{Z}^V} g(p)$ 的 $O(T_{\mathrm{loc}} \cdot \bar{\mu}(\hat{p}; g))$ 时间内找到最优解。

证明。(i) 的结论与 [Sakaue和Oki，2022，定理 1], 的结论相同，证明也相同。下面我们通过修改他们的原始证明来证明 (ii) 的结论。

由于命题 2 指出，算法 1 能在 $O(T_{\mathrm{loc}} \cdot \mu(p^\circ; g))$ 时间内找到一个最优解，因此如果 $\mu(p^\circ; g) = O(\bar{\mu}(\hat{p}; g))$，证明第二个结论成立，如下所示。

对于给定的预测 $\hat{p}$，取任意一个 $p^* \in \operatorname{conv}(\operatorname{argmin} g)$，使其达到 $\|p^* - \hat{p}\|_\infty^\pm = \bar{\mu}(\hat{p}; g)$。注意，我们有

$$\mu(p^\circ; g) = \bar{\mu}(p^\circ; g) \le \|p^* - p^\circ\|_\infty^\pm,$$

其中，等号由引理 1 结合 $p^\circ = \lfloor \hat{q} \rceil \in \mathbb{Z}^V$ 得到，不等式则来自 $\bar{\mu}(\cdot; g)$的定义以及 $p^* \in \operatorname{conv}(\operatorname{argmin} g)$。由 $p^\circ = \lfloor \hat{q} \rceil$ 以及取整会使每个条目最多改变 $\pm 1/2$这一事实，我们有

$$\|p^* - p^\circ\|_\infty^\pm \le \|p^* - \hat{q}\|_\infty^\pm + 1.$$

此外，由三角不等式可得

$$\|p^* - \hat{q}\|_\infty^\pm \le \|p^* - \hat{p}\|_\infty^\pm + \|\hat{q} - \hat{p}\|_\infty^\pm.$$

这里，由于 p^* 的选择，我们有 $\|p^* - \hat{p}\|_\infty^\pm = \bar{\mu}(\hat{p}; g)$。此外，由于 $\hat{q}$ 的定义与式 (3) 相同，且 $p^* \in$凸包(极小值点集合 g) $\subseteq$凸包(dom g)，因此 $\|\hat{q} - \hat{p}\|_\infty^\pm \le \|p^* - \hat{p}\|_\infty^\pm = \bar{\mu}(\hat{p}; g)$ 成立。由此可得 $\mu(p^\circ; g) \le 2\bar{\mu}(\hat{p}; g) + 1 =$O($\bar{\mu}(\hat{p}; g)$)。 □

定理 1 表明，给定一个预测 $\hat{p} \in \mathbb{R}^V$，我们可以在 $O(T_{\mathrm{prj}} + |V| + T_{\mathrm{loc}} \cdot \bar{\mu}(\hat{p}; g))$ 时间内求解 $\min_{p \in \mathbb{Z}^V} g(p)$。此外，在大多数情形下，包括表 1 中列出的所有问题（参见 [Sakaue 和 Oki，2022，第 3] 节），$T_{\mathrm{prj}} + |V| \le T_{\mathrm{loc}}$ 成立。在这些情形下，我们的时间复杂度界可简化为 $O(T_{\mathrm{loc}} \cdot \bar{\mu}(\hat{p}; g))$，并且将局部优化求解器的运行时间代入 T_{loc}，即可得到表 1 中的结果。例如，在二分图匹配情形下，我们可以使用 Hopcroft–Karp 算法，在 $T_{\mathrm{loc}} = O(m\sqrt{n})$ 时间内完成局部优化（最大基数匹配），从而得到表 1 中的 $O(m\sqrt{n} \cdot \bar{\mu}(\hat{p}; g))$ 时间界。关于其他问题的 T_{loc}，参见 [Sakaue 和 Oki，2022，第 3.2 节和第 3.3] 节。注意，表 1 中的界至少与 [Sakaue 和 Oki，2022] 的界一样好（相差至多常数因子），因为对于任意$p^* \in$ 凸包(极小值点集合 g)，我们都有 $\bar{\mu}(\hat{p}; g) \le \|p^* - \hat{p}\|_\infty^\pm \le 2\|p^* - \hat{p}\|_\infty$。

4 学习预测

现在我们讨论如何学习预测 $\hat{p} \in \mathbb{R}^V$。遵循 [Khodak 等人，2022，Sakaue 和 Oki，2022], 我们主要研究在线学习设定，其中 L-/L♮-凸函数 g_t 由 $t = 1, \ldots\ldots, T$对抗性地选取。我们将在线梯度下降法（OGD）应用于 $\bar{\mu}(\cdot;\ g_t)$ 的在线最小化，并证明其遗憾界。随后，我们通过在线到批量转换得到样本复杂度界。

本节的主要目标是证明，在线梯度下降具有如下的遗憾上界，并且能够在多项式时间内运行。

定理 2。 设 $C > 0$。对于从 $\mathbb{Z}^V$ 到 $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 的任意一列 *L-凸*函数 g_1、……、g_T，在线梯度下降计算出的预测 $\hat{p}_1$、……、$\hat{p}_T$ 满足

$$\sum_{t=1}^{T} \bar{\mu}(\hat{p}_t; g_t) \leq \min_{\hat{p}^* \in [-C,+C]^V} \sum_{t=1}^{T} \bar{\mu}(\hat{p}^*; g_t) + C\sqrt{2nT}.$$

在每一轮 t中，如果一个凸包(极小值点集合 g_t) 的不等式系统可以在 T_{ineq} 时间内获得（如假设*2*所述），且$p_t^* \in$ 极小值点集合 g_t 已知，那么在线梯度下降需要 $T_{\mathrm{ineq}} + \mathrm{O}(n^2)$ 时间。

注意，关于 $\bar{\mu}(\hat{p}; g_t)$ 的遗憾界是与先前研究的主要区别；先前研究考虑的是形式更简单的函数 $\|p_t^* - \hat{p}\|$，其中有一个固定的最优 p_t^*。尽管我们考虑的函数更复杂，即 [Sakaue 和 Oki， 2022] 我们的遗憾界仍然同样小； $\bar{\mu}(\cdot; g_t)$而且，正如附录D所示，该界在渐近意义下确实是紧的。

我们在第 5.2 节中表明，即使只能黑盒访问 g_t， T_{ineq} 仍可在多项式时间内完成。此外，第 5.1 节表明，对于表 1 中列出的特定问题， T_{ineq} 可以小得多。通常，假设$p_t^* \in$ 极小值点集合 g_t 可用是成立的，因为我们在求解第 t 个实例之后会学习到$\hat{p}_t$，即 $\min_{p \in \mathbb{Z}^V} g_t(p)$。（如果不成立，我们可以用标准的多项式时间算法求解第 t个实例；此时在线梯度下降可在多项式时间内运行。）在二分图匹配情形下，在这些假设成立时，在线梯度下降每轮只需 $\mathrm{O}(m + n\log\ n)$ 时间（见第 5.1 节），甚至比算法 1 中单次局部优化所需的时间还短，也快于时间复杂度为 $\mathrm{O}(m\sqrt{n})$ 的 Hopcroft–Karp 算法。因此，尽管我们的方法通常比先前的方法慢，但这通常并非严重缺点。

根据定理 2，我们可以通过在线到批量转换得到样本复杂度界。证明与 [Khodak 等人、2022、Sakaue 和 Oki的证明几乎完全相同， 2022] 因此将其推迟至附录 C。

推论 1。 设 $\mathcal{D}$ 为定义在 *L-凸*函数 g 上的一个（未知）分布： $\mathbb{Z}^V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $\delta \in (0, 1]$, 和$\varepsilon > 0$。给定 $T = \Omega\left(\left(\frac{C}{\varepsilon}\right)^2 \left(n + \log\ \frac{1}{\delta}\right)\right)$ 个关于 g_1、……、$g_T \sim \mathcal{D}$ 的独立同分布抽样，我们可以得到满足以下条件的 $\hat{p} \in \mathbb{R}^V$

$$\mathbb{E}_{g \sim \mathcal{D}}[\bar{\mu}(\hat{p}; g)] \leq \min_{\hat{p}^* \in [-C,+C]^V} \mathbb{E}_{g \sim \mathcal{D}}[\bar{\mu}(\hat{p}^*; g)] + \varepsilon$$

以至少 $1 - \delta$的概率。在定理 *2*的假设下，我们可以在 $\hat{p}$ 内以 $\mathrm{O}(T \cdot (T_{\mathrm{ineq}} + n^2)$ 的时间计算得到该结果。

注 2。 我们可以用最小化实例的参数来界定常数 C。在二分图匹配情形下，如果边权重始终属于 $C = nW$，则有 $[-W, +W]$。更多信息请参见 [Sakaue 和 Oki， 2022，第 4] 节。

4.1 在线梯度下降基础

我们将 $f_t(\hat{p}) = \bar{\mu}(\hat{p}; g_t)$ 视为 $t = 1, \ldots, T$ 的第 t 个损失，并使用以下标准的在线梯度下降：从 $\hat{p}_1 = \mathbf{0}$ 开始，在第 t 轮中，采取 $\hat{p}_t$，观察 f_t，计算 $z_t \in \partial f_t(\hat{p}_t)$，并设置 $\hat{p}_{t+1} \leftarrow \Pi_C(\hat{p}_t - \eta z_t)$，其中 $\eta > 0$ 是学习率， Π_C 是到 $[-C, +C]^V$ 的 ℓ_2-投影。该在线梯度下降具有如下遗憾界。

命题 3 (Orabona [2020, 第2节2])。 设 $C > 0$ 和 $f_1, \ldots, f_T$是从 $\mathbb{R}^V$到 $\mathbb{R}$的任意凸函数序列。若在线梯度下降使用次梯度 $z_t \in \partial f_t(\hat{p}_t)$，满足 $\|z_t\|_2 \leq L$ 对于 $t = 1, \ldots, T$，并采用学习率$\eta = \frac{C}{L}\sqrt{\frac{n}{T}}$，则返回 $\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_T$，满足

$$\sum_{t=1}^{T} f_t(\hat{p}_t) \leq \min_{\hat{p}^* \in [-C,+C]^V} \sum_{t=1}^{T} f_t(\hat{p}^*) + CL\sqrt{nT}.$$

我们基于此命题证明定理 2 。首先，我们确认损失函数的凸性。

引理 2。 $f_t(\hat{p}) = \bar{\mu}(\hat{p}; g_t)$ 在$\hat{p} \in \mathbb{R}^V$中是凸的。

证明。令 $S=$凸包(极小值点集合 g_t)。我们可以将 $f_t(\hat{p}) = \bar{\mu}(\hat{p};\ g_t) = \min\{\|p^* - \hat{p}\|_\infty^{\pm} \mid p^* \in S\}$ 改写为

$$f_t(\hat{p}) = \inf\left\{ \|p^* - \hat{p}\|_\infty^{\pm} + \delta_S(p^*) \;\middle|\; p^* \in \mathbb{R}^V \right\},$$

