arXiv:2302.00948v1 [math.DS] 2 Feb 2023

全纯弗罗贝尼乌斯提升的动力 Mordell–Lang 猜想

She YANG

摘要

我们证明，若 K 是正特征的完备代数闭非阿基米德赋值域，且 f 是 $\mathbb{P}^N_K$ 的自态射，具有全纯不可分性，并且在特殊纤维上表现为弗罗贝尼乌斯，那么 f 满足动力学莫德尔–朗（DML）性质。我们还讨论了一些推论和推广。

1 引言

本文约定，所有簇均为整的，但闭子簇可以是可约的。我们记 $\mathbb{N} = \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$。等差数列是形如 $\{mk + l |\ k \in \mathbb{N}\}$ 的集合，其中 m、 $l \in \mathbb{N}$。对于一个带有自映射 f 的集合 X，以及 $x \in X$，我们将 x 在 f 下的轨道定义为 $\mathcal{O}_f(x) := \{f^n(x) |\ n \in \mathbb{N}\}$。若存在某个 $n \in \mathbb{Z}_+$，使得 $f^n(Y) \subseteq Y$，则称子集 $Y \subseteq X$ 为 f-周期的。

设 K 是一个域。设 X 是 K 上的拟射影簇，且 $f\colon X \to X$ 是一个 K-自态射。若对于每个 $x \in X(K)$ 以及 X 的每个闭子簇（即既约闭子概形） V，集合 $\{n \in \mathbb{N} |\ f^n(x) \in V(K)\}$ 都是有限个等差数列的并，则称 f 满足 DML 性质。特征为 0 时的动力 Mordell–Lang 猜想是算术动力系统领域的核心问题之一，表述如下。该猜想最初由 [GT09] 提出，其间受到张寿武的影响（参见 [GT08，第 . 306] 页上方）。

猜想 1.0.1.（Ghioca–Tucker）若 $\mathrm{char} K = 0$，则每个拟射影簇上的每个自态射 f 都满足 DML 性质。

许多研究都致力于这一猜想。例如，有 [BGH+13], [BGKT12], [Fak14], [GT09], [GTZ08], [GTZ12] 以及 [GX20]。其中两个值得注意的情形如下：

(i) 如果 f 是一个 ´étale 自态射，那么 f 满足 DML 性质。参见 [BGT10，定理 1.3]。

(ii) 如果 $X = \mathbb{A}^2$ and f 是 X 的自态射，那么 f 满足 DML 性质。参见 [Xie17]。

然而，当 $\mathrm{char}K > 0$ 时，猜想 1.0.1 的朴素类比并不成立。一个例子见 [BGT16，例 3.4.5.1]。因此，自然会提出两个问题：

(i) 当 $\mathrm{char}K > 0$ 时，集合 $\{n \in \mathbb{N} |\ f^n(x) \in V(K)\}$ 的形式是什么？

(ii) 在什么情况下，自态射 f 满足 DML 性质？

对于第一个问题，Ghioca 和 Scanlon 提出了一个猜想 [BGT16，猜想 13.2.0.1]，该猜想被称为正特征下的动力 Mordell–Lang 猜想。关于这一猜想的最新进展，可参见 [CGSZ21] 。

另一方面，对于第二个问题，[Xie23]（以及 Ghioca 和 Scanlon）猜测，大多数动力系统应当满足 DML 性质，而反例通常涉及某些群作用。本文是对这一观点的尝试性探讨。

据我们所知，当 $\mathrm{char}K > 0$ 时，目前只有两类已知的非平凡情形使得 f 满足 DML 性质：

(i) 如果 X 是定义在有限域上的半阿贝尔簇，且 Φ 是一个代数群自态射，满足 $f(\Phi) = 0$，其中 $f \in \mathbb{Z}[x]$ 是首项系数为 1 的多项式，并且 f 在 $\mathbb{C}$ 中的非零根互不相同，那么 Φ 满足 DML 性质。参见 [BGT16，命题 13.3.0.2] 以及 [CGSZ21，第 p. 671] 页中部。

(ii) 若 X 是射影曲面，且 f 是满足 $\lambda_1(f) > 1$ 或 $X = \mathbb{A}^2$，并且 f 是满足 $\lambda_1(f) > 1$ 的双有理自态射，则 f 满足 DML 性质。记号 $\lambda_1(f)$ 表示 f 的第一动力度。参见 [Xie23，定理 1.4] 和 [Xie14]。

本文的主要定理如下，即定理 1.0.2。本文结尾还将证明一个更一般的结论。参见命题 5.2.6 和注 5.2.7。它们讨论的是射影空间上弗罗贝尼乌斯的提升。我们提及，已有若干研究 [Hru01], [MS14，第 7.3 小节、 [PR04] 以及 [Xie18] ，探讨了弗罗贝尼乌斯的提升，并将其用于相容的反向轨道的动力 Manin–Mumford 猜想和动力 Mordell–Lang 猜想。我们的结果则针对正向轨道的动力 Mordell–Lang 猜想。

定理 1.0.2. 设 K 是特征为 $p > 0$ 的完备代数闭非阿基米德赋值域。那么自态射 $f\colon \mathbb{P}^N_K \to \mathbb{P}^N_K$，

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{N} a_{0i}x_i^q + g_0(x_0^p, \cdots, x_N^p) \\ \sum_{i=0}^{N} a_{1i}x_i^q + g_1(x_0^p, \cdots, x_N^p) \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{N} a_{Ni}x_i^q + g_N(x_0^p, \cdots, x_N^p) \end{bmatrix}$$

满足 DML 性质，其中 $A=(a_{ij})_{(N+1)\times(N+1)}\in GL_{N+1}(\mathcal{O}_K)$， q 是 p 的幂，且 g_0、$\cdots$、$g_N\in\mathfrak{m}_K[x_0,\cdots,x_N]$ 是次数为 $=\frac{q}{p}$ 的齐次多项式。

事实上，定理 1.0.2 是下述定理 1.0.3 的推广版本。

定理 1.0.3. 设 K 是一个正特征局部域。设 k 是 $\mathcal{O}_K$ 的剩余域，且该剩余域是有限的。设 $f_{\mathcal{O}_K}\colon \mathbb{P}^N_{\mathcal{O}_K}\to\mathbb{P}^N_{\mathcal{O}_K}$ 是满足以下条件的 $\mathcal{O}_K$-态射：1. $f^*_{\mathcal{O}_K}(\Omega^{\mathbb{P}^N_{\mathcal{O}_K}/\mathcal{O}_K})\to\Omega^{\mathbb{P}^N_{\mathcal{O}_K}/\mathcal{O}_K}$ 是零映射。2. $f_0(=f_{\mathcal{O}_K}\times_{\mathcal{O}_K}k)\colon \mathbb{P}^N_k\to\mathbb{P}^N_k$ 是某个 Frob$_q$ （q 是素数 char$k$ 的幂）。那么，由 $f_{\mathcal{O}_K}$ 诱导的 $\overline{K}$-态射 $f_{\overline{K}}\colon \mathbb{P}^N_{\overline{K}}\to\mathbb{P}^N_{\overline{K}}$ 满足 DML 性质。

注1.0.4. 定理 1.0.3 中的两个条件可以弱化为：$f^m_{\mathcal{O}_K}$ 和 f_0^m 对某个正整数 m 满足相应的性质，因为 $f^m_{\overline{K}}$ 满足 DML 性质蕴含着 $f_{\overline{K}}$ 也满足该性质。

由于定理 1.0.3 的证明是本文技术上的核心，我们将更详细地讨论证明思路。首先，我们将定理 1.0.3 归约为定理 2.1.2，并且不失一般性地假设其中的局部域为 $K=k((t))$（见注 2.1.4）。接下来，我们将 $K=k((t))$上的数据作基变换到 $L=k((t))$上，以便使用我们的基本工具，即喷流概形。

现在，我们有一个整闭子簇 $X_L\subseteq\mathbb{P}^N_L$ 以及一个点 $x\in\mathbb{P}^N_L(L)$，使得$\mathcal{O}_{f_L}(x)\cap X_L$ 在 X_L 中稠密。我们要证明 X_L 是 f_L-周期的。我们构造一个 X_L 在 $S=\mathrm{Spec}(k[[t]])$上的模型 $\mathcal{X}$。注意，在 $\mathbb{P}^N_S$的特殊纤维中，每个 k-点x_0 处，$f_S=f_{\mathcal{O}_K}\times_{\mathcal{O}_K}S$ 都是吸引的。受双曲动力系统的启发，我们构造 x_0 的一个提升$x\in\mathbb{P}^N_L(L)=\mathbb{P}^N_S(S)$，将其类比为穿过 x_0的“不稳定流形”。在我们的假设下，如果 x_0 位于 $\mathcal{X}$的特殊纤维中，我们可以询问 $x\in\mathcal{X}(S)$。我们的构造基于喷流概形的构造。

喷射概形是复几何中喷射空间的代数几何类比。它最初由 [R¨os13] 引入，旨在以代数几何方法证明正特征下的经典莫德尔–朗猜想。与复几何中的情形相同，第 n 阶喷射概形中的一个点代表初始概形上的一个“第 n 阶无穷小方向”。严格表述见命题 2.3.2。作者认为这一性质是喷射概形的核心性质。第 2.3 小节中提到的其他性质，则被视为证据，表明尽管喷射概形是通过韦伊限制构造的，但作为概形，它们的性质确实良好。

对于第 3 节中引入的临界概形，有一种直观的解释。我们将第 n 个临界概形 Crit$^n(\mathcal{X},\mathbb{P}^N_S)$ 中的一个点视为“以 $\mathcal{X}$ 中的点为基础的一个不稳定的第 n 个方向”。“不稳定”一词意味着它可以通过自态射 f_S 的第 n 次推前得到。因此，像 Exc$^n(\mathcal{X},\mathbb{P}^N_S)$ 表示 $\mathcal{X}$ 中具有一个不稳定的第 n 个

方向的点集，而命题 3.2.1 中的抽象表述 $\mathrm{Exc}^n(\mathcal{X}, \mathbb{P}^N_S) = \mathcal{X}$可以理解为 $\mathcal{X}$ 中的每个点都具有这样一个方向。

顺便提一下，借助 [Xie18,Theorem 6.1]，定理 1.0.3 中的环境簇可以从射影空间推广到任意光滑射影簇。不过，我们有意聚焦于射影空间的情形。这不仅是因为这样可以突出证明的主要思路，也因为作者更偏爱初等的表述，并希望将定理 1.0.2 作为本文的主要结果。

