arXiv:2302.00945v1 [math.DS] 2 Feb 2023

一种 化方案：半正则连分数

S

Niels Langeveld 和 David Ralston

2023年2月3日

1 引言

本文将研究一种重整化方案，借助它可以自然地找出一个数的所有半正则连分数。在第2节中，我们定义两个映射， T_{slow} 和 T_{fast}：这些映射定义在$(x,y) \in [0,1]^2$上，其中 x 是这样一个数：根据参数 y，由 T_{slow} 为其构造半正则连分数表示。值得注意的是，随着参数 y 变化， x 的所有可能半正则连分数表示都可以双射地构造出来（定理 4.1），因此 T_{slow} 是讨论 x这些表示的一种自然框架。映射 T_{fast} 是映射 T_{slow}的“加速”版本，我们证明了 T_{fast} 关于一个概率测度是遍历的，该测度与 $[0,1]^2$上的勒贝格测度相互绝对连续（定理 2.6）。相较之下， T_{slow} 不保留这样的测度，但确实保留一个无限的、 σ-有限的测度，该测度与勒贝格测度相互绝对连续（推论 2.7）。

在第3节中，我们证明映射 T_{slow} 作用于 (x,y)，可以生成一系列替换，从而生成关于轨道 y相对于区间 $[0,1-x]$， $[1-x,1]$的符号编码。这些替换自然地与寻找一列 $n \in \mathbb{Z}^+$ 有关，使得 $-nx$ 模 1 ˆ 对 y 所有 $-ix$ 模 1 的 $1 \le i \le n$ 最佳逼近（引理3.3）。 T_{fast} 的遍历性进而导出该序列一般增长率的结论（推论3.8）。

最后，在第4节中，我们重点说明如何利用该方案生成半正则连分数，并明确提及正规连分数 [DK02]，反向连分数 [R57́]、 α-连分数[Nak81]，作为 α-连分数 [KLMM20]，以及 Lehner 连分数[Leh94]。ˆ T_{fast} 的遍历性以及 ˆ T_{slow} 的不遍历性，也导出了关于在我们的半正则连分数参数化中， x 的渐近分数分母一般增长率的结论（定理4.2）。

ˆˆ 2 映射 T_{slow} 和 T_{fast}

令 X 为单位圆 R/Z，但将所有 $y \in X$ 都分别视为“左”和“右”版本，即 y^- 和 y^+，并满足$y^- < y^+$。于是记作 $X = [0^+, 1^-]$。我们赋予 X 由所有形如 (a^+, b^-) 的开集生成的拓扑，其中 $0 \le a < b \le 1$。对于 $x \in$R，令 R_x 表示旋转 x，即 $R_x(y^\pm) = (y+x)^\pm$ 模 1。注意，集合$[0^+, (1-x)^-]$ 和 $[(1-x)^+, 1^-]$ 将 X 划分为两个不相交的紧集。在研究R_x的性质时，当 $y \notin x$Z 模 1 时， $R_x^n(y^+)$ 与 $R_x^n(y^-)$之间没有有意义的区别，因此我们将这些点视为同一点。因此，我们省略 X所需的记号，只考虑 $y \in [0,1]$。按照这一约定，区间总是从某个数的右侧版本开始；如果端点是某个 nx 模 1，则在该点的左侧版本处结束：例如， $[0,1-x]$ 和 $[1-x,1]$ 在此约定下是不相交的。

圆周旋转可以方便地表示为最简单的非平凡区间交换变换，即区间交换变换，它是区间 $[0,1]$上的保向分段等距双射。具体而言，旋转可以表示为两个区间的交换（二交换变换）。图1 展示了 R_x 以这种方式表示的情形。请注意

$$R_x(y) = \begin{cases} y+x, & y \in [0, 1-x], \\ y+x-1, & y \in [1-x, 1]. \end{cases}$$

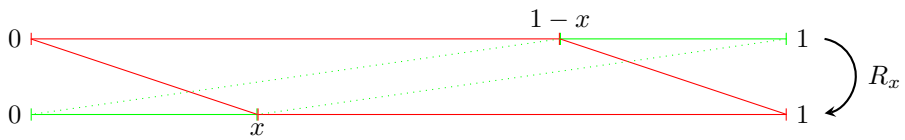


图 1：由 x 表示的旋转可视为二交换变换。

接下来，设 $A=[1-x,1]$。对于任意 $y\in A$，将 y 的返回时间定义为 $N(y)$，其中

$$N(y)=\min\left\{n\in\mathbb{Z}^+ : R_x^n(y)\in A\right\}.$$

A 上的首次返回映射由 $R_x^{N(y)}(y)$ 给出。众所周知，A 上的首次返回映射恰有两个回归时间。具体而言，对于任意 $y\in A$，我们要么有 $N(y)=a$，要么有 $N(y)=a+1$，其中 a 是使得 $ax<1$ 的最大正整数，即 $a=\lfloor 1/x\rfloor$，也就是 x 的第一个部分商。对于 $y\in[-(a+1)x、\ 1]$（模一），有 $N(y)=a$；而对于 $y\in[1-x,-(a+1)x]$，有 $N(y)=a+1$；见图 2。因此，首次回归映射是另一个二交换变换，定义为

$$\hat{R}_{\hat{x}}(y)=\begin{cases} y+\hat{x}, & y\in[1-x,-(a+1)x \mod 1],\\ y+\hat{x}-1, & y\in[-(a+1)x \mod 1,1];\end{cases}$$

其中 $\hat{x}=(a+1)x-1$。该映射要么是旋转量为 $(a+1)x-1$ 的旋转，要么是旋转量为 $1-ax$ 的旋转：这两种选择同构，仅在方向的选择上有所不同。我们采用如下约定：较短的返回时间决定首次返回映射的方向和旋转量。我们作出这一选择的动机如下：

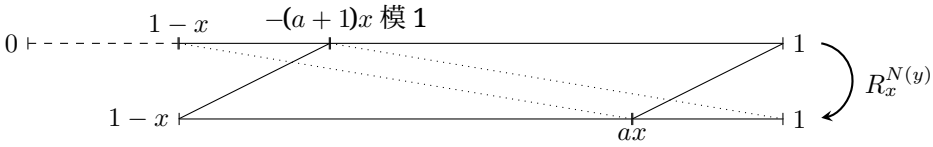


图 2：我们在区间 $[1-x,1]$ 上构造首次返回映射。得到另一个二交换变换（即旋转），它有两种不同的返回时间；a（实线）和 $a+1$（虚线）。

引理 2.1. 首　　次返回映射在 $A=[1-x,1]$ 上经过重新缩放后，并遵循由较短返回时间决定方向选择的约定，与旋转 $T(x)$ 同构，其中

$$T(x)=\frac{1}{x}-\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor$$

是高斯映射。

映射 τ：$[1-x,1]\mapsto[0,1]$ 定义为

$$\tau(y)=\frac{1-y}{x}=T(x)-\frac{y}{x} \mod 1 \tag{1}$$

是一个反向同构，将 $[1-x,1]$ 上的首次回归映射与 $[0,1]$ 上旋转 $T(x)$ 对应起来。

证明。从图 2 中可以看出，在 A 内，较短的返回时间对应于减去 $(1-ax)$。通过$1/x$ 重新缩放，使该映射作用于长度为 1 的区间上，我们得到减去 $1/x-a=T(x)$。由于旋转方向也由这个较短的返回时间决定，我们反转方向，得出首次返回映射可表示为 $R_{T(x)}$。再次参见图 2，可知我们需要 τ 是一个线性函数，将区间 $[1-x,1]$ 映射到 $[0,1]$，且方向相反：由此确定 τ。 □

当然，关于诱导映射的旋转量，引理 2.1 是众所周知的；我们在此给出它，是因为后面会用到特定的同构 τ。

如果我们改为在 $[0,1-x]$ 上构造首次返回映射，会发生什么？我们可以把沿一个方向旋转 x重新看作沿另一个方向旋转 $1-x$，因此反转方向后，区间 $[0,1-x]$ 的长度便等于旋转量。应用引理 2.1 即可得到：

推论 2.2。在 $[0,1-x]$ 上的首次返回映射同构于旋转 $T(1-x)$，其中同构由下式给出

$$\tau(y)=\frac{y}{1-x}. \tag{2}$$

请注意，与引理 2.1不同，在这种情况下，同构 τ 保持方向。我们先反转一次方向，将原映射 R_x 视为 R_{1-x}，随后应用引理 2.1，首次返回映射再次反转方向。

我们在图中同时展示这两个首次返回映射3：在 $[1-x,1]$ 上，我们得到旋转 $T(x)$，方向反转；而在 $[0,1-x]$ 上，我们得到旋转 $T(1-x)$，方向保持不变。这里$N'(y)$ =最小 $\{n\in\mathbb{Z}^+:\ R_x^n(y)\in[0,1-x]\}$.红色和绿色箭头的长度表示该首次返回映射的旋转

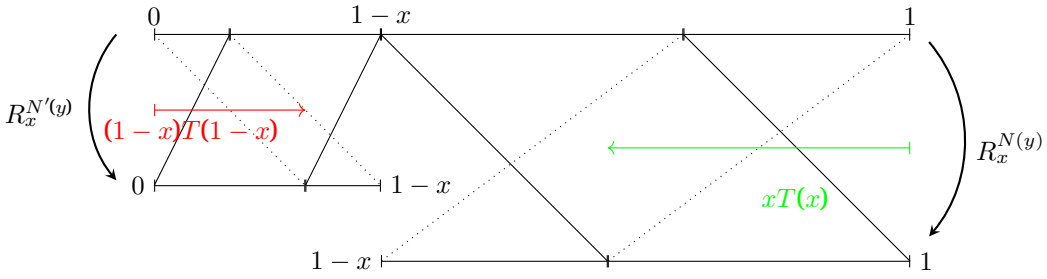


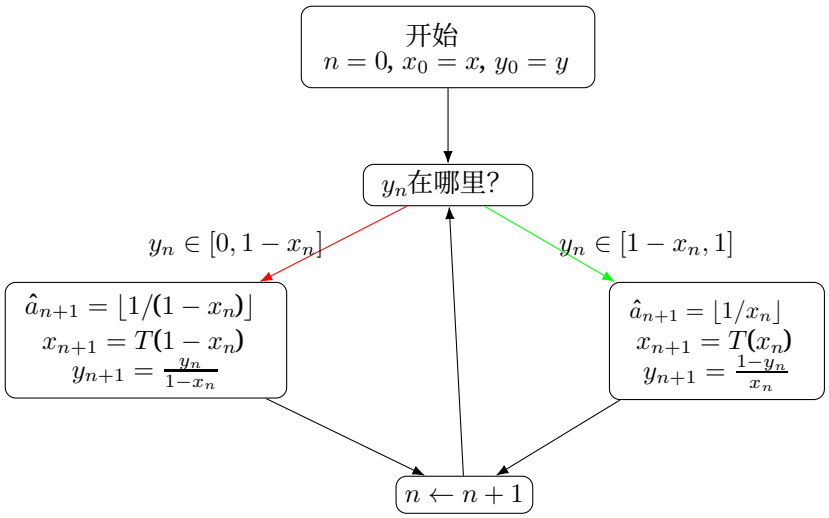
图 3: 两个不同的首次返回映射，左侧为 $[0, 1-x]$，右侧为 $[1-x, 1]$.

量（尚未重新缩放到长度为一的区间），箭头从经同构映射到原点的点出发，并指向诱导旋转的方向。

现在我们可以定义第一个新函数：$\hat{}$ T_{slow} 作用于点对（x， y）上，其中 x 表示旋转量，而 $y \in X$。根据 $y \in [0, 1-x]$ 还是 $y \in [1-x, 1]$，我们分别在适当的区间上取首次返回映射（分别为 $R^{N'}$ $_{(y)}$ $_{x}$ 或 $R_x^{N(y)}$），并结合指定的同构 τ，从而得到空间 X中的新旋转量和点：

$$\hat{T}_{slow}(x,y) = \begin{cases} \left(T(1-x), \frac{y}{1-x}\right) & y \in [0, 1-x], \\ \left(T(x), \frac{1-y}{x}\right) & y \in [1-x, 1]. \end{cases} \tag{3}$$

对于此映射的迭代，我们给出一种实用的可视化辅助工具。令$_0 = x$ $y_0 = y \in$ $[0,1]$ $\{x_n\}$ $\{y_n\}$ $\{a_n\}$ x_n y_n $= T_{slow}^n$ x_0 y_0 a_n 为旋转量，并且与之前一样。将序列 、 、 $\hat{}$ 生成如下：(,) $\hat{}$ (,)，而 $\hat{}$ 是用于定义 n 次首次返回映射的返回时间。这样，我们也可以按照图 4 中给出的算法进行。



$\hat{}$ 图 4: 展示 T_{slow}作用的非正式图示算法。绿色箭头与红色箭头的选择与图 3中的配色方案一致。

$\hat{}$ 乍看之下，图 4 中的描述似乎并未超出 T_{slow} 在方程（3）中的定义。然而，这两种颜色的箭头提供了一种清晰的方式，用于区分 $\hat{}$ T_{slow} 是通过高斯映射（绿色箭头）还是通过其修改版本（红色箭头）作用于第一个坐标 x_n；在这两种情况下，都迫使我们计算较短的回归时间 $\hat{a}$，稍后我们将会用到这些时间。下面的引理 $\hat{}$ 是技术上的必要条件，同时也揭示了映射 T_{slow} 与连分数研究中众所周知的技术之间的重要联系：

