arXiv:2302.00949v1 [gr-qc] 2 Feb 2023

各向异性宇宙学中克莱因-戈尔登方程的李对称性与诺特对称性分类

Andronikos Paliathanasis*

系统科学研究所，德班理工大学，邮政信箱1334，德班4000，南非共和国；北智利天主教大学数学系，安托法加斯塔大道0610号，邮政信箱1280，安托法加斯塔，智利；2023年2月3日

摘要

我们对各向异性黎曼流形中克莱因-戈尔登方程的势进行了详细的群分类。具体而言，我们研究了 Bianchi I、Bianchi III 和 Bianchi V 四维各向异性齐次时空中的克莱因-戈尔登方程，并推导出方程具有李对称性和诺特对称性时势函数的所有闭式表达式。我们应用了已有结果，这些结果将微分方程的李对称性与定义拉普拉斯算子的黎曼空间的共线变换联系起来，并以系统的方式解决了分类问题。关键词：李对称性；克莱因-戈尔登方程；各向异性时空；诺特对称性；共形 Killing 矢量

1 引言

研究非线性微分方程的一种系统方法是李对称性分析 [1–4]。李对称性方法的新颖之处在于，通过系统的方-

*电子邮箱：anpaliat@phys.uoa.gr

法可以确定不变变换是否存在。随后可利用相似变换简化给定的微分方程。将相似变换应用于给定的微分方程后，我们可以推导出一个自变量更少的新微分方程。此外，还可以构造守恒律，这对于研究给定微分方程的性质至关重要 [1]。李对称性已应用于应用数学各领域中非线性微分方程的研究 [5–13]。

E. Noether 建立了一套系统的方法，用于构造和确定微分方程的守恒律。在 Noether 的著名著作中， 1918 [14],Noether 指出，某些李对称性与变分原理的对称性相关。对于变分积分的每一种对称性，Noether 都推导出了一个用于导出守恒律的精确公式。这种构造守恒律的极其简单的方法，在物理科学和其他应用数学理论中都非常重要。

在广义相对论中，自然空间是由黎曼流形描述的四维空间。本文研究各向异性齐次几何中的克莱因-戈尔登方程的李对称性和诺特对称性。各向异性齐次时空尤为重要，因为它们可以描述宇宙的极早期阶段，即暴胀时期之前的阶段；在这一时期，各向异性在物理变量的演化中发挥着重要作用。文献中有大量研究运用对称性分析，对弯曲空间中的测地线方程 [15–18], 、波动方程 [19, 20] 以及引力场方程 [21–24]进行分类。

已有研究探讨了某些特别重要的微分方程的对称性与背景几何的共线变换之间的关系；背景几何决定了相应的微分算子。事实上，黎曼流形上测地线方程的李对称性由背景时空的射影群元素构造而成[25, 26]。若在场方程中考虑力项的存在，这一关系仍然成立 [27]。对于测地线拉格朗日量的诺特对称性，则可由背景几何的相似群元素导出 [26]。这些几何结果也已推广至高阶对称性，相关讨论可参见 [28] 及其中的参考文献。至于偏微分方程，泊松方程的对称性由定义拉普拉斯算子的黎曼度量的共形代数元素构造而成 [29]。因此，显然，为了解决本文的分类问题，我们应详细介绍共形

代数对我们所考虑的均匀各向异性时空的分类。本文结构如下。

第 2 节详细介绍无穷小变换理论以及黎曼流形中基本运动的定义。此外，我们还对 Bianchi I、Bianchi III 和 Bianchi V 时空的 Killing 对称性、自相似向量及真共形 Killing 向量进行分类。第 3 节介绍微分方程理论的基本要素。对于泊松方程和克莱因-戈尔登方程，我们重现了已有结果，说明如何直接由背景几何的共形 Killing 矢量构造李对称性。此外，文中还给出了克莱因-戈尔登方程诺特对称性的类似结果。第 4 节解决了本文研究中的分类问题。我们给出了克莱因-戈尔登方程的所有势函数形式，在这些形式下，该方程存在非平凡对称向量。最后，第 5 节总结了我们的结果。

2 黎曼空间的无穷小变换与运动

设黎曼流形 V^n，维数为 $V^n = n$，其度量张量为 $g_{\mu\nu}$。现在考虑由参数方程 $\bar{x}^\mu = \bar{x}^\mu(x^\nu, \varepsilon)$ 定义的单参数点变换，该变换定义了经过点 $P(x^\mu, 0)$ 的群轨道。因此，点 P 处的切向量可表示为

$$X = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial \varepsilon}|_{\varepsilon\to 0}\partial_{x^\mu}|_P. \tag{1}$$

X 是点 P附近无穷小变换的生成向量

$$\bar{x}^\mu = x^\mu + \varepsilon\xi^\mu(x^\nu), \tag{2}$$

其中 $\xi^\mu = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial \varepsilon}|_{\varepsilon\to 0}$.

