arXiv:2302.00929v1 [math.CO] 2 Feb 2023

关于k点固定图特征值的钩公式

Mahdi Ebrahimi*

数学学院，基础科学研究所（IPM），邮政信箱：19395–5746，伊朗德黑兰

摘要

设 S_n 表示作用在 n 个字母上的对称群。 k点固定图 $\mathcal{F}(n,k)$定义为顶点集为 S_n的图；当且仅当 gh^{-1} 恰好固定 k 个点时， $\mathcal{F}(n,k)$中的两个顶点 g、 h之间有一条边。Ku、Lau和Wong在《线性代数及其应用》471卷（2015年）405-426] 中研究了由恰好固定 k 个点的元素生成的对称群上的凯莱图 [，并得到了 $\mathcal{F}(n,k)$特征值的递归公式。本文引入称为激发图的对象，它们是斜形的某种推广，并据此推导出凯莱图 $\mathcal{F}(n,k)$特征值的显式公式。随后，我们应用该公式证明 $\mathcal{F}(n,k)$的特征值属于区间 $[\frac{-|S(n,k)|}{n-k-1}, |S(n,k)|]$，其中 $S(n,k)$是 S_n 中恰好固定 k 个点的元素 σ所构成的集合。

关键词：凯莱图、特征值、激发图、对称群。美国数学学会学科分类号：05A17、05E10、20C30。

1 引言

对于图 Γ， Γ 的特征值就是其邻接矩阵的特征值。研究图的特征值是现代图论的重要组成部分。尤其是，凯莱图的特征值因其在代数图论中的突出作用，以及在扩展图 [8, 18], 和化学图等诸多领域中的应用，日益受到关注。

*m.ebrahimi.math@ipm.ir

论 [24] 以及量子计算 [2, 23]。设 G 是一个有限群， S是 G 的一个逆封闭子集，且满足 $1 \notin S$。凯莱图 $\Gamma(G, S)$是这样一种图：其顶点为 G 中的元素；当且仅当存在某个 $a \in S$使得 u、 $\nu \in G$满足 $\nu = au$时，这两个顶点之间有一条边。若$\Gamma(G, S)$满足 S 在 G的元素共轭作用下封闭，则称其为正规凯莱图。此外，若 $\Gamma(G, S)$的特征值全为整数，则称其为整谱图。

设 k 和 n 是正整数。对于 $k \leq n$， k的一个$[n]$-置换$= \{1, 2, \ldots, n\}$是从 $[k]$到 $[n]$的单射函数。设 $1 \leq r \leq k \leq n$。(n, k, r)-排列图 $A(n, k, r)$以 k的所有 $[n]$-置换为顶点，且当两个 k-置换恰好在r 个位置上不同时，它们相邻。注意， $A(n, k, r)$是一个正则图 [3]。排列图族 $A(n, k, 1)$ 最初由 [5] 提出，作为并行计算的互连网络模型。文献 [3]给出了 $A(n, k, r)$的特征值与某些凯莱图之间的关系。

设 n 是正整数。给定一个满足 $0 \leq k \leq n-1$的整数 k，令$S(n, k)$表示 S_n 中满足 σ 恰好固定 k 个 $[n]$中点的元素 σ 的集合。 k-点固定图定义 [15] 为凯莱图$\mathcal{F}(n, k) := \Gamma(S_n, S(n, k))$，也就是说，两个顶点 σ, τ相邻，当且仅当$\sigma\tau^{-1}$ 恰好固定 k 个点。注意， k-点固定图也是一种排列图，即 $\mathcal{F}(n, k) = A(n, n, n-k)$。由于 $S(n, k)$在共轭作用下封闭，所有 k 点固定图都是整谱的 [3, 推论 1.2]。Ku、Lau 和 Wong [15] 为$\mathcal{F}(n, k)$的特征值推导出了一个递归公式，并利用该公式确定了 1 点固定图 $\mathcal{F}(n, 1)$的特征值符号。在 [16], 中，他们得到了 $\mathcal{F}(n, 1)$的某些特征值的精确值。此外，Renteln [22] 为 $\mathcal{F}(n, 0)$的特征值给出了若干有趣的公式。本文旨在为 $\mathcal{F}(n, k)$的特征值推导出一个显式公式。

众所周知，正规凯莱图 $\Gamma(G, S)$ 的特征值可以用 G [4, p.235] 的不可约特征标表示。

定理 1.1. *([1], [6], [17], [21])* 正规凯莱图$\Gamma(G, S)$ 的特征值由 $\eta_\chi = \frac{1}{\chi(1)} \sum_{a \in S} \chi(a)$ 给出，其中 χ 遍历 G 的所有复不可约特征标。此外， η_χ 的重数为 $\chi(1)^2$。

