arXiv:2302.00931v1 [math.FA] 2 Feb 2023

傅里叶代数幂等元上的线性保持映射

YING-FEN LIN 和 SHIHO OI

Abstract. 本文给出了局部紧群的傅里叶代数上保持幂等元的有界复线性算子的表示。当此类算子还具有正性或压缩性时，我们证明该算子由连续群同态或连续群反同态诱导。若这些群全不连通，则傅里叶代数上的有界同态可由幂等元保持算子实现。

1. Introduction

设 G 是一个局部紧豪斯多夫群。Eymard 在其具有开创意义的论文 [12]中引入了 G的傅里叶–Stieltjes 代数$B(G)$和傅里叶代数 $A(G)$。回顾一下， $B(G)$是 G上所有连续正定函数的线性组合；作为一个巴拿赫空间， $B(G)$与冯·诺伊曼代数 $W^*(G)$的预对偶自然等距同构，而该冯·诺伊曼代数由G的泛表示 ω_G 生成。此外，关于逐点乘法和复共轭，它是一个交换巴拿赫 $*$-代数。傅里叶代数 $A(G)$是 $B(G)$中由紧支集函数生成的闭理想。作为巴拿赫空间， $A(G)$与群冯·诺伊曼代数 VN(G)的预对偶等距同构；该冯·诺伊曼代数由 G的左正则表示 λ_G 生成。众所周知， $A(G)$是正则且半单的，并且傅里叶代数和傅里叶–Stieltjes 代数都是 $C_b(G)$的子代数；后者是 G上的连续有界函数代数。

Takesaki 和 Tatsuuma 在 [25] 中证明， G 的紧子群与 $A(G)$的非零右不变闭自伴子代数之间存在一一对应关系。作为这一结果的推广，Bekka、Lau 和 Schlichting 在 [3] 中研究了非零、闭、不变 $*$(A) 的子代数。他们证明，这些空间是商群 G/K 的傅里叶代数 $A(G/K)$，其中 K 是 G的某个紧正规子群。另一方面，Forrest [13] 引入了左陪集空间 G/K的傅里叶代数 $A(G/K)$，其中 K 是一个

2020 年数学主题分类：47B48、47B49、43A22。关键词和短语：傅里叶代数、幂等元、线性保持映射、商群。

局部紧群 G的紧子群（不一定是正规子群）。这个代数既可以看作定义在 G/K 上的函数代数，也可以看作 $A(G)$ 的子代数；它由 $A(G)$ 中在 K的左陪集上取常值的函数构成。注意， $A(G/K)$ 是正则且半单的，其谱 $\sigma(A(G/K))$ 为 G/K，并且它是 $A(G)$ 的一个范数闭、左平移不变的 $*$- 子代数。

调和分析中的一个长期问题是确定任意局部紧群的傅里叶代数或傅里叶–Stieltjes 代数的所有同态。对于任意一对局部紧阿贝尔群 G 和 H，Cohen [7] 刻画了从群代数 $L^1(G)$ 到测度代数 $M(H)$ 的所有有界同态。为此，他运用了自己对群上幂等测度的刻画这一深刻发现。Cohen 的结果由 Host 在 [15], 中推广；Host 发现了傅里叶–Stieltjes 代数中幂等元的一般形式，并刻画了当群 G 有一个有限指数阿贝尔子群时，从 $A(G)$ 到 $B(H)$ 的有界同态。在 [16, 17] 中，这些结果进一步推广到任意局部紧可和群 G：从 $A(G)$ 到 $B(H)$ 的完全有界同态由连续分段仿射映射刻画（另见 [8]）。最一般的结果由 Le Pham 在 [22], 中给出：他确定了任意局部紧群 G 和 H之间，从$A(G)$ 到 $B(H)$ 的所有压缩同态。

为了描述傅里叶–Stieltjes 代数和傅里叶代数中的幂等元，我们先回顾一些术语。设 G 是一个群， K 是 G 的一个子群，则我们知道，对于任意 $s \in G$， $Ks = ss^{-1}Ks$ ，这意味着我们无需区分群 G 的左陪集与右陪集。 G 的陪集环记作 $\Omega(G)$，它是包含 G 的所有子群的陪集的最小集合环。我们将由 G 的开陪集生成的集合环记作 $\Omega_o^c(G)$，类似地，将由 G 的紧开陪集生成的集合环记作 $\Omega_o^c(G)$。根据 [15], ，傅里叶–Stieltjes 代数 $B(G)$ 中的幂等元是 1_F ，即 $\Omega_o(G)$ 中某个元素 F 的示性函数。设 $I_B(G)$ 为 $B(G)$ 中所有幂等元组成的集合。我们将 $I_B(G)$ 的线性张成的闭包记作 $B_I(G)$。由 [18, 命题 1.1], 可知

$$A(G) \cap I_B(G) = \{1_Y : Y \in \Omega_o^c(G)\},$$

这产生了 $A(G)$ 中的幂等元，记作 $I(G)$。令 $A_I(G)$ 为由 $I(G)$ 生成的 $A(G)$ 子代数。注意，Ilie 和 Spronk[17] 证明， 1_F 是 $B(G)$ 中的幂等元且满足 $\|1_F\|_{B(G)} = 1$ ，当且仅当 F 是 G 中的开陪集。然而，也存在范数较小的幂等元 [24] ，以及范数较大的幂等元 [2]。此外，存在任意大范数的幂等元意味着存在任意大范数的同态（详见 [2] ）。因此，幂等元在傅里叶代数同态的研究中发挥着重要作用。研究幂等元的范数本身也很有意义

对于傅里叶-斯蒂尔切斯代数和傅里叶代数中的幂等元，出于我们的研究目的，我们将仅关注保幂等元的算子。

在线性保持映射的丰富文献中，许多研究探讨了在空间 X 上的线性映射 T，这些映射保持 X 的某些子集 S，即 $T(S) \subset S$。Dieudonn´e 在 [9] 中研究了 $M_n(\mathbb{K})$ 上的半线性映射； $M_n(\mathbb{K})$ 是域 $\mathbb{K}$ 上的 $n \times n$ 矩阵代数，这些映射保持所有奇异矩阵组成的集合。此后，许多数学家研究了 $M_n(\mathbb{K})$ 上保持具有不同性质的矩阵子集的线性映射（例如，[19, 23, 10, 4] 等）。文献 [5], 表明， $M_n(\mathbb{C})$ 上保持所有幂等元集合的每个复线性映射 T，要么是内自同构，要么是内反自同构。此外，在文献 [6] 中，刻画了 $M_n(\mathbb{C})$ 上将幂矩阵（即满足 $A^r = A$ 的矩阵 A，其中 $r \geq 2$ 为某个整数）映为幂矩阵的线性映射。自此，保幂等元映射的研究引起了广泛关注，参见例如 [11, 14]。最近，文献 [21] 的作者证明，冯·诺伊曼代数中厄米幂等元的有理数张成空间到 C*-代数中厄米幂等元的有理数张成空间的每个加法映射，都可以延拓为一个 Jordan $*$-同态。