其中 $\delta_S:\ \mathbb{R}^V \to \{0, +\infty\}$ 是凸集 S的示性函数。此外，$\|\cdot\|_\infty^{\pm}$ 根据三角不等式是凸函数。因此，$f_t(\hat{p})$是凸函数的下确界卷积，因而是凸函数 [Rockafellar，1970年，定理 5。4]。 □

下一节将通过说明如何计算 定理 2的证明所需的次梯度 z_t，即$f_t(\hat{p}_t) = \bar{\mu}(\hat{p}_t;\ g_t)$，从而在 $\|z_t\|_2 \le L = \sqrt{2}$ 中的 $T_{\mathrm{ineq}} + \mathrm{O}(n^2)$ 时间内完成计算。

4.2 次梯度的计算

为简洁起见，下面省略 t，例如 $g = g_t$ 和 $\hat{p} = \hat{p}_t$，因为本节仅关注第 t 轮。

首先，我们详细说明定理 2中的假设。回顾一下，极小值点集合 g 是一个 L-/L♮-凸集，这是由 [Murota，2003年，定理 7 得出的。17]因此，凸包(极小值点集合 g) 具有命题 1中所述的不等式系统表示。本节假设可以获得这样一个不等式系统。

假设 2。 我们可以在凸包(极小值点集合 g) $\subseteq \mathbb{R}^V$ 上得到一个不等式系统表示，其形式为 m

$$\left\{ p \in \mathbb{R}^V \;\middle|\; \begin{array}{l} \alpha_i \le p_i \le \beta_i \text{ for } i \in V, \\ p_j - p_i \le \gamma_{ij} \text{ for distinct } i, j \in V \end{array} \right\} \tag{4}$$

，时间复杂度为 T_{ineq}，其中 $-\alpha_i, \beta_i, \gamma_{ij} \in \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$。

注释 3。 尽管凸包(极小值点集合 g) 的不等式系统表示并不唯一，但任意一个形如（4）的表示均适用于以下讨论。如果现有的不等式系统缺少某些 $,j \in V$对应的不等式，我们假定已给出满足 $\alpha_i = -\infty, \beta_i = +\infty$ 和 $\gamma_{ij} = +\infty$ 的不等式；对于所有 α_i 以及 β_i，若 g 是 L-凸函数，我们始终采用这种处理方式，因为极小值点集合 g 没有盒约束（见命题 1）。

接下来我们注意到，对于任意给定的 $\bar{\mu}(\hat{p};\ g)$，计算其值 可以归约为一个有向图上的最短路径问题，其中可能包含负权重。由于该归约已在 [Sakaue 和 Oki，2022，附录 D], 中给出，为便于后续讨论，这里仅作简要说明。

令 $V = V_0 \cup \{s, t\}$ 作为顶点集和 其中 V_0 是原点我们使是终点。我们将有向边集合 E 定义为

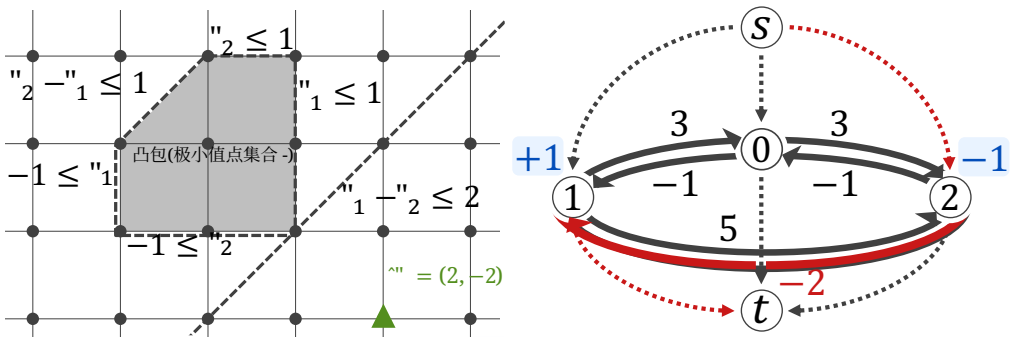
$$E \cup \{\{0\} \times V\} \cup \{V \times \{0\}\} \cup \{\{s\} \times V_0\} \cup \{V_0 \times \{t\}\}.$$

给定任意 $\hat{p} \in \mathbb{R}^V$，我们将边权重 $ij \in \tilde{E}$ 定义为

$$\tilde{w}_{ij}(\hat{p}) = \begin{cases} \gamma_{ij} - \hat{p}_j + \hat{p}_i & \text{if } ij \in E, \\ -\alpha_i + \hat{p}_i & \text{if } i \in V \text{ and } j = 0, \\ \beta_j - \hat{p}_j & \text{if } i = 0 \text{ and } j \in V, \\ 0 & \text{if } i = s \text{ or } j = t, \end{cases} \tag{5}$$

其中 α_i、β_j、γ_{ij} a $\tilde{}$表示 凸包(极小值点集合 g) 如式（4）所示。我们取 $ij \in E$ 在 $\tilde{w}_{ij} = +\infty$ 时移除。

注意，负权重 $-\tilde{w}_{ij}(\hat{p})$ 表示 $\hat{p}$ 对式 (4) 中相应不等式的违反程度，这些不等式刻画了 conv(argmin g)。由此可知，$(\tilde{V}, \tilde{E})$ 中一条最短 s–t 路径的总权重的相反数，等于 $\bar{\mu}(\hat{p};\ g)$；也就是说，按照 $\ell_\infty^{\pm}$-范数衡量，$\hat{p}$ 与 conv(argmin g) 的距离为 $\bar{\mu}(\hat{p};\ g)$（参见 [Sakaue 和 Oki，2022，附录 D]）。图 2 展示了 conv(argmin g) 以及用于计算 $\bar{\mu}(\hat{p}; g)$ 的最短路径$\tilde{}$ $\tilde{}$问题的一个示例。注意，(V, E) 不含负环；否则，最短路径权重将为$-\infty$，因此 $\bar{\mu}(\hat{p};\ g) = +\infty$，这与 argmin $g \neq \emptyset$(假设 1) 相矛盾。此外，最短路径权重始终非正，因为对于 $i \in V_0$，总是存在权重为零的 s–t 路径 $\{si, it\}$。



(a) 凸包(极小值点集合 g)　　(b) (V, E) 和一条最短路径

图 2：如果凸包(极小值点集合 g)由 (a) 中的不等式和 $\hat{p} = (2, -2)$ 给出，我们可以通过求解 (V, E) 中的最短路径问题，按照 (b) 中所示的方法计算 $\bar{\mu}(\hat{p}; g)$。虚线边的权重为零，其他边的权重为 $\tilde{w}_{ij}(\hat{p})$，如边旁所示。红色显示了一条最短路径 $P^* = \{s2, 21, 1t\}$，其总权重的相反数等于 $\bar{\mu}(\hat{p}; g) = 2$。我们可以得到一个次梯度 $-\nabla\phi(\hat{p}; P^*) = (+1, -1)$，如 (b) 中蓝色所示。如果我们将 (a) 中一个冗余不等式约束 $p_1 - p_2 \le 2$ 替换为 $p_1 - p_2 \le +\infty$，(b) 中从 2 到 1 的边会被移除；不过，另一条最短路径 $\{s2, 20, 01, 1t\}$ 仍会给出相同的次梯度。

接下来，考虑到将问题归约为最短路径问题，我们对 $\bar{\mu}(\hat{p}; g)$ 进行改写。令 $\mathcal{P} \subseteq 2^E$ 为所有简单 s–t 路径的集合。对于每个 $P \in \mathcal{P}$，定义 $\phi(\cdot; P) : \mathbb{R}^V \to \mathbb{R}$ 为

$$\phi(\hat{p}; P) := \sum_{ij \in P} \tilde{w}_{ij}(\hat{p}), \tag{6}$$

它等于一条 s–t 路径 P 的总权重。由于 $\bar{\mu}(\hat{p}; g)$ 是一条最短路径总权重的相反数，因此有

$$\bar{\mu}(\hat{p}; g) = \max\{-\phi(\hat{p}; P) \mid P \in \mathcal{P}\}. \tag{7}$$

由于每个 $-\phi(\hat{p}; P)$ 根据 ($\hat{p}$ 5) 和 (6) 是线性的，而 $\mathcal{P}$ 是有限的（因而是紧致的），Danskin 定理 [Danskin（1966] 另见 [Bertsekas，2016，命题 B.22]）推出

$$\partial\bar{\mu}(\hat{p}; g) = \operatorname{conv}\{-\nabla\phi(\hat{p}; P^*) \mid P^* \in \mathcal{P}(\hat{p})\},$$

其中 $\mathcal{P}(\hat{p}) := \operatorname{argmax}\{-\phi(\hat{p}; P) \mid P \in \mathcal{P}\}$ 是给定 $\hat{p} \in \mathbb{R}^V$ 时所有最短 s–t 路径的集合。因此，我们可以通过找到一条最短 s–t 路径 $P^* \in \mathcal{P}(\hat{p})$ 并计算，来求得 $\bar{\mu}(\cdot; g)$ 在 $\hat{p}$ 处的一个次梯度

$$-\nabla\phi(\hat{p}; P^*) = -\sum_{ij \in P^*} \nabla\tilde{w}_{ij}(\hat{p}).$$

接下来，我们仔细考察次梯度 $-\nabla\phi(\hat{p}; P^*)$。根据 (5)，每个 $-\nabla\tilde{w}_{ij}(\hat{p})$ 至多有一个 -1 和一个 $+1$。沿最短路径 P^* 求和时，这些非零项会相互抵消，至多留下两个非零项 -1 和 $+1$，分别对应于 P^* 中与 s 和 t 相邻的两个顶点；如果 s 和/或 t 与 $0 \in V_0$ 相邻，相应的非零项也会消失。图 2b 展示了如何计算 $-\nabla\phi(\hat{p}; P^*)$。

形式上，如果最短路径 $P^* \in \mathcal{P}(\hat{p})$ 中的第一条边和最后一条边分别是 si 和 jt，且 $i \ne j$，则次梯度 $-\nabla\phi(\hat{p}; P^*) \in \partial\bar{\mu}(\hat{p}; g)$ 可写为

$$\big(0 \ldots 0 \quad \underset{i\text{th}}{-\mathbb{1}_{i \ne 0}} \quad 0 \ldots 0 \quad \underset{j\text{th}}{\mathbb{1}_{j \ne 0}} \quad 0 \ldots 0\big), \tag{8}$$

其中，当 $k \ne 0$ 时为 $\mathbb{1}_{k \ne 0} = 1$，否则为 0；如果 $i = j$，则次梯度为零。最后，我们得到以下引理。

引理 3. 如果已知 凸包(极小值点集合 g) 和 $p^* \in$ 极小值点集合 g 的不等式系统，我们便可在 $O(n^2)$ 时间内计算出一个次梯度 $z \in \partial\bar{\mu}(\hat{p}; g)$，其中 $\|z\|_2 \le \sqrt{2}$。