设 $F(x^\mu)$ 是定义在黎曼流形上、取值于点 P 的函数。因此，在单参数点变换 (1) 的作用下，该函数可写为 $F(\bar{x}^\mu)$。

根据定义，函数 F 在单参数点变换 (1) 的作用下保持不变，当且仅当它在变换前后具有相同的值/表达式。也就是说，$F(\bar{x}^\mu) = F(x^\mu)$，或等价地，$F(\bar{x}^\mu) = 0$，当 $F(x^\mu) = 0$ 时。后一个定义可

用无穷小生成元的数学表达式来描述

$$X\left(F\right)=0. \tag{3}$$

等价地，$\xi^{\mu}\frac{\partial F}{\partial x^{\mu}}=0$。

表达式 (3) 是函数 $F(x^{\mu})$ 在基流形上单参数点变换作用下保持不变的李对称条件。若条件 (3) 对某个特定向量场 X 成立，则 X 是函数 $F(x^{\mu})$ 的李对称向量。

现在考虑 $\Omega^{\mu}(x^{\nu})$ 是一个几何对象，其一般变换规则为 $[30]\bar{}\,\Omega^{\mu\prime}=\Phi^{\mu}\left(\Omega^{\nu},x^{\nu},\bar{x}^{\nu}\right)$。当 $\Omega^{\mu}\left(x^{\nu}\right)$ 是线性齐次几何对象时，变换规则为 $[30]\ \Phi^{\mu}(\Omega^{\nu},x^{\nu},\bar{x}^{\nu})\ =\ J_{\lambda}^{\mu}(x^{\nu},\bar{x}^{\nu})\,\Omega^{\lambda}$.其中 $J_{\lambda}^{\mu}($ $x^{\nu},\bar{x}^{\nu})$ 是生成元为 (1) 的单参数点变换的雅可比矩阵，即 $J_{\lambda}^{\mu}=\frac{\partial\bar{x}^{\mu}}{\partial x^{\nu}}$。

类似于函数的定义，几何对象 $\Omega^{\mu}\left(x^{\nu}\right)$ 在参数为一的点变换 (3) 下保持不变，当且仅当 $\Omega^{\mu}\left(\bar{x}^{\nu}\right)\ =\Omega^{\mu}\left(x^{\nu}\right)$，或者

$$\mathcal{L}_{X}\Omega^{\mu}\left(x^{\nu}\right)=0, \tag{4}$$

其中，$\mathcal{L}_{X}$是关于向量场 X的李导数。当 $\Omega^{\mu}\left(x^{\nu}\right)$ 是函数时，李导数满足 $\mathcal{L}_{X}\Omega\ \equiv X\left(\Omega\right)$。

几何对象的李对称性的更一般概念可通过共线变换来概括。现在考虑几何对象 Ω 满足以下表达式

$$\mathcal{L}_{X}\Omega=\Psi \tag{5}$$

其中，Ψ 是一个张量场，其分量及指标对称性与 Ω 相同。若条件 (5) 成立，则称 X 为几何对象 Ω 的共线变换；共线变换的类型由张量场 Ψ定义。

黎曼流形的度量张量 $g_{\mu\nu}$ 是一个线性齐次几何对象，其李导数定义为

$$\mathcal{L}_{X}g_{\mu\nu}=X_{(\mu;\nu)} \tag{6}$$

其中，；表示关于列维-奇维塔联络的协变导数。

对于度量张量，共线变换的概念表示为

$$\mathcal{L}_{X}g_{\mu\nu}=2\psi g_{\mu\nu}+2H_{\mu\nu} \tag{7}$$

其中 ψ 是共形函数， $H_{\mu\nu}$ 是对称无迹张量，即 $H^{\mu}_{\ \mu}=0$。度量张量最重要的共线变换是满足 $H_{\mu\nu}=0$的运动。这些包括 Killing 矢量、自相似向量和共形 Killing 向量。