本文研究将幂等元映为幂等元的有界线性算子，其定义域为 $A(G)$，值域为$B(H)$。我们证明，这类算子会在 $A_I(G)$上诱导一个代数同态。代数 $A_I(G)$将是我们的主要研究对象；具体而言，我们将刻画定义在傅里叶代数 $A(G)$或$A_I(G)$上的线性映射，这些映射保持 $I(G)$。此外，我们证明，当群全不连通时，幂等元保持算子能够恢复傅里叶代数上的代数同态。

2. Main results

设 G 是一个局部紧豪斯多夫群， K 是 G的闭子群。我们用 G/K 表示 K的左陪集构成的齐性空间。令

$$B(G:K) := \{u \in B(G) : u(xk) = u(x) \text{ for all } x \in G, k \in K\},$$

也就是说， $B(G)$中的函数在 K的陪集上为常值，并且

$$A(G:K) := \{u \in B(G:K) : q(\mathrm{supp}(u)) \text{ is compact in } G/K\}^{-B(G)},$$

其中 supp(u) 是 G中 u 的支集， q 是从 G到 G/K的典范商映射。此外，若 K 是正规子群，根据 [13,命题 3.2] ，我们有 $B(G:K)$和 $A(G:K)$分别与傅里叶–斯蒂尔杰斯代数和傅里叶代数 $B(G/K)$及 $A(G/K)$等距同构。注意， $A(G:K) \cap A(G)$当且仅当 K 是紧的。

设 e 是群 G 的单位元，我们用 G_e 表示 e 的连通分支，它是 G 的闭正规子群，因此， G/G_e

是一个全不连通局部紧群。关于由 $A(G)$ 的幂等元生成的代数 $A_I(G)$ 与 $A(G : G_e)$ 的关系， [18], 给出了如下结果；为使论述完整，我们在本文中给出一个简短的证明。

命题 2.1. [18, 命题 1.1(ii)] 若连通分支G_e 是紧的，则 $A_I(G) = A(G : G_e)$，也就是说， $A_I(G)$ 由所有在 G_e 的陪集上为常值的 $A(G)$ 中的函数组成。特别地，若G_e 非紧，则 $A_I(G) = \{0\}$。

证明. 设 $q_G : G \to G/G_e$ 是映射到 G/G_e的商映射。由于G_e 是紧的，利用 $u \mapsto u \circ q_G$ 可得 $A(G/G_e)$与 $A(G : G_e)$等距同构，而后者是 $A(G)$的一个闭子代数。因此，$A_I(G) = \mathrm{span}\{1_Y : Y \in \Omega_o^c(G)\} \subseteq A(G : G_e)$。反过来，由于 G/G_e是全不连通的，我们有$A(G/G_e)$中幂等元的张成空间稠密于 [13, 定理 5.3]。此外， $A(G/G_e)$与 $A(G : G_e)$同构，因此， $A(G : G_e)$由 $A(G/G_e)$的幂等元生成，所以 $A(G : G_e) \subseteq A_I(G)$。□

如果包含非平凡幂等元的傅里叶代数，即连通分支 G_e 是紧的，那么根据命题 2.1，存在从 $A_I(G)$ 到 $A(G/G_e)$ 的等距同构。更准确地说，它诱导出等距同构 $\varphi_G : A_I(G) \to A(G/G_e)$，即

$$\varphi_G(f)(q_G(a)) = f(a) \tag{1}$$

对于任意 $f \in A_I(G)$ 和 $a \in G$，其中 $q_G : G \to G/G_e$ 是到 G/G_e 上的商映射。

2.1. 具有 $T(I(G)) \subset I_B(H)$ 的保幂等元映射。设 G 和 H 是两个局部紧群。我们考虑一个有界复线性映射 $T : A(G) \to B(H)$，其满足

$$T(I(G)) \subset I_B(H). \tag{2}$$

对于任意 $f \in \mathrm{span}\{1_Y : Y \in \Omega_o^c(G)\}$，存在 $\alpha_i \in \mathbb{C}$ 和 $Y_i \in \Omega_o^c(G)$，使得 $f = \Sigma_{k=1}^n \alpha_k 1_{Y_k}$。因此，我们有 $Tf = \Sigma_{k=1}^n \alpha_k T1_{Y_k} \in \mathrm{span}\{1_Y : Y \in \Omega_o(H)\} \subset B(H)$。我们回顾一下， $A_I(G) = \mathrm{span}\{1_Y : Y \in \Omega_o^c(G)\}$ ，而 $B_I(H) = \mathrm{span}\{\overline{1_Y :} Y \in \Omega_o(H)\}$。由于 T 是一个有界映射，~~我们~~得到 $T(A_I(G)) \subseteq B_I(H) \subset B(H)$。

我们的目标是得到此类映射在 $A_I(G)$ 上的表示 T。若 $I(G) = \{0\}$，则 $A_I(G) = \{0\}$。由于 T 是复线性的，我们在 $A_I(G)$ 上有 $T = 0$ 。因此，不失一般性，我们可以假设傅里叶代数 $A(G)$ 含有非零幂等元。于是，连通分支 G_e 总是 G 的紧正规子群。另一方面，我们定义下面这个映射，后文将会用到。

定义 2.2。设 G 是一个局部紧豪斯多夫群。利用选择公理，取 S 为 G/G_e 的陪集代表元集合，即 $G = \bigsqcup_{a\in S} aG_e$。然后，我们定义一个从 G/G_e 到 S 的映射 $[\,\cdot\,]_{G/G_e}$，其定义如下:

$$[aG_e]_{G/G_e} = a$$

对任意 $a \in S$。

我们首先给出关于满足 (2) 的算子的以下观察。

引理 2.3. 映射 T 保持幂等元的不相交性。也就是说，对于任意 f, $g \in I(G)$，若 $f \cdot g = 0$，则有 $Tf \cdot Tg = 0$。

证明. 设 f, $g \in I(G)$ 满足 $f\cdot g = 0$。则有 $(f+g)^2 = f+g$。因此 $f+g \in I(G)$。根据假设, Tf, Tg，且 $T(f+g) \in I_B(H)$。由于 $(T(f+g))^2 = Tf+Tg$, 我们得到 $Tf \cdot Tg = 0$。□