引理 2.3。 对于任意初始选择 (x_0, y_0)，图 4 中的算法的任何一次执行都必须包含无穷多个边，这些边要么是绿色的，要么是带有 $\hat{a}_n \geq 2$的红色边；等价地，不存在任何 (x_0, y_0) 会在带有 $\hat{a}_n = 1$的情况下无限循环地跟随红色箭头。

证明。红色边涉及计算

$$\hat{a}_{n+1} = \left\lfloor \frac{1}{1-x_n} \right\rfloor, \qquad x_{n+1} = \frac{1}{1-x_n} - \hat{a}_{n+1}.$$

假设某个 x_n 的正规连分数展开为

$$x_n = \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \cfrac{1}{k_3 + \ddots}}} = [k_1, k_2, k_3, \ldots].$$

于是我们看到

$$1 - x_n = \begin{cases} [k_2 + 1, k_3, \ldots] & (k_1 = 1), \\ [1, k_1 - 1, k_2, \ldots] & (k_1 \neq 1). \end{cases} \tag{4}$$

因此，如果 $k_1 = 1$ 并且我们沿着红色边

$$\hat{a}_1 = \left\lfloor \frac{1}{1-x} \right\rfloor = k_2 + 1 \geq 2,$$

而如果 $k_1 \geq 2$ 并且我们沿着红色边

$$\hat{a}_1 = \left\lfloor \frac{1}{1-x} \right\rfloor = 1,$$

我们将得到

$$x_{n+1} = T(1-x) = [k_1 - 1, k_2, \ldots].$$

It 因此，沿着红色边最多只能连续进行 $\hat{a}_n = 1$ k_1 次。 □

公式（4）给出了一个关系，其中涉及所谓的 标准连分数展开的奇异化和插入，该展开对应于 x。这些术语将在第 4 节中作出更精确的定义和阐述。

现在，我们为以下对象构造一个自然的马尔可夫划分 $\hat{T}_{slow}$。直线 $y = 1 - x$ 用于确定 $\hat{T}_{slow}$的作用方式，然后必须确定 $\lfloor 1/x \rfloor$ 或 $\lfloor 1/(1-x) \rfloor$，因此，对于 $n = 1$、2、3、....., 由.....界定的梯形要么

- $1 - x \leq y \leq 1$, $1/(n+1) \leq x \leq 1/n$, or
- $0 \leq y \leq 1 - x$, $(1 - 1/n) \leq x \leq (1 - 1/(n+1))$

恰好构成我们所寻求的划分；见图 5。

映射 $\hat{T}_{slow}$ 可以扩展为作用于线段 $x = 0$ 和 $x = 1$:

$$\hat{T}_{slow}(0, y) = (0, y), \qquad \hat{T}_{slow}(1, y) = (0, 1 - y).$$

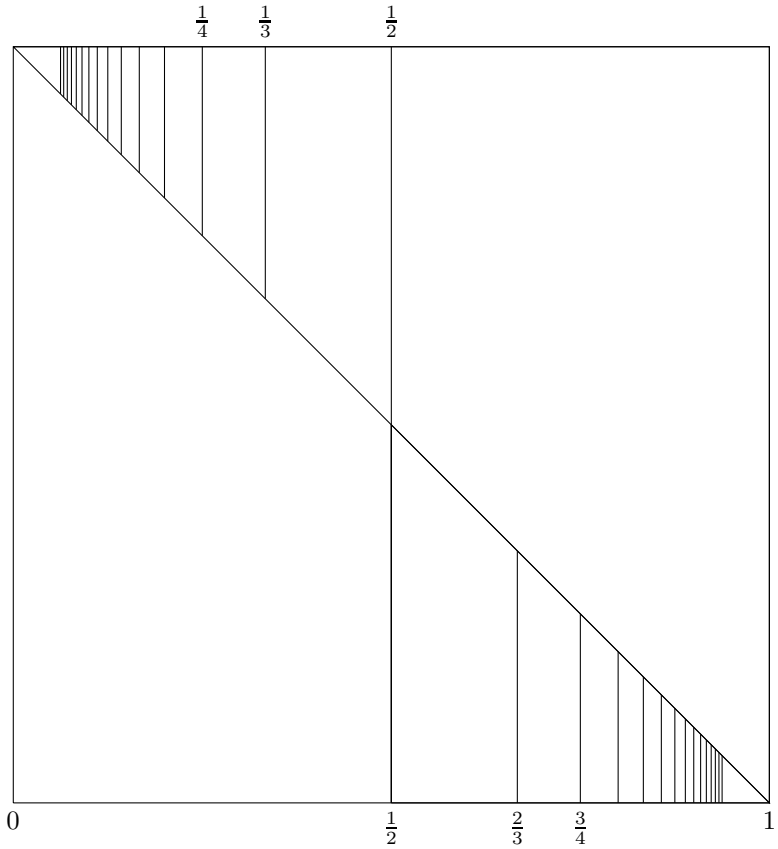
由于这些线段的内部为空（在 $[0,1]^2$ 中），因此将它们纳入是为了补全划分，但它们不会影响我们之后关于动力系统的论述。

那么，我们要问映射 $\hat{T}_{slow}$ 是否相对于一个与勒贝格测度相互绝对连续的概率测度是遍历的。不过请注意，当 x 接近零时，$1/(1-x) - 1$ 也很小；映射 $\hat{T}_{slow}$ 在越接近 $x = 0$时，作用就“越像恒等映射”。由于 $\frac{d}{dx}(1/(1-x) - 1) = \frac{1}{(1-x)^2}$，对于 $x = 0$ 任意 $y \in [0,1]$，都是映射的一个中性不动点 $\hat{T}_{slow}$。这一观察表明，$\hat{T}_{slow}$不保留任何与勒贝格测度相互绝对连续的有限测度。我们最终确实会证明这一结论（推论 2.7），但目前我们先构造一个“加速版”的 T_{slow} 来避免这个问题。

定义 $F = \{(x, y) : y \geq 1 - x \text{ 或 } x > 1/2\}$，以及 $N_F(x, y) = \min\{n \geq 0 : \hat{T}^n_{slow}(x, y) \in F\}$。快速映射定义为 $\hat{T}_{fast}(x, y) = \hat{T}^{N_F(x,y)+1}_{slow}(x, y)$。根据引理 2.3，该映射是良定义的：我们应用 $\hat{T}_{slow}$，直到得到 $y \geq 1 - x$（此时我们将沿绿色边前进），或者直到得到 $y \leq 1 - x$，但 $x > 1/2$；在这种情况下，沿红色边前进将得到 $\hat{a} \geq 2$。换言之，该映射迭代 $\hat{T}_{slow}$，直到进入 F，然后再应用一次 T_{slow}。等价地，在 T_{slow} 作用下，所有连续出现的“带有 $\hat{a} = 1$的红色边”都会并入下一个“绿色边，或带有 $\hat{a} \geq 2$的红色边”。

我们从研究区间 $y \in [0, 1]$上的 $\hat{T}_{fast}$ 开始，并引入一个引理来描述

引理2.4. 固定 $x < 1/2$ 后，$\hat{T}_{slow}$ 线性映射 $\{x\} \times [0, 1-x]$ 到 $\{T(1-x)\} \times [0, 1]$, $T(1-x) = x/(1-x)$, 以及 $\lfloor 1/T(1-x) \rfloor = \lfloor 1/x \rfloor - 1$。



ˆ 图 5： T_{slow}的马尔可夫划分。

证明. ˆ T_{slow} 对第二坐标的线性作用显而易见：当 $y \le 1-x$时， ˆ$T_{slow}(x,y) = (T(1-x),\ y/(1-x))$，且 x 固定。当 $x < 1/2$ 时，我们有 $\lfloor \frac{1}{1-x} \rfloor = 1$，由此得到

$$T(1-x) = \frac{1}{1-x} - \left\lfloor \frac{1}{1-x} \right\rfloor = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}.$$

最后一个断言可由对上述结果取倒数得出。 □

因此，当 $x < 1/2$ 和 $y \notin [1-x, 1]$ 时（例如，恰好是 $[0,1]^2$ 中ˆ T_{fast} 不只是ˆ ˆ定义为 T_{slow}的那些点），图6展示了 T_{slow} 对所有 $y \in [0, 1-x]$的作用。具体而言，若 $1-(i+1)x < y < 1-ix$，ˆ则 $1-ix_s < y_s < 1-(i-1)x_s$，其中 $T_{slow}(x,y) = (x_s, y_s)$。



图6： 当$x < \frac{1}{2}$和 $y \in [0, 1-x]$时， ˆ T_{slow} 对第二坐标的作用。这里 $a = \lfloor 1/x \rfloor \ge 2$ 和$x_s = T(1-x)$。

推论 2.5。对于 $x < 1/2$和 $y < 1-x$，用点 $1-ix$ （ $i = 1$、2、. . .、 a）将 $[0,1]$ 划分，其中 ˆ$a = \lfloor 1/x \rfloor$。对于每个 $i = 1$、2、. . .、$(a-1)$， T_{fast} 将 $\{x\} \times [1-(i+1)x$线性映射到 $\{T(x)\} \times [0,1]$，其第二坐标 ˆ 的方向反转。此外， T_{fast} 将 $\{x\} \times [0, 1-ax]$线性映射到 $\{T^2(x)\} \times [0,1]$，其第二坐标的方向不反转。

证明。 根据引理 T_{slow} 来考察 ˆ 的迭代2.4。如果 $y \in [1-(i+1)x,\ 1-ix]$，那么经过 i 次 ˆ 迭代 T_{slow} “沿着红色边”（按图 4所示），我们将到达

进入 y 所属的最上方区间，即最终到达 $y \geq 1-x$，然后我们将“沿着绿色边”。假设 $y \geq 1-ax$，即可确保每次沿着红色边时，我们都有 $\lfloor 1/(1-x) \rfloor = 1$；此外，ˆ 在恰好连续经过 T_{slow} 次这样的迭代后，旋转将为 i

$$x^* = \frac{1}{(a-i)+T(x)},$$

而沿着绿色边前进时，我们现在将按 $T(x^*) = T(x)$ 旋转。

$y \in [0, 1-ax]$ 的情况类似，只不过我们只“沿着红色边前进”。经过 T_{slow} 的 $a-1$ 次迭代后，旋转量为

$$x^* = \frac{1}{a-(a-1)+T(x)} = \frac{1}{1+T(x)},$$

然后在最后一步中，我们计算

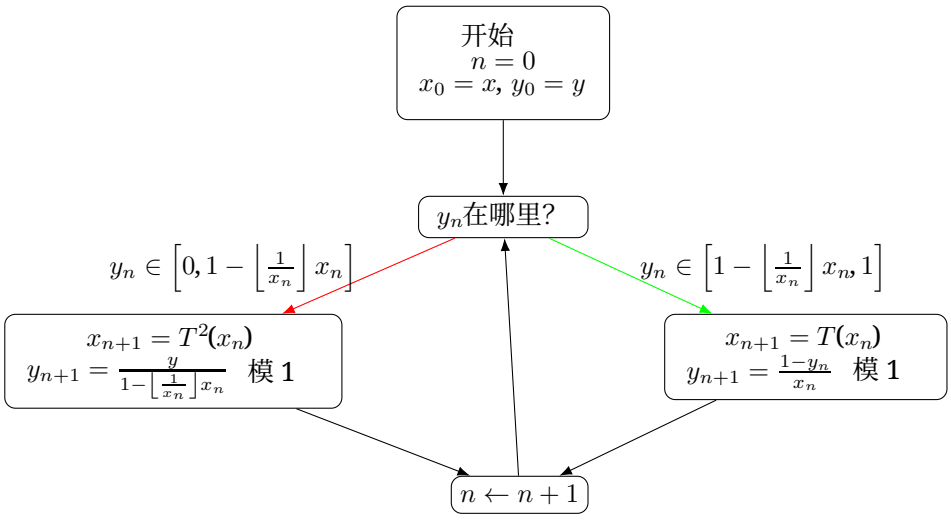
$$\begin{aligned} 1-x^* &= \frac{T(x)}{1+T(x)} \\ \frac{1}{1-x^*} &= 1+\frac{1}{T(x)} \\ T(1-x^*) &= T(T(x)). \end{aligned}$$

关于方向的注释，只是因为要考虑 T_{slow} 会导致方向反转多少次：对于那些 $y \geq 1-ax$，恰好反转一次（计算 T_{fast} 将在沿着“绿色边”应用一次后终止）；而对于那些 $y \leq 1-ax$，则一次也不反转（T_{fast} 将以一条“带有 $a \geq 2$ 的红色边”终止）。 □

推论 2.5 还有另一种解释：使用点 $[0,1]$ 对 $1-x$，$1-2x$，.....$1-ax$ ˆ（其中 $a = \lfloor 1/x \rfloor$ 无论 y如何），映射 T_{fast} 都可以简单地视为该划分中包含 y 的区间上的首次回归映射。当此区间的长度为 x 时，诱导旋转的长度为$T(x)$。当此区间的长度为 $1-ax$ 时，诱导旋转的长度为 $T^2(x)$。于是， y 在此区间内相应地进行线性缩放；当区间长度为 x 时，方向反转；而当区间长度为 $1-ax$ 时，方向不反转。综上所述，我们得到：

$$\hat{T}_{fast}(x,y) = \begin{cases} \left(T(x), \frac{1-y}{x} \mod 1\right) & y \geq 1-\lfloor 1/x \rfloor x, \\ \left(T^2(x), \frac{y}{1-\lfloor 1/x \rfloor x}\right) & y \leq 1-\lfloor 1/x \rfloor x. \end{cases} \tag{5}$$