在引言末尾，我们将介绍本文的结构。我们将在第 2 节进行约化（将定理 1.0.3 约化为定理 2.1.2），并介绍喷流概形，这是我们方法的基本工具。随后，我们将在第 3 节定义临界概形，并利用它们推导出一个提升命题。我们将在第 4 节完成定理 1.0.3 的证明。最后，我们将在第 5 节提出一个推论，并证明定理 1.0.2 及其推广。

致谢。我非常感谢我的导师谢俊毅，他建议我在 [R¨os13] 中运用喷流概形技术研究正特征下的动力 Mordell–Lang 猜想。在本文的准备过程中，他也与我进行了许多有益的讨论，对此我深表感激。我非常感谢 Jason P. Bell、Dragos Ghioca 和 Thomas J. Tucker，他们审阅了本文的早期版本，并提出了许多有益的建议。此外，我还要感谢同学杨向前，与他进行了一些有益的讨论。

作者获得了国家自然科学基金项目（编号：12271007）的资助。

2 准备工作

我们将在第 2.1 小节中把定理 1.0.3 归约为一个几何版本。随后，我们将介绍喷流概形的定义及其性质。关于喷流概形的参考文献为 [Cor、第 2] and[R¨os13 节 2]。由于喷流概形的定义涉及韦伊限制，我们将在第 2.2 小节中回顾韦伊限制的定义及其若干性质，然后在第 2.3 小节中介绍喷流概形。

2.1 几何版本

在讨论之前，我们想提到，定理 1.0.3 中的 $f_{\mathcal{O}_K}$ 是有限的。由于 $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^N_{\mathcal{O}_K}) = \mathrm{Pic}(\mathcal{O}_K) \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$由扭曲层 $\mathcal{O}(1)$ 生成（见 [Har77, (II, Ex. 6.1, 6.16, 6.11.1A)] 和 [Mat80, 第 . 126] 页定理 40），$\mathcal{O}_K$-态射$f_{\mathcal{O}_K}\colon \mathbb{P}^N_{\mathcal{O}_K} \to \mathbb{P}^N_{\mathcal{O}_K}$完全由 $\mathcal{O}_K[x_0, \cdots, x_N]$ 中的齐次多项式 $N+1$ 确定。我们知道，如果这些多项式的次数为正，则 $f_{\mathcal{O}_K}$ 将是有限的，因为它在这种情况下是仿射的

（而且它总是射影的）。但是，如果这些多项式是常数， f_0 就会是一个常值映射，这与第二个条件矛盾。因此， $f_{\mathcal{O}_K}$ 是有限的。

为了证明定理 1.0.3，我们需要下面这个给出 DML 性质判据的命题。专家们可能早已熟知此命题，其若干不同形式曾出现在[BGT16 的第 3.1.3] 小节以及 [Xie14 的命题 4.2]中。不过，为求完整，我们仍希望给出证明。

命题 2.1.1. 设 X 是域 K 上的拟射影簇， f 是 K上的自态射。若对每个正维整闭子簇 $Y \subset X$ 以及每个点$x \in X(K)$，只要 $\mathcal{O}_f(x) \cap Y$在 Y中稠密，就有 Y是 f周期的，则 f满足 DML 性质。

证明. 设 V 是 DML 性质定义中的 X 闭子簇。记$V_0 = \mathcal{O}_f(x) \cap V$，并设 Y_1、$\cdots$、Y_m是 V_0的不可约分支。于是 Y_1、$\cdots$、Y_m可视为 X的整闭子簇，并且对每个 $i = 1$、2、$\cdots$、m， $\mathcal{O}_f(x) \cap Y_i$在 Y_i中稠密。因此，根据假设，只要 Y_i 不是单点，它就是 f周期的。

我们知道 $\{n \in \mathbb{N} |\ f^n(x) \in V(K)\} = \bigcup_{i=1}^{m} \{n \in \mathbb{N} |\ f^n(x) \in Y_i(K)\}$。因此，只需证明每个 $\{n \in \mathbb{N} |\ f^n(x) \in Y_i(K)\}$ 都是有限个等差数列的并。若 Y_i 不是单点，则由其具有 f-周期性可得结论。此外，当 Y_i 是单点时，结论显然成立。证毕。

□

现在我们将使用命题 2.1.1，证明只需证明下面的定理 2.1.2，即可证明定理 1.0.3。

定理 2.1.2. 设 K 是一个正特征局部域。设 k 是 $\mathcal{O}_K$的剩余域，且它是有限域。设 $f_{\mathcal{O}_K}$：$\mathbb{P}^N_{\mathcal{O}_K} \to \mathbb{P}^N_{\mathcal{O}_K}$ 是一个有限 $\mathcal{O}_K$-态射，满足：

1. $f^*_{\mathcal{O}_K}(\Omega_{\mathbb{P}^N_{\mathcal{O}_K}/\mathcal{O}_K}) \to \Omega_{\mathbb{P}^N_{\mathcal{O}_K}/\mathcal{O}_K}$ 是零映射。
2. $f_0(= f_{\mathcal{O}_K} \times_{\mathcal{O}_K} k)$： $\mathbb{P}^N_k \to \mathbb{P}^N_k$是某个 Frob$_q$ (q 是特征k的一个幂）。

那么，由 $f_{\mathcal{O}_K}$ 诱导的 K-态射 f： $\mathbb{P}^N_K \to \mathbb{P}^N_K$ 满足以下性质：对于每个正维几何整闭子簇 $X \subseteq \mathbb{P}^N_K$ 以及每个点 $x \in \mathbb{P}^N(K)$，如果 $\mathcal{O}_f(x) \cap X$ 在 X 中稠密，则 X 是 f-周期的。

引理 2.1.3. 定理 2.1.2 推出定理 1.0.3。

证明. 根据命题 2.1.1，只需验证：在定理 1.0.3 的情形下，对于每个正维整闭子簇 $X_{\overline{K}} \subseteq \mathbb{P}^N_{\overline{K}}$以及每个点 $x' \in \mathbb{P}^N(\overline{K})$，若 $\mathcal{O}_{f_{\overline{K}}}(x') \cap X_{\overline{K}}$在$X_{\overline{K}}$ 中稠密，则 $X_{\overline{K}}$是 $f_{\overline{K}}$周期的。

首先，我们知道， $X_{\overline{K}}$ 和 x' 都来自定义在 K的某个有限扩张上的相应对象。准确地说，存在 K'，它是 K 的有限扩张，使得我们可以找到一个闭子簇 $X_{K'} \subseteq \mathbb{P}^N_{K'}$，满足 $X_{\overline{K}} = X_{K'} \times_{K'} \overline{K}$ 和 $x' \in \mathbb{P}^N(K')$。因此， $X_{K'}$ 是一个

$\mathbb{P}^N_{K'}$ 的几何不可约闭子簇，且具有正维。我们将对局部域 K'使用定理 2.1.2，其中 $f_{\mathcal{O}_{K'}}$ 是由 $f_{\mathcal{O}_K}$ 经基变换得到的。可以看出， $f_{\mathcal{O}_{K'}}$确实满足这两个条件。

由于 $\mathcal{O}_{f_{\overline{K}}}(x') \cap X_{\overline{K}}$在 $X_{\overline{K}}$ 中稠密，因此 $\mathcal{O}_{f_{K'}}(x') \cap X_{K'}$在 $X_{K'}$ 中稠密，因为投影映射 $X_{\overline{K}} \to X_{K'}$ 是满射。因此，若 f-周期的 $f: \mathbb{P}^N_{K'} \to \mathbb{P}^N_{K'}$ 来自 $f_{\mathcal{O}_{K'}}$，则 $X_{K'}$。由此，对投影 $\mathbb{P}^N_{\overline{K}} \to \mathbb{P}^N_{K'}$ 取逆像可知，$X_{\overline{K}}$ 是 $f_{\overline{K}}$周期的。

□

因此，从现在起，我们的任务转变为证明定理 2.1.2。

注 2.1.4. 注意，在定理 2.1.2 的表述中，作为赋值域， K 与 $k((t))$ 同构。因此，我们可以并且确实假设 $K = k((t))$，因为证明这一情形便足以证明一般情形。

备注 2.1.5. 注意，若 f^m 满足定理 2.1.2 中对某个正整数 m 的要求，则 f 也满足，因为其中的 X 是一个整闭子簇。此外， $f^m_{\mathcal{O}_K}$ 也是有限的，并满足第一个条件。另外，第二个条件中的 $f_0^m = \mathrm{Frob}_{q^m}$。因此，在定理 2.1.2 中，不失一般性，我们可以假设 q 是 $|k|$ 的幂。

2.2 韦伊限制

定义 2.2.1. 设 $S' \to S$ 是一个概形态射。设 X' 是一个 S'-概形。若函子$\mathfrak{R}_{S'/S}(X'): (Sch/S)^{op} \to (Sets)$ $T \mapsto \mathrm{Hom}_{S'}(T \times_S S', X')$ 可由一个 S-概形 X 表示，则称 X 为 X' 的韦伊限制，也记作 $X = \mathfrak{R}_{S'/S}(X')$。

注 2.2.2. 保留定义中的术语，我们可以看到存在一个函子同构 $\mathrm{Hom}_S(T, \mathfrak{R}_{S'/S}(X')) \tilde{\to} \mathrm{Hom}_{S'}(T \times_S S', X')$。

存在一个判据　　用于判断韦伊限制概形是否存在。参见 [BLR90, 7.6, 定理 4]。

定理 2.2.3. 设 $S' \to S$ 是一个有限、平坦且有限表示的概形态射。设 X' 是一个 S'-概形，并且满足：对每个 $s \in S$ 以及每个有限点集$P \subseteq X' \times_S k(s)$，都存在一个包含 P的 X' 的开仿射子概形。则 X' 的韦伊限制存在。

注 2.2.4. 可以验证，若 X' 是拟射影S'-概形，则定理 2.2.3 的条件成立。因此，在假设所有概形均为诺特的情况下，该定理说明：若 $S' \to S$ 是有限平坦的，且 X' 是 S'上的拟射影概形，则韦伊限制概形存在。

我们知道，韦伊限制关于 X' 具有自然的函子性；也就是说，若 $X'_1 \to X'_2$ 是一个 S'-态射（且两个 Weil 限制概形均存在），则存在一个自然的 S-态射 $\mathfrak{R}_{S'/S}(X'_1) \to \mathfrak{R}_{S'/S}(X'_2)$。我们想强调，对于一个属于