定义 2.4. 我们定义 Φ： $A(G/G_e) \to B(H)$ 如下

$$\Phi(f) = T \circ \varphi_G^{-1}(f)$$

对任意 $f \in A(G/G_e)$，其中 φ_G 由式 (1) 给出。

那么， Φ 是从 $A(G/G_e)$到$B(H)$的有界复线性算子。为得到主要结果，我们考虑对偶映射Φ^*： $W^*(H) \to \mathrm{VN}(G/G_e)$，并给出以下引理。

引理 2.5. 设 $\lambda \in \mathrm{VN}(G/G_e)$ 且 $a \in G/G_e$。假设 $a \in \mathrm{supp}\,\lambda$。那么，对于 G/G_e 中 a 的任意邻域 V，存在$h \in I(G/G_e)$，使得 $\mathrm{supp}\ h \subset V$ 且 $\langle \lambda, h\rangle \neq 0$。

证明. 由于 G/G_e 是全不连通的，单位元的每个邻域都包含一个开紧子群。由于 $a^{-1}V$是单位元的一个邻域，存在G/G_e中的开紧子群 G_a，使得 $G_a \subset a^{-1}V$。因此 $aG_a \subset V$。由于 aG_a是 G/G_e中的一个紧开陪集，我们有 $1_{aG_a} \in A(G/G_e)$是一个范数为 1 的幂等元。由于 $a \in \mathrm{supp}\,\lambda$, 存在 $g \in A(G/G_e)$，使得 $\mathrm{supp}\ g \subset aG_a$ 且 $\langle \lambda, g\rangle \neq 0$。令 $\delta = |\langle \lambda, g\rangle|$。由于 $\varphi_G^{-1}(g) \in A_I(G)$，存在 $\alpha_i \in \mathbb{C}$ 和 $f_i \in I(G)$，使得对某个 $n \in \mathbb{N}$，有$\|\varphi_G^{-1}(g) - \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i\| < \delta/\|\lambda\|$。由于 φ_G 是等距同构，我们有$\|g - \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_G(f_i)\| < \delta/\|\lambda\|$ 且 $\varphi_G(f_i) \in I(G/G_e)$。于是得到

$$1_{aG_a}(g - \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_G(f_i)) = g - \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{aG_a}\varphi_G(f_i),$$

因此,

$$\|g - \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{aG_a}\varphi_G(f_i)\| \le \|g - \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_G(f_i)\| < \frac{\delta}{\|\lambda\|}.$$

假设对每个 $1 \leq i \leq n$，都有 $\langle \lambda, 1_{aG_a}\varphi_G(f_i)\rangle = 0$。那么

$$\begin{aligned}|\langle \lambda, g\rangle| &= |\langle \lambda, g\rangle - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle \lambda, 1_{aG_a}\varphi_G(f_i)\rangle| \\ &= |\langle \lambda, (g - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{aG_a}\varphi_G(f_i))\rangle| \\ &\leq \|\lambda\| \|g - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{aG_a}\varphi_G(f_i)\| \\ &< \|\lambda\| \frac{\delta}{\|\lambda\|} = \delta.\end{aligned}$$

这意味着 $|\langle \lambda, g\rangle| < \delta$，这与假设矛盾。因此，存在一个 $i_0 \in \{1, \cdots, n\}$ 使得

$$\langle \lambda, 1_{aG_a}\varphi_G(f_{i_0})\rangle \neq 0.$$

我们还有 $\mathrm{supp}(1_{aG_a}\varphi_G(f_{i_0})) \subset V$ 且 $1_{aG_a}\varphi_G(f_{i_0}) \in I(G/G_e)$，由此完成证明。□

命题 2.6. 对任意 $a \in H$，存在唯一的 $b \in G/G_e$ 和 $\alpha \in \mathbb{C}$ 使得 $\Phi^*(\omega_H(a)) = \alpha\lambda_{G/G_e}(b)$。

证明. 假设存在 $b_1, b_2 \in G/G_e$ 使得 b_1, b_2 都属于 $\mathrm{supp}(\Phi^*(\omega_H(a)))$。由于 G_e 是 G 的闭子群，商群 G/G_e 是豪斯多夫的。因此，在 G/G_e 中，分别存在 b_1 和 b_2 的邻域 V_{b_1} 和 V_{b_2}，使得 $V_{b_1} \cap V_{b_2} = \emptyset$。根据引理 2.5，存在 $h_i \in I(G/G_e)$，其中 $i = 1$ 为 2，使得 $\mathrm{supp}\ h_i \subset V_{b_i}$ 且 $\langle \Phi^*(\omega_H(a))\ h_i\rangle \neq 0$。由于 $V_{b_1} \cap V_{b_2} = \emptyset$，我们得到 $h_1 h_2 = 0$。由于 φ_G 是一个同构，我们有 $\varphi_G^{-1}(h_i) \in I(G)$，其中 $i = 1$ 为 2，且 $\varphi_G^{-1}(h_1) \cdot \varphi_G^{-1}(h_2) = \varphi_G^{-1}(h_1 h_2) = 0$。根据引理 2.3，我们有 $T(\varphi_G^{-1}(h_1)) \cdot T(\varphi_G^{-1}(h_2)) = 0$。另一方面，我们得到

$$0 \neq \langle \Phi^*(\omega_H(a)), h_1\rangle = \Phi(h_1)(a) = T \circ \varphi_G^{-1}(h_1)(a) = T(\varphi_G^{-1}(h_1))(a),$$

and

$$0 \neq \langle \Phi^*(\omega_H(a)), h_2\rangle = \Phi(h_2)(a) = T \circ \varphi_G^{-1}(h_2)(a) = T(\varphi_G^{-1}(h_2))(a).$$

因此，

$$T(\varphi_G^{-1}(h_1)) \cdot T(\varphi_G^{-1}(h_2)) \neq 0,$$

这就产生了矛盾。由于 $\mathrm{supp}(\Phi^*(\omega_H(a))) \neq \emptyset$，存在唯一的 $b \in G/G_e$ 使得 $\mathrm{supp}(\Phi^*(\omega_H(a))) = \{b\}$。因此，根据 [20,推论 2.5, 9], 存在一个 $\alpha \in \mathbb{C}$，使得 $\Phi^*(\omega_H(a)) = \alpha\lambda_{G/G_e}(b)$。□