ˆ 我们构造了一个类似于图4 的图示表示，用于描述图 T_{fast} 中的作用7。



ˆ 图 7： T_{fast} 的图像版本。

ˆˆˆ 现在我们为 T_{fast} 描述一个自然的马尔可夫划分。由于 T_{fast} 在 F 上的作用与 T_{slow} 相同，因此我们在该区域使用与 T_{slow} 相同的梯形。具体来说，我们将它们记作 G_n 和 R_n，作为梯形

由给定直线围成：

$$G_n : \left\{ \frac{1}{n+1} \le x \le \frac{1}{n}, \quad 1-x \le y \le 1 \right\}, \qquad n \ge 1,$$
$$R_n : \left\{ 1 - \frac{1}{n+1} \le x \le 1 - \frac{1}{n+2}, \quad 0 \le y \le 1-x \right\}, \qquad n \ge 1.$$

在图 4 中，梯形 G_n 对应于“沿着绿色边跟随 $\hat{a}_{k+1} = n$”，而 R_n 对应于“沿着红色边跟随 $\hat{a}_{k+1} = n+1$”。此处的指标 $k+1$ 指一般意义上的“下一个指标”，并非特指某个指标。另外，对所有 $x \in G_n$， x 的标准连分数表示都以 $x = [n, \ldots]$开头；而 $x \in R_n$ 的标准连分数表示则以 $x = [1, n, \ldots]$开头。为方便起见，记 $G = \cup_i G_i$ 和 $R = \cup_i R_i$： G 是由 $y = 1$、 $x = 1$和 $y = 1 - x$围成的三角形，而 R 是由 $x = 1/2$、 $y = 0$ 和 $y = 1 - x$围成的三角形。剩下的梯形将按以下方式划分

$$PG_{i,n} : \left\{ \frac{1}{n+1} \le x \le \frac{1}{n}, 1-(i+1)x \le y \le 1 - ix \right\}, \qquad n \ge 2, \quad i = 1, \ldots, n-1,$$
$$T_n : \left\{ \frac{1}{n+1} \le x \le \frac{1}{n}, \quad 0 \le y \le 1 - nx \right\}, \qquad n \ge 2.$$

为保持标记一致，我们也令 $PG_{0,n} = G_n$ 和 $T_1 = R$。

ˆ 由引理 2.4 可直接得出，映射 T_{slow} 对梯形 $PG_{i,n}$ 的作用如下：

- For $i = 1, 2, \ldots, n-1$ and $n \ge 2$, $\hat{T}_{slow} : PG_{i,n} \mapsto PG_{i-1,n-1}$.
- 对于 $n \ge 2$, T_{slow}： $T_n \mapsto T_{n-1}$。

所有写出的映射都是一一映射。

ˆ 因此可见，每个梯形 $PG_{i,n}$ 经过恰好 i 次 T_{slow}迭代后，将在 T_{slow} 下轨道进入 G_{n-i} ，其中 $i \le n-1$。若将记号更新为 $G_n = PG_{0,n}$，则梯形 $PG_{i,n}$， ˆˆ 其中 $0 \le i < n$，在 T_{fast} 作用下，经由 T_{slow} 的 i 次迭代，先执行“带有 $\hat{a}_{k+1} = 1$的红色边”，再单次执行“带有 $\hat{a}_{k+1} = (n-i)$的绿色边”。梯形的记号“PG”表示它们是“预绿色”的。

ˆˆ 相比之下，三角形 T_n 经过 $n-1$ 次 T_{slow} 迭代后将映射到 R，此时 T_{slow} 的作用相当于“红色边，但带有 ˆ $a_{k+1} \ge 2$”。因此，我们相应地将每个 T_n 划分，以确定它将进入哪个梯形 R_n 。更具体地说，令梯形 $PR_{i,n}$ 由以下直线围成

$$PR_{i,n} : \left\{ \frac{i}{in+1} \le x \le \frac{i+1}{(i+1)n+1}, \quad 0 \le y \le 1 - nx. \right\} \qquad n \ge 2, \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

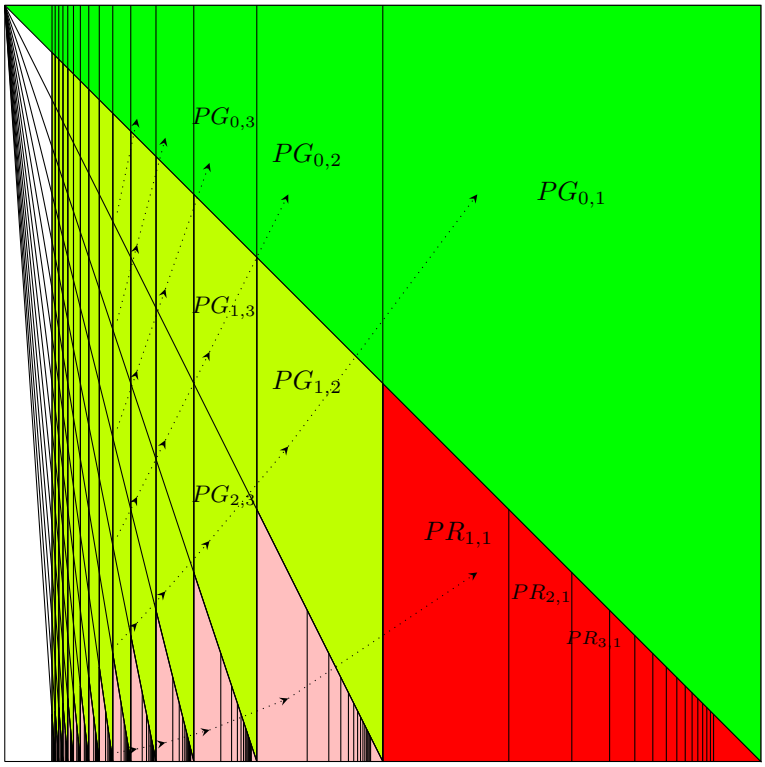
ˆ注意， T_{slow}： $PR_{i,n} \mapsto PR_{i,n-1}$；如果将原来的 $R_i = PR_{i,0}$重新标记，这样便一致了。梯形 ˆ$PR_{i,n}$ 受 T_{slow} 作用，相当于“带有 $\hat{a}_{k+1} = 1$ 的 $n-1$ 条红边，后接一条带有 $\hat{a}_{k+1} = i+1$ 的红边”。因此，这些梯形被标记为“预红色”。总结如下：

- 梯形 $PG_{i,n}$ 指的是这样一个区域： T_{fast} 由 T_{slow} 的 i 次迭代给出，先是“红色边，ˆ $\hat{a}_{k+1} = 1$”，随后是一次 T_{slow} 迭代，对应“绿色边，$\hat{a}_{k+1} = n - i$”。这里 $0 \le i \le n-1$。
- 在$PG_{i,\ n}$中， n 是 x的第一个部分商，而 i 指的是关于 y 坐标的信息：$1 - (i+1)x \le y \le 1 - ix$。 ˆˆ
- 相比之下，梯形$PR_{i,\ n}$指的是这样一个区域：其中， T_{fast}由 T_{slow}的 $n-1$次迭代给出，这些迭代带有ˆ“红色边，$\hat{a}_{k+1} = 1$”，随后再进行一次带有“红色边，$\hat{a}_{k+1} \ge 2$”的 T_{slow} 迭代。在此， $1 \le i < \infty$。
- 在$PR_{i,\ n}$中， x坐标由 $i/(ni+1) \le x \le (i+1)/(n(i+1)+1)$定义； x 的前两个部分商为 n、 i，而 y 必须满足 $y \le 1 - nx$。

ˆ 见图8 以了解这一马尔可夫划分；箭头表示连续的 T_{slow} <style id='8}>最终将梯形映射到 G 或 R，并在其中双射地映回单位正方形。因此， T_{fast} 将这些梯形中的每一个双射地映射到单位正方形。绿色梯形对应于那些 y 并非“非常小”的值，它们通过将 x 划分为标准连分数展开中长度为一的柱集；而红色梯形则对应于 y的较小值，但代价是将 x 划分为标准连分数展开中长度为二的柱集。

现在我们陈述本节的核心结论：

$G = \cup_n PG_{0,n}$



$T_3 = \cup_i PR_{i,3}$ $R = \cup_i PR_{i,1}$

$T_2 = \cup_i PR_{i,2}$

ˆˆ 图 8：展示 T_{slow} 对 T_{fast} 的作用的马尔可夫划分。

定理 2.6. 在空间 $[0,1]^2$，上存在一个概率测度 ˆμ，它与勒贝格测度 μ 相互绝对连续，并且映射 T_{fast} 是遍历的。

证明。回想一下，从形式上说，第二坐标包含点的左/右分离 $y = nx$；我们取 μ 为勒贝格测度在该空间上的自然扩张。为了证明我们的定理，我们将证明 [BMD05，定理 1。1] 中的条件均得到满足。首先，我们注意到我们的系统

$$\left([0,1]^2, \hat{T}_{fast}, \mu\right)$$

是一个塔系统。我们塔系统的“基底”是空间 $[0,1]^2$，，其中所有点的返回时间均为 1 ˆ（即这些塔的高度均为 1，因为 T_{fast} 将该空间映射到自身）。有四个条件需要验证。为便于对照，我们采用参考文献中的术语，但不一定在此重新定义所有术语：

第一：“上层可和性”

返回时间 $R(x,y) = 1$ 对所有 (x,y) 均成立，因此我们立即得到

$$\begin{aligned}\sum_{\ell\in\mathbb{N}} \mu\left(\{(x,y)\in[0,1]^2 \quad | \quad R(x,y) > \ell\}\right) &= \mu\{(x,y)\in[0,1]^2 \quad | \quad R(x,y) = 1\} + 0 \\ &= \mu([0,1]^2) \\ &= 1.\end{aligned}$$

其次：区域 $PG_{i,n}$, $PR_{i,n}$ 构成一个生成分割 $\mathcal{R}$。

这一条件可通过验证 ˆ 的某个幂 T_{fast} 是一致扩张的（其范数有一个大于 1 的下界）得出。我们将公式（5）改写为：

$$\hat{T}_{fast}(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{1}{x} - n, \frac{1-y}{x} - i\right) & (x,y)\in PG_{i,n}, \\ \left(\frac{x(ni+1)-i}{1-nx}, \frac{y}{1-nx}\right) & (x,y)\in PR_{i,n}, \end{cases} \tag{6}$$

ˆ 由此我们可以更轻松地计算雅可比矩阵 DT_{fast}:

$$D\hat{T}_{fast}(x,y)=\begin{cases}\begin{bmatrix}-\frac{1}{x^2} & 0\\ -\frac{(1-y)}{x^2} & -\frac{1}{x}\end{bmatrix} & (x,y)\in PG_{i,n},\\ \begin{bmatrix}\frac{1}{(1-nx)^2} & 0\\ \frac{ny}{(1-nx)^2} & \frac{1}{(1-nx)}\end{bmatrix} & (x,y)\in PR_{i,n}.\end{cases}$$

由于这些矩阵是三角矩阵，且对角线上是互不相同的实数，因此最小特征值模很容易算出，为 $1/x$ 或 $1/(1-nx)$。后者与 1 保持一定距离，因此 T_{fast} 在 $PR_{i,\ n}$上一致扩张。然而，在 $PG_{i,\ n}$上，这个模与 1 的距离并不固定。还要注意，在两种情况下，都有两个互不相同的实特征值，且其绝对值都大于 1；这个映射不可能在任何地方收缩。

但我们只需验证 ˆ T_{fast} 的某个次幂一致扩张，因此考虑 ˆ T^2_{fast}。我们已经验证过，ˆ T^2_{fast} 在任意 $PR_{i,\ n}$ 或 ˆ$T^{-1}_{fast}PR_{i,\ n}$ 上一致扩张（它在$PR_{i,\ n}$上一致扩张，并且在 $PG_{i,\ n}$上处处不收缩），因此只需考虑区域 $PG_{i_1,\ n_1}\cap\hat{T}^{-1}_{fast}(PG_{i_2,\ n_2})$。对于这样的 (x,y)，x 的连分数展开以 $x=[n_1,n_2,\ldots]$开头，根据链式法则:

$$\begin{aligned}D\left(\hat{T}^2_{fast}(x,y)\right)&=D\hat{T}_{fast}(x,y)\cdot D\hat{T}_{fast}\left(\hat{T}_{fast}(x,y)\right)\\&=\begin{bmatrix}-\frac{1}{x^2} & 0\\ \star & -\frac{1}{x}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-\frac{1}{T(x)^2} & 0\\ \star & \frac{1}{T(x)}\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}\frac{1}{(xT(x))^2} & 0\\ \star & \frac{1}{xT(x)}\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

我们没有明确计算左下角元素，因为计算这些三角矩阵的范数时并不需要它们: 现在可以看出，在这些区域中，特征值模较小者为$1/(xT(x))>2$。因此，ˆ T^2_{fast}是一致扩张的，并且我们的划分生成了空间的拓扑。第三: 可求和变差

第三个条件是

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\omega_n<\infty,$$

其中 ω_n 由下式给出

$$\omega_n=\sup_{C\in\mathcal{R}^n}\sup_{(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in C}\log\frac{\det D\hat{T}_{fast}(x_1,y_1)}{\det D\hat{T}_{fast}(x_2,y_2)},$$