证明。给定一条最短 s–t 路径 $P^* \in \mathcal{P}(\hat{p})$，我们可以按照式 (8) 计算 $z \in \partial\bar{\mu}(\hat{p}; g)$，其满足 $\|z\|_2 \le \sqrt{2}$。为得到 P^*，我们首先通过势函数将可能为负的边权重 (5) 转换为非负边权重，同时保留 $\hat{}$ 最短路径集合 $\mathcal{P}(\hat{p})$（详情见附录 E）。利用最优解 $p^* \in \operatorname{argmin} g$，我们可以在 $O(|E|)$ 时间内完成这一转换；根据定理 2，该最优解假定为已知。因此，通过使用 Dijkstra 算法在 $O(|\tilde{E}| + |\tilde{V}| \log |\tilde{V}|) \lesssim O(n^2)$ 时间内求出一条最短 s–t 路径 P^*，我们可以在 $O(n^2)$ 时间内计算出一个次梯度。 □

当一条最短 s–t 路径 $P^* \in \mathcal{P}(\hat{p})$ 具有$\{si, ij, jt\}$这种形式时，我们可以很容易地直观理解次梯度 (8)。这样的最短路径意味着，当前预测 $\hat{p}$ 在 (4) 中代表凸包(argmin g) 的那些不等式约束中，违反不等式约束 $p_j - p_i \le \gamma_{ij}$ 的程度最大。沿着次梯度 (8) 的负方向更新 $\hat{p}$，会通过增大 $\hat{p}_i$ 和减小 $\hat{p}_j$，降低违反量 $\hat{p}_j - \hat{p}_i - \gamma_{ij} > 0$。因此，次梯度下降会使当前预测更接近凸包(argmin g)。

从总体上看，我们的策略是将到最优解集合的距离表示为线性（或凸）函数的最大值，如式 (7) 所示，并利用 Danskin 定理求得次梯度。然后，我们可以使用在线梯度下降，学习接近最优解集合的预测。我们预计，这一简单思路在其他场景中也有用，例如[Chen 等人、 2022]。

5 求得极小点的不等式系统

我们将说明如何得到一个符合假设 2 的 conv(argmin g) 不等式系统。第 5.1 节介绍利用问题特定结构的高效方法，而第 5.2 节则提出一种仅通过黑盒访问 g 的一般多项式时间方法，这意味着 T_{ineq} 至多为多项式。

5.1 高效的问题特定方法

如果问题 $\min_{p \in \mathbb{Z}^V} g(p)$ 的原始-对偶结构已知，我们就能高效构造所需的不等式系统。下面以二分图匹配为例详细说明这一方法。

我们考虑第 1 节介绍的加权完全二分图匹配问题。设 (V, E) 是一个具有等规模二分划分 $V = L \cup R$ 的二分图，权重为 $w \in \mathbb{Z}^E$、$n = |V|$ 和 $m = |E|$。回顾一下，我们可以将对偶线性规划写成式（1），其约束为 $s_i - t_j \ge w_{ij}$，其中 $ij \in E$。下面的互补性定理给出了对偶最优解集合的一个有用刻画。

命题4 (Murota [1995, 命题2。3])。设 $M \subseteq E$ 是 (V, E) 中的一个匹配，且 $p = (s, t) \in \mathbb{Z}^{L \cup R}$ 是 (1)的对偶可行解。那么，M 和 p 是最优解，当且仅当对所有 $s_i - t_j = w_{ij}$ 均有 $ij \in M$。

该命题表明，给定任意最大权匹配 $M^* \subseteq E$，我们可以用如下不等式系统表示对偶最优解的集合，即极小值点集合 g:

$$\left\{ p = (s,t) \in \mathbb{Z}^{L \cup R} \;\middle|\; \begin{array}{l} s_i - t_j \ge w_{ij} \text{ for } ij \in E, \\ s_i - t_j \le w_{ij} \text{ for } ij \in M^* \end{array} \right\},$$

将 $\mathbb{Z}^{L \cup R}$ 替换为 $\mathbb{R}^{L \cup R}$ 即可得到 凸包(极小值点集合 g) 的不等式系统表示（见命题 1）。注意，最大权匹配 M^* 通常可以免费获得，因为在学习 t实例时，该实例已经求解完成。给定 $\hat{p}_t$后，我们可以在 M^* 时间内构造上述不等式系统，因此 $O(m)$，即 $T_{\text{ineq}} = O(m)$。

由于 T_{ineq} 已经足够小，在线梯度下降的每轮时间复杂度中占主导部分的是用于计算次梯度的 Dijkstra 算法，其运行时间为 $O(m + n \log n)$，因为上述不等式系统导出 $\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$图 (V, E)，其中 $|E| = O(m)$。因此，一旦使用 1 中的 $O(m\sqrt{n})$ 时间复杂度的 Hopcroft–Karp 算法进行一次局部优化，在线梯度下降的每轮运行时间就短于算法中的局部优化求解时间。

上述方法的核心思想是利用互补性定理中的“当且仅当”条件。换言之，一旦找到任意一个原问题（对偶问题）的最优解，我们就能得到所有对偶问题（原问题）的

最优解，这得益于互补条件。组合松弛[Murota， 1995]，这一思想已得到充分研究，并适用于拟阵交和离散能量最小化。下面给出相关结果；证明分别见附录 F.1 和F.2。

定理 3。 考虑加权拟阵交的对偶问题，最小化$_{p\in Z^V}\ g(p)$，该问题定义在一个基集上， V其大小为 n。如果已知一个最大权公共基（或问题已解决），则可在(4) 的形式下，在 表示极小值点集合的凸包 $g)$ 所需的时间为 $T_{\text{ineq}} = \mathrm{O}(\tau nr)$，其中 r 是拟阵的秩， τ是独立性预言机的运行时间。

定理 4。 考虑离散能量最小化，最小化$_{p\in Z^V}\ g(p)$，该问题定义在一个含有 n 个顶点和 m 条边的图上。如果 $\mathrm{dom}\ g \subseteq [0, W]^V$对于某个 $W > 0$ 成立（这在大多数计算机视觉应用中都成立），则可在 (4) 的形式下，在 表示极小值点集合的凸包 $g)$ 所需的时间为 $T_{\text{ineq}} = \mathrm{O}(mn \log(n^2/m) \log(nW))$。

5.2 一般多项式时间方法

接下来我们讨论 L-/L♮-凸最小化，$\min_{p\in\mathbb{Z}^V} g(p)$其中我们只能黑盒访问 g 的取值。与上述情形不同，这种设定不具备有用的原始-对偶结构。尽管如此，我们仍可以在多项式时间内构造所需的不等式系统。这里假设极小值点集合 $g \cap [-C, +C]^V \neq \emptyset$，其中 $C > 0$ 是在线梯度下降中使用的常数，以处理可能无界的极小值点集合 g。这一条件是合理的，因为定理ˆp*中的最佳预测2 是从 $[-C, +C]^V$ 中选出的。我们还假设 g 具有有限的最小值。在这些假设下，以下定理成立（完整证明见附录F.3）。

定理 5。 对于一般的 *L-/L♮-凸函数最小化问题*，$\min_{p\in Z^V} g(p)$，满足极小值点集合 $g \cap [-C, +C]^V \neq \emptyset$且$\min g > -\infty$，我们可以获得一个由凸包(极小值点集合 $g)$ 的子集构成的不等式系统，该系统足以在 $T_{\text{ineq}} = \mathrm{O}(n^2 \log^2 C \cdot (\mathrm{EO} \cdot n^3 \log^2 n + n^4 \log^{\mathrm{O}(1)} n))$ 时间内完成次梯度计算，其中EO 是计算 g所需的时间。

证明概要。注意到，根据命题 1，argmin g 可以用 O(n^2) 个不等式表示。我们通过二分搜索确定所有 O(n^2) 个常数 α_i、 β_i、 $\gamma_{ij} \in \mathbb{Z}$ 的适当取值；根据 argmin $g \cap [-C, +C]^V \neq \emptyset$ 的假设，每次搜索需要 O(log C) 次迭代。在每次迭代中，我们检查给定的不等式（例如 $p_j - p_i \leq \gamma_{ij}$）是否对 g 的所有相关极小点都成立。基于最速下降缩放算法 [Murota, 2003, 第 10.3 节2], ，我们可以通过求解子模函数最小化问题（定义为算法 1 的第 3 步中的局部优化）O(log C) 次来完成此检查。若使用[Lee 等人 2015], 提出的 O(EO $\cdot n^3$ log $^2 n + n^4$ log$^{\mathrm{O}(1)} n$) 时间算法求解该问题，就能得到所需的时间复杂度。 □

6 实证观察

我们在实验中将我们的学习方法与先前的方法进行了比较： [Dinitz 等人， 2021， Sakaue 和 Oki， 2022], 它们分别基于ˆp 、 $\|p^* - \hat{p}\|_1$ 和 $\|p^* - \hat{p}\|_\infty$来学习预测，这些量由某个最优解定义；我们令 p^*为热启动算法的输出。我们将这些学习方法应用于小型随机二分图匹配实例，并比较了使用学习得到的预测进行热启动的匈牙利算法（或用于二分图匹配的算法1 ）的迭代次数。与先前的方法相比，我们的学习方法产生的预测使匈牙利算法所需的迭代次数更少。这一结果表明，通过最小化到最优解集合的 $\ell_\infty^{\pm}$-距离所学习的预测，可能比使用某些固定最优解学习得到的预测更有益。此外，我们的学习方法更快地收敛到良好的预测，这意味着从实证角度看，它需要更少的采样实例来学习良好的预测。这些观察表明，我们的学习方法并非仅具有理论意义。实验细节见附录G。

7 结论

我们提出了一种用于 L-/L♮-凸最小化的新型带预测的热启动框架，其时间复杂度界与 $\bar{\mu}(\hat{p}; g)$ 成正比；该项表示预测 ˆp 与集合 conv(argmin g) 之间的 $\ell_\pm$-距离，集合由

最优解构成。具体而言，我们证明，由 $\hat{}p$ 进行热启动的最速下降法需要 $O(\bar{\mu}(\hat{}p; g))$ 次迭代，并且可以在 $\hat{}p$，使其在多项式时间内近似最小化 $\mathbb{E}_g[\bar{\mu}(\hat{}p; g)]$。从技术层面而言，我们提出了一种高效方法，用于计算 $\bar{\mu}(\cdot; g)$ 的次梯度，从而利用在线梯度下降学习 $\hat{}p$。我们的结果首次证明了预测具有多项式时间可学习性，并且这些预测能够为算法提供可证明的热启动效果，而不受最优解非唯一性的影响。这一结果将显著推动使用预测进行热启动的研究，因为如第 1 节及注释 1所述，在广泛的 L-/L$^\natural$-凸最小化问题中，最优解总是存在非唯一性。未来一个有趣的研究方向是，探索如何为其他问题学习具有类似保证的预测。

致谢

本研究得到了 JST ERATO 项目（编号 JPMJER1903）和 JSPS KAKENHI 项目（编号 JP22K1785）的资助 3.