分拆是由正整数组成的有限弱递减序列$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$。我们称 $|\lambda| = \lambda_1 + \cdots + \lambda_l$ λ的大小为 $l = l(\lambda)$，称 λ的长度为 $\lambda \vdash n$。记号 λ 用于表示正整数n的一个分拆。 λ 的图为 $[\lambda] = \{(i, j) | \ 1 \leq i \leq l(\lambda), \ 1 \leq j \leq \lambda_i\}$。我们称 λ的元素为 $[\lambda]$ 的单元格。对于分拆 μ 和 λ，若 $[\mu] \subseteq [\lambda]$，则称 mu 包含于 λ， $\mu \subseteq \lambda$。我们称 λ/μ 为大小为$|\lambda/\mu| = |\lambda| - |\mu|$ 的斜形，且 λ/μ 的图为 $[\lambda/\mu] = [\lambda] \backslash [\mu]$。

分拆 λ的共轭是分拆 λ'，其图是 $[\lambda]$的转置；换言之，
$\lambda'_j = max\{i|\ \lambda_i \geq j\}$。单元格 $u = (i, j) \in [\lambda]$ 的钩长$h_\lambda(u)$：
$= \lambda_i - i + \lambda'_j - j + 1$，是指 u 在 $[\lambda]$中正右方和正下方的单元格数目。

作为斜形某种推广而定义的激发图，在对称群的组合学和表示论中发挥着重要作用。激发图由 Ikeda 和 Naruse [9], 引入，Kreiman [13], [14] 以及 Knutson、Miller 和 Young [11]也独立地以略有不同的形式引入了激发图。设 λ/μ 为一个斜分拆，D 为 λ的杨氏图的一个子集。若单元格 $u = (i, j) \in D$ 的 $(i + 1, j)$、$(i, j + 1)$ 和 $(i + 1, j + 1)$ 均属于 $[\lambda]\backslash D$，则称其为活跃单元格。设 u为 D中的一个活跃单元格，定义 $\alpha_u(D)$ 为将 D 中的 (i, j) 替换为 $(i + 1, j + 1)$ 后得到的集合。我们称这种替换为激发移动。λ/μ的激发图是指对 λ 的杨氏图中的活跃单元格依次进行激发移动后得到的子图。例如，$(2^3, 1)/(1^2)$ 有三个激发图：{(1, 1), (2, 1)}、{(1, 1), (3, 2)} 和 {(2, 2), (3, 2)}。λ/μ 的激发图集合记作 $\varepsilon(\lambda/\mu)$。现在我们可以给出主要结果了。

定理 1.2。$\mathcal{F}(n, k)$ 的特征值为

$$\eta_\lambda(k) := \sum_{\substack{\mu\vdash n-k \\ \mu\subseteq\lambda}} [\frac{\sum_{t=0}^{n-k}(-1)^{n-k-t}\sum_{D\in\varepsilon(\mu/(t))}\prod_{u\in D}h_\mu(u)}{\prod_{u\in[\mu]}h_\mu(u)} \sum_{E\in\varepsilon(\lambda/\mu)}\prod_{u\in E}h_\lambda(u)],$$

其中，λ 遍历 n 的分拆。此外，$\eta_\lambda(k)$ 的重数为 $({}^{n!}\!/\!_{\prod_{u\in[\lambda]}h_\lambda(u)})^2$。

注记 1.3。斜形 λ/μ 的激发图数量由行列式 [19,推论 3.7], 给出，它是 λ 和 μ 各部分的多项式。

完全换位图（也称为换位网络）T_n 是定义在 S_n 上的凯莱图，其连接集由 S_n 中的所有换位组成。注意，$T_n = \mathcal{F}(n, n - 2)$。

推论 1.4。对于换位网络 T_n,

a) T_n 的特征值为

$$\eta_\lambda(n-2) = \sum_{\substack{(i,i),(j,j+1)\in[\lambda] \\ i\leq j}} h_\lambda((i,i))h_\lambda((j,j+1)) - \binom{n}{2},$$

其中，λ 遍历 n 的所有分拆。

b) T_n 的特征值 m 的重数等于

$$\sum\{(\frac{n!}{\prod_{u\in[\lambda]}h_\lambda(u)})^2|\ \lambda\vdash n,\ \sum_{\substack{(i,i),(j,j+1)\in[\lambda]\\ i\leq j}}h_\lambda((i,i))h_\lambda((j,j+1))=\binom{n}{2}+m\}.$$

设 k 和 n 是满足 $k<n$的非负整数。对于每个分拆$\lambda\vdash n$，我们定义 $M_k(\lambda):=max\{|\eta_\mu(0)|\mid \mu\vdash n-k\ and\ \mu\subseteq\lambda\}$。作为主定理的另一项应用，我们可以给出以下结果。