无穷小变换(2)的生成元(1)被称为黎曼空间 V^n上的 Killing矢量场（KV），当且仅当度量张量在该变换的作用下保持不变，即

$$\mathcal{L}_X g_{\mu\nu}=0. \tag{8}$$

此外，如果存在函数 $\psi(x^{\mu})$ 使得无穷小生成元 X 是黎曼空间 V^n 上的共形 Killing 向量（CKV），则

$$\mathcal{L}_X g_{\mu\nu}=2\psi g_{\mu\nu} \tag{9}$$

其中 $\psi=\frac{1}{n}X^{\mu}_{;\mu}$。

一类重要的共线变换是 ψ 为常数的情形，此时 CKV 变为相似Killing矢量（HV）。此外，当 $\psi_{;\mu\nu}=0$时，向量场 X 是黎曼流形上的特殊共形Killing矢量（sp. CKV）。事实上，当 $\psi=0$时，CKV 也是 KV。本文将把既不是 HV 也不是 KV 的 CKV 称为真共形 Killing 向量。

Killing 向量、HV 和 CKV 构成李代数，分别称为 Killing代数（G_{KV}）、相似代数（G_{HV}）和共形Killing代数（G_{CV}）。当黎曼流形的维数 V^n 满足 $n\geq 2$时， G_{KV} 是 G_{HV} 的子代数，而后者又是共形Killing代数的子代数，即 $G_{KV}\subseteq G_{HV}\subseteq G_{CV}$。对于任意黎曼流形，至多存在一个真相似矢量。此外，Killing代数的最大维数为 $\frac{1}{2}n$（$n+1$），而共形Killing代数的最大维数为 $_{1\,2}$（$n+1$）（$n+2$）维。

由 KV 生成元产生的点变换具有保持自平行线长度和角度不变的性质；而由自相似向量生成的点变换则保持角度不变，长度会按一个常数参数缩放。然而，当点变换由 CKV 生成时，只有自平行线的角度保持不变。

度量张量存在共线变换，这对于黎曼几何所描述的物理空间的性质至关重要。事实上，在大尺度上，我们的宇宙由弗里德曼–勒梅特–罗伯逊–沃克线元描述，该线元具有一个最大对称的三维超曲面。广义相对论中的一类重要精确解是自相似时空。这类解的主要性质是，在对因变量或自变量进行适当缩放后，映射结果仍与自身一致，因此存在一个真

齐次向量。精确时空的自相似解描述了引力理论 [31,32] 最一般解的渐近行为。具有真共形 Killing 向量的时空也特别值得关注；更多详情见 [33]。

2.1 各向异性时空的共形Killing矢量

Bianchi时空描述各向异性均匀宇宙学，具有特殊的研究意义，因为它们可以描述宇宙演化的极早期阶段。在这一类时空中，度量张量的线元沿时间轴分层，其空间切片是三维均匀超曲面。Bianchi解决了所有三维实李代数的分类问题，并指出共有九种李代数。因此，根据三维均匀超曲面所具有的Killing代数，可得到九种Bianchi模型。

Bianchi模型的一般线元为

$$ds^2 = -N^2(t)\,dt^2 + A^2(t)(\omega_1)^2 + B^2(t)(\omega_2)^2 + C^2(t)(\omega_3)^2\,. \tag{10}$$

其中，ω_i、$i = 1$、2、3是基本一形式，而 $N(t)$ $A(t)$、$B(t)$、$C(t)$是仅依赖于时间参数的函数，见 [34]。本研究关注Bianchi I、Bianchi III和Bianchi V时空。这些时空的坐标表达式均为对角形式。

事实上，对于这些时空，1–形式为

$$\begin{aligned}
\text{Bianchi I} &: \ \omega_1 = dx\ ,\ \omega_2 = dy\ ,\ \omega_3 = dz\ ,\\
\text{Bianchi III} &: \ \omega_1 = dx\ ,\ \omega_2 = dy\ ,\ \omega_3 = e^{-x}dz\ ,\\
\text{Bianchi V} &: \ \omega_1 = dx\ ,\ \omega_2 = e^{x}dy\ ,\ \omega_3 = e^{x}dz\ .
\end{aligned}$$

Bianchi时空的 Killing代数见 [34]。然而，Bianchi I、Bianchi III 和 Bianchi V 时空的真共形 Killing 向量此前已在[35,36]中推导得出。

当度量张量给出的线元为以下形式时，Bianchi I 时空存在真共形 Killing 向量

$$ds^2 = C^2(t)\left[-dt^2 + e^{-\frac{2}{c}t}dx^2 + e^{-\frac{2\alpha_1}{c}t}dy^2 + dz^2\right] \tag{11}$$