对于任意 $a \in H$，由命题 2.6，存在唯一的 $b \in G/G_e$ 和 $\alpha \in \mathbb{C}$，使得 $\Phi^*(\omega_H(a)) = \alpha\lambda_{G/G_e}(b)$，因此我们有

$$\Phi(f)(a) = \alpha f(b),$$

对于任意 $f \in A(G/G_e)$。我们将 $\phi: H \to \mathbb{C}$ 定义为 $\alpha = \phi(a)$。我们还将 $\psi: H \to G/G_e$ 定义为 $b = \psi(a)$。于是我们得到

$$\Phi(f)(a) = \phi(a)f(\psi(a)), \tag{3}$$

对任意 $f \in A(G/G_e)$ 和 $a \in H$。

对任意 $h \in I(G)$，由于有 $\Phi(\varphi_G(h)) = T(h) \in I_B(H)$，可得

$$(\Phi(\varphi_G(h)))^2 = T(h)T(h) = T(h) = \Phi(\varphi_G(h)).$$

另一方面，由于 $(\varphi_G(h))^2 = \varphi_G(h^2) = \varphi_G(h)$ 属于 $A(G/G_e)$，可得

$$\phi(a)^2\varphi_G(h)(\psi(a)) = \phi(a)\varphi_G(h)(\psi(a)) \tag{4}$$

对任意 $h \in I(G)$ 和 $a \in H$。

引理 2.7. 对任意 $a \in H$，存在一个 $A(G/G_e)$ 的幂等元 $1_{\psi(a)G_0}$，其中 $\psi(a)G_0$ 是 $\psi(a)$ 的一个开紧邻域。

证明。由于 G/G_e 是全不连通的，因此 G/G_e 中存在一个紧开子群 G_0。对于任意 $\psi(a) \in G/G_e$，$\psi(a)G_0$ 是 G/G_e 中的紧开陪集，因此 $1_{\psi(a)G_0}$ 是 $A(G/G_e)$ 的幂等元，且范数为 1。□

引理 2.8. 映射 $\Phi: A(G/G_e) \to B(H)$ 是代数同态。

证明。设 $a \in H$。由引理 2.7，存在 $A(G/G_e)$ 的幂等元 $1_{\psi(a)G_0}$。由于 $\varphi_G: A_I(G) \to A(G/G_e)$ 是满射，存在$f \in A_I(G)$，使得 $\varphi_G(f) = 1_{\psi(a)G_0}$。此外，我们有 $f^2 = (\varphi_G^{-1}(1_{\psi(a)G_0}))^2 = \varphi_G^{-1}(1_{\psi(a)G_0}) = f$，这意味着 $f \in I(G)$。因此，由 (4) 得

$$\begin{aligned}\phi(a)^2 = \phi(a)^2 1_{\psi(a)G_0}(\psi(a)) &= \phi(a)^2\varphi_G(f)(\psi(a)) \\ &= \phi(a)\varphi_G(f)(\psi(a)) = \phi(a)1_{\psi(a)G_0}(\psi(a)) = \phi(a).\end{aligned}$$

由于 $a \in H$ 是任意的，我们有

$$\phi^2 = \phi \tag{5}$$

在 H 上，因此我们得到 $\phi: H \to \{0, 1\}$。此外，对于任意的 f、$g \in A(G/G_e)$ 和 $a \in H$，我们有

$$\begin{aligned}\Phi(fg)(a) = \phi(a)(fg)(\psi(a)) &= \phi(a)^2(fg)(\psi(a)) \\ &= \phi(a)f(\psi(a))\phi(a)g(\psi(a)) = (\Phi(f)\Phi(g))(a).\end{aligned}$$

因此，Φ 是从 $A(G/G_e)$ 到 $B(H)$ 的代数同态。 □

引理 2.9. 映射 $\psi: \phi^{-1}(1) \to G/G_e$ 连续。

证明. 对任意 $a_0 \in \phi^{-1}(1) \subset H$，设 U 是 G/G_e 中 $\psi(a_0)$ 的一个开邻域。则存在 $f_0 \in A(G/G_e)$，使得

$$f_0(\psi(a_0)) = 1 \quad \text{and} \quad f_0(b) = 0 \ \text{ for } b \in (G/G_e) \setminus U.$$

设 $(a_\lambda)_\lambda \subseteq \phi^{-1}(1)$ 是一个网，使得 $a_\lambda \to a_0$。由于 $\Phi(f_0) \in B(H)$，$\Phi f_0(a_\lambda) \to \Phi f_0(a_0) = f_0(\psi(a_0)) = 1$。存在一个 λ_0，使得若 $\lambda \geq \lambda_0$，则 $|\Phi f_0(a_\lambda)| > \frac{1}{2}$。由于 $\Phi f_0(a_\lambda) = f_0(\psi(a_\lambda))$，当 $\lambda \geq \lambda_0$ 时，我们有 $\psi(a_\lambda) \in U$。因此，ψ 在 $\phi^{-1}(1)$ 上连续。□

引理 2.10. 集合 $\phi^{-1}(1)$ 是 H的一个开子集。

证明。任取 $a \in \phi^{-1}(1)$。根据引理 2.7，存在一个幂等元 $1_{\psi(a)G_0}$，属于 $A(G/G_e)$，其中 $\psi(a)G_0$ 是 $\psi(a)$ 的一个开紧邻域。由于 $\Phi(1_{\psi(a)G_0}) \in B(H) \subset C_b(H)$，存在 H 中包含 a 的一个开邻域 V，使得若 $b \in V$，则

$$|\Phi(1_{\psi(a)G_0})(a) - \Phi(1_{\psi(a)G_0})(b)| \leq \frac{1}{2}.$$

我们有

$$|1 - \phi(b)1_{\psi(a)G_0}(\psi(b))| = |\Phi(1_{\psi(a)G_0})(a) - \Phi(1_{\psi(a)G_0})(b)| \leq \frac{1}{2}.$$

由于 $\phi(b)1_{\psi(a)G_0}(\psi(b)) = 1$或 $\phi(b)1_{\psi(a)G_0}(\psi(b)) = 0$，这意味着

$$\phi(b)1_{\psi(a)G_0}(\psi(b)) = 1.$$

因此，对于任意 $b \in V$，我们有 $\phi(b) = 1$。于是 $V \subset \phi^{-1}(1)$。由此可得，$\phi^{-1}(1)$ 是 H 的一个开子集。□

定理 2.11. 设 G 和 H 是两个局部紧豪斯多夫群，且 $T\colon A(G) \to B(H)$ 是一个有界复线性算子。假设 T 满足 $T(I(G)) \subset I_B(H)$。那么存在 H 的一个开子集 U 以及一个从 U 到 G/G_e 的连续映射 ψ，使得

$$Tf(a) = \begin{cases} f([\psi(a)]_{G_e}) & \text{if } a \in U, \\ 0 & \text{if } a \in H \setminus U, \end{cases} \tag{6}$$