参考文献

P. Agrawal、E. Balkanski、V. Gkatzelis、T. Ou 和 X. Tan。学习增强机制设计：利用预测进行设施选址。载于第 23 届 ACM经济学与计算会议（EC 2022）论文集，第 497–528 页。ACM，2022年。 ↰ p.3 R. K. Ahuja、D. S. Hochbaum 和 J. B. Orlin。求解凸成本整数对偶网络流问题。《管理科学》，49(7):950–964，2003年。 ↰ p.20 A. Andoni 和 D. Beaglehole。学习稳健哈希，且有保证。载于第 39 届国际机器学习会议（ICML 2022）论文集，第 162 卷，第 599–618 页。PMLR，2022年。 ↰ p.3 R. Arora、O. Dekel 和 A. Tewari。针对自适应对手的在线老虎机学习：从遗憾到策略遗憾。载于第 29 届国际机器学习会议论文集（ICML 2012），第 1747–1754 页。Omnipress，2012年。 ↰ p.15 Y. Azar、D. Panigrahi 和 N. Touitou。带预测的在线图算法。载于 2022 年 ACM-SIAM 离散算法年会（SODA 2022）论文集，第 35–66 页。SIAM，2022年。 ↰ p.3 E. Bamas、A. Maggiori 和 O. Svensson。用于学习增强算法的原始-对偶法。载于《神经信息处理系统进展》（NeurIPS 2020），第 33 卷，第 20083–20094 页。Curran Associates, Inc.，2020年。↰ p.3 D. P. Bertsekas。《非线性规划》。Athena Scientific，第 3 版，2016年。 ↰ p.9 A. Boffa、P. Ferragina 和 G. Vinciguerra。设计压缩秩/选择数据结构的学习方法。《ACM算法汇刊》，18(3):1–28，2022年。 ↰ p.3 N. Cesa-Bianchi 和 G. Lugosi。《预测、学习与博弈》。剑桥大学出版社，2006年。 ↰ p.18 N. Cesa-Bianchi、A. Conconi 和 C. Gentile。关于在线学习算法的泛化能力。《IEEE信息论汇刊》，50(9):2050–2057，2004年。 ↰ p.17 J. Chen、S. Silwal、A. Vakilian 和 F. Zhang。通过学习预测加速基础图算法。载于第 39 届国际机器学习会议（ICML 2022）论文集，第 162 卷，第 3583–3602 页。PMLR，2022年。 ↰ p.3, ↰ p.10, ↰ p.15 A. Cutkosky。任意时刻在线到批量转换、乐观策略与加速。载于第 36 届国际机器学习会议（ICML 2019）论文集，第 97 卷，第 1446–1454 页。PMLR，2019年。 ↰ p.17, ↰ p.22 J. M. Danskin。极大极小理论及其应用。《SIAM应用数学杂志》，14(4):641–664，1966年。 ↰ p.9

M. Dinitz、S. Im、T. Lavastida、B. Moseley 和 S. Vassilvitskii。通过学习对偶加速匹配。载于《神经信息处理系统进展》（NeurIPS 2021），第 34 卷，第 10393–10406 页。Curran Associates, Inc.，2021年。↰p.1, ↰p.2, ↰p.3, ↰p.6, ↰p.11, ↰p.15, ↰p.22 T. Eden、P. Indyk、S. Narayanan、R. Rubinfeld、S. Silwal 和 T. Wagner。次线性时间内基于学习的支持集估计。载于国际学习表征会议（ICLR 2021），2021年。↰p.3 J. Edmonds。拟阵与贪心算法。《数学规划》，1:127–136，1971年。↰p.19 J. C. Ergun、Z. Feng、S. Silwal、D. Woodruff 和 S. Zhou。学习增强的 k均值聚类。载于国际学习表征会议（ICLR 2022），2022年。↰p.3 W. Feijen 和 G. Schäfer。利用机器学习预测加速 Dijkstra 最短路径算法。arXiv:2112.11927，2021年。↰p.3 A. Frank。《组合优化中的联系》。牛津数学及其应用讲座系列。牛津大学出版社，2011年。↰p.19 S. Fujishige、K. Murota 和 A. Shioura。多面体 L-凹函数最速上升算法的单调性。《日本运筹学会杂志》，58(2):184–208，2015年。↰p.5 E. Hazan 和 S. Kale。在线次模函数最小化。《机器学习研究杂志》，13(93):2903–2922，2012年。↰p.17 M. Khodak、M.-F. Balcan、A. Talwalkar 和 S. Vassilvitskii。为带预测的算法学习预测。载于《神经信息处理系统进展》（NeurIPS 2022），第 35 卷。Curran Associates, Inc.，2022年。↰p.2,↰p.6, ↰p.7, ↰p.15 V. Kolmogorov 和 A. Shioura。凸代价张力问题的新算法及其在计算机视觉中的应用。《离散优化》，6(4):378–393，2009年。↰p.20 Y. T. Lee、A. Sidford 和 S. C.-W. Wong。更快的切割平面法及其对组合优化和凸优化的意义。载于 2015 年 IEEE 第 56 届计算机科学基础年会（ FOCS 2015 ）论文集，第 1049–1065 页。IEEE，2015 年。↰p.11, ↰p.21 A. Lindermayr 和 N. Megow。带预测的算法（ALPS）网站。https://algorithms-with-predictions.github.io/。访问日期：2023-01-18。↰p.3 P. Lu、X. Ren、E. Sun 和 Y. Zhang。带预测的广义排序。载于第 4 届 SIAM 算法简洁性研讨会（SOSA 2021）论文集，第 111–117 页。SIAM，2021年。↰p.3 T. Lykouris 和 S. Vassilvitskii。利用机器学习建议的竞争性缓存。ACM 杂志，68(4):1–25，2021年。↰p.3 M. Mitzenmacher 和 S. Vassilvitskii。带预测的算法。载于《超越算法的最坏情况分析》，第 646–662 页。剑桥大学出版社，2021年。↰p.1 K. Murota。通过组合松弛计算行列式的次数。《SIAM 计算杂志》，24(4):765–796，1995年。↰p.10, ↰p.11 K. Murota。《离散凸分析》。离散数学及其应用。SIAM，2003年。↰p.3, ↰p.4, ↰p.8, ↰p.11,↰p.16, ↰p.20, ↰p.21 K. Murota 和 A. Shioura。L-凸函数最小化最速下降算法的精确界。《运筹学快报》，42(5):361–366，2014年。↰p.5 F. Orabona。《在线学习现代导论》。OpenBU，2020年。↰p.7 A. Polak 和 M. Zub。学习增强的最大流。arXiv:2207.12911，2022年。↰p.3, ↰p.16

M. Purohit、Z. Svitkina 和 R. Kumar。《通过机器学习预测改进在线算法》。载于《神经信息处理系统进展》（NeurIPS 2018），第31卷。Curran Associates, Inc.，2018年。 ↰第3页 R. T. Rockafellar。《凸分析》。普林斯顿大学出版社，1970年。 ↰第8页 S. Sakaue 和 T. Oki。《基于离散凸分析的框架：利用预测热启动算法》。载于《第36届神经信息处理系统进展会议论文集》（NeurIPS 2022），2022年。 ↰第1页， ↰第2页， ↰第3页，↰第4页， ↰第5页， ↰第6页， ↰第7页， ↰第8页， ↰第11页， ↰第15页， ↰第16页， ↰第19页， ↰第21页， ↰第22页 A. Schrijver。《组合优化：多面体与效率》。施普林格，2003年。 ↰第5页， ↰第18页， ↰第19页 A. Shioura。《L-凸函数最小化算法：离散凸分析与其他研究领域之间的联系》。《日本运筹学会杂志》，60(3):216–243，2017年。 ↰第5页 M. Streeter 和 H. Brendan McMahan。《通过在线条件化降低遗憾》。arXiv:1002.4862，2010年。 ↰第22页

附录

A 最优解非唯一性导致的问题详情

我们详细说明了忽视最优解非唯一性 p^*所引发的问题，这种情况出现在许多问题设置中，包括二分图匹配的对偶问题以及 L-/L♮-凸函数最小化。简而言之，这类问题陷入两难：如果我们选定某个最优 p^* 解，且不考虑预测 $\hat{}p$，那么依赖于 $\|p^* - \hat{}p\|$ 的时间复杂度界可能会很差；如果我们根据预测 $\hat{}p$ 选择最优 p^* 解，以使 $\|p^* - \hat{}p\|$ 较小，那么由于 p^* 依赖于 $\hat{}p$，我们便无法使用关于 $\hat{}p$可学习性的现有结果。下面我们将详细说明这两类问题。

A.1 如何在不依赖预测的情况下固定最优解

如果每个输入实例都能独立于预测唯一对应一个最优解，我们便可以依赖现有的预测可学习性结果。因此，可以先考虑使用某种平局裁决规则来处理最优解的非唯一性。不过请注意，与我们采用到所有最优解集合的最小距离相比，任何平局裁决规则都无法带来实质上更强的结果。此外，看似合理的平局裁决规则往往会导致较差的界。例如，考虑一种自然的平局裁决规则：在 ℓ_2 范数下，唯一选出距离某个固定点（例如原点 $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^V$）最近的最优解 p^*。假设给定一个满足 $\text{conv}(\text{argmin } g) = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid p_2 - p_1 = 100\}$ 的实例，则距离 $\mathbf{0}$ 最近的 $\text{conv}(\text{argmin } g)$ 为 $p^* \in (-50, 50)$。那么，如果给定的预测为 $\hat{}p = (1, 100)$，我们有 $\|p^* - \hat{}p\|_\infty = 50$，尽管 $\bar{\mu}(\hat{}p; g) = 1$。因此，即使 $\hat{}p$ 接近最优解集合 $\text{conv}(\text{argmin } g)$，这种选择距离某个固定点最近的解的平局裁决规则通常仍会导致较差的依赖预测的时间复杂度界。

A.2 学习预测的现有结果

鉴于固定 p^*存在上述缺陷，我们可能希望令 p^* 成为一个接近给定预测$\hat{}p$的最优解。事实上，先前研究中的大多数实验似乎都隐含地基于这一思想；也就是说，它们令p^* 成为由以$\hat{}p$ 进行热启动的算法返回的最优解，并学习$\hat{}p$ 以降低形如$\|p^* - \hat{}p\|$的损失值。然而，这一思想会使最优 $p^* \in \text{conv}(\text{argmin } g)$的选择取决于给定的预测$\hat{}p$。下面我们解释为什么现有的关于学习预测$\hat{}p$ 的理论结果无法处理 p^*^对 p的依赖关系。

PAC 学习方法。获得学习预测保证的一种流行方法是使用 PAC 学习框架 [Dinitz 等，2021、Chen 等人、2022]。采用这种方法时，假设输入实例g 是从某个分布中独立同分布抽取的，我们通常会分析形如$\{ f_{\hat{p}} \text{ 的函数类的伪维度：} \ g \mapsto \mathbb{R} \mid \hat{}p \in \mathbb{R}^V \}$。然而，现有研究分析的是形如 $f_{\hat{p}}(p^*) = \|p^* - \hat{}p\|$的函数类的伪维度，而忽略了最优 p^*的不唯一性。如果我们希望令 p^* 成为接近$\hat{}p$的最优解，就必须将 p^* 视为$\hat{}p$ 的函数，并明确对于每个实例 g，如何根据$\hat{}p$ 唯一计算 p^*；因此，该函数应形如 $f_{\hat{p}}(g) = \|p^*(\hat{}p, g) - \hat{}p\|$。现有关于使用预测进行热启动的 PAC 可学习性结果都未讨论这种复杂的依赖关系。