真共形 Killing 向量的向量场

$$X_1 = c\partial_t + x\partial_x + \alpha_1 y\partial_y \tag{12}$$

且共形因子为 $\psi(X_1) = c\,(\ln|C|)_t$。当 $C(t) = e^{\psi_0 t}$ 时， X_1 退化为真齐次共形 Killing 向量；而当 $C(t) = C_0$ 时， X_1 是 Killing 向量。

此外，当线元具有如下形式时

$$ds^2 = C^2(t)\left[-dt^2 + t^{2\frac{\alpha_2-1}{\alpha_2}}dx^2 + t^{2\frac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_2}}dy^2 + dz^2\right] \tag{13}$$

所得共形 Killing 向量为

$$X_2 = \alpha_2 t\partial_t + x\partial_x + \alpha_1 y\partial_y + \alpha_2 z\partial_z \tag{14}$$

对应的共形因子为 $\psi(X_2) = \alpha_2\left[1 + t(\ln|C|)_t\right]$。事实上，当 $C(t) = t^{\psi_0-1}$,X_2 时，它是一个真齐次共形 Killing 向量；而当 $C(t) = t^{-1}$, X_2 时，它简化为一个 Killing 向量。

当 Bianchi III 时空存在真共形 Killing 向量时，

$$ds^2 = A^2(t)\left[e^{m\lambda t}\left(-dt^2 + dx^2\right) + e^{m(\lambda-1)t}dy^2 + e^{-2x}dz^2\right]. \tag{15}$$

此时对应的向量场为

$$X_3 = \frac{2}{m}\partial_t + y\partial_y + \lambda z\partial_z \tag{16}$$

且 $\psi_{(III)}(X_3) = \frac{2}{m}\frac{A_t}{A} + \lambda$。事实上，当 $A(t) = e^{A_0 t}$ 时，该向量场简化为一个齐次向量；当 $A(t) = e^{-\frac{\lambda}{2}mx}$ 时，则简化为一个 Killing 向量。

最后，对于 Bianchi V 时空族，线元

$$ds^2 = A^2(t)\left[e^{m\lambda t}\left(-dt^2 + dx^2\right) + e^{2x}\left(e^{m(\lambda-1)t}dy^2 + dz^2\right)\right] \tag{17}$$

具有真共形 Killing 向量 X_3，其共形因子与之前相同。

请注意，以下我们将不探讨时空退化为局部旋转空间，或尺度因子为常函数的情形。

3 微分方程的对称性

从几何角度看，微分方程可视为空间中的一个函数 $H = H(x^\nu, u^A, u^A{}_{,\,\mu}, u^A{}_{,\,\mu\nu})$，其中 $B = B\left(x^\nu, u^A, u^A{}_{,\,\mu}, u^A{}_{,\,\mu\nu}\right)$, $u^A = u^A(x^\mu)$ 表示因变量， x^μ 表示自变量，而 $u^A{}_{,\,\mu} = \frac{\partial u^A}{\partial u^\mu}$。

现在假设微分方程H的基流形上的无穷小变换为,

$$\bar{x}^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon\xi^{\mu}(x^{\nu}, u^{B}) \ , \tag{18}$$

$$\bar{u}^{A} = \bar{u}^{A} + \varepsilon\eta^{A}(x^{\nu}, u^{B}) \ , \tag{19}$$

采用向量生成元

$$\mathbf{X} = \xi^{\mu}(x^{\nu}, u^{B})\partial_{x^{\mu}} + \eta^{A}(x^{\nu}, u^{B})\partial_{u^{A}} \ . \tag{20}$$

与函数的情形类似，当且仅当下式成立时，几何向量场 X 是 H =$H(x^{\nu}, u^{A}, u^{A}{}_{,\mu}, u^{A}{}_{,\mu\nu})$ 的李对称性： [2,3]

$$X^{[2]}(H) = 0, \tag{21}$$

其中， $X^{[2]}$ 是向量场 X 在空间 $B = B\left(x^{\nu}, u^{A}, u^{A}{}_{,\mu}, u^{A}{}_{,\mu\nu}\right)$中的二阶延拓，定义如下:

$$X^{[2]} = X + \eta^{A}_{\mu}\partial_{u^{A}_{\mu}} + \eta^{A}_{\mu\nu}\partial_{u^{A}_{\mu\nu}} \tag{22}$$