推论 1.5. 对于凯莱图 $\mathcal{F}(n,k)$,

a) 若 $\lambda\vdash n$，则 $|\eta_\lambda(k)|\leq\binom{n}{k}M_k(\lambda)$。

b) $\mathcal{F}(n,k)$的特征值位于区间$[\frac{-|S(n,k)|}{n-k-1},|S(n,k)|]$内。

c) $\eta_{(n)}(k)=|S(n,k)|\ and\ \eta_{(1^n)}(k)=-(n-k-1)\binom{n}{k}$.

d) 若 $k=n-2$或 $n-4$，则 $\mathcal{F}(n,k)$的最小特征值为$\eta=\frac{-|S(n\ k|,)|}{n-k-1}$。

e) 设 $\lambda=(m,1^{n-m})$，其中 $m<n$为某个正整数。则 $\eta_\lambda(k)$等于

$$\frac{(-1)^{n-k}\binom{n}{k}}{\binom{n-1}{m-1}}\sum_{s=max\{1,m-k\}}^{min\{m,n-k\}}[((-1)^s|S(s,0)|-\frac{n-k-s}{n-k})\binom{n-k}{s}\binom{k}{m-s}].$$

2 预备知识

本文中，我们假设所有群都是有限群。首先，我们陈述对称群特征标理论中的一些众所周知的结果；完整论述请参见 [10]。我们通常用杨氏表表示分拆 λ，其中单元格 $(i,j)\in[\lambda]$ 表示为位于位置 (i,j) 的一个单位正方形，并仍记作 $[\lambda]$。众所周知，$\mathcal{S}_n$ 的共轭类和 $\mathcal{S}_n$ 的不可约特征标都由 λ 的分拆标记（见 [10]）。由 $\lambda\vdash n$ 标记的不可约特征标可与 λ 的杨氏表 $[\lambda]$ 相对应。在由 $\beta\vdash n$ 标记的共轭类上，$[\lambda]$ 的特征值记作 $[\lambda]\beta$。在对称群表示论中，分支法则说明了如何将普通不可约表示从 S_n 限制到 S_{n-1}。

引理 2.1. *[10,* 定理 2.4.*3]*（分支法则）

若 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)$ 是 n 的一个分拆，则将 $[\alpha]$ 限制到点 n 的稳定子 S_{n-1} 上，有

$$[\alpha] \downarrow S_{n-1} = \sum_{\substack{i \\ \alpha_i > \alpha_{i+1}}} [\alpha^{i^-}],$$

其中 $[\alpha^{i^-}]$ 是从 $[\alpha]$ 的第 i 行移去一个单元格后得到的图。

分支法则的一般化如下:

引理 2.2. 设 m 和 n 是满足 $m \leq n$ 的正整数。则对每个 $\lambda \vdash n$,

$$[\lambda] \downarrow S_m = \sum_{\substack{\mu \vdash m \\ \mu \subseteq \lambda}} f^{\lambda/\mu}[\mu].$$

证明. 我们对 $k := n - m$ 作归纳。若 $k = 1$，则由分支法则可知结论显然。设 $t \geq 2$ 是一个整数。现在假设该命题对每个 $k < t$ 都成立，并证明它对 $k = t$ 也成立。由归纳假设,

$$[\lambda] \downarrow S_{m+1} = \sum_{\substack{\tilde{\mu} \vdash m+1 \\ \tilde{\mu} \subseteq \lambda}} f^{\lambda/\tilde{\mu}}[\tilde{\mu}].$$

因此，由分支法则,

$$\begin{aligned} [\lambda] \downarrow S_m &= \sum_{\substack{\tilde{\mu} \vdash m+1 \\ \tilde{\mu} \subseteq \lambda}} f^{\lambda/\tilde{\mu}}[\tilde{\mu}] \downarrow S_m \\ &= \sum_{\substack{\tilde{\mu} \vdash m+1 \\ \tilde{\mu} \subseteq \lambda}} [f^{\lambda/\tilde{\mu}} \sum_{\substack{i \\ \tilde{\mu}_i > \tilde{\mu}_{i+1}}} [\tilde{\mu}^{i^-}]]. \end{aligned}$$

如果 $\mu \vdash m$和 $\mu \subseteq \lambda$，那么显然，$f^{\lambda/\mu} = \sum_{\mu \subseteq \tilde{\mu}} f^{\lambda/\tilde{\mu}}$。因此

$$[\lambda] \downarrow S_m = \sum_{\substack{\mu \vdash m \\ \mu \subseteq \lambda}} f^{\lambda/\mu}[\mu].$$

□

标准杨氏表和斜形是枚举组合学与代数组合学中的核心对象。形状为 λ 的标准杨氏表（简称 SYT）是一个双射 T: $[\lambda] \to \{1, \ldots, |\lambda|\}, (i, j) \mapsto T_{ij}$,