在线学习方法。另一种方法是使用在线算法来学习预测 [Khodak 等人，2022，Sakaue 和 Oki，2022]。在这些研究中，第 t个损失函数的形式为 $f_t(\hat{}p) = \|p_t^* - \hat{}p\|$，其中 p_t^* 是为第 t个实例选取的某个最优解，遗憾定义为 $\sum_{t=1}^T \|p_t^* - \hat{}p_t\| - \min_{\hat{p}^* \in [-C,+C]^V} \sum_{t=1}^T \|p_t^* - \hat{}p^*\|$。如果我们希望让 p^* 依赖于 $\hat{}p$，就需要针对一个对手学习 $\hat{}p_t$，而该对手会根据 $\hat{}p_t$来选择 p_t^*。在这种情况下，上述遗憾定义并不合理；一个显而易见的问题是，可以通过选择 $\hat{}p_t$ 使第二项变大，从而获得较小的遗憾，因为 $\hat{}p_t$ 会影响 p_t^*。 [Arora 等人，2012], 讨论了类似的问题，但这里的问题会更加严重，因为对手是在学习者之后行动的。现有研究尚未考虑这种情况。请注意，尽管我们的方法属于这一类，但我们的损失函数 $\bar{\mu}(\hat{}p; g_t)$ 经过专门设计，可避免非唯一性问题。

A.3 关于可学习性 [Polak 和 Zub, 2022]

Polak 和 Zub [2022] 研究了使用预测进行热启动的最大流算法。作者指出，对于最优流 $\|p^* - \hat{p}\|_1$，其方法的时间复杂度界与 p^* 到 $\hat{p}$ 的距离成正比。尽管这意味着 p^* 依赖于 $\hat{p}$，但他们关于学习 $\hat{p}$ 的分析似乎不足以处理这种依赖关系，具体如下。

在 [Polak 和 Zub，2022 的引理 7], 中，作者给出了经验损失与期望损失之差的一个一致界。具体而言，给定从分布 $\mathcal{D}$ 中独立同分布抽取的 T 个实例 $g_1, \ldots, g_T$，该引理指出，以高概率，对于满足某些约束的所有 $p \in \mathbb{Z}^V$，都有形如 $\left| \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \|p^*(g_t) - p\|_1 - \mathbb{E}_{g \sim \mathcal{D}}[\|p^*(g) - p\|_1] \right| \leq 1$ 的界。随后，在 [Polak 和 Zub, 2022 的定理 4], 的证明中，作者将预测 $\hat{p}$ 代入 p，并使用引理 7；其中，“对所有 $p \in \mathbb{Z}^V$”这一部分的合理性，是基于预测 $\hat{p}$ 是在抽取实例 g_t 之后才选择的这一事实。这一论证在 $p^*(g)$ 与 $\hat{p}$无关时是正确的，也就是说，我们可以从 g唯一地定义函数 $f_g(p) = \|p^*(g)$。然而，如果令 $p^*(g)$ 为距离 $\hat{p}$最近的一个最优解，这一论证就不成立。若要使类似引理 7 的界适用于依赖于 $\hat{p}$的 $p^*(g)$，我们需要推导出一致收敛性，例如，定义如何根据一对 $(\hat{p}, g)$ 计算 $p^*(g)$，并对该计算过程的伪维度进行界定。综上，Polak 和 Zub, 2022] 关于学习 $\hat{p}$的样本复杂度界，似乎只有在每个 g 对应的 $p^*(g)$ 均独立于 $\hat{p}$而固定时才成立。

B 引理1的证明

引理 1. 设 $g\colon \mathbb{Z}^V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 是一个 *L-/L♮-*凸函数。对于每个 $p \in \mathbb{Z}^V$，都有 $\mu(p;\ g) = \bar{\mu}(p;\ g)$.

证明。 设 $p \in \mathbb{Z}^V$。如第 4.2 节所述， $\bar{\mu}(p;\ g)$ 等于一条最短路径 $\tilde{}$ $\tilde{}$在 (V, E)中的总权重的相反数，可将其表示为以下线性规划的最优值（见 [Sakaue 和 Oki，2022，附录 D]）：

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & q_t - q_s \\ \text{subject to} & q_j - q_i \leq \tilde{w}_{ij}(p) \quad \forall ij \in \tilde{E}, \\ & q_0 = 0, \end{array} \tag{9}$$

其中

$$\tilde{w}_{ij}(p) = \begin{cases} \gamma_{ij} - p_j + p_i & \text{if } ij \in E, \\ -\alpha_i + p_i & \text{if } i \in V \text{ and } j = 0, \\ \beta_j - p_j & \text{if } i = 0 \text{ and } j \in V, \\ 0 & \text{if } i = s \text{ or } j = t \end{cases}$$

对于 $-\alpha_i$、 β_j、 $\gamma_{ij} \in \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$。根据 $p \in \mathbb{Z}^V$，所有 $\tilde{w}_{ij}(p)$ 都是整数。此外，(9) 中的约束可以˜用全幺模矩阵表示。因此，线性规划 (9) 存在一个整数最优解 $q^* \in \mathbb{Z}^V$。令$q_V^* \in \mathbb{Z}^V$为 q^* 在 $V = \tilde{V} \setminus \{0, s, t\}$上的限制。于是，如 [Sakaue 和 Oki，2022，附录 D]所示， $p^* = p + q_V^*$达到 $\|p^* - p\|_\infty^\pm = \bar{\mu}(p;\ g)$。此外，由于 $p \in \mathbb{Z}^V$和 $q_V^* \in \mathbb{Z}^V$， p^* 是一个整数向量，因此我们有 $p^* \in$凸包(极小值点集合 g) $\cap\, \mathbb{Z}^V =$极小值点集合 g，其中该等式称为 L-/L♮-凸集的无空洞性质（ [Murota，2003，定理 5.2 和第 5.5] 节）。根据 $\|p^* - p\|_\infty^\pm = \bar{\mu}(p;\ g)$ 和 $p^* \in$极小值点集合 g，我们有$\mu(p;\ g) = \|p^* - p\|_\infty^\pm$，因此 $\mu(p; g) = \|p^* - p\|_\infty^\pm = \bar{\mu}(p;\ g)$。 □

C 推论 证明1

推论 1. 设 $\mathcal{D}$ 是 *L-/L♮-*凸函数 $g\colon \mathbb{Z}^V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $\delta \in (0, 1]$, 和 $\varepsilon > 0$ 上的一个（未知）分布。给定 $T = \Omega\left(\left(\frac{C}{\varepsilon}\right)^2 \left(n + \log \frac{1}{\delta}\right)\right)$ 个 $g_1, \ldots, g_T \sim \mathcal{D}$ 的独立同分布抽样，我们可以得到满足以下条件的 $\hat{p} \in \mathbb{R}^V$

$$\mathbb{E}_{g \sim \mathcal{D}}[\bar{\mu}(\hat{p}; g)] \leq \min_{\hat{p}^* \in [-C, +C]^V} \mathbb{E}_{g \sim \mathcal{D}}[\bar{\mu}(\hat{p}^*; g)] + \varepsilon$$

以至少 l 的概率 向东 $1 - \delta$。根据定理 *2*的假设，我们可以在 $\hat{p}$ 内计算 $O(T \cdot (T_{\text{ineq}} + n^2))$ *ti* *me.*

证明。 基本证明思路是使用 [Cesa-Bianchi 等人的在线到批量转换，将 2004] 遗憾界（定理 2）转换为样本复杂度界。这里，我们采用一种称为任意时刻在线到批量转换的改进变体 [Cutkosky，2019，定理 1], 该方法有助于确保针对随机损失函数计算的预测满足最后迭代收敛。我们还将在附录 G的实验中使用这一技术。

根据 [Cutkosky, 2019, Theorem 1],，我们对用于计算预测的在线算法稍作修改。在每个第 t 轮，令 $q_t = \frac{1}{t}\sum_{t'=1}^{t} \hat{p}_{t'}$，并在 q_t 处计算一个次梯度 z_t，即 $z_t \in \partial\bar{\mu}(q_t, g_t)$。向在线学习器揭示的第 t 个损失函数是线性损失函数 $f_t(\hat{p}) = \langle z_t, \hat{p}\rangle$，学习者使用在线算法计算 $\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_T \in [-C,+C]^V$，使其对任意 $\hat{p}^* \in [-C,+C]^V$ 都满足遗憾界 $\sum_{t=1}^{T} f_t(\hat{p}_t) - \sum_{t=1}^{T} f_t(\hat{p}^*) = \sum_{t=1}^{T}\langle z_t, \hat{p}_t - \hat{p}^*\rangle = \mathrm{O}(C\sqrt{nT})$。这里，学习者可以使用第 4.1 节中介绍的在线梯度下降；很容易验证，对于线性化损失 $f_t(\hat{p}) = \langle z_t, \hat{p}\rangle$，它同样满足 $C\sqrt{2nT}$-遗憾界。然后，将 $\|z_t\|_1 \le 2$ 和 $\max\{\|p-q\|_\infty \mid p, q \in [-C,+C]^V\} \le 2C$ 代入 [Cutkosky, 2019, Theorem 1],，我们可以证明 $\hat{p} = q_T$ 以至少 $1-\delta$ 的概率满足以下不等式：

$$\mathbb{E}_{g\sim\mathcal{D}}[\bar{\mu}(\hat{p}; g_t)] - \min_{\hat{p}^* \in [-C,+C]^V} \mathbb{E}_{g\sim\mathcal{D}}[\bar{\mu}(\hat{p}^*; g_t)] \le \frac{C\sqrt{2nT} + 8C\sqrt{T\log(2/\delta)}}{T} = \frac{C}{\sqrt{T}}\left(\sqrt{2n} + 8\sqrt{\log\frac{2}{\delta}}\right).$$

因此，样本量为 $T = \Omega\left(\left(\frac{C}{\varepsilon}\right)^2\left(n + \log\frac{1}{\delta}\right)\right)$，足以确保右侧不超过 ε。

至于时间复杂度，在线梯度下降的每轮运行时间为 $T_{\text{ineq}} + \mathrm{O}(n^2)$，根据引理 {v?}3（因为 $p_t^* \in$ 极小值点集合 g_t可用），这一过程重复 T次以得到 $\hat{p} = q_T$。因此，总运行时间为 $\mathrm{O}(T \cdot (T_{\text{ineq}} + n^2))$。 □

D 遗憾下界

我们证明了在线最小化 $\Omega(C\sqrt{nT})$ 的遗憾下界，$\bar{\mu}(\hat{p};\ g_t)$ 以补充定理 {v?}2。证明思路基于 [Hazan 和 Kale，2012，定理 14], 该定理给出了在线次模函数最小化的遗憾下界。

为便于分析，我们仅考虑从 $[-C,+C]^V$ 中选择 $\hat{p}_1$、……、$\hat{p}_T$的学习者。由于对 $[-C,+C]^V$ 进行 ℓ_2-投影，我们的在线梯度下降满足这一条件；因此，下界表明 $\mathrm{O}(C\sqrt{nT})$ 上界是紧的。另需说明的是，下文通过使用 g_t（使得 $\operatorname{argmin} g_t \cap [-C,+C]^V = \emptyset$）得到一个下界，而预测 $\hat{p}$ 受限于 $[-C,+C]^V$。我们将使用 g_t（满足 $\operatorname{argmin}\ g_t \cap [-C,+C]^V \ne \emptyset$）证明下界留待未来工作。