$\mathrm{Hom}_S(T, \mathfrak{R}_{S'/S}(X'_1)) = \mathrm{Hom}_{S'}(T \times_S S', X'_1)$ 的元素，通过复合上述两个态射，它在 $\mathrm{Hom}_S(T, \mathfrak{R}_{S'/S}(X'_2)) = \mathrm{Hom}_{S'}(T \times_S S', X'_2)$ 中映到同一个元素，其中 T 是任意的 S-概形。

此外，该操作将闭浸入映为闭浸入。这是 [BLR90, 7.6, Proposition 2(ii)] 的一个特例（即韦伊限制概形存在的情形）。为求完整起见，我们将这一结果表述为一个命题。

命题 2.2.5. 设 $S' \to S$ 是一个有限、平坦且有限表示的概形态射。设 $X'_1 \to X'_2$ 是拟射影 S'-概形的一个闭浸入。那么， S-态射 $\mathfrak{R}_{S'/S}(X'_1) \to \mathfrak{R}_{S'/S}(X'_2)$ 也是一个闭浸入。

2.3 喷射概形

我们的目的要求研究完备环上的喷流概形，而非有限型 k-概形上的喷流概形。因此，本小节主要采用 [Cor, Section 2] 中的设定。不过需要指出的是，事实上，许多陈述和证明都与 [R¨os13, Section 2] 中的对应内容完全相同。

‾记 $R = \mathcal{O}_K$，其中 $K = k((t))$ 如注 2.1.4 所示。因此， R^{sh} 可视为 $k[[t]]$。记 $S =$ 为谱 $\mathrm{Spec}(\bar{k}[[t]])$，并令 $S \widehat{\times} S =$ 为谱 $\mathrm{Spec}(\bar{k}[[x, y]])$，于是存在自然的闭对角浸入 $S \hookrightarrow S \widehat{\times} S$。记 $S_{(n)}$ 为 S 在 $S \widehat{\times} S$ 中的第 n 阶无穷小邻域，即 $S_{(n)} =$ 谱 $\mathrm{Spec}(\bar{k}[[x, y]]/((x - y)^{n+1}))$。记 $\pi_1, \pi_2 : S \widehat{\times} S \to S$ 为第一和第二投影态射，并记 $\pi_1^{S_{(n)}}, \pi_2^{S_{(n)}} : S_{(n)} \to S$ 为诱导的态射。通过第一投影，我们将 $S_{(n)}$ 视为一个 S-概形‾。可以看出， $S_{(n)}$ 在 S 上有限平坦，因为 $k[[x, y]]/((x - y)^n)$ 是一个秩为 n $k[[t]]$ 的‾自由代数。此外，这里涉及的所有概形（或环）都是诺特的。

定义 2.3.1. 设 W 是一个拟射影 S-概形。我们将 $\mathfrak{R}_{S_{(n)}/S}(\pi^{S_{(n)}}{}_{,2}{}^{*}W)$ 定义为 W 在 S 上的第 n 个喷流概形，并记作 $J^n(W/S)$。注意，其存在性由注 2.2.4 保证。

我们可以看到，喷流概形关于 W 自然地具有函子性，并且会将闭浸入映为闭浸入，也具有韦伊限制性质（命题 2.2.5）。更具体地说，一个 S-态射 $f : W \to W_1$ 可以诱导一个 S-态射 $J^n(f) : J^n(W/S) \to J^n(W_1/S)$，并且如果 f 是闭浸入，那么 $J^n(f)$ 也是闭浸入。正如我们在上一小节中提到的，复合 $J^n(f)$ 或 $f_n : \pi^{S_{(n)}}{}_{,2}{}^{*}W \to \pi_{S_{(n)},2}{}^{*}W_1$（$f$ 的提升），会将 $\mathrm{Hom}_S(T, J^n(W/S)) = \mathrm{Hom}^{S_{(n)}}(T \times_S S_{(n)}, \pi^{S_{(n)}}{}_{,2}{}^{*}W)$ 中的一个元素映为 $\mathrm{Hom}_S(T, J^n(W_1/S)) = \mathrm{Hom}^{S_{(n)}}(T \times_S S_{(n)}, \pi^{S_{(n)}}{}_{,2}{}^{*}W_1)$ 中的同一元素，其中 T 是任意的 S-概形。

对于一个 S-概形 T，我们可以将 T_0 记作 T 的特殊纤维。我们将 S_n 记作 S 中闭点的第 n 个无穷小邻域，即 $S_n = \mathrm{Spec}(\bar{k}[[t]]/(t^{n+1}))$。

‾命题 2.3.2。沿用上述术语。存在典范双射 $J^n(W/S)_0(k) = J^n(W/S)(S_0) = W(S_n)$。

证明。根据定义， $J^n(W/S)(S_0)$ =态射集$^{S_{(n)}}(S_0\times_S S_{(n)}, \pi_{,2}^{S_{(n)}\ *}W)$。可以看出， $S_0\times_S S_{(n)} = S_n$ 作为概形成立。此外，将结构态射（投影） $S_n \to S_{(n)}$ 与 π_2复合，恰好得到自然闭浸入 $S_n \hookrightarrow S$。因此，态射集$^{S_{(n)}}(S_0 \times_S S_{(n)}, \pi_{,2}^{S_{(n)}\ *}W) = W(S_n)$，结论得证。

□

我们注意到，对于任意 ，由闭浸入

$$S_{(m)} \hookrightarrow S_{(n)} \qquad n \geq m \geq 0$$

$_{S_{(n)}}\ T\times_S$诱导 $S_{(n)}\ \pi_2^{S_{(n)}\ *}W = \mathfrak{R}_{S_{(n)}/S}\ \pi_2^{S_{(n)}\ *}W\ \ T$ $_{S_{(m)}}\ T\times_S S_{(m)}\ \pi_2^{S_{(m)}\ *}W = \mathfrak{R}_{S_{(m)}/S}\ \pi_2^{S_{(m)}\ *}W\ \ T$ 出典范的 S-态射 $\Lambda^W_{n\ ,m}$： $J^n(W/S) \to J^m(W/S)$。原因是，对于每个 S-概形 T，都有 Hom (,) (,)( ) 和 Hom (,) (,)( )，并且存在自然的限制映射 Hom$^{S_{(n)}}(T\times_S S_{(n)}, \pi_{,2}^{S_{(n)}\ *}W) \to$Hom$^{S_{(m)}}(T\times_S S_{(m)}, \pi_{,2}^{S_{(m)}\ *}W)$。同样，如上所述，可以看出，对于任意 S-概形T，由复合 $\Lambda^W_{n\ ,m}$给出的映射 Hom$_S(T, J^n(W/S)) \to$Hom$_S(T, J^m(W/S))$ 正是限制映射。

当 W 在 S上光滑，或者至少当 $W = \mathbb{P}^N_S$时，我们将看到这些态射具有良好的性质。

命题 2.3.3. 态射 $\Lambda^{\mathbb{P}^N_S}_{n\ ,\ 0}$ 是分离的、有限型且满射的。特别地，对于所有 $n \in \mathbb{N}$， $J^n(\mathbb{P}^N_S/S)$ 都是诺特概形。

证明. 要证明 $\Lambda^{\mathbb{P}^N_S}_{n\ ,\ 0}$ 是分离且有限型的，只需证明 $J^n(\mathbb{P}^N_S/S)$ 是有限型的分离S-概形。但这立即由 [BLR90, 7.6, 命题 5(b)(e)] 得出。

要证明 $\Lambda^{\mathbb{P}^N_S}_{n\ ,\ 0}$ 是满射的，只需证明它存在一个截面。由于 $\mathbb{P}^N_S \times_S S_{(n)} = \mathbb{P}^N_{\mathbb{Z}}\times_{\mathbb{Z}} S_{(n)} = \pi^{S_{(n)},\ 2\ \ *}(\mathbb{P}^N_S)$ 作为 $S_{(n)}$-概形，我们有一个 $S_{(n)}$-同构 $i: \mathbb{P}^N_S \times_S S_{(n)} \xrightarrow{\sim} \pi^{S_{(n)},\ 2\ \ *}(\mathbb{P}^N_S)$，使得 $i \times_{S_{(n)}} S = \mathrm{id}_{\mathbb{P}^N_S}$。那么，Hom$_S(\mathbb{P}^N_S, J^n(\mathbb{P}^N_S/S))$ 中与 i 对应的元素是 $\Lambda^{\mathbb{P}^N_S}_{n\ 0,}$ 的一个截面。

□

事实上，可以证明，当 W 在 S上是拟射影且光滑时，态射 $\Lambda^W_{n\ ,\ n-1}$使 $J^n(W/S)$ 成为某个向量丛下的 $J^{n-1}(W/S)$-挠子。参见 [Cor, 引理 2.2]。

在本节末尾，我们指出，对于任意拟射影 S-概形 W ，由喷流概形的函子性质可得到典范映射 λ^W_n: $W(S) \to J^n(W/S)(S)$。更确切地说， $\lambda^W_n(f) := J^n(f)$（注意 $J^n(S/S) = S$）。根据函子性质，可以验证此映射满足 $\Lambda^W_{n\ ,\ 0} \circ \lambda^W_n = \mathrm{id}$。参见 [Cor, 引理 2.4] 或 [R¨os13, 引理 2.5(a)]。

3 临界概形

回顾一下，为了证明定理 2.1.2，我们必须证明：对于每个正维几何不可约闭子簇 $X \subseteq \mathbb{P}^N_K$以及每个 $x \in \mathbb{P}^N(K)$，若 $\mathcal{O}_f(x)\cap X$在 X 中稠密（其中 $K = k((t))$，正如我们在注 2.1.4 中所假设的），则 X是 f-周期的。首先，我们将把数据$\frown$ $\bar{\ }$从 $R = \mathcal{O}_K$ 和 K 提升到 R^{sh} 和 $L := K^{\mathrm{sh}} = k((t))$，以便利用上一小节中引入的喷流概形。我们将沿用上述术语。

将 $\mathcal{X}_R$ 记为 X 在 $\mathbb{P}_R^N$中的概形论像。可以看出， $\mathcal{X}_R$ 是 $\mathbb{P}_R^N$中的整闭子概形，且它是 X的一个模型。注意，由 Har77, (III, (9.7))]， $\mathcal{X}_R$在 Spec(R)上是平坦的。将 $\mathcal{X} = \mathcal{X}_R \times_R S$ 记为 $\mathbb{P}_S^N$ 中的一个闭子概形，并将 $X_L = X \times_K L$ 记为 $\mathcal{X}$ 在 S上的一般纤维。由于 X 是几何整的， X_L 是 $\mathbb{P}_L^N$的一个整闭子簇。此外， $\mathcal{X}$是整的，因为 X_L、 S是整的，且 $\mathcal{X}$在 S上平坦（见[Liu02, 4.3.1，命题 3.8]）。