满足 $T_{ij} < T_{i,j+1}$ 当 $(i,j),(i,j+1) \in [\lambda]$ 且 $T_{ij} < T_{i+1,j}$ 当 $(i,j),(i+1,j) \in [\lambda]$。形状为 λ 的 SYT 数量记为 f^λ。类似地，若 $\mu \subseteq \lambda$，我们可以将斜形 λ/μ 的标准杨氏表定义为一个映射 T: $[\lambda/\mu] \to \{1,\ldots,|\lambda/\mu|\}$, $(i,j) \mapsto T_{ij}$，满足 $T_{ij} < T_{i,j+1}$ 当 (i,j), $(i,j+1) \in [\lambda/\mu]$ 且 $T_{ij} < T_{i+1,j}$ 当 (i,j), $(i+1,j) \in [\lambda/\mu]$。形状为 λ/μ 的 SYT 数量记为 $f^{\lambda/\mu}$。

引理 2.3。（*[7]*）设 λ是 n的一个分拆。我们有:

$$f^\lambda = \frac{n!}{\prod_{u\in[\lambda]} h(u)}.$$

该公式还给出了与 λ对应的不可约表示的维数。

引理 2.4。（*[20]*）（Naruse 公式）设 λ、μ 为满足 $\mu \subseteq \lambda$的分拆。我们有:

$$f^{\lambda/\mu} = |\lambda/\mu|! \sum_{D\in\varepsilon(\lambda/\mu)} \prod_{u\in[\lambda]\setminus D} \frac{1}{h_\lambda(u)}.$$

注记 2.5。Naruse 公式有一个代数证明和一个组合证明，见 [19]。此外，Konvalinka [12]给出了一个简单的双射，证明了 Naruse 公式的一个等价递归版本。

存在一个有趣的公式，可用于计算 $\mathcal{F}(n,0)$ 的特征值，如下所示:

引理 2.6。（*[22,* 定理 3.*2]*） $\mathcal{F}(n,0)$ 的特征值为

$$\eta_\lambda(0) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{f^{\lambda/(k)}}{f^\lambda},$$

其中 λ 遍历 n 的所有分拆。

引理 2.7.（*[22,* 定理 7.*1]*）图 $\mathcal{F}(n,0)$ 的邻接矩阵的最小特征值为

$$\eta = \frac{-|S(n,0)|}{n-1}.$$

3 主要结果的证明

本节中，我们将证明主要结果。首先，我们观察 $\mathcal{F}(n,0)$ 的特征值。

引理 3.1. $\mathcal{F}(n, 0)$ 的特征值为

$$\eta_\lambda(0) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \sum_{D \in \varepsilon(\lambda/(k))} \prod_{u \in D} h_\lambda(u)$$

其中 λ 遍历 n 的所有分拆。

证明。我们有:

$$\begin{aligned}
\eta_\lambda(0) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{f^{\lambda/(k)}}{f^\lambda} && \text{(Lemma 2.6)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{|\lambda/(k)|! \sum_{D \in \varepsilon(\lambda/(k))} \prod_{u \in [\lambda] \setminus D} \frac{1}{h_\lambda(u)}}{\frac{n!}{\prod_{u \in [\lambda]} h_\lambda(u)}} \\
& && \text{(Lemmas 2.3, 2.4)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{\frac{(n-k)!}{\prod_{u \in [\lambda]} h_\lambda(u)} \sum_{D \in \varepsilon(\lambda/(k))} \prod_{u \in D} h_\lambda(u)}{\frac{n!}{\prod_{u \in [\lambda]} h_\lambda(u)}} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \sum_{D \in \varepsilon(\lambda/(k))} \prod_{u \in D} h_\lambda(u).
\end{aligned}$$

□

定理 1.2 的证明。设 $\lambda \vdash n$。那么

$$\begin{aligned}
\eta_\lambda(k) &= \frac{1}{f^\lambda} \sum_{\beta \in S(n,k)} [\lambda]\beta && \text{(Lemma 1.1)} \\
&= \frac{\binom{n}{k}}{f^\lambda} \sum_{\beta \in S(n-k,0)} [\lambda]\beta \\
&= \frac{\binom{n}{k}}{f^\lambda} \sum_{\beta \in S(n-k,0)} \sum_{\substack{\mu \vdash n-k \\ \mu \subseteq \lambda}} f^{\lambda/\mu} [\mu]\beta && \text{(Lemma 2.2)} \\
&= \frac{\binom{n}{k}}{f^\lambda} \sum_{\substack{\mu \vdash n-k \\ \mu \subseteq \lambda}} f^\mu f^{\lambda/\mu} \left(\frac{1}{f^\mu} \sum_{\beta \in S(n-k,0)} [\mu]\beta\right) \\
&= \frac{\binom{n}{k}}{f^\lambda} \sum_{\substack{\mu \vdash n-k \\ \mu \subseteq \lambda}} f^\mu f^{\lambda/\mu} \eta_\mu(0)
\end{aligned}$$

$$= \frac{\binom{n}{k}\prod_{u\in[\lambda]} h_\lambda(u)}{n!} \sum_{\substack{\mu\vdash n-k\\ \mu\subseteq\lambda}} (\frac{(n-k)!}{\prod_{u\in[\mu]} h_\mu(u)})(|\lambda/\mu|! \sum_{E\in\varepsilon(\lambda/\mu)} \prod_{u\in[\lambda]\setminus E} \frac{1}{h_\lambda(u)})\eta_\mu(0)$$