定理 6。 </style}设 为整数。对于任意在线学习者，若其依次选择$\hat{p}_1$、……、$\hat{p}_T \in [-C,+C]^V$，则存在一个 $L^\natural$-凸函数序列 g_1、……、g_T，使得该学习者遭受$\Omega(C\sqrt{nT})$ 遗憾。

证明。 令 $n = |V|$ 为偶数，且 $i(t) = (t \bmod n/2) + 1 \in \{1, \ldots, n/2\}$，其中 $t = 1$，……，T。在每个 t轮中，独立于所有其他随机变量，选取一个 Rademacher 随机变量 $\sigma_t \in \{-1, +1\}$。令 g_t 为示性函数，使得 $\operatorname{dom} g_t$是单元素集合 $\{p_t^*\}$，其中 $p_t^* \in \mathbb{Z}^V$有两个非零元素：第 $i(t)$个元素为 $3\sigma_t C$，第 $(i(t) + n/2)$个元素为 $-3\sigma_t C$，其余元素均为零。由于我们有极小值点集合 $\operatorname{argmin}\ g_t = \{p_t^*\}$，对任意 $\hat{p} \in [-C,+C]^V$，有

$$\bar{\mu}(\hat{p}; g_t) - \bar{\mu}(p_t^*; g_t) = \|\hat{p} - p_t^*\|_\infty^{\pm} = \max_{i\in V} \max\{0, p_{t,i}^* - \hat{p}_i\} + \max_{i\in V} \max\{0, \hat{p}_i - p_{t,i}^*\} = 6C + \sigma_t(\hat{p}_{i(t)+n/2} - \hat{p}_{i(t}$$

因此，对于学习者的任意选择 $\hat{p}_t \in [-C,+C]^V$，我们有 $\mathbb{E}[\bar{\mu}(\hat{p}_t;\ g_t)] = 6C$，其中期望是对 σ_t 的随机性取的。因此，任意在线学习器的期望总损失为 $6CT$。

接下来我们证明，存在一个 $\hat{p}^* \in [-C,+C]^V$，使其相较于学习者的期望损失具有 $\Omega(C\sqrt{nT})$ 的优势，这意味着遗憾下界为 $\Omega(C\sqrt{nT})$。令 $\operatorname{sign}(x)$ 表示一个函数：当 $x > 0$ 时返回 $+1$，当 $x = 0$ 时返回 0，当 $x < 0$ 时返回 -1。令 $X_i = \sum_{t:i(t)=i} \sigma_t$，其中 $i = 1, \ldots, n/2$。将 $\hat{p}^*$ 的第 i 个元素设为 $\operatorname{sign}(X_i) \times C$，其中 $i = 1, \ldots, n/2$；并将其第 $-$ 个元素设为 $\operatorname{sign}(X_i) \times C$，其中 $i = n/2+1, \ldots, n$。于是，在每个第 t 轮中，$p_t^* - \hat{p}^*$ 的第 $i(t)$ 个元素会导致损失值：若 $\operatorname{sign}(X_{i(t)}) = \sigma_t$，则为 $2C$；若 $X_{i(t)} = 0$，则为 $3C$；否则为 $4C$。同理，第 $(i(t) + n/2)$ 个元素会导致损失值 $2C$、$3C$ 或 $4C$。因此我们有

$$\sum_{t=1}^{T} \bar{\mu}(\hat{p}^*; g_t) = \sum_{t=1}^{T} \|p_t^* - \hat{p}^*\|_\infty^{\pm} = 3CT - C\sum_{i=1}^{n/2}|X_i| + 3CT - C\sum_{i=1}^{n/2}|X_i| = 6CT - 2C\sum_{i=1}^{n/2}|X_i|,$$

这意味着期望遗憾至少为 $2C \times \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n/2} |X_i|\right]$。由于每个 X_i 都是至少由 $\left\lfloor \frac{T}{n/2} \right\rfloor$ 个相互独立的Rademacher随机变量之和，Khintchine不等式（例如参见 [Cesa-Bianchi andLugosi，2006年，附录A.1。4]）推出 $\mathbb{E}[|X_i|] \geq \sqrt{\frac{1}{2}\left\lfloor \frac{T}{n/2} \right\rfloor}$。因此，期望遗憾至少为 $2C \times \frac{n}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\left\lfloor \frac{T}{n/2} \right\rfloor} = \Omega(C\sqrt{nT})$。这个期望下界意味着存在一组特定的 σ_t 取值，使得学习者承受 $\Omega(C\sqrt{nT})$遗憾。

□

E 转化为非负边权

我们将展示如何把第4.2 节中的最短路径问题转化为一个边权重均非负的问题。得到这样的转化问题后，我们就可以使用 Dijkstra 算法来寻找最短路径。这种转化基于所谓的势函数，它在组合优化中得到了广泛研究 [Schrijver，2003年，第 8 节。2]。

回忆一下，顶点集为 $V = V_0 \cup \{s, t\}$，其中 $V_0 = \{0\} \cup V$，边集为

$$\tilde{E} = E \cup \{\{0\} \times V\} \cup \{V \times \{0\}\} \cup \{\{s\} \times V_0\} \cup \{V_0 \times \{t\}\},$$

其中 $E = \{ij \mid i, j \in V;\ i \neq j\}$。所有简单 s–t 路径（$\tilde{V}$，$\tilde{E}$）的集合记为 $\mathcal{P} \subseteq 2^{\tilde{E}}$。我们还有如下不等式系统表示$\operatorname{conv}(\operatorname{argmin} g)$，如假设2所示：

$$\operatorname{conv}(\operatorname{argmin} g) = \left\{ p \in \mathbb{R}^V \;\middle|\; \begin{array}{l} \alpha_i \leq p_i \leq \beta_i \text{ for } i \in V, \\ p_j - p_i \leq \gamma_{ij} \text{ for distinct } i, j \in V \end{array} \right\}. \tag{10}$$

对于任意给定的预测 $\hat{p} \in \mathbb{R}^V$，原始（可能为负的）边权重 $\tilde{w}_{ij}(\hat{p})$ $(ij \in \tilde{E})$ 定义如下：

$$\tilde{w}_{ij}(\hat{p}) = \begin{cases} \gamma_{ij} - \hat{p}_j + \hat{p}_i & \text{if } ij \in E, \\ -\alpha_i + \hat{p}_i & \text{if } i \in V \text{ and } j = 0, \\ \beta_j - \hat{p}_j & \text{if } i = 0 \text{ and } j \in V, \\ 0 & \text{if } i = s \text{ or } j = t. \end{cases}$$

我们将它们转换为非负权重。如果 $\tilde{w}_{ij}(\hat{p}) - q_j + q_i \geq 0$ 对 $ij \in \tilde{E}$成立，我们就称 $q \in \mathbb{R}^{\tilde{V}}$a 势函数 。如果有一个势函数，我们就可以定义非负边权 $\tilde{w}^+_{ij}(\hat{p}) := \tilde{w}_{ij}(\hat{p}) - q_j + q_i$，其中 $ij \in \tilde{E}$。对于 (V, E) 中任意一条简单的 s–t 路径 $P \in \mathcal{P}$，由望远镜求和可得

$$\sum_{ij \in P} \tilde{w}^+_{ij}(\hat{p}) = \sum_{ij \in S} (\tilde{w}_{ij}(\hat{p}) - q_j + q_i) = q_s - q_t + \sum_{ij \in S} \tilde{w}_{ij}(\hat{p}),$$

其中 q_s 和 q_t 均与 $P \in \mathcal{P}$的选择无关。因此，当且仅当 P 是关于 $\tilde{w}^+_{ij}(\hat{p})$ 的最短路径时，$P \in \mathcal{P}$ 才是关于边权重$\tilde{w}_{ij}(\hat{p})$ 的最短路径。因此，一旦给定势函数，我们就能在 $O(E)$ 时间内得到不会改变最短路径集合的非负边权，并能通过 Dijkstra 算法在 $O(|E| + |V| \log |V|)$ 时间内找到一条最短路径。下面我们介绍如何从任意一个最优解 $p^* \in \operatorname{argmin} g$中得到势函数；由于定理 2 假设第 t 个实例已经求解，因此该解可以免费获得。

为简化记号，我们将元素 $\hat{p}_0 = \hat{p}_s = \hat{p}_t = 0$ 添加到 $\hat{p} \in \mathbb{R}^V$。此外，令 $\gamma_{i0} = -\alpha_i$ 表示 $i \in V$，$\gamma_{0j} = \beta_j$ 表示 $j \in V$，$\gamma_{sj} = \hat{p}_j$ 表示 $j \in V_0$，并令 $\gamma_{it} = -\hat{p}_i$ 表示 $i \in V_0$。于是，原始边权 $\tilde{w}_{ij}(\hat{p})$ 可写为

$$\tilde{w}_{ij}(\hat{p}) = \gamma_{ij} - \hat{p}_j + \hat{p}_i \quad \text{for } ij \in \tilde{E}. \tag{11}$$

由于我们有 $p^* \in$极小值点集合 $g \subseteq$凸包(极小值点集合 g)，$p^* \in \mathbb{R}^V$满足（10）中的不等式。因此，通过进一步定义 $p^*_0 = 0$，$p^*_s =$最大值$_{j \in V_0}(p^*_j - \hat{p}_j)$，以及 $p^*_t =$最小值$_{i \in V_0}(p^*_i - \hat{p}_i)$，我们有

$$p^*_j - p^*_i \leq \gamma_{ij} \quad \text{for } ij \in \tilde{E}. \tag{12}$$

˜那么， $q \coloneqq p^* - \hat{}p \in \mathbb{R}^V$ 确实是一个势函数，因为我们有

$$\tilde{w}_{ij} - q_j + q_i = \tilde{w}_{ij} - (p_j^* - \hat{p}_j) + (p_i^* - \hat{p}_i) \overset{(11)}{=} \gamma_{ij} - \hat{p}_j + \hat{p}_i - (p_j^* - \hat{p}_j) + (p_i^* - \hat{p}_i) = \gamma_{ij} - p_j^* + p_i^* \overset{(12)}{\geq} 0$$

对于所有 $ij \in$ $\tilde{E}$。利用这个势函数，我们可以按照上述描述获得非负边权 $\tilde{w}_{ij}^{+}(\hat{}p)$ e.