我们将定理 2.1.2 陈述中的自态射 $f_R : \mathbb{P}_R^N \to \mathbb{P}_R^N$ 提升为 $f_S : \mathbb{P}_S^N \to \mathbb{P}_S^N$和 $f_L : \mathbb{P}_L^N \to \mathbb{P}_L^N$。注意， f_S 也是有限的，并且满足定理 2.1.2 中的两个条件，即 $f_S^*(\Omega^{\mathbb{P}_S^N/S}) \to \Omega^{\mathbb{P}_S^N/S}$ 是零映射，且 $f_{S,\,0} : \mathbb{P}_{\bar{k}}^N \to \mathbb{P}_{\bar{k}}^N$是 Frob$_q$。

由于 $\mathcal{X}$和 $\mathbb{P}_S^N$都是 S上的射影概形，我们之后可以考虑喷流概形 $J^n(\mathcal{X}/S)$ 和$J^n(\mathbb{P}_S^N/S)$。此外， $J^n(\mathcal{X}/S)$ 是 $J^n(\mathbb{P}_S^N/S)$ 的闭子概形。另外， $\mathbb{P}_S^N$的喷流概形以及态射 $\Lambda_n^{\mathbb{P}_S^N,\,0}$ 具有命题 2.3.3 中讨论的良好性质。

本节将仿照 [R¨os13 第 3] 节中的一些论证。

3.1 临界概形的定义

我们的关键构造　　是满足两个条件的 S-态射 $[f_S^n]^\circ : \mathbb{P}_S^N \to J^n(\mathbb{P}_S^N/S)$:

(i) $\Lambda_n^{\mathbb{P}_S^N,}$
$_0 \circ [f_S^n]^\circ = f_S^n$(ii)
$[f_S^n]^\circ \circ \Lambda_n^{\mathbb{P}_S^N,\,0} = J^n(f_S)^n$

首先，我们有一个 $S_{(n)}$-同构 $i : \mathbb{P}_S^N \times_S S_{(n)} \tilde{\to} \pi^{S_{(n)}}{}_{,2}{}^*(\mathbb{P}_S^N)$，使得 $i \times_{S_{(n)}} S = \mathrm{id}^{\mathbb{P}_S^N}$，如命题 2.3.3 的证明中所示。由于 $\mathrm{Hom}^{S_{(n)}}(\mathbb{P}_S^N \times_S S_{(n)}, \pi^{S_{(n)}}{}_{,2}{}^*(\mathbb{P}_S^N)) = \mathrm{Hom}_S(\mathbb{P}_S^N, J^n(\mathbb{P}_S^N/S))$，我们可以将 $[f_S^n]^\circ \in \mathrm{Hom}_S(\mathbb{P}_S^N, J^n(\mathbb{P}_S^N/S))$ 定义为与 $f_{S,n}^n \circ i \in \mathrm{Hom}^{S_{(n)}}(\mathbb{P}_S^N \times_S S_{(n)}, \pi^{S_{(n)}}{}_{,2}{}^*(\mathbb{P}_S^N))$ 相对应的元素，其中 $f_{S,n} : \pi^{S_{(n)}}{}_{,2}{}^*(\mathbb{P}_S^N) \to \pi^{S_{(n)}}{}_{,2}{}^*(\mathbb{P}_S^N)$ 是 f_S 的提升。

引理 3.1.1. 对每个非负整数 n， S-态射 $[f_S^n]^\circ$ 满足以下两个条件$\Lambda_n^{\mathbb{P}_S^N,\,0} \circ [f_S^n]^\circ = f_S^n$以及 $[f_S^n]^\circ \circ \Lambda_n^{\mathbb{P}_S^N,\,0} = J^n(f_S)^n$。

证明。第一个等式 $\Lambda_n^{\mathbb{P}_S^N,\,0} \circ [f_S^n]^\circ = f_S^n$ 成立的原因是 $\Lambda_n^{\mathbb{P}_S^N,\,0} \circ [f_S^n]^\circ \in$态射集$_S(\mathbb{P}_S^N, \mathbb{P}_S^N)$ 恰好是 $f_{S,\,n}^n \circ i \in$态射集$^{S_{(n)}}(\mathbb{P}_S^N \times_S S_{(n)}, \pi^{S_{(n)},\,2}{}^*(\mathbb{P}_S^N))$ 的限制，也就是 f_S^n。对于第二个等式，我们需要假设 $f_S^*(\Omega^{\mathbb{P}_S^N/S}) \to \Omega^{\mathbb{P}_S^N/S}$ 是零映射。

回顾， $\Lambda_n^{\mathbb{P}_S^N}$,0 是将 $j \in \mathrm{Hom}^{S_{(n)}}(J^n(\mathbb{P}_S^N/S) \times_S S_{(n)}, \pi^{S_{(n)}}{}_{,2}{}^*(\mathbb{P}_S^N))$ 限制到 Sin which$j$ 的结果，其中 j 对应于 $\mathrm{Hom}_S(J^n(\mathbb{P}_S^N/S)\ J^n(\mathbb{P}_S^N/S))$ 中的恒等映射。换言之， $\Lambda_n^{\mathbb{P}_S^N}{}_{,0} = j \times_{S_{(n)}} S$。根据函子性质，只需证明 $f_{S,n}^n \circ i \circ (\Lambda_n^{\mathbb{P}_S^N}{}_{,0} \times_S S_{(n)}) = f_{S,n}^n \circ j \in \mathrm{Hom}^{S_{(n)}}(J^n(\mathbb{P}_S^N/S) \times_S S_{(n)}, \pi^{S_{(n)}}{}_{,2}{}^*(\mathbb{P}_S^N))$。但由于 $f_S^*(\Omega^{\mathbb{P}_S^N/S}) \to \Omega^{\mathbb{P}_S^N/S}$ 是零映射，我们只需根据 [Gro71, (III 5.1)] 证明 $(i \circ (\Lambda_n^{\mathbb{P}_S^N}{}_{,0} \times_S S_{(n)})) \times_{S_{(n)}} S = j \times_{S_{(n)}} S$。最后一个等式成立，因为 $i \times_{S_{(n)}} S = \mathrm{id}^{\mathbb{P}_S^N}$ 和 $j \times_{S_{(n)}} S = \Lambda_{n\,0}^{\mathbb{P}_S^N}$,。至此得证。 □

注 3.1.2. S-态射 $[f_S^n]^\circ$ 是有限的，因为 f_S 是有限的，并且对每个 $n \in \mathbb{N}$， $J^n(\mathbb{P}_S^N/S)$ 在 $\mathbb{P}_S^N$ 上是分离的。

现在我们可以定义临界概形。

定义 3.1.3。我们定义 $\mathrm{Crit}^n(\mathcal{X}, \mathbb{P}_S^N) := [J^n(f_S)^n]_*(J^n(\mathbb{P}_S^N/S)) \cap J^n(\mathcal{X}/S)$，其中第一项表示 $J^n(f_S)^n$：$J^n(\mathbb{P}_S^N/S) \to J^n(\mathbb{P}_S^N/S)$ 的概形论像，而 $\cap$表示 $J^n(\mathbb{P}_S^N/S)$ 中这两个闭子概形的概形论交。

命题 3.1.4。临界概形 $\mathrm{Crit}^n(\mathcal{X}, \mathbb{P}_S^N)$ 在 $\mathbb{P}_S^N$ 上是有限的。

证明。只需证明对于每个正整数n， $[J^n(f_S)^n]_*(J^n(\mathbb{P}_S^N/S))$ 在 $\mathbb{P}_S^N$ 上是有限的。由于 $[f_S^n]^\circ \circ \Lambda_n^{\mathbb{P}_S^N,\ 0} = J^n(f_S)^n$，我们有 $[J^n(f_S)^n]_*(J^n(\mathbb{P}_S^N/S)) = [f_S^n]_*^\circ([\Lambda_{n,0}^{\mathbb{P}_S^N}]_*(J^n(\mathbb{P}_S^N/S)))$。但我们知道此处涉及的所有概形都是诺特的， $\Lambda_n^{\mathbb{P}_S^N,\ 0}$ 是满射且 $\mathbb{P}_S^N$ 是约化的，因此$[\Lambda_{n,0}^{\mathbb{P}_S^N}]_*(J^n(\mathbb{P}_S^N/S)) = \mathbb{P}_S^N$，从而 $[J^n(f_S)^n]_*(J^n(\mathbb{P}_S^N/S)) = [f_S^n]_*^\circ(\mathbb{P}_S^N)$。

由命题 2.3.3 和 [Har77, (II, Ex. 4.4)],，我们有 $[f_S^n]_*^\circ(\mathbb{P}_S^N)$ 在 $\mathbb{P}_S^N$ 上是真态射，因为 $\Lambda_n^{\mathbb{P}_S^N,0} \circ [f_S^n]^\circ = f_S^n$。但 $[f_S^n]^\circ$ 的真性意味着 $\mathbb{P}_S^N$ 映满 $[f_S^n]_*^\circ(\mathbb{P}_S^N)$。因此， $[f_S^n]_*^\circ(\mathbb{P}_S^N)$ 在 $\mathbb{P}_S^N$ 上是拟有限的，因为 f_S 是有限态射。总之， $[J^n(f_S)^n]_*(J^n(\mathbb{P}_S^N/S)) = [f_S^n]_*^\circ(\mathbb{P}_S^N)$ 是 $\mathbb{P}_S^N$ 上的有限态射，证毕。

□

备注 3.1.5. 由上述证明可知，由 $J^n(f_S)^n$ 诱导的自然态射 $J^n(\mathbb{P}_S^N/S) \to [J^n(f_S)^n]_*(J^n(\mathbb{P}_S^N/S))$ 是满射。

注意到自然态射 $[J^n(f_S)^n]_*(J^n(\mathbb{P}_S^N/S)) \to [J^{n-1}(f_S)^{n-1}]_*(J^{n-1}(\mathbb{P}_S^N/S))$ 和$\Lambda_n^{\mathcal{X},\ n-1}, \Lambda_n^{\mathbb{P}_S^N,\ n-1}$ 与闭浸入构成交换图。因此，对于每个正整数 n，由它们可得到一个 S-态射 $\mathrm{Crit}^n(\mathcal{X}, \mathbb{P}_S^N) \to \mathrm{Crit}^{n-1}(\mathcal{X}, \mathbb{P}_S^N)$。由于每个 $\mathrm{Crit}^n(\mathcal{X}, \mathbb{P}_S^N)$ 在 $\mathbb{P}_S^N$ 上都是有限的，这个态射是有限的。因此，我们得到一列有限的 S-态射:

$$\cdots \to \mathrm{Crit}^2(\mathcal{X}, \mathbb{P}_S^N) \to \mathrm{Crit}^1(\mathcal{X}, \mathbb{P}_S^N) \to \mathrm{Crit}^0(\mathcal{X}, \mathbb{P}_S^N) = \mathcal{X}$$