对于任意 $f \in A_I(G)$ 和 $a \in H$。

证明。设 $U = \phi^{-1}(1)$。根据引理 2.10，U 是 H 的一个开子集。此外，引理 2.9 表明 $\psi\colon U \to G/G_e$ 是一个连续映射。应用 (3)，对于任意 $f \in A_I(G)$ 和 $a \in H$，我们有

$$Tf(a) = \Phi(\varphi_G(f))(a) = \phi(a)\varphi_G(f)(\psi(a)).$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned} Tf(a) &= \begin{cases} \varphi_G(f)(\psi(a)) & \text{if } a \in U, \\ 0 & \text{if } a \in H \setminus U \end{cases} \\ &= \begin{cases} f([\psi(a)]_{G_e}) & \text{if } a \in U, \\ 0 & \text{if } a \in H \setminus U, \end{cases} \end{aligned}$$

对于任意的 $f \in A_I(G)$ 和任意的 $a \in H$。 □

下面的例子表明，定理 2.11 中的假设并不蕴含 $T(I(G)) \subset I(H)$。这一观察与众所周知的事实一致：一般而言， $f \circ \psi$ 可能不属于傅里叶代数 $A(H)$（见注 2.13）。

例 2.12. 设 $G = \{0\}$ 为平凡群。定义有界线性算子 $T: A(G) \to B(\mathbb{Z})$ 如下： $T(1_G) = 1_{\mathbb{Z}}$。于是它满足 $T(I(G)) \subset I_B(H)$。注意，在这种情况下，我们有 $U = \mathbb{Z}$，并且对于任意 $n \in \mathbb{Z}$，连续映射 $\psi : \mathbb{Z} \to G/G_e$ 是 $\psi(n) = 0$。另一方面，由于 $1_{\mathbb{Z}} \notin A(\mathbb{Z})$，我们有 $T(I(G)) \nsubseteq I(H)$。

注 2.13. 一般而言，上述定理的逆命题可能不成立，因为我们不知道对于任意 $f \in A_I(G)$，是否有 $Tf \in A(H)$，即使T具有形式为 (6) 的表示也是如此。若我们仅假设 $\psi : U \subseteq H \to G$连续，则一般而言， $f \mapsto f \circ \psi$ 将 $A(G)$映入 $\ell^\infty(H)$。对于阿贝尔群 G 和 H，Cohen [7] 证明， $f \mapsto f \circ \psi$ 将$A(G)$映到 $B(H)$，当且仅当 ψ 是从 H 的开陪集环中的一个集合到 G的连续分段仿射映射。Host [15] 将这一刻画推广到了 G 具有有限指数阿贝尔子群而 H 任意的情形；而 [22] 则将其推广到了一般群。

在对 T 作出额外假设后，我们可以得到开集 U 的代数结构，以及映射 ψ的代数性质。我们先回顾傅里叶代数上的正算子。

若有界线性算子 $T: A_I(G) \to B(H)$ 满足：只要 $u \in A_I(G)$ 是正定函数， $T(u)$ 就是正定函数，则称其为正算子。

推论 2.14. 设 G 和 H 是两个局部紧群。设$T: A_I(G) \to B(H)$ 是一个正的有界复线性算子。若 T 满足 $T(I(G)) \subset I_B(H)$，则存在 H 的一个开子群 U，以及从 H 的开子群 U 到 G/G_e 的连续群同态或反同态 ψ，使得

$$Tf(a) = \begin{cases} f([\psi(a)]_{G_e}) & if\ a \in U, \\ 0 & if\ a \in H \setminus U, \end{cases}$$

对任意 $f \in A_I(G)$ 和 $a \in G$。

证明。由于等距同构 φ_G 保持正性， $u \in A_I(G)$ 是正定函数，当且仅当 $\varphi_G(u)$ 是正定函数。这意味着 T 为正，当且仅当 Φ 为正。因此，根据引理 2.8， $\Phi : A(G/G_e) \to B(H)$ 是一个正同态。由 [22, 定理 4.3]可知，H 存在一个开子群 U，并且存在一个从 U 到 G/G_e 的连续群同态或反同态 ψ，使得对于任意 $f \in A(G/G_e)$， Φf 要么等于

U中的 $f \circ \psi$，否则为 0。因此，我们有

$$Tf(a) = \begin{cases} f([\psi(a)]_{G_e}) & \text{if } a \in U, \\ 0 & \text{if } a \in H \setminus U, \end{cases}$$

对任意 $f \in A_I(G)$ 和 $a \in H$。 □

推论 2.15。设 G 和 H 是两个局部紧群，且 $T: A_I(G) \to B(H)$ 是一个压缩复线性算子。若 T 满足 $T(I(G)) \subset I_B(H)$，则存在 H 的一个开子群 U、一个从 U 到 G/G_e 的连续群同态或反同态 ψ，以及元素 $b \in G$ 和 $c \in H$，使得

$$Tf(a) = \begin{cases} f(b[\psi(ca)]_{G_e}) & if\ a \in c^{-1}U, \\ 0 & if\ a \in H \setminus c^{-1}U. \end{cases}$$

证明。由于 φ_G 是等距同构，若 T 是压缩的，则 Φ 也是一个压缩算子。由引理 2.8，Φ 是一个从 $A(G/G_e)$ 到 $B(H)$ 的压缩同态。由 [22, 定理 5.1] 可知，存在 H 的一个开子群 U、一个从 U 到 G/G_e 的连续群同态或反同态 ψ，以及元素 $bG_e \in G/G_e$ 和 $c \in H$，使得对任意 $f \in A(G/G_e)$ 和 $a \in H$，$\Phi f(a) = f(bG_e\psi(ca))$（若 $a \in c^{-1}U$），否则，$\Phi f(a) = 0$。回顾 Φ 的定义，可得到 T 的刻画。□

2.2. 具有 $T(I(G)) \subset I(H)$ 的保幂等元映射。设有界线性算子 $T: A(G) \to B(H)$ 满足$T(I(G)) \subset I(H)$。于是自然地得到 $T(A_I(G)) \subseteq A_I(H)$。

我们定义 $T_q: A(G/G_e) \to A(H/H_e)$ 为

$$T_q(f) = \varphi_H \circ T \circ \varphi_G^{-1}(f) = \varphi_H \circ \Phi(f),$$

对任意 $f \in A(G/G_e)$，其中 $\varphi_H: A_I(H) \to A(H/H_e)$ 是一个按与 (1) 中类似方式定义的等距同构。注意，T_q 是一个代数同态。

引理 2.16. 设 $a \in \phi^{-1}(1) \subset H$ 和 $b \in H$，使得 $a^{-1}b \in H_e$。则 $\phi(b) = 1$，且 $\psi(a) = \psi(b)$。