其中 $\mathcal{R}^n=\bigvee_{i=0}^{n-1}\hat{T}^{-i}_{fast}(\mathcal{R})$。我们看到，行列式为

$$\det\left(D\hat{T}_{fast}(x,y)\right)=\begin{cases}x^{-3} & (x,y)\in PG_{i,n},\\ (xT(x))^{-3} & (x,y)\in PR_{i,n}.\end{cases}$$

注意，该行列式与 y无关。此外，面积$PG_{i,n}$ 是通过 x的标准连分数展开中的一个长度为一的柱集来定义的，随后 x 被映射到 $T(x)$。$PR_{i,n}$ 则以相同方式通过一个长度为二的柱集来定义，其中 x 被映射到 $T^2(x)$。因此，T^n_{fast} 的柱集ˆ在 x坐标上的范围受标准连分数展开中长度为 k 的柱集限制，其中 $n\le k\le 2n$取决于我们应用 T 而非 T^2的次数。

因此，我们的 ω_n 实际上是对所有 $(a_1,a_2,\ldots,a_k)\in\mathbb{Z}^k$，以及所有 x_1,x_2（其连分数展开以 $[a_1,a_2,\ldots,a_k]$开头）的量取上确界，所得量为

$$\max\left\{3\log\left(\frac{x_1}{x_2}\right),3\log\left(\frac{x_1T(x_1)}{x_2T(x_2)}\right)\right\}.$$

如果 x_1,x_2 属于同一个长度为 k 的柱集，那么 $T(x_1)$ $T(x_2)$ 属于同一个长度为$k-1$的柱集。因此，只需在求 $\log\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$ 的上确界时证明其可求和性。此外，取 x_1,x_2 为柱集的端点即可求得上确界。端点之间的距离为 $\frac{1}{q_k\quad(q_k+q_{k-1})}$，其中 q_k 是 $[a_1,\ldots,a_k]$的分母。因此，上确界出现在分母最小的柱集中，即 $a_1=a_2=\cdots=a_k=1$。令 $\varphi=[1,1,1,\ldots]$，使得 $1/\varphi$ 为黄金分数。我们得到 $x_1=F_k/F_{k+1}$ 和 $x_2=F_{k+1}/F_{k+2}$（当 k 为奇数时；否则交换 x_1,x_2的取值）。这里

$(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 是斐波那契数列。当 k 最小时，该比值最大；又因为 $n \le k \le 2n$，我们令 $k = n$。最后，我们得到

$$|x_1 - \varphi| < \frac{1}{F_{n+1}^2}, \qquad |x_2 - \varphi| < \frac{1}{F_{n+2}^2}.$$

无论 k 是偶数还是奇数，根据上述结果，我们可以推得：对某个 $C < 1$ （具体而言，对任意 $1 > C > \varphi$），当 n 充分大时，

$$\left|\frac{x_1}{x_2} - 1\right| < C^n, \qquad 1 < \frac{x_1}{x_2} < 1 + C^n, \qquad 0 < \log\left(\frac{x_1}{x_2}\right) < C^n$$

由此可得 ω_n 具有可求和性。

第四部分：大像性质

BMD05 的定理 1 的第四个也是最后一个条件是[BMD05，定理 1。1] 对于划分中的每个元素，其在 T_{fast} 下的像由划分中的元素组成，且这些像的测度下确界为正。由于 T_{fast} 将划分中的每个元素映射到整个空间 $[0,1]^2$, ，因此这一条件显然成立。 □

我们在此引用的定理还给出了该不变测度的混合速率估计：由于 ω_n 呈指数衰减，系统的混合速率也是指数级的。

推论 2.7。映射 ˆ T_{slow} 不保持任何绝对连续（相对于勒贝格测度）的概率测度ˆ，且其拉东-尼科迪姆导数有界。相反， T_{slow} 保持一个测度 μ ，该测度与勒贝格测度相互绝对连续，但满足 $\mu\left([0,1]^2\right) = \infty$。

证明。 .....的结果 [BMD05] 还表明，拉东-尼科迪姆导数 $d\nu/d(x,\ y)$，其中 ν 是关于 T_{fast} 且相对于勒贝格测度绝对连续的不变概率测度$d(x,\ y)$，既有界，又远离零。该文献还提出了额外的非周期性 要求，涉及划分元素；由于我们的划分中每个元素都映射到整个正方形，因此满足这一条件。

ˆ ˆ ˆ 由于 T_{slow} 作为 T_{fast}上的塔有一种直接的表示，因此我们可知，如果 T_{slow} 保持这样的测度，那么基底的 ν 测度将与各塔的 μ-测度之和成正比（比例由导数 $d\mu/d(x,y)$的界决定）。由于我们的塔高为 n ，而基底面积约为 $1/n^2$，因此不存在这样的有限测度。不过，如果我们简单地定义一个测度 μ，使塔的每一层上的测度等于基底的 ν-测度，那么便构造出了一个无穷（但仍为 σ-有限）的测度，该测度由 ˆ T_{slow}保持不变。 □

3 典范逼近

正如我们在第2 节中逐步构造首次回归映射时所做的那样，我们反复将所得区间重新缩放至长度为一；这种重整化使我们能够在空间 T_{fast} 上构造映射 $[0,1]^2$。然而，在本节中，我们会持续追踪原空间中包含 y 的相应收缩区间。与此同时，我们还将推导出一些代换，用以编码这些区间端点经过首次回归后的轨道。

从第2节中首次返回映射的迭代构造可以清楚地看出，我们有一个自然的区间序列 $I_{slow}(k)$，这些区间彼此嵌套（$I_{k+1} \subset I_k$），且交集恰为 $\{y\}$。具体而言， $I_{slow}(0) = [0,1]$；此后，若 $I_{slow}(k)$ 被首次出现在内部的原点的逆像划分， $I_{slow}(k+1)$便是由此得到的两个区间中包含 y 的那个；请回想，对于 $y \in x\mathbb{Z}$，我们有 y 的左侧和右侧版本，因此这一选择总是唯一的。因此，这些就是原圆 $[0,1]$ 中的区间，映射 T_{slow} 在其上依次计算首次回归映射。显然， $I_{slow}(k)$ 的两个端点都具有 $-nx$ 的形式，其中 n 是某个非负整数。我们将满足以下条件的自然数 n 按递增顺序排列： $-nx$ 是某个 $I_{slow}(k)$ 的端点；所得序列称为相对于 x 的 y 慢逼近序列。下面将这些概念形式化：

引理3.1. 若 $\{n_k\}$ 是 x关于 y 的慢逼近序列，则对所有 $k \in \mathbb{N}$， $-n_k x$ 和$-n_{k-1}x$ 都是 $I_{slow}(k)$的端点（约定 $n_{-1} = n_0 = 0$）。若令 $\{a,b\} = \{n_k, n_{k+1}\}$使得 $0 \le y + ax < y + bx \le 1 \bmod 1$，则 $y + n_{k+2}x < y + ax \bmod 1$或 $y + bx < y + n_{k+2}x \bmod 1$。此外， n_{k+2} 是满足上述任一不等式的最小正整数。

证明。 $I_{slow}(0) = [0,1]$ 的两个端点都具有 $-0x$ 的形式，因此第一个断言的基例显然成立。我们构造区间 $I_{slow}(k)$ 的方式，使得其端点构成序列 $-n_k x$ ，这些端点依次是原点的反向轨道中最接近 y 的点。如果点 $-n_k$ 模 1 后是依次最接近 y 的点，那么 $y + n_k$ 模 1 后就是依次最接近原点的点。 □

因此，这些区间中存在一个子序列 $I_{fast}(k)$，它们是首次回归映射为 $\hat{T}_{fast}^{k}$ 的缩放版本的区间；回忆一下，

$$\hat{T}_{fast}(x,y)=\begin{cases}\hat{T}_{slow}^{i+1}(x,y) & ((x,y)\in PG_{i,n}),\\ \hat{T}_{slow}^{n}(x,y) & ((x,y)\in PR_{i,n}).\end{cases}$$

因此，我们构造一个以 $k_0=0$ 开头的 k 子序列，然后

$$k_{j+1}=\begin{cases}k_j+i+1 & \left(\hat{T}_{fast}^{j}(x,y)\in PG_{i,n}\right),\\ k_j+n & \left(\hat{T}_{fast}^{j}(x,y)\in PR_{i,n}\right).\end{cases}$$

通过这种方式，令取 $I_{fast}(j)=I_{slow}(k_j)$，这些就是原系统中 $\hat{T}_{fast}$ 所在的区间 is 首先构造 次迭代映射。

我们将满足以下条件的 n_{k_j} 定义为 y 关于 x 的快速逼近序列：$-n_{k_j}x$ 是某个 $I_{fast}(k_j)$ 的端点。于是，这些数表示 n_k 的一个“加速”序列，沿着该序列，$y+n_{k_j}x \bmod 1$ 收敛到原点。我们所称的 y 关于 x 的慢速和快速逼近序列，表示 y 的轨道中靠近原点的那些点：$-nx \bmod 1$ 接近 y，因此 $y+nx \bmod 1$ 接近 0 或 1。更典型的做法是考察原点的轨道中靠近 y 的那些点。在 [IN88] 中，这些被称为 y 关于 x 的典范逼近序列。我们的定义与之相似但并不完全相同；其差别在于，是用原点的正向轨道中的点（典范序列）逼近 y，还是用原点的反向轨道中的点（我们的快速逼近序列）逼近 y。因此，y 关于 x 的快速逼近序列，将是 y 关于 $1-x$ 的典范逼近序列，反之亦然。

令 $\mathcal{A}=\{A,B\}$ 和 $\mathcal{A}^*$ 为 $\mathcal{A}$ 上的自由幺半群。定义函数 Ω：$[0,1]^2\mapsto\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ 为

$$\Omega(x,y)_n=\begin{cases}A & (y+nx \mod 1\geq 1-x)\\ B & (y+nx \mod 1\leq 1-x).\end{cases}$$

那么，$\Omega(x,y)$ 称为 y 在旋转 x 下的轨道的符号编码，前缀 $\Omega(x,y)_{[0,n)}$ 称为长度为 n 的符号编码。对于给定的一对坐标 (x,y)，我们也将点对 (x,y) 的符号编码简称为符号编码，而不再称其为 y 在旋转 x 下的符号编码。

我们在 $\mathcal{A}^*$ 上定义同态 σ_x、τ：

$$\sigma_x(A)=AB^a \qquad \tau(A)=B$$
$$\sigma_x(B)=AB^{a-1} \qquad \tau(B)=A$$

其中 $a=\lfloor 1/x\rfloor$，如前所述。它们可以自然地扩展为 $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ 上的同态。于是 le t

$$\sigma_{slow}(x,y)=\begin{cases}\sigma_x & (y\geq 1-x)\\ \tau\circ\sigma_{1-x} & (y\leq 1-x).\end{cases}\tag{7}$$

将 $\mathcal{A}^*$ 中任意一个含有 A 的 n 次出现以及 B 的 m 次出现的词表示为列向量 $[n,m]^T$，可见可以通过矩阵 $M_{slow}(x,y)$ 来研究这些替换

$$M_{slow}(x,y)=\begin{cases}\begin{bmatrix}1 & 1\\ \hat{a} & (\hat{a}-1)\end{bmatrix} & (y\geq 1-x,\ \hat{a}=\lfloor 1/x\rfloor)\\ \begin{bmatrix}\hat{a} & (\hat{a}-1)\\ 1 & 1\end{bmatrix} & (y\leq 1-x,\ \hat{a}=\lfloor 1/(1-x)\rfloor).\end{cases}\tag{8}$$

特别值得关注的是，当 $y\leq 1-x$ 且 $1-x\geq 1/2$（即 $\hat{a}=1$）时，此时 $\sigma(A)=BA$，$\sigma(B)=B$，也就是说，那些 x、y 满足

$$M_{slow}(x,y)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}.\tag{9}$$

注意，

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}^d=\begin{bmatrix}1 & 0\\ d & 1\end{bmatrix}.\tag{10}$$

最后，递归地定义遍历组合如下：

$$\sigma_{slow}(x,y,k+1)=\sigma_{slow}(x,y,k)\circ\sigma_{slow}\left(\hat{T}_{slow}^{k}(x,y)\right)$$

约定 $\sigma_{slow}(x,y,0)$ 为恒等代换，并类似地定义矩阵 $M_{slow}(x,y,k)$。

回想一下，T_{fast} 等价于将所有满足 $y \le 1-x$ 和 $1-x \ge 1/2$ 的 T_{slow}（即“红边与 $\hat{a}_{k+1}=1$”）合并到 T_{slow} 的下一次迭代中。在 $PG_{i,n}$ 中，恰好有 i 个这样的情况（其中 $0 \le i \le n-1$）；而在 $PR_{i,n}$ 中恰好有 $n-1$ 个。换言之，我们可以将 $\sigma_{fast}(x,y)$ 定义为

$$\sigma_{fast}(x,y) = \begin{cases} \sigma_{slow}(x,y,i+1) & (x,y) \in PG_{i,n} \\ \sigma_{slow}(x,y,n) & (x,y) \in PR_{i,n}. \end{cases} \tag{11}$$