(Lemmas 2.3, 2.4)

$$= \frac{\binom{n}{k}\prod_{u\in[\lambda]} h_\lambda(u)}{n!} \sum_{\substack{\mu\vdash n-k\\ \mu\subseteq\lambda}} [(\frac{(n-k)!}{\prod_{u\in[\mu]} h_\mu(u)})(\frac{k!}{\prod_{u\in[\lambda]} h_\lambda(u)} \sum_{E\in\varepsilon(\lambda/\mu)} \prod_{u\in E} h_\lambda(u))\eta_\mu(0)]$$

$$= \sum_{\substack{\mu\vdash n-k\\ \mu\subseteq\lambda}} [(\frac{1}{\prod_{u\in[\mu]} h_\mu(u)})(\sum_{E\in\varepsilon(\lambda/\mu)} \prod_{u\in E} h_\lambda(u))\eta_\mu(0)]$$

$$= \sum_{\substack{\mu\vdash n-k\\ \mu\subseteq\lambda}} [\frac{\sum_{t=0}^{n-k}(-1)^{n-k-t}\sum_{D\in\varepsilon(\mu/(t))}\prod_{u\in D} h_\mu(u)}{\prod_{u\in[\mu]} h_\mu(u)} \sum_{E\in\varepsilon(\lambda/\mu)} \prod_{u\in E} h_\lambda(u)].$$

(引理 3.1)

此外，利用定理 1.1 和引理 2.3， $\eta_\lambda(k)$ 的重数为 $(\frac{n!}{\prod_{u\in[\lambda]} h_\lambda(u)})^2$。证明至此完成。 □

在本节接下来的内容中，我们需要用到如下一个有趣的观察：

引理 3.2. 设 n 和 k 为满足 $k \le n$ 的非负整数。那么对于每个 $\lambda \vdash n$,

$$\binom{n}{k} = \sum_{\substack{\mu\vdash n-k\\ \mu\subseteq\lambda}} \frac{\sum_{E\in\varepsilon(\lambda/\mu)}\prod_{u\in E} h_\lambda(u)}{\prod_{u\in[\mu]} h_\mu(u)}.$$

证明。假设 $A := \sum_{\substack{\mu\vdash n-k\\ \mu\subseteq\lambda}} \frac{\sum_{E\in\varepsilon_{(\lambda/\mu)}}\prod_{u\in E} h_\lambda(u)\prod_{u\in[\mu]} h_\mu(u)}{}$。那么

$$A = \sum_{\substack{\mu\vdash n-k\\ \mu\subseteq\lambda}} [\binom{n}{k}\frac{\prod_{u\in[\lambda]} h_\lambda(u)}{n!}\frac{(n-k)!}{\prod_{u\in[\mu]} h_\mu(u)}\frac{|\lambda/\mu|!}{\prod_{u\in[\lambda]} h_\lambda(u)} \sum_{E\in\varepsilon(\lambda/\mu)} \prod_{u\in E} h_\lambda(u)]$$

$$= \frac{\binom{n}{k}}{f^\lambda} \sum_{\substack{\mu\vdash n-k\\ \mu\subseteq\lambda}} f^{\lambda/\mu} f^\mu \qquad \text{(Lemmas 2.3, 2.4)}$$

$$= \frac{\binom{n}{k} f^\lambda}{f^\lambda} = \binom{n}{k}. \qquad \text{(Lemma 2.2)}$$

□

推论 1.4 的证明 令 $\lambda \vdash n$。那么根据定理 1.2

$$\eta_\lambda(n-2) = \sum_{\substack{\mu\vdash 2\\ \mu\subseteq\lambda}} [\frac{\sum_{t=0}^{2}(-1)^{2-t}\sum_{D\in\varepsilon(\mu/(t))}\prod_{u\in D}h_\mu(u)}{\prod_{u\in[\mu]}h_\mu(u)} \sum_{E\in\varepsilon(\lambda/\mu)}\prod_{u\in E}h_\lambda(u)]$$

$$= \frac{1}{2}(\sum_{E\in\varepsilon(\lambda/(2))}\prod_{u\in E}h_\lambda(u) - \sum_{E\in\varepsilon(\lambda/(1^2))}\prod_{u\in E}h_\lambda(u)) \tag{1}$$