我们将态射 $\mathrm{Crit}^n(\mathcal{X}, \mathbb{P}_S^N) \to \mathcal{X}$ 的概形论像记作 $\mathrm{Exc}^n(\mathcal{X}, \mathbb{P}_S^N)$，它是 $\mathcal{X}$ 的一个闭子概形。

3.2 应用

回顾我们的目标。我们有一个正维几何不可约闭子簇 $X \subseteq \mathbb{P}_K^N$ 和一个点 $x \in \mathbb{P}^N(K)$。我们的目标是证明，若 $\mathcal{O}_f(x) \cap X$在 X中稠密，则X 是 f-周期的。此处，我们想指出，几乎可以不考虑 $R = \mathcal{O}_K$ 和K，只需从 S 和 L的层面思考这个问题。具体而言，若存在一个点$x \in \mathbb{P}^N(K)$，使得 $\mathcal{O}_f(x) \cap X$在 X中稠密，那么 $\mathcal{O}_{f_L}(x) \cap X_L = \pi^{-1}(\mathcal{O}_f(x) \cap X)$ 在X_L 中稠密（这里我们将 x 视为 $\mathbb{P}^N(L)$中的一个点），因为投影映射 $\pi\colon X_L \to X$ 是开映射（参见

[Sta22，引理 29.23.4]）。此外，若 X_L 是 f_L-周期的，则通过投影， X 也会立即是 f-周期的。因此，从现在起，我们的目标转变为：在存在一个点 $x \in \mathbb{P}^N(L)$，使得 $\mathcal{O}_{f_L}(x) \cap X_L$ 在 X_L 中稠密这一假设下，证明 X_L 是 f_L-周期的。事实上，我们稍后将在这一假设下证明 $f_L(X_L) = X_L$。

我们将在本小节证明，对每个 $n \in \mathbb{N}$，$\mathrm{Exc}^n(\mathcal{X}, \mathbb{P}^N_S) = \mathcal{X}$，并在假设 $\mathcal{O}_{f_L}(x) \cap X_L$ 在 X_L 中稠密的前提下，推出一个提升命题（命题 3.2.2 ）。

我们可以将 $\mathbb{P}^N_S(S)$ 与 $\mathbb{P}^N_L(L)$ 等同，在此等同下，子集 $\mathcal{X}(S)$ 对应于子集 $X_L(L)$。

命题 3.2.1. 若存在一点 $x \in \mathbb{P}^N(L)$，使得 $\mathcal{O}_{f_L}(x) \cap X_L$ 在 X_L 中稠密，则对每个 $n \in \mathbb{N}$，$\mathrm{Exc}^n(\mathcal{X}, \mathbb{P}^N_S) = \mathcal{X}$。

证明。首先，由于 X_L 是整的且正维，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，我们可以看到 $f^n_L(\mathcal{O}_{f_L}(x)) \cap X_L$ 在 X_L 中稠密。我们可以将 $f^n_L(\mathcal{O}_{f_L}(x)) \cap X_L = f^n_L(\mathcal{O}_{f_L}(x)) \cap X_L(L) \subseteq \mathbb{P}^N_L(L)$ 与$f^n_S(\mathcal{O}_{f_S}(x)) \cap \mathcal{X}(S) \subseteq \mathbb{P}^N_S(S)$ 等同。

根据第 2 节末尾的陈述，我们有 $f^n_S(\mathcal{O}_{f_S}(x)) \cap \mathcal{X}(S) = \Lambda^{\mathbb{P}^N_S}_{n\,0}(\lambda^{\mathbb{P}^N_S}_n(f^n_S(\mathcal{O}_{f_S}(x)) \cap \mathcal{X}(S)))$。可以验证 $\lambda^{\mathbb{P}^N_S}_n(f^n_S(\mathcal{O}_{f_S}(x)) \cap \mathcal{X}(S)) \subseteq \lambda^{\mathbb{P}^N_S}_n(f^n_S(\mathcal{O}_{f_S}(x))) \cap \lambda^{\mathcal{X}}_n(\mathcal{X}(S))(\subseteq J^n(\mathbb{P}^N_S/S)(S))$。此外，由于 $\lambda^{\mathbb{P}^N_S}_n(f^n_S(\mathcal{O}_{f_S}(x)))$ 中的映射可经由 $[J^n(f_S)^n]_*(J^n(\mathbb{P}^N_S/S))$ 分解，而 $\lambda^{\mathcal{X}}_n(\mathcal{X}(S))$ 中的映射可经由 $J^n(\mathcal{X}/S)$ 分解，因此 $\lambda^{\mathbb{P}^N_S}_n(f^n_S(\mathcal{O}_{f_S}(x))) \cap \lambda^{\mathcal{X}}_n(\mathcal{X}(S)) \subseteq$临界集$^n(\mathcal{X}, \mathbb{P}^N_S)(S)$。由此可得 $f^n_S(\mathcal{O}_{f_S}(x)) \cap \mathcal{X}(S) \subseteq \Lambda^{\mathbb{P}^N_S}_{n\,0}$, (临界集$^n(\mathcal{X}, \mathbb{P}^N_S)(S)$)。

现在，由于 $\Lambda^{\mathbb{P}^N_S}_{n\,0}$, $(\mathrm{Crit}^n(\mathcal{X}, \mathbb{P}^N_S)(S)) = \Lambda^{\mathcal{X}}_{n,0}(\mathrm{Crit}^n(\mathcal{X}, \mathbb{P}^N_S)(S))$（作为 $\mathbb{P}^N_S(S)$ 的子集），我们可以看出，根据 $\mathrm{Exc}^n(\mathcal{X}, \mathbb{P}^N_S)$ 的定义， $\Lambda^{\mathbb{P}^N_S}_{n\,0}$, $(\mathrm{Crit}^n(\mathcal{X}, \mathbb{P}^N_S)(S)) \subseteq \mathrm{Exc}^n(\mathcal{X}, \mathbb{P}^N_S)(S)$。因此，回到包含于 $\mathbb{P}^N_L(L)$ 的子集，我们得到 $f^n_L(\mathcal{O}_{f_L}(x)) \cap X_L \subseteq \mathrm{Exc}^n(\mathcal{X}, \mathbb{P}^N_S)\eta(L) \subseteq \mathrm{Exc}^n(\mathcal{X}, \mathbb{P}^N_S)\eta$，其中 η 是 S 的一般点，而 $\mathrm{Exc}^n(\mathcal{X}, \mathbb{P}^N_S)\eta$ 是 $\mathrm{Exc}^n(\mathcal{X}, \mathbb{P}^N_S)$ 的一般纤维。

然而，由于 $\mathrm{Exc}^n(\mathcal{X}, \mathbb{P}^N_S)\eta$ 是 X_L 的闭子概形，且 $f^n_L(\mathcal{O}_{f_L}(x)) \cap X_L$ 在 X_L 中稠密，$\mathrm{Exc}^n(\mathcal{X}, \mathbb{P}^N_S)\eta$ 必定就是 X_L 本身。因此，由于 $\mathcal{X}$ 是整的，$\mathrm{Exc}^n(\mathcal{X}, \mathbb{P}^N_S)$ 必定就是 $\mathcal{X}$ 本身。 □

现在我们可以证明本小节的主要结果。

¯命题 3.2.2. 在与命题 3.2.1 相同的假设下，对于每个点 $P \in \mathcal{X}_0(k)$，存在一个相容序列 $\{P_n | \ P_n \in \mathcal{X}(S_n) \cap f^n_S(\mathbb{P}^N_S(S_n)) \ n \in \mathbb{N}\}$，使得 P_0 是 P的自然提升。回顾一下，对于一个 S-概形 T，我们将 T_0 记作 T的特殊纤维。

¯证明. 首先，回顾一下，存在一列有限的 k-态射，使得每个态射 $\mathrm{Crit}^n(\mathcal{X}, \mathbb{P}^N_S)_0 \to \mathcal{X}_0$ 都是满射（命题 3.2.1）：

$$\cdots \to \mathrm{Crit}^2(\mathcal{X}, \mathbb{P}^N_S)_0 \to \mathrm{Crit}^1(\mathcal{X}, \mathbb{P}^N_S)_0 \to \mathrm{Crit}^0(\mathcal{X}, \mathbb{P}^N_S)_0 = \mathcal{X}_0$$

因此，映射 $\mathrm{Crit}^n(\mathcal{X}, \mathbb{P}^N_S)_0(\bar{k}) \to \mathcal{X}_0(\bar{k})$ 也必须是满射。现在我们将考虑集合 $\mathrm{Crit}^n(\mathcal{X}, \mathbb{P}^N_S)_0(\bar{k})$。

我们可以注意到，$\mathrm{Crit}^n(\mathcal{X},\mathbb{P}_S^N)_0(\bar{k}) = ([J^n(f_S)^n]_*(J^n(\mathbb{P}_S^N/S)))_0(\bar{k}) \cap J^n(\mathcal{X}/S)_0(\bar{k}) = \{Q_n \in \sim J^n(\mathcal{X}/S)_0(\bar{k}) | \exists Q_n \in J^n(\mathbb{P}_S^N/S)_0(\bar{k})$，使得. $Q_n = J^n(f_S)_0^n \circ Q_n\}$，依据备注 3.1.5，其中 $J^n(f_S)_0$是 $J^n(f_S)$的提升。根据命题 2.3.2，我们可以将 $\mathrm{Crit}^n(\mathcal{X},\mathbb{P}_S^N)_0(\bar{k})$与集合 $\sim \{P_n \in \mathcal{X}(S_n) | \exists P_n \in \mathbb{P}_S^N(S_n)$等同，其中. $P_n = f_S^n \circ P_n\} = \mathcal{X}(S_n) \cap f_S^n(\mathbb{P}_S^N(S_n))$。由此我们证明了，对于任意 $n \in \mathbb{N}$，每个 $P \in \mathcal{X}_0(\bar{k})$都可以提升为一个 $P_n \in \mathcal{X}(S_n) \cap f_S^n(\mathbb{P}_S^N(S_n))$。