证明. 假设 $\psi(a) \neq \psi(b)$。根据 (3)，存在 $\Phi: A(G/G_e) \to B(H)$，使得对任意 $f \in A(G/G_e)$,

$$\Phi(f)(a) = f(\psi(a))$$

and

$$\Phi(f)(b) = \phi(b)f(\psi(b)).$$

由于 G/G_e 是豪斯多夫空间，因此在 G/G_e中存在互不相交的开邻域 V_a和 V_b，分别是 ψ（a）和 ψ（b）的开邻域。由引理 2.5，对于λ_{G/G_e}（ψ（a））$\in VN$（G/G_e），存在 $h \in I$（G/G_e），使得 supp $h \subset V_a$且 h（ψ（a））$\neq 0$。由于 $a \in \phi^{-1}$（1），我们得到

$$\Phi(h)(a) = h(\psi(a)) \neq 0$$

and

$$\Phi(h)(b) = \phi(b)h(\psi(b)) = 0.$$

根据假设， T（I（G））$\subset I$（H）且φ_G^{-1}（h）$\in I$（G），我们有Φ（h）$= T$（φ_G^{-1}（h））$\in I$（H），这是 A（H）中的一个幂等元。因此，存在$Y \in \Omega_o^c$（H），使得 $1_Y = \Phi$（h）。由于 1_Y（a）$= \Phi$（h）（a）$= h$（ψ（a））$\neq 0$，我们有 $a \in Y$。此外， Y是 H 的既开又闭子集，而 H_e 是包含 e的连通分支，因此 $aH_e \subset Y$。这意味着$b = aa^{-1}b \in Y$。由此可得

$$1 = 1_Y(b) = \Phi(h)(b) = 0.$$

这是一个矛盾。因此，我们有 $\psi(a) = \psi(b)$。此外，假设 $\phi(b) = 0$。存在一个 $h \in I(G/G_e)$，使得 $h(\psi(b)) \neq 0$。因此，存在 $Y \in \Omega_o^c(H)$，使得 $1_Y = \Phi(h)$。通过类似的论证，我们有 $1_Y(a) = \Phi(h)(a) = h(\psi(a)) \neq 0$, $a \in Y$和 $b \in Y$。我们得到

$$1 = 1_Y(b) = \Phi(h)(b) = \phi(b)h(\psi(b)) = 0.$$

这是一个矛盾。因此， $\phi(b) = 1$ 且 $\psi(a) = \psi(b)$。 □

对于任意 $a, b \in H$，条件 $a^{-1}b \in H_e$ 在 H上诱导出一个等价关系。引理 2.16 表明， $\phi: H \to \{0,1\}$ 和 $\psi: H \to G/G_e$ 在每个等价类上都是常值函数。因此，它们诱导出映射 $\phi': H/H_e \to \{0,1\}$ 和 $\psi': \phi'^{-1}(1) \to G/G_e$，其定义为

$$\phi'(aH_e) = \phi(a) \quad \text{for any } a \in H$$

and

$$\psi'(aH_e) = \psi(a) \quad \text{for any } aH_e \in \phi'^{-1}(1).$$

根据引理 2.9，映射 $\psi: \phi^{-1}(1) \to G/G_e$ 是连续的。由于我们有 $\phi'^{-1}(1) = q_H(\phi^{-1}(1))$，因此可得 $\psi': \phi'^{-1}(1) \to G/G_e$ 是连续的。

定理 2.17. 设 G 和 H 是两个局部紧豪斯多夫群，且 $T: A(G) \to B(H)$ 是一个有界复线性算子。假设 T 满足 $T(I(G)) \subset I(H)$。那么，存在 H的一个开子集 U，以及一个连续映射 ψ'，它将 H/H_e的一个开子集 $q_H(U)$ 映入 G/G_e，使得

$$Tf(a) = \begin{cases} f([\psi'(aH_e)]_{G_e}) & \text{if } a \in U, \\ 0 & \text{if } a \in H \setminus U, \end{cases} \tag{7}$$

对于任意 $f \in A_I(G)$。

证明。定义 $U = \phi^{-1}(1)$。由于 $q_H: H \to H/H_e$ 是商映射，且根据引理 2.10， U 是 H 的一个开子集。由 (3)，对于任意$f \in A(G/G_e)$和 $a \in H$，我们有

$$T_q(f)(aH_e) = \varphi_H \circ \Phi(f)(aH_e) = \Phi(f)(a) = \phi'(aH_e)f(\psi(a)). \tag{8}$$

我们将证明 $\phi'^{-1}(1)$ 是 H/H_e的一个开子集。设 $a \in \phi'^{-1}(1)$。根据引理 2.7，存在一个幂等元 $1_{\psi'(a)G_0}$，属于 $A(G/G_e)$，其中 $\psi'(a)G_0$ 是 $\psi'(a)$的一个开紧邻域。由于$T_q(1_{\psi'(a)G_0}) \in A(H/H_e) \subset C_0(H/H_e)$，即在无穷远处消失的所有连续函数构成的空间，存在 H/H_e 中的一个开邻域V，它包含 a，使得若 $b \in q_H^{-1}(V)$，则

$$|T_q(1_{\psi'(a)G_0})(a) - T_q(1_{\psi'(a)G_0})(bH_e)| \leq \frac{1}{2}.$$

我们有

$$|1 - \phi'(bH_e)1_{\psi'(a)G_0}(\psi(b))| = |T_q(1_{\psi'(a)G_0})(a) - T_q(1_{\psi'(a)G_0})(bH_e)| \leq \frac{1}{2}.$$

由于 $\phi'(bH_e)1_{\psi'(a)G_0}(\psi(b)) = 1$或 $\phi'(bH_e)1_{\psi'(a)G_0}(\psi(b)) = 0$，这意味着

$$\phi'(bH_e)1_{\psi'(a)G_0}(\psi(b)) = 1.$$

因此，对于任意 $b \in q_H^{-1}(V)$，我们有 $\phi'(bH_e) = 1$。于是 $V \subset \phi'^{-1}(1)$。由此可知，$\phi'^{-1}(1)$ 是 H/H_e 的一个开子集。回顾一下，ψ'：$q_H(U) \to G/G_e$ 是一个连续映射。应用 (8)，我们得到

$$\begin{aligned} T_q(f)(aH_e) &= \phi'(aH_e)f(\psi(a)) \\ &= \begin{cases} f(\psi'(aH_e)) & \text{if } a \in U, \\ 0 & \text{if } a \in H \setminus U, \end{cases} \end{aligned}$$

对于任意 $f \in A(G/G_e)$ 和 $a \in H$。由于我们有

$$T_q(\varphi_G(f))(aH_e) = \varphi_H \circ T \circ \varphi_G^{-1}(\varphi_G(f))(aH_e) = \varphi_H \circ T(f)(aH_e) = Tf(a)$$