我们还类似地定义矩阵 $M_{fast}(x,y)$、$M_{fast}(x,y,k)$。结合方程（8）、方程（9）、方程（10）和方程（11）：

$$M_{fast}(x,y,k) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \hat{a} & (\hat{a}-1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{bmatrix} & ((x_k,y_k) \in PG_{i,n}), \quad \hat{a} = \lfloor 1/x_n \rfloor) \\ \begin{bmatrix} \hat{a} & (\hat{a}-1) \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (n-1) & 1 \end{bmatrix} & ((x_k,y_k) \in PR_{i,n}, \quad \hat{a} = \lfloor 1/(1-x_n) \rfloor). \end{cases}$$

$\hat{a}$ 的值可按如下方式确定：在 $PG_{i,n}$，经过 i 次连续的“红边与 $\hat{a}_{k+1}=1$”迭代 T_{slow} 后，我们将沿着绿色边前进，使用 T_{slow}，但其第一个部分商为 $n-i$。因此，在 $PG_{i,n}$，我们使用 $\hat{a}=n-i$。在 $PR_{i,n}$，经过 $n-1$ 次“红边与 $\hat{a}_{k+1}=1$”迭代后，我们将沿着红边旋转，其标准连分数以 $x'=[1,i,\ldots]$ 开头，因此 $a=\lfloor 1/(1-x') \rfloor = i+1$。接着，$M_{fast}(x,y,k)$ 是代换 $\sigma_{fast}(x_k,y_k)$ 的矩阵；这是经过 k 次迭代 T_{fast} 后生成的单次替换。总而言之：

$$M_{fast}(x,y) = \begin{cases} \begin{bmatrix} i+1 & 1 \\ ((n-i)(i+1)-i) & (n-i-1) \end{bmatrix} & ((x_k,y_k) \in PG_{i,n}) \\ \begin{bmatrix} (ni+1) & i \\ n & 1 \end{bmatrix} & ((x_k,y_k) \in PR_{i,n}). \end{cases} \tag{12}$$

这些矩阵有两个不同的实特征值，一个为正，一个为负：定义 $\lambda_{\pm}(x,y)$ 为这两个特征值。由（12）可直接计算得

$$\lambda_{\pm} = \frac{n \pm \sqrt{n^2+4}}{2} \qquad \text{for } (x,y) \in PG_{i,n}$$
$$\lambda_{\pm} = \frac{(ni+2) \pm \sqrt{(ni+2)^2+4}}{2} \qquad \text{for } (x,y) \in PR_{i,n}.$$

现在我们可以陈述：

定理 3.2。$\log^+ \|M_{fast}(x,y)\|$ 和 $\log^+ \|M_{fast}^{-1}(x,y)\|$ 在 $[0,1]^2$，上均为勒贝格可积，其中 $\log^+(t) = \max\{0, \log(t)\}$，范数为算子范数。

证明。我们先给出关于这些范数的几个断言：

1. 无论在 $PG_{i,n}$ 还是在 $PR_{i,n}$ 中，$\|M_{fast}\|$、$\|M_{fast}^{-1}\| \ge 1$ 都成立。也就是说：$\log^+$ 函数总是直接取对数值。2. 在 $PG_{i,n}$ 中，$\|M_{fast}\| \le n+1$；而在 $PR_{i,n}$ 中，$\|M_{fast}\| \le ni+3$。3. 在 $PG_{i,n}$ 中，$\|M_{fast}^{-1}\| \le 2n$；而在 $PR_{i,n}$ 中，$\|M_{fast}^{-1}\| \le 2(ni+2)$。

矩阵 $M_{fast}(x,y)$ 有两个不同的特征值，其形式为

$$\lambda_{\pm} = \frac{\zeta \pm \sqrt{\zeta^2+4}}{2},$$

其中 ζ 是正整数。具体而言，$\zeta = n$ 属于 $PG_{i,n}$，而 $\zeta = ni+2$ 属于 $PR_{i,n}$。由此可得

$$\|M_{fast}(x,y)\| = \frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2+4}}{2}, \qquad \|M_{fast}^{-1}(x,y)\| = \frac{2}{\sqrt{\zeta^2+4}-\zeta}. \tag{13}$$

不等式 $\zeta > 0$ 证明这些范数至少为一，并完成了我们的第一个论断。

对于 $\|M_{fast}(x,y)\|$的上界，利用初等估计 $\zeta^2+4<(\zeta+2)^2$即可得到所需结果。对于逆算子范数的上界，($\zeta+1/\zeta)^2<\zeta^2+4$表明 $\|M_{fast}^{-1}(x,y)\|<2\zeta$:$\zeta=n$或 $\zeta=ni+2$ 在 $PG_{i,n}$ 和 $PR_{i,n}$ 中分别成立，从而完成这一步。

现在我们继续证明可积性。集合 $PG_{i,\ n}$是一个宽度为 $1/n-1/(n+1)$ $<1/n^2$、较长边高度为 $1/n$的梯形。集合 $PR_{i,\ n}$是一个宽度为 $(i+1)/(n(i+1)+1)-i/(ni+1)$ $<1/(ni+1)^2$、较长边高度为 $1/(ni+1)$的梯形。因此

$$\mathrm{Area}(PG_{i,n})<\frac{1}{n^3},$$
$$\mathrm{Area}(PR_{i,n})<\frac{1}{(ni+1)^3}<\frac{1}{(ni)^3}.$$

回想一下，我们的马尔可夫划分由 $PG_{i,\ n}$（其中 $n=1$、2、.....以及 $0\le i\le n-1$）和 $PR_{i,\ n}$（其中i、$n=1$、2、.....）给出。结合我们先前的结论，得到:

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]^2}\log^+\|M_{fast}(x,y)\|dxdy&<\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\int_{PG_{i,n}}\log(n+1)dxdy+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{PR_{i,n}}\log(ni+3)dxdy\\&<\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\log(n+1)}{n^3}+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log(ni+3)}{(ni)^3}\\&<\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\log(n+1)}{n^3}+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log((n+2)(i+2))}{(ni)^3}\\&<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log(n+1)}{n^2}+\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^3}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log(n+2)}{n^3}\right)+\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\right)\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\log(i+2)}{i^3}\right).\end{aligned}$$

所有项的可求和性显然成立。$\log^+\|M_{fast}^{-1}\|$ 的可积性也可用类似方法处理；请注意所得界限的相似之处。

□

定理 3.2 将是我们研究慢逼近序列和快速逼近序列增长率的主要工具之一。我们仍先从慢速情形入手，再转向快速情形。注意，在 $I_{slow}(n)$ 和 $I_{slow}(n+1)$ 之间，总有一个端点为这两个区间所共有，而另一个端点则不是。定义一个$\epsilon_{slow,\ n}$ 的序列，用以追踪在应用 T_{slow}时方向被反转的次数^:

$$\epsilon_{slow,0}=1,\qquad \epsilon_{slow,n+1}=\begin{cases}-\epsilon_{slow,n} & \hat{T}_{slow}^n(x,y)\in G\\ \epsilon_{slow,n} & \hat{T}_{slow}^n(x,y)\in R.\end{cases}$$

也就是说，当我们“沿着绿色边”时，会反转 $\epsilon_{slow,n}$ 的值；而当我们“沿着红色边”时则不会。

定义如下字序列 $\rho_{slow,0,k}$ 和 $\rho_{slow,1,k}$，其中 $\omega_1\cdot\omega_2$ 表示两个字的拼接， e 表示空词；对于含有许多下标和函数的字，这种记法会很有用:

$$\rho_{slow,0,0}=e,\qquad \rho_{slow,1,0}=e$$

$$\begin{aligned}\rho_{slow,0,k+1}&=\begin{cases}\rho_{slow,0,k} & \epsilon_{slow,k}=1,\ \hat{T}_{slow}^k(x,y)\in R\\ \sigma_{slow}(x,y,k)(A)\cdot\rho_{slow,0,k} & \epsilon_{slow,k}=1,\ \hat{T}_{slow}^k(x,y)\in G\\ \sigma_{slow}(x,y,k)(B)\cdot\rho_{slow,0,k} & \epsilon_{slow,k}=-1,\ \hat{T}_{slow}^k(x,y)\in R\\ \rho_{slow,0,k} & \epsilon_{slow,k}=-1,\ \hat{T}_{slow}^k(x,y)\in G\end{cases}\\ \rho_{slow,1,k+1}&=\begin{cases}\sigma_{slow}(x,y,k)(B)\cdot\rho_{slow,1,k} & \epsilon_{slow,k}=1,\ \hat{T}_{slow}^k(x,y)\in R\\ \rho_{slow,1,k} & \epsilon_{slow,k}=1,\ \hat{T}_{slow}^k(x,y)\in G\\ \rho_{slow,1,k} & \epsilon_{slow,k}=-1,\ \hat{T}_{slow}^k(x,y)\in R\\ \sigma_{slow}(x,y,k)(A)\cdot\rho_{slow,1,k} & \epsilon_{slow,k}=-1,\ \hat{T}_{slow}^k(x,y)\in G.\end{cases}\end{aligned}\tag{14}$$

在 $\rho_{slow,j,k}$ 中选择 $j=0$ 还是 $j=1$，取决于这些字所编码的端点 $I_{slow}(k)$ 的轨道是否分别到达 0^+ 或 1^-:

引理 3.3。代换 σ_{slow} 将点对 ^ $T_{slow}(x,y)$ 的符号编码映射为点对 (x,y) 的符号编码:

$$\Omega(x,y)=\sigma_{slow}(x,y)\left(\Omega(\hat{T}_{slow}(x,y))\right).$$

$I_{slow}(k)$的左端点和右端点分别为$-\|\rho_{slow,0,k}\|x$ 和$-\|\rho_{slow,1,k}\|x$，其中 $\|\omega\|$表示字 ω的长度。

证明。第一个结论源于这样一个事实：我们正在区间上构造首次返回映射。当$y \in [1-x, 1]$时，长度为 x的区间上的首次返回映射有两个返回时间： a和 $a+1$，其中 $a = \lfloor 1/x \rfloor$。此外，由于我们是在标记为 A的区间上构造映射，因此 A 中的点的首次返回由字 AB^{a-1} （返回时间为 a时）或字 AB^a（返回时间为 $a+1$时）编码；点从这个标记为 A的区间出发，直到返回标记为 A 的区间之前，轨道的其余部分都在标记为 B的补集中经过。这些字恰好是 $y \geq 1-x$时 $\sigma_{slow}(x, y)$所使用的字。对于 $y \leq 1-x$，论证类似；只需注意，我们是在标记为 B 的区间上构造首次返回映射，但将旋转视为沿相反方向进行，长度为 $1-x$。这解释了为何要与代换 τ 复合，也解释了为何返回时间由$\lfloor 1/(1-x) \rfloor$决定。

转而关注字 $\rho_{slow,i,k}$，对于 $k=0$，结论显而易见。我们从 $\rho_{slow,0,0} = e = \rho_{slow,1,0}$ 开始，这是一个长度为零的字，且两个端点都具有 $-0x$ 的形式。对于递归过程，我们来考察 $\epsilon_{slow,k} = 1$ 的情形。关于 $\epsilon_{slow,k} = 1$ 的两种可能情况，请见图 3 （我们从正向映射开始）；当 $\hat{} \; T^k_{slow}(x, y) \in R$ 时，我们使用红色箭头，在区间 $[0, 1-x]$ 上构造一个首次返回映射。在这种情况下，左端点保持不变，因此 $\rho_{slow,0,k+1} = \rho_{slow,0,k}$。但是，$1-x$ 的新右端点此前在前一个系统中由 B 编码。因此，字 B 通过前一个系统中的一步来编码这个端点，此时它会被映射到 1。因此，这个引理的第一条结论表明，$\sigma_{slow}(x, y, k)(B)$ 编码了这个新右端点的轨道，直到它沿轨道到达前一个右端点；于是与 $\rho_{slow,1,k}$ 拼接后，就得到编码新右端点的字，表示它在初始系统中旋转 x_0 后，到达 1 之前的轨道： $\sigma_{slow}(x, y, k)(B) \cdot \rho_{slow,1,k} = \rho_{slow,1,k+1}$。

同 $T^k_{slow}(x, y)$ 图中的绿色箭头说明情况如下，右端点保持不变，因此 $\rho_{slow,w,k+1} = \rho_{slow,1,k+1} = \rho_{slow,1,k}$。但左端点是新的：它在前一步中由 A 编码，并且经过一步映射到前一个左端点：$\rho_{slow,0,k+1} = \sigma_{slow}(x, y, k)(A) \cdot \rho_{slow,0,k}$。在 $\epsilon_{slow,k} = -1$ 的情况下，图 3 中的图示只需反转方向，然后以类似方式处理。

因此，字 $\rho_{slow,\,i,\,k}$ 编码了 $I_{slow}(k)$ 的左端点和右端点的轨道，记录它们最终返回到 $I_{slow}(0)$ 的端点的过程；因此，这些字的长度就是返回原点所需的回归时间：端点表示为 $-\|\rho_{slow,\,0,\,k}\|x$ 和 $-\|\rho_{slow,\,1,\,k}\|x$。 □

推论 3.4。对于 $\ell = 0, 1$，$\rho_{slow,\,\ell,\,k+1} = \rho_{slow,\,\ell,\,k}$ 中恰有一个成立；而对于另一个，要么是 $\rho_{slow,\,\ell,\,k+1} = \sigma_{slow}(x, y, k)(A) \cdot \rho_{slow,\,\ell,\,k}$，要么是 $\rho_{slow,\,\ell,\,k+1} = \sigma_{slow}(x, y, k)(B) \cdot \rho_{slow,\,\ell,\,k}$。