现在我们必须谨慎选择 P_n，使它们构成一个相容序列。等价地，我们必须证明，对每个 $n \in \mathbb{N}$，都可以选择 $P \in \mathcal{X}_0$ 在 $\mathrm{Crit}^n(\mathcal{X},\mathbb{P}_S^N)_0$ 中的一个 n次原像，使得它们彼此相容。但这立即可由每个连接态射 $\mathrm{Crit}^n(\mathcal{X},\mathbb{P}_S^N)_0 \to \mathrm{Crit}^{n-1}(\mathcal{X},\mathbb{P}_S^N)_0$ 的准有限性以及每个 $\mathrm{Crit}^n(\mathcal{X},\mathbb{P}_S^N)_0 \to \mathcal{X}_0$ 的满射性得出。

□

4 定理 1.0.3 的证明

我们将在本节证明 $f_L(X_L) = X_L$，从而完成证明。我们必须利用条件 $f_{S,\,0}$： $\mathbb{P}_{\bar{k}}^N \to \mathbb{P}_{\bar{k}}^N$ 是 Frob_q。我们吸收了 [Xie18 第 4.5] 小节中使用的思路。

请注意，我们已在备注 2.1.5 中假设 q 是 $|k|$ 的幂，因此可以记 $\sigma = \bar{}\mathrm{Frob}_q \in \mathrm{Gal}(k/k)$（应区分伽罗瓦群中的元素与 $\mathbb{P}_{\bar{k}}^N$ 的自态射，尽管二者都可以写作 Frob_q）。由于 $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sh}}/K) = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$，它诱导出一个 $L = k((t))$ 的同构，该同构固定 $K = k((t))$ 中的元素（即 Frob_q 对系数的作用）。因此，它诱导出一个映射 $\mathbb{P}_S^N(S) \to \mathbb{P}_S^N(S)$（我们可以将 $\mathbb{P}_S^N(S)$ 与 $\mathbb{P}_L^N(L)$ 等同），从而对每个 $n \in \mathbb{N}$ 也诱导出一个映射 $\mathbb{P}_S^N(S_n) \to \mathbb{P}_S^N(S_n)$。为简便起见，我们将这些映射都称为 σ。

由于 f_S 来自 f_R，我们可以看到，运算 σ： $\mathbb{P}_S^N(S) \to \mathbb{P}_S^N(S)$（或 $\mathbb{P}_S^N(S_n) \to \mathbb{P}_S^N(S_n)$）与复合 f_S可交换。

引理 4.0.1. 设 $n \in \mathbb{N}$。对于元素 $P_n \in f_S^n(\mathbb{P}_S^N(S_n))$，我们有 $f_S \circ P_n = \sigma(P_n)$。

证明。假设 $P_n = f_S^n \circ Q_n$对于某个 $Q_n \in \mathbb{P}_S^N(S_n)$成立。我们只需证明 $f_S^n \circ (f_S \circ Q_n) = f_S^n \circ (\sigma(Q_n))$，因为 $f_S \circ \sigma = \sigma \circ f_S$。由于 $f_S^*(\Omega^{\mathbb{P}_S^N/S}) \to \Omega^{\mathbb{P}_S^N/S}$是零映射，我们只需证明 $f_S \circ Q_n$ 和 $\sigma(Q_n)$在 $\mathbb{P}_{\bar{k}}^N(\bar{k})$中经由 [Gro71, (III 5.1)]化为同一个元素。但这由 $f_{S,0} = \mathrm{Frob}_q$即可推出。

□

现在，对于每个点 $P \in \mathcal{X}_0(k)$，我们可以利用命题 3.2.2 $\sim$ $\sim$ $\bar{}$中的相容序列 $\{P_n\}$ 构造一个元素 $P \in \mathcal{X}(S)$ $(\subseteq \mathbb{P}_S^N(S))$，根据引理 4.0.1，它满足 $f_S \circ P = \sigma(P)$。我们可以将 $\mathcal{X}(S)$ 视为 $X_L(L)$，并定义 $\mathscr{P} = \{\widetilde{P} | \ P \in \mathcal{X}_0(\bar{k})\} \subseteq X_L(L)(\subseteq \mathbb{P}_L^N(L))$。利用[Sta22 引理 33.19.2]，可知 $\mathscr{P}$ 是 X_L 中的稠密子集，因为闭点在 $\mathcal{X}_0$中稠密。将 $\mathscr{P}$ 视为 $X_L \subseteq \mathbb{P}_L^N$中的一个稠密素理想子集。对于每个素理想$\mathfrak{p} \in \mathscr{P}$，我们有 $f_L(\mathfrak{p}) = \sigma(\mathfrak{p})$，因为 $\mathbb{P}_L^N(L)$ 中对应于 $\mathfrak{p}$ 的映射满足相同的条件。

由于 f_L 也是一个有限态射，我们可以推出 $f_L(X_L) = f_L(\overline{\mathscr{P}) = \sigma}(\mathscr{P}) = \sigma}(X_L)$。这里， σ 通过作用于定义方程的系数，在 $\mathbb{P}_L^N$ 上作用于闭子集。但 X_L 来自 X ，而后者定义在 K 上，并且 σ 固定 K中的元素，因此我们有 $f_L(X_L) = \sigma(X_L) = X_L$，从而完成定理 2.1.2 的证明。由此，考虑引理 2.1.3 后，我们证明了定理 1.0.3。

5 定理 1.0.2 的证明

本节将证明定理 1.0.2 及其一个推广版本。不过，首先我们想提出定理 1.0.3 的一个推论，并给出一些例子。

5.1 一个推论和一些例子

推论 5.1.1. 设 K 是簇 V 上的函数域，定义在 $\overline{\mathbb{F}_p}$ 上。设 $f_V\colon \mathbb{P}_V^N \to \mathbb{P}_V^N$ 是一个 V-态射，满足:
1. $f_V^*(\Omega^{\mathbb{P}_V^N/V}) \to \Omega^{\mathbb{P}_V^N/V}$ 是零映射。2. 存在一个非奇异闭点 $u \in V$，使得 $f_u(= f_V \times_V \{u\})$: $\mathbb{P}^N_{\overline{\mathbb{F}_p}} \to \mathbb{P}^N_{\overline{\mathbb{F}_p}}$ 是某个 Frob$_q$ （q 是素数 p 的幂）。那么，由 f_V 诱导的 $\overline{K}$-态射 $f_{\overline{K}}\colon \mathbb{P}^N_{\overline{K}} \to \mathbb{P}^N_{\overline{K}}$ 满足 DML 性质。

证明。首先，我们可以用 V 中 u 的标准光滑仿射开邻域替换 V。然后，我们可以选取适当的正整数 m，使得 V、f_V 和 u 分别来自 $\overline{V}$、$f_{\overline{V}}$和 $\overline{u}$，其中 $\overline{V}$ 是定义在 $\mathbb{F}_{p^m}$ 上的光滑代数簇，$\overline{u} \in \overline{V}(\mathbb{F}_{p^m})$，且 $f_{\overline{V}}$ 是 $\mathbb{P}^N_{\overline{V}}$ 的一个 $\overline{V}$-自态射，满足这两个条件的类似形式，即 $f_{\overline{V}}^*(\Omega^{\mathbb{P}^N_{\overline{V}}/\overline{V}}) \to \Omega^{\mathbb{P}^N_{\overline{V}}/\overline{V}}$ 是零映射，且 $f_{\overline{u}}\colon \mathbb{P}^N_{\mathbb{F}_{p^m}} \to \mathbb{P}^N_{\mathbb{F}_{p^m}}$ 是 Frob$_q$。我们将 K' 记为 $\overline{V}$ 的函数域，它是 $\mathbb{F}_{p^m}$ 上的有限生成域；将 $f_{K'}$ 记为由 $f_{\overline{V}}$ 在一般纤维上诱导的 $\mathbb{P}^N_{K'}$ 的自态射。

为了使用定理 1.0.3，我们需要构造一个态射 Spec$(\mathcal{O}_L) \to \overline{V}$，其中 L 是特征为 p 的局部域。此态射应将 Spec$(\mathcal{O}_L)$ 中的一般点映到 $\overline{V}$ 中的一般点，并将 Spec$(\mathcal{O}_L)$ 中的特殊点映到 $\overline{u}$。根据 [Har77,(II 4.4)], ，我们的目标转化为构造一个包含 K'、特征为 p 的局部域 L，使得 $\mathcal{O}_L$ 支配 $\mathcal{O}_{\overline{V},\overline{u}}$。

记 $d = \dim \overline{V} = \dim \mathcal{O}_{\overline{V}、\overline{u}} = \text{tr.deg}.\ K'/\mathbb{F}_{p^m}$。由于 $\mathcal{O}_{\overline{V},\overline{u}}$ 是正则局部环，我们可以令 $x_1, \cdots, x_d$ 为其极大理想中的局部参数。可以看出， $x_1, \cdots, x_d$ 在 $\mathbb{F}_{p^m}$ 上代数无关，其中 $\mathbb{F}_{p^m}$ 是 $\mathcal{O}_{\overline{V},\overline{u}}$ 的剩余域，因此 K' 是 $\mathbb{F}_{p^m}(x_1, \cdots, x_d)$ 的有限扩张。但 tr.deg. $\mathbb{F}_{p^m}((t))/\mathbb{F}_{p^m} = \infty$，因为 Laurent 级数域不可数，所以我们可以选取 $g_1, \cdots, g_d \in t + t^2 \cdot \mathbb{F}_{p^m}[[t]]$，使它们在 $\overline{\quad\quad}\mathbb{F}_{p^m}$ 上代数无关。由此，我们通过复合 $\mathcal{O}_{\overline{V},\overline{u}} \hookrightarrow \mathcal{O}_{\overline{V},\overline{u}} = \mathbb{F}_{p^m}[[x_1, \cdots, x_d]] \to \mathbb{F}_{p^m}[[t]]$ 得到一个同态 $\mathcal{O}_{\overline{V},\overline{u}} \to \mathbb{F}_{p^m}[[t]]$，其中后一个映射对每个 $i = 1, \cdots, d$ 都将 x_i 映到 g_i。由于

$\mathcal{O}_{\overline{V},\,\overline{u}}$ 中的每个元素都在 $\mathbb{F}_{p^m}(x_1,\cdots,x_d)$ 上代数，而 $g_1,\cdots,g_d$ 在 $\mathbb{F}_{p^m}$ 上代数无关，因此可以看出，同态 $\mathcal{O}_{\overline{V},\,\overline{u}} \to \mathbb{F}_{p^m}[[t]]$ 是单射。此外，根据定义，它将 $\mathcal{O}_{\overline{V},\,\overline{u}}$ 的极大理想中的元素映到 $t\cdot\mathbb{F}_{p^m}[[t]]$ 中的元素。因此，我们只需取 $L=\mathbb{F}_{p^m}((t))$，它包含分式域 Frac($\mathcal{O}_{\overline{V},\,\overline{u}}$) $=K'$，并得到态射 Spec($\mathcal{O}_L$) $\to\overline{V}$。