注意，若 $\varepsilon(\lambda/\mu) = \emptyset$，则 $\sum_{E\in\varepsilon(\lambda/\mu)}\prod_{u\in E}h_\lambda(u) = 0$。现在利用引理 3.2,

$$\binom{n}{2} = \frac{1}{2}(\sum_{E\in\varepsilon(\lambda/(2))}\prod_{u\in E}h_\lambda(u) + \sum_{E\in\varepsilon(\lambda/(1^2))}\prod_{u\in E}h_\lambda(u)). \tag{2}$$

因此，由等式 (1) 和 (2) 可得

$$\eta_\lambda(n-2) = \sum_{E\in\varepsilon(\lambda/(2))}\prod_{u\in E}h_\lambda(u) - \binom{n}{2}$$

$$= \sum_{\substack{(i,i),(j,j+1)\in[\lambda]\\ i\le j}} h_\lambda((i,i))h_\lambda((j,j+1)) - \binom{n}{2}$$

因此，利用定理 1.2，即得证。 □

推论 1.5 的证明

$$a)\ |\eta_\lambda(k)| = |\sum_{\substack{\mu\vdash n-k\\ \mu\subseteq\lambda}} [\frac{\sum_{t=0}^{n-k}(-1)^{n-k-t}\sum_{D\in\varepsilon(\mu/(t))}\prod_{u\in D}h_\mu(u)}{\prod_{u\in[\mu]}h_\mu(u)} \sum_{E\in\varepsilon(\lambda/\mu)}\prod_{u\in E}h_\lambda(u)]|$$

(Theorem 1.2)

$$\le \sum_{\substack{\mu\vdash n-k\\ \mu\subseteq\lambda}} [\frac{|\sum_{t=0}^{n-k}(-1)^{n-k-t}\sum_{D\in\varepsilon(\mu/(t))}\prod_{u\in D}h_\mu(u)|}{\prod_{u\in[\mu]}h_\mu(u)} \sum_{E\in\varepsilon(\lambda/\mu)}\prod_{u\in E}h_\lambda(u)]$$

$$= \sum_{\substack{\mu\vdash n-k\\ \mu\subseteq\lambda}} [\frac{|\eta_\mu(0)|}{\prod_{u\in[\mu]}h_\mu(u)} \sum_{E\in\varepsilon(\lambda/\mu)}\prod_{u\in E}h_\lambda(u)] \qquad \text{(Lemma 3.1)}$$

$$\le \sum_{\substack{\mu\vdash n-k\\ \mu\subseteq\lambda}} [\frac{M_k(\lambda)}{\prod_{u\in[\mu]}h_\mu(u)} \sum_{E\in\varepsilon(\lambda/\mu)}\prod_{u\in E}h_\lambda(u)]$$

$$= \binom{n}{k}M_k(\lambda). \qquad \text{(Lemma 3.2)}$$

b) 显然， $\mathcal{F}(n,k)$ 是点传递的，因此它是 $|S(n,k)|$-正则的，且 $\mathcal{F}(n,k)$ 的最大特征值为 $|S(n,k)|$。令 $\lambda \vdash n$。则

$$\eta_\lambda(k) = \sum_{\substack{\mu\vdash n-k\\ \mu\subseteq\lambda}} [\frac{\sum_{t=0}^{n-k}(-1)^{n-k-t}\sum_{D\in\varepsilon(\mu/(t))}\prod_{u\in D}h_\mu(u)}{\prod_{u\in[\mu]}h_\mu(u)} \sum_{E\in\varepsilon(\lambda/\mu)}\prod_{u\in E}h_\lambda(u)]$$

(Theorem 1.2)

$$= \sum_{\substack{\mu\vdash n-k\\ \mu\subseteq\lambda}} [\frac{\eta_\mu(0)}{\prod_{u\in[\mu]}h_\mu(u)} \sum_{E\in\varepsilon(\lambda/\mu)}\prod_{u\in E}h_\lambda(u)] \quad \text{(Lemma 3.1)}$$

$$\geq \sum_{\substack{\mu\vdash n-k\\ \mu\subseteq\lambda}} [\frac{(\frac{-|S(n-k,0)|}{n-k-1})}{\prod_{u\in[\mu]}h_\mu(u)} \sum_{E\in\varepsilon(\lambda/\mu)}\prod_{u\in E}h_\lambda(u)] \quad \text{(Lemma 2.7)}$$

$$= \frac{-|S(n-k,0)|}{n-k-1} \sum_{\substack{\mu\vdash n-k\\ \mu\subseteq\lambda}} \frac{\sum_{E\in\varepsilon(\lambda/\mu)}\prod_{u\in E}h_\lambda(u)}{\prod_{u\in[\mu]}h_\mu(u)}$$