证明。 这一结论可由引理 3.3 中更精确的表述直接推出。不过，只需注意到我们总是通过与前一个系统共享一个端点来构造首次回归映射，而另一个端点则由 A 或 B 编码，且返回时间为一，即可立即推出这一结论。 □

在构造字序列时$\rho_{slow,\,i,\,k}$，连续应用这些“带有 $\hat{a}_{k+1} = 1$ 的红色边”对应于满足 $\epsilon_{slow,\,k} = \epsilon_{slow,\,k+1}$ 的连续项。在方程（14）中，这一条件恰好描述了何时考虑字 $\sigma_{slow}(x,\ y,\ n)(B)$。然而，在这种特殊情况下，所生成的各个代换映射$B \mapsto B$。

换句话说，对于 $(x, y) \in PG_{i,n}$，要确定 $\hat{T}_{fast}$ 作为.....的迭代 $\hat{T}_{slow}$，映射 $\hat{}$ T_{slow}将依次执行“红色边，$a = 1$”，共连续 i 次，但对于每个 $j = 1, \ldots\ldots, i$，我们都有

$$\sigma_{slow}(x, y, j)(B) = B$$

因为前 i 次代换都会将 $B \mapsto B$ 映射到.....。类似地，如果 $(x, y) \in PR_{i,n}$，那么由于“红色边，$a = 1$”恰好连续应用 $n-1$ 次，对于所有 $j = 1, \ldots\ldots, n-1$，我们也有

$$\sigma_{slow}(x, y, j)(B) = B.$$

$\hat{}$ 经过这些边后，我们接着单独应用一次 T_{slow}，要么走一条“绿色边”，要么走一条“带有 $\hat{a}_{k+1} \geq 2$ 的红色边”，由此我们确定了代换如何帮助编码这样一个单独实例。

综上，我们利用这些观察来定义序列 $\rho_{fast,\,0,\,n}$ 和 $\rho_{fast,\,1,\,n}$，它们编码了 $I_{fast}(n)$ 的左端点和右端点的轨道。令 $\epsilon_{fast,\,n} = \pm 1$，与 $\epsilon_{slow,\,n}$ 类似；这些值记录了由于 $\hat{} \; T^i_{fast}(x, y)$ 属于某个 $PG_{i,\,n}$ 而导致方向反转的次数。具体而言：

$$\epsilon_{fast,0} = 1, \qquad \epsilon_{fast,n+1} = \begin{cases} \epsilon_{fast,n} & \hat{T}^n_{fast}(x, y) \in PR_{i,n} \\ -\epsilon_{fast,n} & \hat{T}^n_{fast}(x, y) \in PG_{i,n}. \end{cases}$$

重新从 $\rho_{fast,\,0,\,0} = e$ 和 $\rho_{fast,\,1,\,0} = e$ 开始，然后

$$\rho_{fast,0,k+1} = \begin{cases} \rho_{fast,0,k} & \epsilon_{fast,k} = 1,\, \hat{T}^k_{fast}(x,y) \in PR_{i,n} \\ \sigma_{fast}(x,y,k)(B^iA)\cdot\rho_{fast,0,k} & \epsilon_{fast,k} = 1,\, \hat{T}^k_{fast}(x,y) \in PG_{i,n} \\ \sigma_{fast}(x,y,k)(B^n)\cdot\rho_{fast,0,k} & \epsilon_{fast,k} = -1,\, \hat{T}^k_{fast}(x,y) \in PR_{i,n} \\ \sigma_{fast}(x,y,k)(B^i)\cdot\rho_{fast,0,k} & \epsilon_{fast,k} = -1,\, \hat{T}^k_{fast}(x,y) \in PG_{i,n} \end{cases}$$

$$\rho_{fast,1,k+1} = \begin{cases} \sigma_{fast}(x,y,k)(B^n)\cdot\rho_{fast,1,k} & \epsilon_{fast,k} = 1,\, \hat{T}^k_{fast}(x,y) \in PR_{i,n} \\ \sigma_{fast}(x,y,k)(B^i)\cdot\rho_{fast,1,k} & \epsilon_{fast,k} = 1,\, \hat{T}^k_{fast}(x,y) \in PG_{i,n} \\ \rho_{fast,1,k} & \epsilon_{fast,k} = -1,\, \hat{T}^k_{fast}(x,y) \in PR_{i,n} \\ \sigma_{fast}(x,y,k)(B^iA)\cdot\rho_{fast,1,k} & \epsilon_{fast,k} = -1,\, \hat{T}^k_{fast}(x,y) \in PG_{i,n}. \end{cases} \tag{15}$$

引理 3.5. 代换 σ_{fast} 将点对 $\hat{}\,T_{fast}(x,y)$ 的符号编码映射为点对 (x,y) 的符号编码：

$$\Omega(x,y) = \sigma_{fast}(x,y)\left(\Omega(\hat{T}_{fast}(x,y))\right).$$

字 $\sigma_{fast}(x,y,n)(A)$ 和 $\sigma_{fast}(x,y,n)(B)$ 通过其长度给出区间 $I_{fast}(n)$ 端点的编码。$I_{fast}(n)$ 的左端点和右端点分别为 $-\|\rho_{fast,\,0,\,n}\|x$ 和 $-\|\rho_{fast,\,1,\,n}\|x$。

证明。 根据引理 3.3 和等式（11），第一个结论显然。关于$\rho_{fast,\,i,\,k}$ 的信息可通过逐情况分析得出：确定我们将构造首次返回映射的区间的左／右端点的编码，直到它到达先前的左／右端点。

例如，考虑 $\epsilon_{fast,\,k} = 1$ 的情形，因此我们是从左向右旋转。假设 $\hat{}\,T^k_{fast}(x,y) \in PG_{i,\,n}$。等价地，若令 $(x', y') = \hat{}\,T^k_{fast}(x,y)$，那么我们将在（归一化）区间 $[1-(i+1)x', 1-ix']$ 上构造首次返回映射。左端点经过 $(i+1)$ 步返回原点。在此期间，它会有 i 个连续值小于 $1-x'$，随后有一个值等于（右侧版本的）$1-x'$。因此，轨道的这一部分编码为 B^iA；之后我们到达了（右侧版本的）原点，因此轨道继续为 $\rho_{fast,\,0,\,k}$。总而言之：

$$\rho_{fast,0,k+1} = \sigma_{fast}(x,y,k)(B^iA)\cdot\rho_{fast,0,k}.$$

相较之下，$1-ix'$ 的右端点经过 i 步后将轨道到（左侧版本的）原点，其轨道由 B^i 编码：

$$\rho_{fast,1,k+1} = \sigma_{fast}(x,y,k)(B^i)\cdot\rho_{fast,1,k}.$$

其他情况也可类似处理。 □

推论 3.6. 在 $\ell = 0$ 与 1 之间，如果 $\hat{}\,T_{fast}(x,y,k) \in PR_{i,\,n}$，那么字 $\rho_{fast,\,\ell,\,k+1}$ 中恰有一个由 $\rho_{fast,\,\ell,\,k}$ 给出，而另一个由 $\sigma_{fast}(x,y,k)(B^n)\cdot\rho_{fast,\,\ell,\,k}$ 给出。

如果 $\hat{}\,T_{fast}(x,y,k) \in PG_{i,\,n}$，那么字 $\rho_{fast,\,\ell,\,k+1}$ 中的一个由 $\sigma_{fast}(x,y,k)(B^i\cdot\rho_{fast,\,\ell,\,k}$ 给出，而另一个由 $\sigma_{fast}(x,y,k)(B^iA)\cdot\rho_{fast,\,\ell,\,k}$ 给出。

证明。 正如推论3.4 由引理 3.3直接得出一样，此结果也可由引理 3.5直接得出。

□

我们希望研究慢速和快速逼近序列的增长率，因此根据引理 3.3、引理 3.5，等价地，我们希望研究由代换 $\sigma_{slow}(x、\ y、\ k)$ 和 $\sigma_{fast}(x、\ y、\ k)$ 生成的各种字的拼接的增长率。首先，我们要证明，除一个线性因子外，增长率由拼接的新项决定，而非此前生成的项。定义

$$\begin{aligned} N_{slow}(x,y,k) &= \max\left\{\|\rho_{slow,0,k}\|, \|\rho_{slow,1,k}\|\right\}, \\ MAX_{slow}(x,y,k) &= \max\left\{\|\sigma_{slow}(x,y,k)(A)\|, \|\sigma_{slow}(x,y,k)(B)\|\right\}, \\ min_{slow}(x,y,k) &= \min\left\{\|\sigma_{slow}(x,y,k)(A)\|, \|\sigma_{slow}(x,y,k)(B)\|\right\} \end{aligned}$$

然后还定义

$$\begin{aligned} N_{fast}(x,y,k) &= \max\left\{\|\rho_{fast,0,k}\|, \|\rho_{fast,1,k}\|\right\}, \\ MAX_{fast}(x,y,k) &= \max\left\{\|\sigma_{fast}(x,y,k)(A)\|, \|\sigma_{fast}(x,y,k)(B)\|\right\}, \\ min_{fast}(x,y,k) &= \min\left\{\|\sigma_{fast}(x,y,k)(A)\|, \|\sigma_{fast}(x,y,k)(B)\|\right\}. \end{aligned}$$

引理 3.7。对于任意 x、y，我们有

$$min_{slow}(x,y,k) \le N_{slow}(x,y,k+1) \le (k+1)\cdot MAX_{slow}(x,y,k+1),$$
$$min_{fast}(x,y,k) \le N_{fast}(x,y,k+1) \le (k+1)\cdot MAX_{fast}(x,y,k+1).$$

证明。下界是显然的；根据推论 3.4，字 $\rho_{slow,0,k+1}$, $\rho_{slow,1,k+1}$ 中至少有一个会与 $\sigma_{slow}(x,y,k)(A)$ 或 $\sigma_{slow}(x,y,k)(B)$ 拼接。因此，无论这两个 ρ_{slow} 中哪一个较大，$N_{slow}(x,y,k+1)$ 至少与这两个字中较短的那个一样大。N_{fast} 的下界也类似；根据推论 3.6，某个 $\sigma_{fast}(x,y,k)(A)$ 或 $\sigma_{fast}(x,y,k)(B)$ 总会与前面的某个 ρ_{fast} 拼接。

对于 N_{slow} 的上界，我们用归纳法证明。注意，对于 $k=0$，我们考虑的是 $N_{slow}(x,y,1)$，其长度等于 $\rho_{slow,\ 0,\ 1}$ 或 $\rho_{slow,\ 1,\ 1}$ 的长度，取其中较大者。但这些字对应于构造首次回归映射的第一个区间端点的编码；这些点是 $0, 1-x$ 或 $1-x, 1$。无论哪种情况，其中一个点编码成长度为零的字，另一个则编码成长度为一的字。也就是说：$N_{slow}(x,y,1) = 1$ 总是成立：我们的基例已给出。

因此，假设对某个 $k-1$，上方的不等式成立：$N_{slow}(x,y,k) \le kMAX_{slow}(x,y,k)$。那么，根据推论3.4，两个字 $\rho_{slow,\ 0,\ k+1}$, $\rho_{slow,\ 1,\ k+1}$ 中较长的那个，不会长于以下两者之一与 $\rho_{slow,\ 0,\ k}$, $\rho_{slow,\ 1,\ k}$ 中较长者的拼接：$\sigma_{slow}(x,y,k)(A)$ 或 $\sigma_{slow}(x,y,k)(B)$：

$$\begin{aligned} N_{slow}(x,y,k+1) &\le MAX_{slow}(x,y,k) + N_{slow}(x,y,k) \\ &\le MAX_{slow}(x,y,k) + kMAX_{slow}(x,y,k) \\ &\le (k+1)MAX_{slow}(x,y,k) \\ &\le (k+1)MAX_{slow}(x,y,k+1) \end{aligned}$$

最后一行仅用于使这个不等式看起来与 N_{fast} 的不等式相似；N_{fast} 的上界可由类似论证得出。对于 $k=0$，我们有 $N_{fast}(x,y,1)$，它表示划分 $\{0, 1-ax, 1-(a-1)x, \ldots, 1-x, 1\}$ 中某个点的编码长度，因此该字的长度不大于 $a = \lfloor 1/x \rfloor$。另一方面，$1\cdot MAX_{fast}(x,y,1)$ 是某个 $\sigma(A)$ 或 $\sigma(B)$ 的长度，而可知它们的长度至少为 a。根据推论 3.6，$N_{fast}(x,y,k+1)$ 不大于将可能的最长字与长度为 $N_{fast}(x,y,k+1)$ 的字拼接所得的长度。但我们拼接的字具有形式 $\sigma_{fast}(x,y,k)$，它是由 (x_k, y_k) 生成的单次替换的某个因子（见公式 (15)）。因此，我们拼接的字不长于 $MAX_{fast}(x,y,k+1)$（这一项对应的替换以由 (x_k, y_k) 生成的替换结束，这就解释了为何这里的指标比“慢速”情形中自然出现的指标大 1；在“慢速”情形下，单个字母总是被输入替换中）：

$$N_{fast}(x,y,k+1) \le MAX_{fast}(x,y,k+1) + N_{fast}(x,y,k).$$

上界现在可像处理 N_{slow} 的情形那样，通过归纳法得出。 □

我们指出，两种情形下的上界都很可能远非最优，但足以满足我们所需的结论。根据定义，慢速和快速逼近序列分别由 $N_{slow}(x,y,k)$ 和 $N_{fast}(x,y,k)$ 给出，而 y 的轨道则通过相关的字 ρ，由这些长度编码。现在我们可以陈述本节的目标：