一旦我们得到所需的态射 Spec($\mathcal{O}_L$) $\to\overline{V}$，就可以利用定理 1.0.3 得出结论：由 $f_{\mathcal{O}_L}$（或者更本质地说，由 $f_{\overline{V}}$）诱导的 $\mathbb{P}^N_{\overline{L}}$ 上的自态射 $f_{\overline{L}}$ 满足 DML 性质。因此，$f_{\overline{K}}$ 也满足 DML 性质，因为 $\overline{K}=\overline{K'}\subseteq\overline{L}$，且 $f_{\overline{L}}$ 也由 $f_{\overline{K'}}$诱导。至此，我们完成了证明。

□

注 5.1.2. 若 V 是定义在 $\overline{\mathbb{F}_p}$ 上的非奇异簇，且 $u\in V(\overline{\mathbb{F}_p})$，则我们可以构造一个态射 Spec($\mathcal{O}_L$) $\to V$，将 Spec($\mathcal{O}_L$) 中的一般点映到 V 中的一般点，并将 Spec($\mathcal{O}_L$) 中的特殊点映到 u，其中 $L=\overline{\mathbb{F}_p}((t))$。证明与上文完全相同。

现在我们给出本文结果的两个直接应用。

例 5.1.3. 设 K 是特征为 $p>0$ 的局部域。设 $k=\overline{\mathbb{F}_p}\cap K$ 是 K 的系数域（它与 $\mathcal{O}_K$ 的有限剩余域同构）。那么自态射 $f\colon \mathbb{P}^N_{\overline{K}}\to\mathbb{P}^N_{\overline{K}}$,

$$\begin{bmatrix} x_0\\ x_1\\ \vdots\\ x_N\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}\sum_{i=0}^N a_{0i}x_i^q+g_0(x_0^p,\cdots,x_N^p)\\ \sum_{i=0}^N a_{1i}x_i^q+g_1(x_0^p,\cdots,x_N^p)\\ \vdots\\ \sum_{i=0}^N a_{Ni}x_i^q+g_N(x_0^p,\cdots,x_N^p)\end{bmatrix}$$

满足 DML 性质，其中 $A=(a_{ij})_{(N+1)\times(N+1)}\in GL_{N+1}(k)$，$q$ 是 p 的幂，且g_0、$\cdots$、$g_N\in\mathfrak{m}_K[x_0,\cdots,x_N]$是次数为$=\frac{q}{p}$的齐次多项式。

证明。考虑 注1.0.4后，这只是定理 1.0.3的一个特例 . □

例 5.1.4。设 $K=\overline{\mathbb{F}_p}(t_1,\cdots,t_d)$。那么自态射 $f\colon \mathbb{P}^N_{\overline{K}}\to\mathbb{P}^N_{\overline{K}}$,

$$\begin{bmatrix} x_0\\ x_1\\ \vdots\\ x_N\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}\sum_{i=0}^N a_{0i}x_i^q+g_0(x_0^p,\cdots,x_N^p)\\ \sum_{i=0}^N a_{1i}x_i^q+g_1(x_0^p,\cdots,x_N^p)\\ \vdots\\ \sum_{i=0}^N a_{Ni}x_i^q+g_N(x_0^p,\cdots,x_N^p)\end{bmatrix}$$

满足 DML 性质，其中 $A=(a_{ij})_{(N+1)\times(N+1)}\in GL_{N+1}(\overline{\mathbb{F}_p})$，$q$ 是 p 的幂，且

g_0、 $\cdots$、 $g_N \in \overline{\mathbb{F}_p}[t_1, \cdots, t_d][x_0, \cdots, x_N]$ 是次数为 $= \frac{q}{p}$ 的齐次多项式，使得 $\overline{\mathbb{F}_p}[t_1, \cdots, t_d]$ 中的每个系数的常数项都为零。

证明。由上面的例 5.1.3 可得此结论。 □

5.2 定理 1.0.2 的证明及其推广

现在我们将证明定理 1.0.2。首先，我们将证明一个技术性引理，以说明定理 1.0.2 的陈述中的矩阵 A 不失一般性地可以假设为单位矩阵。然后，我们将使用嵌入论证完成证明。

引理 5.2.1。设 K 是特征为 $p > 0$ 的代数闭域。设 q 是 p 的幂。那么，对每个矩阵 $A \in GL_N(K)$，都存在一个矩阵 $B \in GL_N(K)$，使得 $B^{(q)} = AB$，其中 $B^{(q)}$ 是 $\mathrm{Frob}_q(B)$ 的缩写。换言之，我们要求 AB 中的每个元素都是 B 中对应元素的 q 次幂。

证明。等价地，我们需要证明存在一组线性无关向量 $\{\beta_1, \cdots, \beta_N\} \subseteq K^N$，使得对于每个 i，都有 $\beta_i^{(q)} = A\beta_i$；其中 $\beta^{(q)} = \mathrm{Frob}_q(\beta)$ 的含义与本引理陈述中的相同。由于 $A \in GL_N(K)$，且 K 是特征为 p 的代数闭域，根据交理论可以看出，方程 $\beta^{(q)} = A\beta$ 在 K^N 中恰有 q^N 个不同的解（注意，它只有有限多个解，且每个解的重数均为 1）。

设 $\{\beta_1, \cdots, \beta_m\}$ 是这些 q^N 个解中的一个极大的线性无关子集。那么，每个解 β 都具有形式 $\sum c_i\beta_i$，其中每个 $c_i \in K$。现在，$\beta^{(q)} = A\beta$ 可以写作 $\sum_{i=1}^{m} c_i^q \beta_i^{(q)} = A\sum_{i=1}^{m} c_i\beta_i$。因此 $A\sum_{i=1}^{m} c_i^q\beta_i = A\sum_{i=1}^{m} c_i\beta_i$，从而 $\sum_{i=1}^{m} c_i^q\beta_i = \sum_{i=1}^{m} c_i\beta_i$，因为 A 可逆。现在，由 $\{\beta_1, \cdots, \beta_m\}$ 的线性无关性可知，每个 $c_i \in \mathbb{F}_q$，所以该方程至多有 q^m 个解。因此 $m \geq N$，证毕。

□

推论 5.2.2. 为了证明定理 1.0.2，我们不妨假设其中的矩阵 A 是单位矩阵。

证明. 由引理 5.2.1，我们可以找到 $B \in GL_{N+1}(K)$，使得 $B^{(q)} = A^{-1}B$。那么，由于 $A^{-1} \in GL_{N+1}(\mathcal{O}_K)$，$B$ 自动属于 $GL_{N+1}(\mathcal{O}_K)$。记 σ 为与 B 对应的 $\mathbb{P}_K^N$ 自同构。可以看出，$\sigma^{-1}f\sigma$ 与 f 具有相同的形式，且矩阵变为单位矩阵。因此证明完成，因为如果 $\sigma^{-1}f\sigma$ 满足 DML 性质，那么 f 也满足 DML 性质。

□

接下来，我们将使用嵌入论证。从现在起，我们将 F 记为 $\overline{\mathbb{F}_p((t))}$，并将 L 记为 $\overline{\mathbb{F}_p((t))}$。注意，$L \subseteq F$。

引理 5.2.3. 设 $a_1, \cdots, a_n$ 是极大理想 $\mathfrak{m}_F \subseteq \mathcal{O}_F$ 中的 n 个元素。那么可以找到一个局部域 K_0 及一个嵌入 $i\colon \mathbb{F}_p(a_1, \cdots, a_n) \hookrightarrow K_0$，使得 $i(a_1) \cdots, i(a_n)$ 全都属于 $\mathfrak{m}_{K_0} \subseteq \mathcal{O}_{K_0}$。

证明. 首先，根据 [Har77, (I 4.7A 4.8A)],，不失一般性，我们可以假设 $a_1, \cdots, a_m$ 是 $\mathbb{F}_p(a_1, \cdots, a_n)/\mathbb{F}_p$ 的一组分离超越基。也就是说，$\{a_1, \cdots, a_m\}$ 在 $\mathbb{F}_p$ 上代数无关，并且 $\mathbb{F}_p(a_1, \cdots, a_n)/\mathbb{F}_p(a_1, \cdots, a_m)$ 是一个有限可分扩张。因此，我们可以找到一个元素 $\theta \in \mathbb{F}_p(a_1, \cdots, a_n)$，使得 $\mathbb{F}_p(a_1, \cdots, a_n) = \mathbb{F}_p(a_1, \cdots, a_m)(\theta)$。

令 $\theta^d + f_{d-1}\theta^{d-1} + \cdots + f_0 = 0$ 为 θ 在 $\mathbb{F}_p(a_1, \cdots, a_m)$ 上的最小多项式。写作 $a_j = \sum_{k=0}^{d-1} g_{jk}\theta^k$，其中对于每个 $j = 1, 2, \cdots, n$，所有 $g_{jk} \in \mathbb{F}_p(a_1, \cdots, a_m)$。由于 $F_0 = \mathbb{F}_p((t))$ 在 F 中稠密，且局部域不可数，因此我们可以找到 $a'_1, \cdots, a'_m \in F_0$，使它们在 $\mathbb{F}_p$ 上代数无关，并且每个 a'_i 都非常非常接近 a_i。因此，我们可以找到 $x^d + f_{d-1}(a'_1, \cdots, a'_m)x^{d-1} + \cdots + f_0(a'_1, \cdots, a'_m)$ 的一个根 $\theta' \in F_0$，使其充分接近 θ。现在令 $K_0 = \mathbb{F}_p((t))(a'_1, \cdots, a'_m)(\theta')$，它是一个局部域，于是我们得到一个嵌入 $i\colon \mathbb{F}_p(a_1, \cdots, a_n) \hookrightarrow K_0$。

由于对每个 $j = 1, \cdots, n$ 以及每个 $k = 0, \cdots, d-1$，$i(a_j) = \sum g_{jk}(a'_1, \cdots, a'_m)\theta'^k$ 都非常接近 a_j，而且 $i(a_j)$ 绝对值都小于 1，因此我们知道每个 $i(a_j)$ 的绝对值也小于 1。换言之，$i(a_1), \cdots, i(a_n)$ 都属于 $\mathfrak{m}_{K_0}$。至此，证明完毕。