对于任意 $f \in A_I(G)$ 和 $a \in H$，我们得到

$$Tf(a) = \begin{cases} \varphi_G(f)(\psi'(aH_e)) & \text{if } a \in U, \\ 0 & \text{if } a \in H \setminus U. \end{cases}$$

□

3. Idempotent preserving bijections on $A_I(G)$

本节中我们进一步假设有界线性算子 T：$A(G) \to B(H)$ 满足 $T(I(G)) \subset I(H)$，且 $T|_{A_I(G)}$ 是到 $A_I(H)$ 上的双射。

定理 3.1. 设 G 和 H 是两个局部紧群，且 T :$A(G) \to B(H)$ 是一个有界复线性算子。假设算子 T满足 $T(I(G)) \subset I(H)$，且 $T|_{A_I(G)}$：$A_I(G) \to A_I(H)$ 是双射。那么存在一个同胚 $\psi : H/H_e \to G/G_e$，使得

$$Tf(a) = f([\psi(aH_e)]_{G_e})$$

对所有 $f \in A_I(G)$ 和 $a \in H$。

证明。由于 $T|_{A_I(G)}$ 是双射线性映射，根据命题 2.1 的证明， φ_G 和 φ_H 是等距同构，因此我们有 $T_q := \varphi_H \circ T|_{A_I(G)} \circ \varphi_G^{-1}$ 是从 $A(G/G_e)$ 到 $A(H/H_e)$ 的同构。

应用定理 2.17，存在 H 的一个开子集 U，以及一个连续映射 ψ，它将 H/H_e 的开子集 $q_H(U)$ 映入 G/G_e，使得

$$T_q(f)(a) = \begin{cases} f(\psi(a)) & \text{if } a \in q_H(U), \\ 0 & \text{if } a \in (H/H_e) \setminus q_H(U), \end{cases}$$

对任意 $f \in A(G/G_e)$ 均成立。由于 $T_q: A(G/G_e) \to A(H/H_e)$ 是满射，且傅里叶代数 $A(H/H_e)$ 分离 H/H_e 中的点，我们有 $q_H(U) = H/H_e$。因此 $U = H$，并且我们有

$$T_q(f)(a) = f(\psi(a))$$

对每个 $f \in A(G/G_e)$ 和 $a \in H/H_e$ 均成立。对于任意 $h \in I(H)$，存在 $h_q \in A(H/H_e)$，使得 $h_q^2 = h_q$，从而

$$\varphi_H(h) = h_q.$$

由于 T_q 是双射，存在 $f_q \in A(G/G_e)$，使得

$$T_q(f_q) = h_q.$$

此外，由于 T_q 是代数同态，我们有 $T_q(f_q^2) = (T_q(f_q))^2 = h_q^2 = h_q = T_q(f_q)$。由 T_q 的单射性可得 $f_q^2 = f_q$。另一方面，由于 φ_G 是从 $A_I(G)$ 到 $A(G/G_e)$ 上的等距同构，存在 $f \in I(G)$，使得

$$\varphi_G(f) = f_q.$$

因此，我们有

$$T(f) = (\varphi_H^{-1} \circ T_q \circ \varphi_G)(f) = \varphi_H^{-1} \circ T_q(f_q) = \varphi_H^{-1}(h_q) = h.$$

这意味着 $T(I(G)) = I(H)$。特别地，我们有 $T^{-1}(I(H)) \subset I(G)$。因此，我们可以对 $T|_{A_I(G)}^{-1}$ 应用类似的论证： $A_I(H) \to A_I(G)$；对于 $T_q^{-1} = \varphi_G \circ T|_{A_I(G)}^{-1} \circ \varphi_H^{-1}$ 在 $A(H/H_e)$ 上，我们便可以定义一个连续映射 $\psi: G/G_e \to H/H_e$，使得

$$T_q^{-1}(g)(b) = g(\tilde{\psi}(b))$$

对任意 $g \in A(H/H_e)$ 和 $b \in G/G_e$。

对任意 $g \in A(H/H_e)$ 和 $a \in H/H_e$，我们有

$$g(a) = T_q(T_q^{-1}g)(a) = g(\tilde{\psi}(\psi(a))).$$

由于傅里叶代数 $A(H/H_e)$ 能够分离 H/H_e 中的点，我们得到

$$a = \tilde{\psi}(\psi(a)) \quad \text{for} \quad a \in H/H_e\,. \tag{9}$$

此外，我们得到

$$f(b) = T_q^{-1}(T_q f)(b) = f(\psi(\tilde{\psi}(b))),$$

对于任意的 $f \in A(G/G_e)$ 和 $b \in G/G_e$。类似地，由于 $A(G/G_e)$ 在 G/G_e 上分离点，我们有

$$b = \psi(\tilde{\psi}(b)) \quad \text{for} \quad b \in G/G_e\,. \tag{10}$$

由 (9) 和 (10)，可知 $\psi: H/H_e \to G/G_e$ 是一个双射，且$\tilde{\psi} = \psi^{-1}$。回顾一下，ψ 和 $\tilde{\psi}$ 分别在 H/H_e 和G/G_e上连续。由于 $\tilde{\psi} = \psi^{-1}$，可知 ψ 是一个同胚。此外，我们得到

$$T_q(f)(a) = f(\psi(a)) \quad \text{for } f \in A(G/G_e),\, a \in H/H_e\,.$$

由于 $T = \varphi_H^{-1} \circ T_q \circ \varphi_G$，我们得到

$$Tf(a) = f([\psi(aH_e)]_{G_e})$$

对所有 $f \in A_I(G)$ 和 $a \in H$均成立。 □

注意，上述定理中的双射假设对于函数 $\psi: H/H_e \to G/G_e$ 成为同胚是必要的。

例3.2. 设 $G = \{1, 2\}$ 是一个赋予离散拓扑的乘法群。设 $H = \{0\}$ 是平凡群。定义T: $A(G) \to A(H)$，使得对任意 $f \in A(G)$，$Tf(0) = f(1)$。那么，T是 $A(G)$上的有界复线性算子，并且对任意 $1_Y \in A(G)$，若 $1 \in Y$，则$T(1_Y) = 1_H$；否则 $T(1_Y) = 0$。因此，$T(I(G)) = I(H)$。另一方面，$T(1_{\{1\}}) = 1_H = T(1_G)$，这意味着$T|_{A_I(G)}: A_I(G) \to A_I(H)$不是单射。此外，$\psi: H/H_e = H \to G/G_e = G$ 满足

$$\psi(0) = 1.$$

不是同胚。

在第2.1节中对 T 施加额外假设后，我们得到了两个傅里叶代数之间线性幂等元保持映射的刻画。注意，由于以下两个推论中的连续映射 ψ 是群同构或反同构，因此对于任意 $f \in A_I(G)$，自然有 $f \circ \psi \in A_I(H)$（见 [26]）；由此，我们得到了 $A_I(G)$上的幂等元保持算子 T 成立的充要条件。