推论 3.8。快速逼近时间 $N_{fast}(x,y,k)$ 存在一般增长率：存在某个$C>1$，使得对于几乎所有 x, y 的取值，我们都有

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log\left(N_{fast}(x,y,k)\right) = C.$$

然而，慢速逼近时间 $N_{slow}(x,y,k)$ 不存在这样的普遍增长率：对于任意 $C>1$，几乎所有 x, y 都满足以下两者之一

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{N_{slow}(x,y,k)}{C^k} = 0 \qquad or \qquad \limsup_{k\to\infty} \frac{N_{slow}(x,y,k)}{C^k} = \infty.$$

证明。 由乘法遍历定理、定理 2.6和定理 3.2，存在某个 $C>1$，使得几乎必然同时满足以下两式

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log \|\sigma_{fast}(x,y,k)(A)\| = C = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log \|\sigma_{fast}(x,y,k)(B)\|,$$

由此我们得出

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log min_{fast}(x,y,k) = C = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log MAX_{fast}(x,y,k).$$

接着回顾引理3.7中的估计，并证明第一个结果。

第二个论断是保无限测度变换理论中的一个标准结果，参见例如 [AS97，定理 2.4。2]。

□

文献 [IN88] 证明了 $C = \pi^2/(12 \log 2)$，是标准连分数表示中渐近分数的分母增长率的几乎必然底数q_n。回想一下，我们称 $(x,\ y)$ 的快速逼近序列，在该文献中称为 $(x,\ 1-y)$ 的典范逼近序列，不过关于一般增长率的结果是等价的。

4 与连分数的关系

本节中，我们不先选取一个 y，再通过运行算法来确定何时沿绿色边、何时沿红色边。相反，我们采用某些方法来决定是在 $[0, 1-x]$ 上构造首次返回映射，还是反转方向并在 $[1-x, 1]$ 上构造首次返回映射。不同的选择方法将对应于不同的连分数系统。因此，这些嵌套区间的唯一交点给出了一个特殊点，其轨道由与这些连分数系统相关的代换编码。为避免不必要的歧义，我们假设 $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$。

假设 x 的正则连分数展开为

$$x = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}}} = [a_1, a_2, a_3, \ldots].$$

于是我们看到

$$1 - x = \begin{cases} [a_2 + 1, a_3, \ldots] & (a_1 = 1), \\ [1, a_1 - 1, a_2, \ldots] & (a_1 \neq 1). \end{cases} \tag{16}$$

因此，由于显然 $x = 1 - (1-x)$，我们发现，“沿着红色边”恰好对应于对 x的连分数展开进行奇异化或插入；当某些$a_n = 1$时进行奇异化，当 $a_n \neq 1$时进行插入。更精确地说，对于 a、$b \in \mathbb{N}_{>0}$ 和 $\varepsilon = \pm 1$，可用以下公式进行奇异化

$$a + \cfrac{\varepsilon}{1 + \cfrac{1}{b + \xi}} = a + \varepsilon + \cfrac{-\varepsilon}{b + 1 + \xi}. \tag{17}$$

取 $a = 1$ 和 $\varepsilon = -1$，可得 $1 - x$的连分数。我们看到 $T^2(x) = T(1-x)$，因此在区间 $[x, 1]$ 上诱导会“更快”，也就是说，相关的返回时间更长。这对应于我们在更小的区间上构造返回映射这一事实（$a_1 = 1$ 给出 $x > \frac{1}{2}$）。当 $a_1 > 1$时，我们得到插入。对于满足 a、$b \in \mathbb{N}_{>0}$，且 $b \geq 2$ 和 $\xi \in [0, 1]$ 的情况，插入公式为

$$a + \cfrac{1}{b + \xi} = a + 1 + \cfrac{-1}{1 + \cfrac{1}{b - 1 + \xi}}. \tag{18}$$

取 $a = 0$，我们在左侧得到 x 的连分数，在右侧得到 $1 - (1-x)$，当 $a_1 \neq 1$ 时。这里我们看到 $T(x) = T^2(1-x)$，这意味着我们「走得更慢」，也就是返回时间更短：我们在更大的区间上构造了返回映射。通过使用奇异化和插入，可以找到一个数 [的所有半正则连分数 DK00, Kra91]。也就是说，对于无理数，所有分子为 $\varepsilon_n \in \{-1, 1\}$、数字为$\hat{a}_n \in \mathbb{N}$，且对所有 n 都满足$\hat{a}_n + \varepsilon_n \geq 1$，并且无限多次满足$\hat{a}_n + \varepsilon_n \geq 2$ 的展开。 x 的每一种这样的表示都对应于对 y 的某种特定选择；算法据此将 x 的标准连分数展开变换为所需形式的 $y \in [0, 1]$：修正连分数中的$\hat{a}_n$ 恰好是图 4 中的返回时间$\hat{a}_n$。反过来，所有这样的 y 都会生成 x 的半正则连分数表示。因此，对于某个 x 的所有半正则连分数表示（分子为 ± 1）与区间 $[0, 1]$ （带有这些 $y \in x\mathbb{Z}$ 的左/右版本）之间，存在典范对应：

定理 4.1. 每个 $y \in [0, 1]$ 都恰好生成一个 x 的半正则连分数；对于每个 x 的半正则连分数，都恰好有一个 $y \in [0, 1]$ 生成它。

证明。根据前面的讨论，证明显而易见。 □

生成半正则连分数的另一种方法是随机选取分子 ε_n。例如，[KKV17]中就采用了这种方法。请注意，关于随机选择 ε_n 的启发式论证，不一定与 T_{fast}的几乎必然结果一致，因为奇异化/插入是由 T_{slow} 对任意 $y \le 1-x$执行的。ˆ 当 x 的第一个部分商非常大时，在 T_{slow} 下发生奇异化/插入的概率也相应地非常大。S

ingul化　和插入是可以应用于任意半正则连分数的局部操作　n的 x。如果

$$x = [1/d_1, \varepsilon_1/d_2, \ldots, \varepsilon_{n-1}/d_n, \varepsilon_n/1, 1/d_{n+2}, \ldots]$$

那么在 $d_{n+1} = 1$ 处进行奇异化可得

$$x = [1/d_1, \varepsilon_1/d_2, \ldots, \varepsilon_{n-1}/(d_n + \varepsilon_n), -1/d_{n+2}, \ldots].$$

另一方面，当

$$x = [1/d_1, \varepsilon_1/d_2, \ldots, \varepsilon_{n-1}/d_n, 1/d_{n+1}, \varepsilon_{n+1}/d_{n+2}, \ldots]$$

那么，当 $d_{n+1} \ge 2$时，在 d_n 之后插入可得

$$x = [1/d_1, \varepsilon_1/d_2, \ldots, \varepsilon_{n-1}/(d_n + 1), -1/1, 1/(d_{n+1} - 1), \varepsilon_{n+1}/d_{n+2}, \ldots].$$

此外，这些操作会以下列方式影响渐近分数。设 $^{p_n(x)\, q_n(x)} = [1/d_1, \varepsilon_1/d_2, \ldots, \varepsilon_{n-1}/d_n]$。那么，在位置 n 进行奇异化，会导致从渐近分数列表中删除元素 $\frac{p_n}{q_n}$，即 $\frac{p_1}{q_1}$、$\frac{p_2}{q_2}$、$\ldots\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$、$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$，.....。另一方面，插入会增加一个渐近分数 $\frac{p_1}{q_1}$、$\frac{p_2}{q_2}$、$\ldots\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$、$\frac{p_{n-1}+p_n}{q_{n-1}+q_n}$、$\frac{p_n}{q_n}$，.....。对于 x 的变换后半正则展开，其分子 p_n 和分母 q_n 满足以下渐近分数关系

$$\begin{aligned} p_{-1} &= 1, \quad p_0 = 0, \quad p_n = d_n p_{n-1} + \varepsilon_{n-1} p_{n-2}, \\ q_{-1} &= 0, \quad q_0 = 1, \quad q_n = d_n q_{n-1} + \varepsilon_{n-1} q_{n-2}. \end{aligned} \tag{19}$$

何时进行插入或奇异化由 $y \in [0,1]$ 决定。基于此，我们定义 q_n、$_y(x)$ 为 x 的渐近分数序列的分母，其中插入和奇异化的位置由迭代 T_{slow} 时 (x, y) 的轨道描述。此外，我们可以考察那些使得 ˆ 对应于加速系统 T_{fast} 的 n_k；将其记为 q_k、$_y(x) = q_{n_k}$、$_y(x)$。注意，由于 T_{fast} 定义为不断迭代 ˆ T_{slow}，直到出现 $y \ge (1-x)$（对应于渐近分数中的常规推进 x），或出现 $y \le 1-x$ 和 $x \ge 1/2$（对应于奇异化），因此 q_k、$_y(x)$ 对应于那些并非由插入导致的 q_n、$_y(x)$。我们关注 q_n、$_y(x)$ 和 q_n、$_y(x)$ 通常增长得有多快。为此，我们来考察 T_{slow} 的逆分支，将其视为作用于含有渐近分数的矩阵上的莫比乌斯变换。更准确地说，

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}(x) := \frac{ax+b}{cx+d}.$$

ˆ 那么，T_{slow} 的逆分支为

$$A_{x,y} := \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \hat{a}_1(x,y) \end{bmatrix} & \text{when } y \in [1-x, 1] \\ \begin{bmatrix} 1 & \hat{a}_1(x,y) - 1 \\ 1 & \hat{a}_1(x,y) \end{bmatrix} & \text{when } y \in [0, 1-x]. \end{cases}$$

Let

$$M_{0,x,y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{-1} & p_0 \\ q_{-1} & q_0 \end{bmatrix}$$

以及 $M_{n+1,\ x,\ y} = M_{n,\ x,\ y} A_{T^n_{slow}(x,\ y)}$ 对于 $n \ge 1$。现在，当 $y_n \in [1-x_n, 1]$ 时，我们得到

$$M_{n+1,x,y} = \begin{bmatrix} p_{n-1} & p_n \\ q_{n-1} & q_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \hat{a}_{n+1}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_n & p_{n+1} \\ q_n & q_{n+1} \end{bmatrix}$$

就像常规情形中一样（因为我们应用了 $T(x)$）。请注意，渐近分数的指标可能与其正规连分数的渐近分数的指标不同。

现在，当 $y_n \in [0, 1-x_n]$时，如果$\hat{a}_{n+1}(x,y) = 1$，我们得到

$$M_{n+1,x,y} = \begin{bmatrix} p_{n-1} & p_n \\ q_{n-1} & q_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{n-1}+p_n & p_n \\ q_{n-1}+q_n & q_n \end{bmatrix}.$$

我们可以看到，我们并未更新第二列，而是将第一列替换为中项（这相当于在渐近分数列表中加入该中项）。为说明奇异化情况下会发生什么，为便于记号起见，假设矩阵 $M_{n,\ x,\ y}$ 的各列分别是正规连分数的渐近分数，对应于 $n-1$ 和 n，并且下一步将使用 x 的第 $n+1$ 个数字。当 $a_{n+1}(x) = 1$ 时，则$a_{n+1}(1-x) = a_{n+2}(x) + 1$。我们得到

$$\begin{bmatrix} p_{n-1} & p_n \\ q_{n-1} & q_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a_{n+2}(x) \\ 1 & a_{n+2}(x)+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{n-1}+p_n & a_{n+2}(x)p_{n-1}+(a_{n+2}(x)+1)p_n \\ q_{n-1}+q_n & a_{n+2}(x)q_{n-1}+(a_{n+2}(x)+1)q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{n+1} & p_{n+2} \\ q_{n+1} & q_{n+2} \end{bmatrix}.$$

这里我们看到，由于奇异化，我们跳过了一个渐近分数。（这里指标也可能发生了偏移。）既然现在我们知道了如何将逆分支与渐近分数序列$q_{n,\ y}(x)$联系起来，并且以同样的方式将 $q_{n,\ y}(x)$联系起来，我们就可以证明以下结论：

定理 4.2。$q_{n,\ y}(x)$具有一般增长率：存在某个 $C > 1$，使得对于几乎所有的 x, y，我们都有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\left(\overline{q_{n,y}}(x)\right) = C.$$

*How*然而，对于 $q_{n,\ y}(x)$，不存在这样的一般增长率：对于任意 $C > 1$，几乎所有 x，y 我们都有 e

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{q_{n,y}(x)}{C^n} = 0.$$

证明。对于快速映射，当 $(x,y) \in PG_{i,\ n}$ 时，令 $n = a_1(x) = \lfloor 1/x \rfloor$。在 $PG_{i,\ n}$ 中，我们先进行 i 次插入，然后应用高斯映射，因此得到如下矩阵乘法

$$\overline{A}_{x,y} := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^i \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & n-i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & n \end{bmatrix}$$

这与直接应用高斯映射相同。在这种情况下，我们得到特征值

$$\frac{n \pm \sqrt{n^2+4}}{2}.$$

当 $(x,y) \in PR_{i,\ n}$ 时，接下来会进行 $n-1$ 次插入，然后进行一次奇异化。注意，$a_2(x) = i$。我们得到如下矩阵乘法

$$\overline{A}_{x,y} := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & i+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & i \\ n & ni+1 \end{bmatrix}.$$