其中

$$\eta^{A}_{\mu} = D_{\mu}\eta^{A} - D_{\mu}\xi^{\nu}u^{A}_{,\nu} \ , \tag{23}$$

and

$$\eta^{A}_{\mu\nu} = D_{\nu}\eta^{A}_{\mu} - D_{\nu}D_{\mu}\xi^{\kappa}u^{A}_{,\kappa} \ ,$$

其中， D_{μ} 是全导数。

对于给定微分方程，应用李对称性的一种直接方法是通过推导特征函数来构造不变函数。特征函数可用于定义相似变换，从而在偏微分方程的情形下减少独立变量的数量。

这些不变量由以下拉格朗日系统的解确定。

$$\frac{dx^{\mu}}{\xi^{\mu}} = \frac{du^{A}}{\eta^{A}} = \frac{du^{A}_{\mu}}{\eta^{A}_{\mu}} = \frac{du^{A}_{\mu\nu}}{\eta^{A}_{\mu\nu}}. \tag{24}$$

当微分方程 H 由变分原理导出，且其拉格朗日函数为 $L = L(x^{\mu}, u^{A}, u^{A}{}_{,\ \mu})$，例如 $H \equiv \mathrm{E}\,(L) = 0$，其中 E 是欧拉算子时，微分方程 H 的李点对称 X 是 H的诺特点对称，当且仅当满足以下条件

$$\mathbf{X}^{[1]}L + LD_{i}\xi^{i} = D_{i}A^{i}\left(x^{k}, u^{C}\right), \tag{25}$$

其中 $\mathbf{X}^{[1]}$ 是 X 的第一延拓，而 A^μ 是一个待确定的向量场。条件 (25) 是 Noether 第二定理。Noether 第二定理指出，对于任意满足条件 (25) 的向量场 X，以下函数是一个守恒律

$$I^\mu = \xi^\nu \left(u_\nu^A \frac{\partial L}{\partial u_\mu^A} - \delta_\nu^\mu L \right) - \eta^A \frac{\partial L}{\partial u_\mu^A} + A^\mu \ , \tag{26}$$

也就是说，$D_\mu I^\mu = 0$, [2,3]。

3.1 泊松方程

设 Δ 为黎曼流形 V^n 上的拉普拉斯算子,

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\sqrt{g} g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right),$$

则泊松方程写作

$$\Delta u = f\left(x^\mu, u\right), \tag{27}$$

或等价地

$$g^{\mu\nu} u_{\mu\nu} - \Gamma^\mu u_\mu = f\left(x^\nu, u\right), \tag{28}$$

其中 $\Gamma^\mu = \Gamma^\mu_{\nu\kappa} g^{\nu\kappa}$ 和 $\Gamma^\mu_{\nu\kappa}$ 是度量张量 $g_{\mu\nu}$ 的列维-奇维塔联络的克里斯托费尔符号。

当 $f = f(u)$ 时泊松方程的李对称性分析已在 [37],中给出，而对于 $f = f(x^i, u)$ 的分析见 [29]。事实上，泊松方程的李（点）对称性与黎曼流形的共形代数中的元素相关，具体如下所述。

定理1 泊松方程的李对称性由黎曼流形背景度量张量 $g_{\mu\nu}$ 的通用共形 Killing 向量构造:

a) 对于 $n > 2$，李对称向量具有如下通用形式

$$X = \xi^\mu\left(x^\nu\right)\partial_\mu + \left(\frac{2-n}{2} \psi\left(x^\nu\right) u + a_0 u + b\left(x^\nu\right) \right) \partial_u, \tag{29}$$

其中 $\xi^i(x^\nu)$ 是黎曼流形的共形 Killing 向量，其共形因子为 $\psi(x^\nu)$，并满足以下条件

$$\frac{2-n}{2} \Delta\psi u + g^{\mu\nu} b_{\mu;\nu} - \xi^\nu f_{,\nu} - \frac{2-n}{2} \psi u f_{,u} - \frac{n+2}{2} \psi f - b f_{,u} = 0, \tag{30}$$

b) 对于 $n=2$，一般的李对称向量为

$$X=\xi^{\mu}\left(x^{\nu}\right)\partial_{\mu}+\left(a_{0}u+b\left(x^{\nu}\right)\right)\partial_{u}, \tag{31}$$