□

引理 5.2.4. 设 $A = \overline{\mathbb{F}_p}[x_1, \cdots, x_n]/\mathfrak{p}$ 是一个整环。若 $\mathfrak{p}$ 中的每个多项式的常数项都为零，则存在一个嵌入 $A \hookrightarrow \mathcal{O}_L$，将每个 x_i 映到 $\mathfrak{m}_L$。

证明. 记 $V = \mathrm{Spec}(A)$，它是一个定义在 $\overline{\mathbb{F}_p}$ 上的簇，并记 $u = (0, \cdots, 0) \in V(\overline{\mathbb{F}_p})$。利用[dJ96 的定理 3.1]，我们可以找到一个定义在 $\overline{\mathbb{F}_p}$ 上的非奇异簇 V'，使得存在一个占优真 $\overline{\mathbb{F}_p}$-态射 $\phi\colon V' \to V$。因此，ϕ 将 V' 的一般点映到 V 的一般点，并且存在一点 $u' \in V'(\overline{\mathbb{F}_p})$ 映到 u。结合注 5.1.2，我们得到一个态射 $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_L) \to V$，它将 $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_L)$中的一般点映到 V 中的一般点，并将 $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_L)$中的特殊点映到 u。至此，证明完毕。

□

结合上述两个引理，我们可以推出下面的命题。

命题 5.2.5. 设 K 是一个特征为 $p > 0$ 的完备代数闭非阿基米德赋值域。设 $a_1, \cdots, a_n$ 是极大理想 $\mathfrak{m}_K \subseteq \mathcal{O}_K$ 中的 n 个元素。那么可以找到一个局部域 K_0 及一个嵌入 $i\colon \mathbb{F}_p(a_1, \cdots, a_n) \hookrightarrow K_0$，使得 $i(a_1), \cdots, i(a_n)$ 都属于 $\mathfrak{m}_{K_0} \subseteq \mathcal{O}_{K_0}$。

现在我们可以证明定理 1.0.2。

定理 1.0.2 的证明。根据推论 5.2.2，不妨假设矩阵 A 是单位矩阵。令 $a_1, \cdots, a_n \in \mathfrak{m}_K$ 分别为 $g_0, \cdots, g_N$的所有系数。利用命题 5.2.5，我们可以将 $\mathbb{F}_p(a_1, \cdots, a_n)$嵌入到一个局部域 K_0 中，使得每个 a_i 在此嵌入下都映入 $\mathfrak{m}_{K_0}$。我们希望证明，对于任意点 $x \in \mathbb{P}^N(K)$和任意闭子簇 $V \subsetneq \mathbb{P}^N_K$，集合 $\{n \in \mathbb{N} \mid f^n(x) \in V\}$ 是有限个等差数列的并集。

令 x_0、$\cdots$、x_N为 x的系数，并令 y_1、$\cdots$、y_m为 V的定义方程的系数。由于 K_0 在 $\mathbb{F}_p$上的超越次数为无穷，我们可以将嵌入 $\mathbb{F}_p(a_1、\cdots、a_n) \hookrightarrow K_0$ 延拓为嵌入 $\mathbb{F}_p(a_1、\cdots、a_n、x_0、\cdots、x_N、y_1、\cdots、y_m) \hookrightarrow K_0'$，其中 K_0'是 K_0的有限扩张。因此，我们已将所有数据下降到局部域 K_0'，结论由例 5.1.3 得出。

□

我们想指出，事实上，通过上述嵌入论证，我们已经证明了一个更一般的结论。但由于它不如定理 1.0.2 简洁，我们将在下面将其表述为一个命题。

命题 5.2.6. 设 K 是特征为 $p > 0$ 的代数闭域。设 $f : \mathbb{P}_K^N \to \mathbb{P}_K^N$,

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{N} a_{0i}x_i^q + g_0(x_0^p, \cdots, x_N^p) \\ \sum_{i=0}^{N} a_{1i}x_i^q + g_1(x_0^p, \cdots, x_N^p) \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{N} a_{Ni}x_i^q + g_N(x_0^p, \cdots, x_N^p) \end{bmatrix}$$

是一个自态射，其中 $A = (a_{ij})_{(N+1)\times(N+1)} \in GL_{N+1}(\overline{\mathbb{F}_p})$，$q$ 是 p 的幂，且 $g_0, \cdots, g_N \in K[x_0, \cdots, x_N]$ 是次数为 $= \frac{q}{p}$ 的齐次多项式。设 $a_1, \cdots, a_n$ 是 $g_0, \cdots, g_N$ 的所有系数。若对于每个常数项非零的多项式 $g \in \overline{\mathbb{F}_p}[y_1, \cdots, y_n]$，都有 $g(a_1, \cdots, a_n) \neq 0$，则 f 满足 DML 性质（在此条件下，f 将自动成为一个自态射）。

证明。与定理 1.0.2 的证明完全相同。 □

注 5.2.7。事实上，如果对于某个正整数 n 和某个 $\mathbb{P}_K^N$ 的自同构 σ，$\sigma f^n \sigma^{-1}$ 满足 DML 性质，那么自态射 f 也将满足 DML 性质。特别地，我们可以看到f： $\mathbb{P}_K^N \to \mathbb{P}_K^N$,

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{N} a_{0i}x_i^q + g_0(x_0^p, x_1^p, x_2^p, \cdots, x_N^p) \\ \sum_{i=0}^{N} a_{1i}x_i^q + g_1(x_0, x_1^p, x_2^p, \cdots, x_N^p) \\ \sum_{i=0}^{N} a_{2i}x_i^q + g_2(x_0, x_1, x_2^p, \cdots, x_N^p) \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{N} a_{Ni}x_i^q + g_N(x_0, \cdots, x_{N-1}, x_N^p) \end{bmatrix}$$

满足 DML 性质，其中 $K, A = (a_{ij})^{(N+1)\times(N+1)}, q$和 $g_0, \cdots, g_N$ 的系数与定理 1.0.2 或命题 5.2.6 中的相同，因为 f^N 具有预期的形式。

参考文献

[BGH+13] R. L. Benedetto、D. Ghioca、B. A. Hutz、P. Kurlberg、T. Scanlon 和 T. J. Tucker。《模素数的有理映射周期》。《数学年刊》，355:637–660，2013。[BGKT12] R. L. Benedetto、D. Ghioca、P. Kurlberg 和 T. J. Tucker。《动力 Mordell–Lang 猜想的一个情形》（附 U. Zannier 的附录）。《数学年刊》，352:1–26，2012。[BGT10] J. P. Bell、D. Ghioca 和 T. J. Tucker。关于 ´etale 映射的动力 Mordell–Lang 问题。《美国数学杂志》，132(6):1655–1675，2010。[BGT16] J. P. Bell、D. Ghioca 和 T. J. Tucker。《动力学莫德尔–朗猜想》，《数学调查与专著》第 210 卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2016。[BLR90] S. Bosch、W. L¨utkebohmert 和 M. Raynaud。《N´eron 模型》，《数学及其边界领域成果》第 21 卷（第 3 辑）。施普林格出版社，柏林，1990。[CGSZ21] P. Corvaja、D. Ghioca、T. Scanlon 和 U. Zannier。正特征域上定义的半阿贝尔簇自态射的动力 Mordell–Lang 猜想。《朱西厄数学研究所杂志》，20(2):669–698，2021。[Cor] C. Corpet。正特征下的莫德尔–朗猜想与马宁–芒福德猜想。《arXiv:1212.5193》。[dJ96] A. J. de Jong。光滑性、半稳定性与交替。《高等科学研究所数学出版物》，(83):51–93，1996。[Fak14] N. Fakhruddin。一般自态射的代数动力学，《代数与数论》，8(3):587–608，2014。[Gro71] A. Grothendieck。《Etale 覆盖与基本群》（SGA 1），《数学讲义》第 224 卷。施普林格出版社，海德堡，1971。[GT08] D. Ghioca 和 T. J. Tucker。加法群的动力学莫德尔–朗猜想。《Compositio Mathematica》，144(2):304–316，2008。[GT09] D. Ghioca 和 T. J. Tucker。周期点、线性化映射与动力莫德尔–朗问题。《数论杂志》，129(6):1392–1403，2009。[GTZ08] D. Ghioca、T. J. Tucker 和 M. E. Zieve。多项式轨道的交集与动力莫德尔–朗猜想。《数学发明》，171:463–483，2008。

[GTZ12] D. Ghioca、T. J. Tucker 和 M. E. Zieve。《多项式轨道之间的线性关系》。《杜克数学杂志》，161：1379–1410，2012。[GX20] D. Ghioca 和 J. Xie。《斜线性自映射的动力 Mordell–Lang 猜想》（附录由 M. Wibmer 撰写）。《国际数学研究通知》，2020(21)：7433–7453，2020。[Har77] R. Hartshorne。《代数几何》，数学研究生教材第 52 卷。施普林格出版社，纽约，1977。[Hru01] E. Hrushovski。差分域模型论与曼宁-芒福德猜想。《纯粹与应用逻辑年刊》，112(1)：43–115，2001。[Liu02] Q. Liu。《代数几何与算术曲线》，牛津数学研究生教材第 6 卷。牛津大学出版社，牛津，2002。由 Reinie Ern´e 从法文译出；牛津科学出版物。[Mat80] H. Matsumura。《交换代数》。W. A. Benjamin Co.，纽约，1980。第 2 版。[MS14] A. Medvedev 和 T. Scanlon。多项式动力系统的不变簇。《数学年刊》，179(1)：81–177，2014。[PR04] R. Pink 和 D. R¨ossler。关于半阿贝尔簇的 ψ-不变子簇及曼宁-芒福德猜想。《代数几何杂志》，13(4)：771–798，2004。[R¨os13] D. R¨ossler。正特征下的曼宁-芒福德猜想与莫德尔–朗猜想。《代数与数论》，7(8)：2039–2057，2013。[Sta22] Stacks 项目作者。Stacks 项目，2022。https://stacks.math.columbia.edu。[Xie14] J. Xie。仿射平面上双有理多项式态射的动力 Mordell–Lang 猜想。《数学年刊》，360(1–2)：457–480，2014。[Xie17] J. Xie。仿射平面多项式自同态的动力 Mordell–Lang 猜想。《Ast´erisque》，394：vi+110，2017。[Xie18] J. Xie。弗罗贝尼乌斯提升的代数动力学。《代数与数论》，12(7)：1715–1748，2018。[Xie23] J. Xie。关于正特征下代数动力学的评论。《Journal f¨ur die reine und angewandte Mathematik》（《克雷尔数学杂志》），2023。https://doi.org/10.1515/crelle- 2022-0093。