$$= \frac{-|S(n-k,0)|\binom{n}{k}}{n-k-1} \quad \text{(Lemma 3.2)}$$

$$= \frac{-|S(n,k)|}{n-k-1}.$$

c) 应用定理 1.1 和定理 1.2，即得。

d) 利用 (c) 部分，容易看出 $\eta_{(1^n)}(k) = \frac{-|S(n,k)|}{n-k-1}$。因此，由 (b) 部分可知，$\eta := \frac{-|S(n,k)|}{n-k-1}$是 $\mathcal{F}(n,k)$ 的最小特征值。

e) 设 $\mu \vdash n-k$，使得 $\mu \subseteq \lambda$。我们可以看出 $\varepsilon(\lambda/\mu) = \{\mu\}$。此外，显然

$$\{\mu \vdash n-k |\ \mu \subseteq \lambda\} \subseteq \{\mu_s := (s, 1^{n-k-s}) |\ s \in \mathbb{N}_0,\ 1 \leq s \leq n-k\},$$

其中 $(n-k) = (n-k, 1_0)$ 且 $(1^{n-k}) = (1, 1^{n-k-1})$。由于 $n-k-s \leq n-m$和 $s \leq min\{m, n-k\}$，我们推得 $m-k \leq s \leq min\{m, n-k\}$。因此，由于 s 是正整数，$max\{1, m-k\} \leq s \leq min\{m, n-k\}$。现在利用定理 1.2，我们有：

$$\eta_\lambda(k) = \sum_{\mu\vdash n-k,\ \mu\subseteq\lambda} [\frac{\sum_{t=0}^{n-k}(-1)^{n-k-t}\sum_{D\in\varepsilon(\mu/(t))}\prod_{u\in D}h_\mu(u)}{\prod_{u\in[\mu]}h_\mu(u)} \sum_{E\in\varepsilon(\lambda/\mu)}\prod_{u\in E}h_\lambda(u)]$$

$$= \sum_{s=max\{1,m-k\}}^{min\{m,n-k\}} [\frac{\sum_{t=0}^{n-k}(-1)^{n-k-t}\sum_{D\in\varepsilon(\mu_s/(t))}\prod_{u\in D}h_{\mu_s}(u)}{\prod_{u\in[\mu_s]}h_{\mu_s}(u)} \prod_{u\in[\mu_s]}h_\lambda(u)]$$

$$= \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)} \sum_{s=max\{1,m-k\}}^{min\{m,n-k\}} [\frac{1+\sum_{t=1}^{s}(-1)^t \prod_{u\in[(t)]} h_{\mu_s}(u)}{(s-1)!(n-k-s)!} \frac{n(m-1)!(n-m)!}{(m-s)!(k+s-m)!}]$$

$$= \frac{(-1)^{n-k} n(m-1)!(n-m)!}{n-k} \sum_{s=max\{1,m-k\}}^{min\{m,n-k\}}$$

$$\frac{1+(n-k)\sum_{t=1}^{s} \frac{(-1)^t (s-1)!}{(s-t)!}}{(s-1)!(n-k-s)!(m-s)!(s+k-m)!}$$

由于

$$\frac{(-1)^{n-k} n(m-1)!(n-m)!}{n-k} = \frac{(-1)^{n-k}\binom{n}{k}(n-k-1)!k!}{\binom{n-1}{m-1}},$$

我们有

$$\eta_\lambda(k) = \frac{(-1)^{n-k}\binom{n}{k}}{\binom{n-1}{m-1}} \sum_{s=max\{1,m-k\}}^{min\{m,n-k\}} [(1$$

$$+ (n-k)\sum_{t=1}^{s} \frac{(-1)^t (s-1)!}{(s-t)!}) \binom{n-k-1}{s-1} \binom{k}{m-s}]$$

$$= \frac{(-1)^{n-k}\binom{n}{k}}{\binom{n-1}{m-1}} \sum_{s=max\{1,m-k\}}^{min\{m,n-k\}} [(\frac{s}{n-k} + \sum_{t=1}^{s}(-1)^t t! \binom{s}{t}) \binom{n-k}{s} \binom{k}{m-s}]$$

$$= \frac{(-1)^{n-k}\binom{n}{k}}{\binom{n-1}{m-1}} \sum_{s=max\{1,m-k\}}^{min\{m,n-k\}} [(\frac{s}{n-k} + (-1)^s |S(s,0)| - 1) \binom{n-k}{s} \binom{k}{m-s}]$$

$$= \frac{(-1)^{n-k}\binom{n}{k}}{\binom{n-1}{m-1}} \sum_{s=max\{1,m-k\}}^{min\{m,n-k\}} [((-1)^s |S(s,0)| - \frac{n-k-s}{n-k}) \binom{n-k}{s} \binom{k}{m-s}]$$