推论3.3. 设 G 和 H 是两个局部紧群。满射复线性压缩映射 T: $A_I(G) \to A_I(H)$ 满足 $T(I(G)) \subset I(H)$，当且仅当存在连续群同构或反同构 $\psi: H/H_e \to G/G_e$ 以及一个元素 $b \in G$，使得

$$Tf(a) = f(b[\psi(aH_e)]_{G_e})$$

对所有 $f \in A_I(G)$ 和 $a \in H$。

推论3.4. 设 G 和 H 是两个局部紧群。正的有界复线性双射 T: $A_I(G) \to A_I(H)$满足

$T(I(G)) \subset I(H)$当且仅当存在连续群同构或反同构 $\psi\colon H/H_e \to G/G_e$ 使得

$$Tf(a) = f([\psi(aH_e)]_{G_e})$$

对于所有的 $f \in A_I(G)$ 和 $a \in H$。

本文将以群全不连通时的一个特殊情形作结。在这种情况下，$A_I(G)$ 与 $A(G)$ 等距代数同构。因此，幂等元保持算子得出了代数同态的结果。

备注 3.5. 设 G 和 H 是全不连通局部紧群。令 $T\colon A(G) \to A(H)$ 为满足 $T(I(G)) \subset I(H)$ 的有界复线性算子。则存在一个连续映射 ψ，它将 H 的开子集 U 映入 G，使得

$$Tf(a) = \begin{cases} f(\psi(a)) & if\ a \in U, \\ 0 & if\ a \in H \setminus U, \end{cases}$$

对于任意 $f \in A(G)$ 和 $a \in H$。此外，若 T 是满射压缩映射，或 T 是正双射，则分别等价于某个 $b \in G$ 或 $Tf = f \circ \psi$所对应的 $Tf = f \circ (b\psi)$，对所有满足以下条件的 $f \in A(G)$ 均如此：$\psi\colon H \to G$ 是连续群同构或群反同构；特别地，T 是代数同态。

致谢。第二作者受日本学术振兴会（JSPS）科研费（KAKENHI）资助，项目编号为 JP21K13804。

References

[1] W. Arendt 和 J. de Canni`ere, 《傅里叶代数的序同构》, J. Funct. Anal. 50 (1983), 1–7。[2] M. Anoussis、G. K. Eleftherakis 和 A. Katavolos, 《大范数幂等元与傅里叶代数同态》, Studia Math. 267 (2022), no.1, 109– 120。[3] M.E.B. Bekka、A.T. Lau 和 G. Schlichting, 《局部紧群的傅里叶–Stieltjes 代数的不变子代数》, Math. Ann. 294 (1992), 513–522。[4] P. Botta、S. Pierce 和 W. Watkins, 《保持幂零矩阵的线性变换》, Pacific J. Math. 104 (1983), 39–46。[5] M. Bre˘sar 和 P. ˘Semrl, 《保持幂等元的映射、局部自同构与局部导子》, Canad. J. Math. 45 (3) (1993), 483–496。[6] M. Bre˘sar 和 P. ˘Semrl, 《保持幂矩阵的线性变换》, Proc. Amer. Math. Soc. 119 (1) (1993), 81–86。[7] P. J. Cohen, 《群代数的同态》, Amer. J. Math. 82 (1960), 213–226。[8] M. Daws, 《重新探讨傅里叶代数的完全有界同态》, J. Group Theory 25 (2022), no.3, 579–600。[9] J. Dieudonn´e, 《关于四变量正交群的一种推广》, Arch. Math. 1 (1948), 282–287。[10]J. Dixon, 《一般线性群中单群的刚性嵌入》, Canad. J. Math. 29 (1977), 384–391。

[11] G. Dolinar, 《矩阵代数上保持幂等元的映射》, Linear Algebra Appl. 371 (2003), 287–300。[12] P. Eymard, 《局部紧群的傅里叶代数》, Bull. Soc. Math. France 92 (1964), 181–236。[13] B. Forrest, 《陪集空间上的傅里叶分析》, Rocky Mountain J. Math. 28 (1998), no. 1, 173–190。[14] A. Guterman、C.-K. Li、P. ˇSemrl, 《线性保持问题的一些一般技术》, Linear Algebra Appl. 315 (2000), 61–81。[15] B. Host, 《 $B(G)$ 中的幂等元定理》, Bull. Soc. Math. France 114 (1986), 215–223。[16] M. Ilie, 《关于傅里叶代数同态》, J. Funct. Anal. 213 (2004), 88– 110。[17] M. Ilie 和 N. Spronk, 《傅里叶代数的完全有界同态》, J. Funct. Anal. 225 (2005), no.2, 480–499。[18] M. Ilie 和 N. Spronk, 《傅里叶–斯蒂尔吉斯代数中由幂等元生成的代数》, Houston J. Math. 33 (2007), 1131–1145。[19] H. G. Jacob, 《克罗内克积上的相干不变映射》, Amer. J. Math. 77 (1955), 177–189。[20] E. Kaniuth 和 A. T.-M. Lau, 《局部紧群上的傅里叶代数与傅里叶–Stieltjes 代数》, Mathematical Surveys and Monographs 231, 美国数学学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 2018。[21] C.-K. Li、M.-C. Tsai、Y.-S. Wang、N.-C. Wong, 《算子代数之间的加性厄米幂等元保持映射》, J. Math. Anal. Appl. 505 (2022), no. 2, 125522。[22] H. Le Pham, 《傅里叶代数的压缩同态》, Bull. London Math. Soc. 42 (2010), 937–947。[23] M. Marcus 和 B. Moyls, 《张量积空间上的变换》, Pacific J. Math. 9 (1959), 1215–1221。[24] J. Mudge 和 H. Le Pham, 《小范数幂等元》, J. Funct. Anal. 270 (2016), 4597–4603。[25] M. Takesaki 和 N. Tatsuuma, 《对偶性与子群》, Ann. Math. 93 (1971), 344–364。[26] M. E. Walter, 《W*代数与非阿贝尔调和分析》, J. Funct. Anal. 11 (1972), 17–38。

(Y.-F. Lin) Mathematical Sciences Research Centre, Queen's University Belfast, Belfast, BT7 1NN, U.K., Email: y.lin@qub.ac.uk

（S. Oi） Department of Mathematics, Faculty of Science, Niigata University, Niigata 950-2181, Japan, Email: shiho-oi@math.sc.niigata-u.ac.jp