F 部分缺失证明，第5

我们详细说明如何为加权拟阵交（附录 凸包(argmin g) ）、离散能量最小化（附录F.1）、以及值预言机模型下的一般 L-/L$^\natural$-凸最小化（附录 F.3）构造不等式系统。

F.1 定理3的证明

我们讨论加权拟阵交问题，这是若干问题的推广，例如二分图匹配和生成树打包。拟阵 M 由有限集合 V 和非空的基族 $\mathcal{B} \subseteq 2^V$ 组成，并满足以下条件：对于任意 B_1、$B_2 \in \mathcal{B}$ 和 $i \in B_1 \setminus B_2$，存在 $j \in B_2 \setminus B_1$ 使得 $B_1 \setminus \{i\} \cup \{j\}$、$B_2 \setminus \{j\} \cup \{i\} \in \mathcal{B}$。对于任意 $v \in \mathbb{Z}^V$ 和 $X \subseteq V$，令 $v(X) = \sum_{i \in X} v_i$。对于任意 $v \in \mathbb{Z}^V$ 和拟阵 $\mathrm{M} = (V, \mathcal{B})$，令 $\mathcal{B}^v \coloneqq \operatorname{argmax}_{B \in \mathcal{B}} v(B)$，并令 $\mathrm{M}^v \coloneqq (V, \mathcal{B}^v)$，它也构成一个拟阵 [Edmonds, 1971]。

设 $\mathrm{M}_1 = (V, \mathcal{B}_1)$ 和 $\mathrm{M}_2 = (V, \mathcal{B}_2)$ 是定义在相同基集 V 上的两个拟阵，并配有权重 $w \in \mathbb{Z}^V$。我们假设每个拟阵的秩至多为 r（即，对于 $k = 1, 2$），$\max_{B \in \mathcal{B}_k} |B| \leq r$，且 M_1 和 M_2 的独立性预言机运行时间为 τ，每个预言机都会返回输入 $X \subseteq V$ 是否是某个 $B \in \mathcal{B}_k$ 的子集（$k = 1, 2$）。加权拟阵交问题要求找到使 $w(B)$ 最大化的 $B \in \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$。其对偶问题可写为以下 L-凸函数的最小化问题 g（参见 Sakaue 和 Oki，2022，第3节.2]）：

$$\underset{p \in \mathbb{Z}^V}{\text{minimize}} \quad g(p) = \max_{B \in \mathcal{B}_1} p(B) + \max_{B \in \mathcal{B}_2} (w - p)(B).$$

下面我们证明以下定理。

定理 3. 考虑加权拟阵交的对偶问题，$\min_{p \in Z^V} g(p)$，该问题定义在一个基集 V 上，其大小为 n。若已知一个最大权公共基（或问题已求解），则可以在(4) 时间内得到一个不等式系统，以表示$\operatorname{conv}(\operatorname{argmin} g)$，其中 $T_{\mathrm{ineq}} = \mathrm{O}(\tau n r)$，其中 r 是拟阵的秩，而 τ是独立性预言机的运行时间。

证明。 令 $B^* \in \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ 为任意一个使 w（B^*）达到最大值的公共基。根据强对偶性 [Frank，2011，定理 13.2。4], 可知 w（B^*）$= g$（p^*）对任意最优对偶解 $p^* \in \mathbb{Z}^V$均成立。这意味着 $p \in \mathbb{Z}^V$ 是最优解，当且仅当

$$B^* \in \operatorname*{argmax}_{B \in \mathcal{B}_1} p(B) \cap \operatorname*{argmax}_{B \in \mathcal{B}_2} (w - p)(B). \tag{13}$$

此外，拟阵基上的线性最大化的最优性条件指出，对于任意 $v \in \mathbb{Z}^V$ 和拟阵 $\mathrm{M} = (V, \mathcal{B})$，$B \in \operatorname{argmax}_{B' \in \mathcal{B}} v(B')$ 成立，当且仅当 $v_i \geq v_j$ 对所有 $i \in B$ 和 $j \in V \setminus B$，满足$B \setminus \{i\} \cup \{j\} \in \mathcal{B}$（例如参见 [Schrijver，2003年，推论 39.12b]）。若将此条件分别应用于式 (13) 中的 $\operatorname{argmax}_{B \in \mathcal{B}_1} p(B)$ 和 $\operatorname{argmax}_{B \in \mathcal{B}_2} (w - p)(B)$，则式 (13) 中的“当且仅当”条件意味着我们可以将 $\operatorname{argmin} g$ 表示如下：

$$\left\{ p \in \mathbb{Z}^V \;\middle|\; \begin{array}{l} p_i \geq p_j \text{ for } (i,j) \in E_1(B^*), \\ w_i - p_i \geq w_j - p_j \text{ for } (i,j) \in E_2(B^*) \end{array} \right\}, \tag{14}$$

其中 B^* 是任意一个最大权公共基，且 $E_k(B^*) = \{(i, j) \mid i \in B^*, j \in V \setminus B^*, B^* \setminus \{i\} \cup \{j\} \in \mathcal{B}_k\}$ 对于 $k = 1, 2$。在 $\mathbb{R}^V$ 上的同一不等式系统表示 凸包 (极小值点集合 g)，如命题 1 所示。

根据定理 3 的假设，存在一个最大权公共基 B^*。给定 B^* 后，我们可以在 14 式中以 $\mathrm{O}(\tau |B^*||V \setminus B^*|) \lesssim \mathrm{O}(\tau n r)$ 时间构造不等式系统，因此 $T_{\mathrm{ineq}} = \mathrm{O}(\tau n r)$。 □

我们还证明，在线梯度下降的每轮运行时间为 $O(\tau nr+n\log n)$。由于对于 $k=1,2$，有 $|E_k|=O(|B^*||V\setminus B^*|)\lesssim \tilde{O}(nr)$，不等式系统 (14) 会导出一个图 (V,E)，满足 $|E|=O(nr)$。因此，引理 3 的证明中 Dijkstra 算法的运行时间为 $O(nr+n\log n)$，在线梯度下降的每轮运行时间为 $T_{\mathrm{ineq}}+O(nr+n\log n)=O(\tau nr+n\log n)$。由于算法 1 中的局部局部优化与表 1 一样需要 $T_{\mathrm{loc}}=O(\tau nr^{1.5})$ 时间，在线梯度下降的每轮运行时间可缩短至 T_{loc} if $\log n\lesssim O(\tau r^{1.5})$。

F.2 定理4的证明

我们讨论 [Kolmogorov 和 Shioura提出的 2009], 离散能量最小化问题，该问题出现在计算机视觉（CV）应用中。（尽管Kolmogorov 和 Shioura [2009] 考虑的是无向图，但对于有向图也有类似结果，如下所示；另见 [Murota，2003年，第 9]节。）令(V,A) 为一个有向图，其中有 $|V|=n$ 和$|A|=m$。每个顶点 $i\in V$ 和边 $a\in A$ 分别关联一个单变量凸函数 $\phi_i:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$和 $\psi_a:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$，且我们可以在常数时间内对其求值。于是，离散能量最小化问题可写为

$$\underset{p\in\mathbb{Z}^V}{\text{minimize}}\quad g(p)=\sum_{i\in V}\phi_i(p_i)+\sum_{a=ij\in A}\psi_a(p_j-p_i), \tag{15}$$

这是一个 L♮凸最小化问题，也是最小费用流的一种推广。我们假设对于某个 $W>0$，dom $g\subseteq[0,W]^V$；这在计算机视觉（CV）应用中通常成立，因为像素值的取值范围是有界的。该假设意味着我们可以分别将 dom ϕ_i 和 dom ψ_a 限制为 $[0,W]\cap\mathbb{Z}$ 和 $[-W,+W]\cap\mathbb{Z}$。

接下来，我们引入（15）的对偶问题。对于向量 $\xi\in\mathbb{R}^A$，称为流，我们将其边界 $\partial\xi\in\mathbb{R}^V$定义为$(\partial\xi)_i=\sum_{a\in\delta^+(i)}\xi_a-\sum_{a\in\delta^-(i)}\xi_a$ 对 $i\in V$成立，其中 $\delta^+(i)$（分别为 $\delta^-(i)$）表示进入（分别离开） $i\in V$的边。我们可以将（15）的对偶问题写成如下凸费用流问题：

$$\underset{\xi\in\mathbb{R}^A}{\text{maximize}}\quad f(\xi)=\sum_{i\in V}\min_{x\in\mathbb{Z}}\phi_i[-(\partial\xi)_i](x)+\sum_{a\in A}\min_{y\in\mathbb{Z}}\psi_a[-\xi_a](y),$$

其中，对于任意 $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ 和 $b\in\mathbb{R}$，$u[b]$ 表示由 $u[b](x)=u(x)+bx$ 定义的函数，对 $x\in\mathbb{R}$成立。以下命题有助于刻画原始-对偶结构。

命题*5*（[*Kolmogorov* 和 *Shioura*，*2009*年，定理 *3.1*]；参见 [*Murota, 2003*年，定理 *9.4*]）。取任意使 $f(\xi)$ 最大化的流$\xi^*\in\mathbb{R}^A$。设 α_i,β_i 为整数，且对 $i\in V$有 $\mathrm{argmin}\ \phi_i[-(\partial\xi^*)_i]=[\alpha_i,\beta_i]\cap\mathbb{Z}$；再设 $\check{\gamma}_a,\hat{\gamma}_a$ 为整数，且对 $a\in A$有 $\mathrm{argmin}\,\psi_a[-\xi^*{}_a]=[\check{\gamma}_a,\hat{\gamma}_a]\cap\mathbb{Z}$。则 $\mathrm{argmin}\,g$ 可表示如下：

$$\left\{p^*\in\mathbb{Z}^V\;\middle|\;\begin{array}{l}\alpha_i\le p^*_i\le\beta_i\ \textit{for}\ i\in V,\\ \check{\gamma}_a\le p^*_j-p^*_i\le\hat{\gamma}_a\ \textit{for}\ a=ij\in A\end{array}\right\}. \tag{16}$$

现在证明以下定理。

定理 4。考虑离散能量最小化问题，$\min_{p\in Z^V}g(p)$，其定义在具有 n 个顶点和 m 条边的图上。如果 $\mathrm{dom}\ g\subseteq[0,W]^V$ 对于某个 $W>0$ 成立（这在大多数计算机视觉应用中都成立），则可以得到如下形式的不等式系统 (4)，其表示 $\mathrm{conv}(\mathrm{argmin}\ g)$，并可在 $T_{\mathrm{ineq}}=O(mn\log(n^2/m)\log(nW))$ 时间内求得。

证明。根据命题5，给定任意一个最优流 ξ^*，我们可以用不等式系统 (16) 表示极小值点集合 g。使用 [Ahuja 等人提出的算法，我们可以在 $O(mn\log(n^2/m)\log(nW))$ 时间内找到一个这样的 ξ^*。然后，由于我们可以分别将 dom ϕ_i 和 dom ψ_a 限制为 $[0,W]\cap\mathbb{Z}$ 和 $[-W,+W]\cap\mathbb{Z}$，因此可以通过二分搜索，在 $O((n+m)\log W)$ 时间内找到所有 $i\in V$ 和 $a\in A$ 对应的 α_i、β_i、$\check{\gamma}_a$、$\hat{\gamma}_a\in\mathbb{Z}$ 的值（这比计算 ξ^* 的算法更快）。因此，我们可以在 $T_{\mathrm{ineq}}=O(mn\log(n^2/m)\log(nW))$ 时间内得到不等式系统 (16)，而同一系统在 $\mathbb{R}^V$ 上表示凸包(极小值点集合 g)。□

F.3 定理5 的证明

我们考虑带有 g 的值预言机的 L-/L$^\natural$-凸函数最小化问题 $\min_{p\in\mathbb{Z}^V} g(p)$。我们证明以下定理。