特征值为

$$\frac{(ni+2) \pm \sqrt{(ni+2)^2-4}}{2}.$$

我们看到，这与 $M_{fast}(x,\ y)$ 的情形几乎相同，见 (13)。不过，当 $(x,y) \in PR_{i,\ n}$ 时，主特征值较小。这使得 $\log^+ \|\overline{A}_{x,\ y}\|$ 可积。第二特征值大于 $M_{fast}(x,y)$ 情形下的第二特征值，因此逆矩阵的范数较小。这使得 $\log^+ \|\overline{A}_x^{-1},\ y\|$ 可积。这些范数的对数的可积性、乘法遍历定理以及矩阵与序列 $q_{n,\ y}(x)$ 之间的关系，给出了所需结果。定理中的第二个结论源于 T_{slow} 具有无限不变测度这一事实。通俗地说，$\hat{}T_{slow}$ 会进行“过多的中项插入”，从而无法产生任何一般指数增长率。

□

4.1 标准连分数——始终沿着绿色边

当我们在 $[1-x, 1]$ 上构造首次返回映射时，会得到一个由 $T(x)$ 表示的旋转，即高斯映射。因此，如果选择 y_0，使得 y_n 始终位于区间 $[1-x_n, 1]$ 内，那么对每个 n，都有 $x_n = T^n(x_0)$。

因此，我们的步骤相当于：“在长度为旋转量 x 的区间内，我们在占其前 $T(x)$ 比例的区间上构造首次返回映射，并在该区间上反转方向。”设 I_n 为原区间 $[0,1]$ 中的一个区间，在经过连续 n 次迭代后，我们在该区间上构造首次返回映射：因此，I_n 上的首次返回映射与旋转 $T^n(x)$ 同构。

因此，从这个区间开始

$$I_1 = [1 - x, 1]$$

若采用正向，接下来的区间长度将为 $xT(x)$，并与前一个区间共享左端点：

$$I_2 = [1 - x, 1 - x + xT(x)].$$

在我们的首次返回映射中，方向已反转，因此第三个区间的长度将为$xT(x)T^2(x)$，但它与前一个区间共享右端点：

$$I_3 = [1 - x + xT(x) - xT(x)T^2(x), 1 - x + xT(x)].$$

接下 来的区间长度将为 $xT(x)T^2(x)T^3(x)$，但它共享左端点，结果为

$$I_4 = [1 - x + xT(x) - xT(x)T^2(x), 1 - x + xT(x) - xT(x)T^2(x) + xT(x)T^2(x)T^3(x)].$$

依此类推，我们可以归纳得出， I_n 的长度为 $xT(x) \cdots T^{n-1}(x)$，并且如果令 y_g 为唯一交点，那么

$$y_g = \bigcap_{i=1}^{\infty} I_n = 1 - x + xT(x) - xT(x)T^2(x) + xT(x)T^2(x)T^3(x) - \cdots$$

因此， y_g 是 $[0, 1]$ 中唯一一个轨道恰好由以下内容编码的点

$$\omega = \lim_{n\to\infty} \sigma_{[1,n)}(A),$$

其中每个

$$\sigma_i : \begin{cases} A \mapsto AB^{a_i} \\ B \mapsto AB^{a_i - 1} \end{cases},$$

并且， a_i 由标准连分数表示 $x = [0$给出； a_1、 a_2、 $\ldots]$。另请注意，该 $\hat{}$ 是唯一的 y，使得对于所有 $n \in \mathbf{N}$，都有 $T^n_{slow}(x, y) \in G$。

在 x 具有周期为一的纯周期连分数展开这一特殊情况下，该点和替换都相当容易计算。设

$$x = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \ddots}}} = [a, a, a, \ldots] = \frac{\sqrt{a^2 + 4} - a}{2}.$$

于是可以求得点 y_g 为

$$y_g = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \cdots = \frac{1}{1 + x}$$

那么唯一的替换是

$$\sigma : \begin{cases} A \mapsto AB^{a} \\ B \mapsto AB^{a-1} \end{cases},$$

并且， y_g 的轨道编码为

$$\lim_{n\to\infty} \sigma^n(A).$$

此外，对于几乎所有的 x ，我们有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(q_{n,y_g}) = \frac{\pi^2}{12 \log(2)} = \frac{1}{2} h_\mu(T)$$

其中 $h_\mu(T)$ 是相对于不变测度 μ的测度论熵。这是一个经典结果$\hat{}\hat{}$，例如可见于 [DK02，DK21] 注意，我们还有 $T^n_{fast}(x, y_g) = T^n_{slow}(x, y_g)$，因此对于所有 $x \in [0, 1]\backslash\mathbf{Q}$，$q_{n,y_g}(x) = q_{n,y_g}(x)$。

4.2 其他连分数

对于 y 的其他取值，我们会得到 x的不同半正则连分数。按照所需的“红边”和“绿边”序列，以特定方式选择 y ，即可指定所需的插入/奇异化序列，因此我们可以选取 y 来生成某些研究充分的连分数展开。下面简要讨论几个例子。

4.2.1 反向连分数——始终沿红色边前进!

始终沿红边前进时，我们发现 I_n 上的首次回归映射同构于旋转~ ~ ~T^n (x)，其中 $T(x) = 1 - T(x)$。映射 T同构于 R´enyi 于 1957年由 [Ré57] 引入的、用于生成反向连分数的映射，其分子始终为 -1。由于在此方案中我们从不反转方向，区间 I_n 总会与 I_{n-1}共享左端点。因此，交点就是原区间的左端点：我们所生成的代换编码了点 $y = 0$的轨道。另一种确定 y 的方法是考察映射 T_{slow}。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，若有ˆ ˆ $T^n_{slow}(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1 - x]$，那么我们始终沿红边前进。对于 $y = 0$，有 $T^n_{slow}(x, y) = T($ $1 - T(1 - T(1 - \cdots T(1 - x))), 0)$。同样，对于 $y = 0$，我们发现，对每个 $n \in \mathbb{N}$，都有ˆ $T^n_{fast}(x, y) = (T^{2n}(x),$ $0)$。因此，快速逼近序列为序列 $q_{n,y}(x) = q_{2n}(x)$，也就是 x 的标准连分数展开中偶数指标渐近分数的分母。等价地，$I_{slow}(n) = [0, \|q_{2n}x\|]$。ˆ注意，对于 $y = 1$，有 $T_{slow}(x, 1) = (T(x), 0)$。因此，我们得到 $q_{n,}1(x)$ $= q_{2n+1}(x)$，即所有奇数指标渐近分数，以及 $I_{slow}(n) = [1 - \|q_{2n+1}x\|, 1]$。——

4.2.2 α-连分数——除非 $x_n > \alpha$，否则沿绿色边前进!

设 $\alpha \in [0, 1]$。在图 4 中，当 $x_n \le \alpha$ 时沿绿色箭头前进，否则沿红色箭头前进。相应地，我们恰好在 $x_n > \alpha$ 时进行奇异化 / 插入，如 [DHKM12] 中所示。这就得到 x 的 α- 连分数，该连分数由 [Nak81] 引入。注意，当 $\alpha = 1$ 时，我们始终沿绿色边前进，并得到正规连分数；而在 $\alpha = 0$ 的情况下，我们始终沿红色边前进，并得到反向连分数。记 y_α，它也取决于 x，表示相应的 y 值。这是唯一的 y，使得 ˆ$T^n_{slow}(x, y)$ $\in [0, \alpha] \times [1 - x, 1] \cup (\alpha, 1] \times [0, 1 - x]$。此外，对于几乎所有 $x \in [0, 1]$，我们有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(q_{n,y_\alpha}) = \frac{1}{2} h_{\mu_\alpha}(T_\alpha)$$

其中 T_α 是 Nakada 的 α-连分数映射，而 μ_α 是其相对于勒贝格测度绝对连续的不变测度。映射 $h(\alpha)$ $= h_{\mu_\alpha}(T_\alpha)$ 已得到充分研究，例如参见 [CT12，CT13，KSS12，LM08，NN08]。

4.2.3 最近整数连分数 - 沿较短区间的边前进!

对于 $\alpha = 1/2$，上述内容可简化为“沿着满足 $x_{n+1} < 1/2$ 的唯一箭头前进”。这等价于“选择词长增长最快的代换”，或者“在较小的区间上构造首次返回映射”。x 对应的连分数表示是唯一一种部分商从不为 1 的展开。我们找到唯一的 y，使得 ˆ $T^n_{slow}(x, y) \in [0, \frac{1}{2}] \times [1 - x, 1] \cup (\frac{1}{2}, 1] \times [0, 1 - x]$。对于几乎所有的 $x \in [0, 1]$，我们发现

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(q_{n,y_{\frac{1}{2}}}) = \frac{1}{2} h_{\mu_{\frac{1}{2}}}(T_{\frac{1}{2}}) = \frac{\pi^2}{12 \log\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)},$$

例如，参见[CT13]。

4.2.4 自然 对应于 α-连分数的自然版本——除非 $x < \alpha$，否则沿着绿色边前进!

现在，我们不再沿着图 4 中的绿色箭头前进，而是 $x \le \alpha$ 改为沿着红色箭头。这些连分数在 [KLMM20]中进行了研究。所得连分数展开的数字从上方有界。相应的 y 是唯一的 y，满足 $T^n_{slow}(x,\ y) \in [0, \alpha] \times [0, x] \cup (\alpha,$ $1] \times [1 - x, 1]$。这类连分数展开通常收敛较慢：当 x 非常小时，我们会连续进行许多次中间分数插入。对于几乎所有 $x \in [0, 1]$，我们发现

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(q_{n,y}) = 0.$$

4.2.5 Lehner 连分数——沿着较长区间一侧的边前进!

采取与最近整数连分数相反的做法：沿着满足 $x_{n+1} > 1/2$ 的唯一箭头前进。这等价于“选择词长增长最慢的代换”，或“在较长的区间上构造首次回归映射”。这样做的效果是，只要可能就始终进行插入，但绝不进行奇异化。x 对应的连分数表示是唯一一种所有部分商都为一或二的展开。更准确地说，它们将是 Lehner 连分数

发表于 [Leh94]，并在例如 [DK00] 中加以研究。慢逼近序列包含此方案下所有可能的中间分数：

$$q_0, 2q_0, \ldots, a_1q_0, q_2, 2q_2, \ldots, a_3q_2, q_4, \ldots$$

注意，由于所有前面各小节的 q_n 必然是此处 q_n 的一个子序列。前一小节中，几乎处处的 x 都具有亚指数增长，因此这些也具有亚指数增长。对于几乎处处的 $x \in [0,1]$，我们有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(q_{n,y}) = 0.$$

参考文献

[AS97] J. Aaronson 和美国数学会。《无限遍历理论导论》。数学调查与专著。美国数学会，1997年。[BMD05] J´erˆome Buzzi 和 V´eronique Maume-Deschamps。具有非 Hölder 雅可比矩阵和非指数返回时间的塔上的相关性衰减。《离散与连续动力系统》，12(4):639–656，2005年。[CT12] Carlo Carminati 和 Giulio Tiozzo。Q 的典范加厚与 α-连分数变换的熵。《遍历理论与动力系统》，32(4):1249–1269，2012年。[CT13] Carlo Carminati 和 Giulio Tiozzo。 α-连分数的熵的调节与平台。《非线性》，26(4):1049–1070，2013年。[DHKM12] K. Dajani、D. Hensley、C. Kraaikamp 和 V. Masarotto。“翻转”连分数算法的算术与遍历性质。《算术学报》，153(1):51–79，2012年。[DK00] Karma Dajani 和 Cor Kraaikamp。《所有连分数之母》。《数学讨论会》，84/85（第1部分）：109–123，2000年。谨以此文纪念 Anzelm Iwanik。[DK02] Karma Dajani 和 Cor Kraaikamp。《数的遍历理论》，卡鲁斯数学专著第29卷。美国数学协会，华盛顿特区，2002年。[DK21] K. Dajani 和 C. Kalle。《遍历理论入门》。数学调查与专著。CRC出版社，2021年。[IN88] Sh. Ito 和 H. Nakada。通过序列 $\{n\alpha\}$ 逼近实数及其度量理论。《匈牙利数学学报》，52(1-2):91–100，1988年。[KKV17] Charlene Kalle、Tom Kempton 和 Evgeny Verbitskiy。随机连分数变换。《非线性》，30(3):1182–1203，2017年。[KLMM20] Charlene Kalle、Niels Langeveld、Marta Maggioni 和 Sara Munday。一族无限测度连分数变换的匹配。《离散与连续动力系统》，40(11):6309–6330，2020年。[Kra91] Cor Kraaikamp。一类新的连分数展开。《算术学报》，57(1):1–39，1991年。[KSS12] Cor Kraaikamp、Thomas A. Schmidt 和 Wolfgang Steiner。α-连分数的自然扩张与熵。《非线性》，25(8):2207–2243，2012年。[Leh94] Joseph Lehner。部分分母为1或2的半正规连分数。载于《威廉·马格努斯的数学遗产：群、几何与特殊函数》（布鲁克林，纽约州，1992年），当代数学第169卷，第407–410页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1994年。[LM08] Laura Luzzi 和 Stefano Marmi。论日式连分数的熵。《离散与连续动力系统》，20(3):673–711，2008年。[Nak81] Hitoshi Nakada。一类连分数变换及其自然扩张的度量理论。《东京数学杂志》，4(2):399–426，1981年。[NN08] Hitoshi Nakada 和 Rie Natsui。 α-连分数变换熵的非单调性。《非线性性》，21(6):1207–1225，2008年。[Rén57] Alfr´ed R´enyi。实数生成算法。《匈牙利科学院数学与物理科学部公报》，7:265–293，1957年。