证明至此完成。 □

致谢

本研究部分得到了基础科学研究所（IPM）数学学院的资助。

参考文献

[1] L. Babai, 《凯莱图的谱》，组合理论杂志 B辑 27(1979) 180-189。
DOI: https://doi.org/1001016/0095-8956(79)-90079-0

[2]A. Bernazconi、C. Godsil、S. Severini，《立方体类图上的量子网络》，《物理评论A》(3), 78(5):052320，共5页，2008。DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevA.78.052320

[3] B. F. Chen、E. Ghorbani、K. B. Wong，关于某些凯莱图和排列图的特征值，《线性代数及其应用》444（2014）246-253。DOI: https://doi.org/10.1016/j.laa.2013.11.035

[4] C. W. Curtis、I. Reiner，《有限群与结合代数的表示论》，纯粹与应用数学，第 XI 卷，Wiley，纽约，1962 年。

[5]K. Day, A. Tripathi，《排列图：一类广义星图》，《信息处理快报》42(1992) 235-241。DOI: https://doi.org/10.1016/0020-0190(92)90030-Y[6] P. Diaconis, M. Shahshahani，《用随机换位生成随机排列》，Z. Wahrsch. Verw. Gebiete. 57(1981) 159-179。0044-3719/81/0057/0159/S04.20[7]J. S. Frame, G. de B. Robinson, R. M. Thrall，《对称群的钩图》，《加拿大数学杂志》6 (1954) 316-324。DOI: https://doi.org/10.4153/CJM-1954-030-1[8]S. Hoory, N. Linial, A. Wigderson，《扩展图及其应用》，《美国数学会公报》(新系列) 43(4)(2006) 439-561。DOI: https://doi.org/10.1090/S0273-0979-06-01126-8[9] T. Ikeda, H. Naruse，《激发杨图与等变舒伯特演算》，《美国数学会汇刊》361 (2009) 5193-5221。DOI: https://doi.org/10.1090/S002-9947-09-04879-X[10] G. James, A. Kerber，《对称群的表示论》，Addison-Wesley出版公司，1981。[11] A. Knutson, E. Miller, A. Yong，《顶点分解与带标记杨表的格罗布纳几何》，《纯粹与应用数学杂志》630 (2009) 1-31。DOI: https://doi.org/10.1515.CRELLE.2009.033[12]M. Konvalinka，《斜形钩长公式的一个双射证明》，《欧洲组合数学杂志》88(2020) 14页。DOI: https://doi.org/10.1016/j.ejc.2020.103104。[13] V. Kreiman，《格拉斯曼流形等变 K 理论与等变上同调中的舒伯特类》，arXiv:math.AG/0512204。

[14]V. Kreiman, 《拉格朗日格拉斯曼流形等变 K 理论与等变上同调中的舒伯特类》, arXiv:math.AG/0602245。[15] C. Y. Ku, T. Lau, K. B. Wong, 《由固定 k 个点的元素生成的对称群上的凯莱图》, 《线性代数及其应用》471 (2015) 405-426。DOI: https://doi.org/10.1016/j.laa.2015.01.006[16] C. Y. Ku, T. Lau, K. B. Wong, 《1 点固定图的最小特征值》, 《线性代数及其应用》493 (2016) 433-446。DOI: https://doi.org/10.1016/j.laa.2015.12.011[17] A. Lubotzky, 《离散群、扩张图与不变测度》, Birkhauser Verlag, 巴塞尔, 1994。[18] A. Lubotzky。《凯莱图: 特征值、扩展图与随机游走》。载于《组合学综述》1995（斯特灵）, 伦敦数学会讲义系列第218卷, 第155-189页。剑桥大学出版社, 剑桥, 1995。[19] A. H. Morales, I. Pak, G. Panova, 《斜形钩公式 I: q 类比与双射》, 《组合理论杂志》A辑, 154(2018)350-405。DOI: https://doi.org/10.1016.j.jcta.2017.09.002[20] H. Naruse, 《舒伯特演算与钩公式》, 在奥地利施特罗布尔举行的第73届 Lothar 组合学研讨会报告幻灯片, 2014; 可见 tinyurl.com/z6paqzu。[21]M. Ram Murty, 《拉马努金图》, 《拉马努金数学学会杂志》18(2003)1-20。[22] P. Renteln, 《错排图的谱》。《电子组合学杂志》14(1)(2007) 17页。DOI: https://doi.org/10.37236/1000[23] D. Stevanovic, 《图谱在量子物理中的应用》, 《贝尔格莱德论文集》14(22)（图谱应用专题）: 85-111, 2011。[24] N. Trinajstic。《化学图论》。《数学化学丛书》。CRC 出版社, 博卡拉顿, 佛罗里达州, 第二版, 1992。