定理 5。 对于一般的 *L-/L$^\natural$*-凸函数最小化问题，$\min_{p\in\mathbb{Z}^V} g(p)$，使得 极小值点集合 $g\cap[-C,+C]^V\neq\emptyset$和 $\min g>-\infty$，我们可以得到一个不等式系统，它由 凸包(极小值点集合 g) 的一个子集构成，足以在 $T_{\mathrm{ineq}}=\mathrm{O}(n^2\log^2 C\cdot(\mathrm{EO}\cdot n^3\log^2 n+n^4\log^{\mathrm{O}(1)} n))$ 时间内完成次梯度计算，其中 EO 表示计算 g 所需的时间。

证明。 回想一下，预测 $\hat{}p\in\mathbb{R}^V$（我们在该点计算 $\bar{\mu}(\cdot;g)$ 的次梯度）始终属于$[-C,+C]^V$，因为在线梯度下降会对 $[-C,+C]^V$ 执行 ℓ_2-投影。首先，我们证明， $S=$凸包(极小值点集合 g) $\cap[-2C,+2C]^V$的不等式系统足以用于计算次梯度；也就是说，我们只需获得如下形式的不等式系统

$$\alpha_i\le p_i\le\beta_i \text{ for } i\in V \quad\text{and}\quad p_j-p_i\le\gamma_{ij} \text{ for distinct } i,j\in V$$

使得

$$\alpha_i\in[-2C,+2C]\cap\mathbb{Z},\qquad \beta_i\in[-2C,+2C]\cap\mathbb{Z},\qquad \text{and}\qquad \gamma_{ij}\in[-4C,+4C]\cap\mathbb{Z}. \tag{17}$$

~ ~如第 4.2 节所述，我们可以通过在带权图 (V,E) 中根据权重 $\tilde{w}_{ij}(\hat{}p)$ 寻找一条 s–t 最短路径，来计算 $\bar{\mu}(\hat{}p;g)$ 的一个次梯度。事实上，这一过程等价于将 $\hat{}p$ 投影到某个 L$^\natural$-凸集的凸包 conv(argmin g) 上（参见 [Sakaue 和 Oki，2022，附录 D]）。由于我们有 $\hat{}p\in[-C,+C]^V$ 和 argmin $g\cap[-C,+C]^V\neq\emptyset$，对 $\hat{}p$ 的这种投影绝不会落在 $[-2C,+2C]^V$ 之外。因此，在表示 conv(argmin g) 的所有不等式中，计算 (V,E) 中的最短路径时，可以忽略那些与 $[-2C,+2C]^V$ 不相交的不等式。这意味着，只要我们有 $S=$conv(argmin g) $\cap[-2C,+2C]^V$ 的不等式系统，就可以计算 $\bar{\mu}(\hat{}p;g)$ 的一个次梯度。

接下来，我们说明如何获得 S 的不等式系统。根据上述讨论，我们可以专注于寻找满足式 (17) 的适当 α_i、 β_i 和 γ_{ij} 值。我们通过如下二分搜索来寻找这些值。例如，对 $[-4C,+4C]$ 进行二分搜索，以找到适当的 γ_{ij} 值。给定当前的 γ_{ij} 值，不等式 $p_j-p_i\le\gamma_{ij}$ $p\in S$ $p_j-p_i\ge$ 对所有极小 $\gamma_{ij}+1$ $\{g\ p\mid p\in[-2C,+2C]^V\cap\mathbb{Z}^V\}$ 点均成立，当且仅当向 min ( ) 中添加一个约束会使最小值增大。我们可以通过求解有效定义域限制为 $[-2C,+2C]^V\cap\{p\in\mathbb{Z}^V\mid p_j-p_i\ge\gamma_{ij}+1\}$ 的 L$^\natural$-凸最小化问题，来检验后者是否成立。利用最速下降缩放算法 [Murota, 2003, 第10.3节。2],，我们可以通过 O(log C) 次子模函数最小化来求解该问题，而每次子模函数最小化都可以通过 [Lee 等人， 2015] 的 O(EO $\cdot n^3\log^2 n+n^4\log^{\mathrm{O}(1)} n$) 时间算法求解。重复此检验 O(log C) 次后，二分搜索会得到一个紧不等式 $p_j-p_i\le\gamma_{ij}$（即，它定义了 conv(S) 的一个面）。类似地，我们可以找到 α_i 和 β_i 的值。为了找到所有 α_i、 β_i 和 γ_{ij} 的值，我们需要进行 O(n^2) 次二分搜索。因此，获得所需不等式系统的总计算时间为 $T_{\mathrm{ineq}}=\mathrm{O}(n^2\log^2 C\cdot(\mathrm{EO}\cdot n^3\log^2 n+n^4\log^{\mathrm{O}(1)} n))$。

□

G 实验

我们针对按如下方式生成的小型随机二分图匹配实例进行了实验。设 $n=10$ 和 $(L,\ R)$ 是顶点集 V 的一个二分划分，其中 $L=\{1,2,\dots,5\}$ 且 $R=\{6,7,\dots,10\}$。首先，我们创建边 $(i,\ i+|L|)\in L\times R$，其中 $i=1,\dots,5$ 的边权重为 1，以确保始终至少存在一个完美匹配。然后，对于 $(i,\ j)\in L\times R$ 的其他顶点对，我们令 $w_{ij}=i\times(j-|L|)+u$，其中 u 是从 $[-\sigma,+\sigma]\cap\mathbb{Z}$ 中均匀随机抽取的噪声项，噪声强度为某个 $\sigma>0$。若 $w_{ij}>0$，我们便创建边 $(i,\ j)\in L\times R$，其权重为 w_{ij}。因此，应学习预测，使 $i\in L$ 与 $j\in R$ 匹配，从而使 i 和 j 都较大；而不应匹配 $i\in L$ 与 $i+|L|\in R$，因为 $(i,\ i+|L|)$ 的边权重仅为 1。由此，我们构建了一个包含 $T=1000$ 个此类随机加权二分图的数据集。我们重复这一过程 10 次，得到 10 个独立数据集，并据此计算结果的均值和标准差。我们针对各种噪声强度$\sigma\in\{1,5,10,20\}$构建了这类数据集。

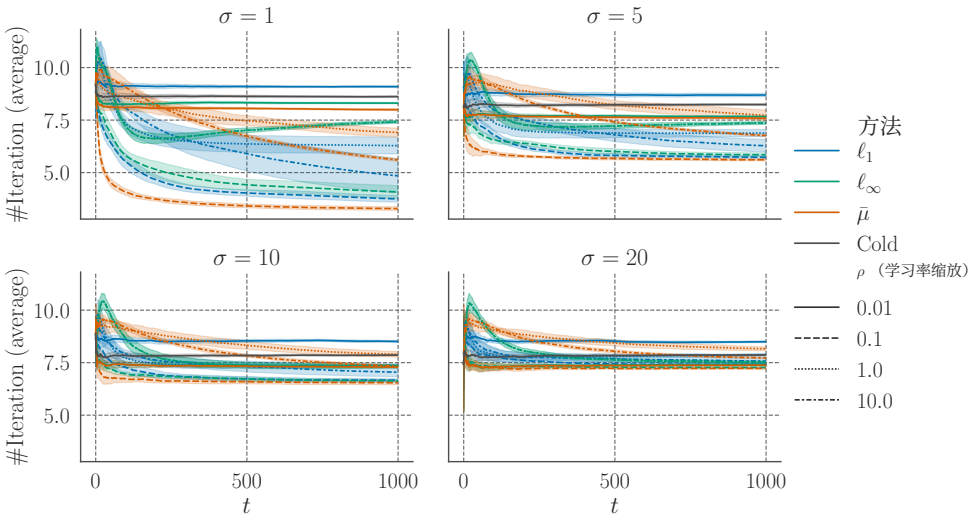


图3：通过各方法学习得到的预测进行热启动的二分图匹配中，算法 1的平均迭代次数（平均值取自过去的 t 个实例）。其中， σ 表示噪声强度，ρ 表示在线梯度下降（OGD）学习率（LR）的缩放因子。误差带表示在 10个独立随机数据集上的标准差。

我们考虑这样一种在线学习设定：随机加权二分图依次到达，$t = 1, \ldots, T$。每种方法都使用在线梯度下降来学习预测 $\hat{p}_t \in \mathbb{R}^V$，对应于 $t = 1, \ldots, T$；不同方法采用的损失函数 f_t 稍后将作说明。为提高实证表现，我们使用了以下改进版的在线梯度下降：对于每个第 [Cutkosky， 2019] 次预测的最后迭代收敛，我们采用任意时刻在线到批量方案 t（详情见附录 C ），并采用由 $\eta_t = \frac{C\sqrt{2n}}{\sqrt{\sum_{t'=1}^{t} \|z_{t'}\|_2^2}}$ Streeter和 Brendan McMahan 在在线梯度下降（OGD）的每个第 t 次迭代中，其中 z_t 是第 t 个次梯度， $C = nW$，而 W 是数据集中的最大边权重（如注 2 所示）。此外，由于 OGD 的性能对学习率的尺度较为敏感，我们对 $\rho \in \{0.01, 0.1, 1.0, 10.0\}$ 使用了重新缩放的学习率 $\rho \times \eta_t$。我们比较了采用三种类型损失函数的方法： $f_t(\hat{p}) = \|p_t^* - \hat{p}\|_1$ [Dinitz 等人， 2021]、 $f_t(\hat{p}) = \|p_t^* - \hat{p}\|_\infty$ [Sakaue 和 Oki， 2022], 以及$f_t(\hat{p}) = \bar{\mu}(\hat{p}; g_t)$（我们的方法）。前两种方法使用由算法 1（或匈牙利算法）返回的 p_t^*，并通过 $\hat{p}_t$ 进行热启动。我们还采用冷启动方法作为基线，该方法始终设定 $\hat{p}_t = \mathbf{0}$。为简便起见，我们分别将这些方法记为 ℓ_1、ℓ_∞、 $\bar{\mu}$ 和 Cold。为了将预测 $\hat{p}_t$ 转换为初始可行解， ℓ_1 使用了 Dinitz 等人 [中的贪心算法， 2021], 而 ℓ_∞、 $\bar{\mu}$ 和 Cold 则采用 $\ell_\infty^{\pm}$ 投影和取整，如定理 1 所示（二分图匹配的具体步骤见 Sakaue 和 Oki，2022，第 3 节1]）。

图3展示了采用各方法学习到的预测 $\hat{p}_t$ 进行热启动的算法 1（或匈牙利算法）的平均迭代次数；平均值是对过去的 t 个实例（ $t = 1$， ....., T）计算得出的。在低噪声设置（$\sigma = 1$）下， ℓ_1、 ℓ_∞ 和 $\bar{\mu}$ （噪声强度为 $\rho = 0.1$ ）的表现显著优于 Cold；随着噪声强度 σ 增大，它们的优势也逐渐减小，这与 Dinitz 等人于 2021 年第 4] 节中的观察一致。每种情况下，我们的 $\bar{\mu}$ （ $\rho = 0.1$ ）都给出了最佳预测，从而使迭代次数最少。此外， $\bar{\mu}$ （$\rho = 0.1$ ）减少迭代次数的速度比其他方法更快，这表明它能够通过较少的采样实例学到良好的预测。