其中 ξ^{μ} 是共形 Killing 向量，且满足以下条件

$$g^{\mu\nu}b_{;\mu\nu}-\xi^{\nu}f_{,\nu}-a_{0}uf_{,u}+\left(a_{0}-2\psi\right)f-bf_{,u}=0, \tag{32}$$

也就是说，函数 b 是拉普拉斯方程的解。

泊松方程的一个特例是克莱因-戈尔登方程，其中 $f(x^{\nu},u)=V(x^{\nu})\ u$，即

$$\Delta u-V\left(x^{\nu}\right)u=0, \tag{33}$$

其中 $V(x^{\mu})$ 是势函数。对于克莱因-戈尔登方程的李对称性，可得

定理 2 对于克莱因-戈登方程 (33)，其李对称性由黎曼流形的共形代数元素构造：

a) 对于 $n>2$，一般对称向量表示为

$$X=\xi^{\mu}\left(x^{\nu}\right)\partial_{\mu}+\left(\frac{2-n}{2}\psi\left(x^{\nu}\right)u+a_{0}u+b\left(x^{\nu}\right)\right)\partial_{u}, \tag{34}$$

其中，ξ^{μ} 是共形因子为 $\psi(x^{\nu})$ 的共形 Killing 向量，$b(x^{\nu})$ 满足带有约束条件的方程 (33)

$$\xi^{\nu}V_{,\nu}+2\psi V-\frac{2-n}{2}\Delta\psi=0, \tag{35}$$

b) 对于 $n=2$，一般对称向量写作

$$X=\xi^{\mu}\left(x^{\nu}\right)\partial_{\mu}+\left(a_{0}u+b\left(x^{\nu}\right)\right)\partial_{u}, \tag{36}$$

其中，ξ^{μ} 是共形因子为 $\psi(x^{\nu})$ 的共形 Killing 向量，$b(x^{\nu})$ 满足带有约束的方程 (33)

$$\xi^{\nu}V_{,\nu}+2\psi V=0. \tag{37}$$

克莱因-戈尔登方程 (33) 可由拉格朗日函数的变分导出

$$L\left(x^{\nu},u,u_{,\nu}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}u_{,\mu}u_{,\nu}+\frac{1}{2}\sqrt{|g|}V\left(x^{\nu}\right)u^{2}. \tag{38}$$

因此，对于克莱因-戈登拉格朗日量（38）的诺特对称性，有如下定理。

定理 3 克莱因-戈登方程（33）的李点对称性由黎曼流形的共形代数元素生成，其中一般的诺特对称性形式如下

$$X_N = \xi^\mu\left(x^\nu\right)\partial_\mu + \left(\frac{2-n}{2}\psi\left(x^\nu\right)u\right)\partial_u,$$

其中，相应的向量为 $A_\mu = \frac{2-n}{4}\sqrt{|g|}\psi_{,\ \mu}\left(x^\nu\right)u^2$，其中 $\xi^\mu\left(x^\nu\right)$ 是一个共形 Killing 向量，其共形因子为 $\psi\left(x^\nu\right)$。约束方程为

$$\xi^\nu V_{,\nu} + 2\psi V - \frac{2-n}{2}\Delta\psi = 0. \tag{39}$$

我们指出，对于克莱因-戈尔登方程，所有非平凡李对称性也都是诺特对称性。相应的守恒律形式为

$$I^\mu = \sqrt{|g|}\left(\left(\frac{1}{2}g^{\kappa\nu}u_{,\kappa}u_{,\nu} - \frac{1}{2}V\left(x^\nu\right)u^2\right)\xi^\mu - \eta\frac{1}{2}g^{\mu\nu}u_{,\nu} + \frac{2-n}{4}\psi_{,\mu}\left(x^\nu\right)u^2\right). \tag{40}$$

4 Klei各向异性几何中的克莱因-戈尔登方程

接下来，我们求解各向异性宇宙学中克莱因-戈尔登方程（33）的势函数 $V\left(x^\mu\right)$ 的分类问题；在这种情况下，克莱因-戈尔登方程具有非平凡李对称性。平凡对称性是向量场 $X_u = u\partial_u$，$X_b = b\partial_u$，它们对任意势函数 $V\left(x^\nu\right)$ 都成立。

4.1 Bianchi I

在 Bianchi I 时空中，克莱因-戈尔登方程写作

$$\left(-\frac{u_{,tt}}{N^2} + \frac{u_{,xx}}{A^2} + \frac{u_{,yy}}{B^2} + \frac{u_{,zz}}{C^2}\right) + \frac{1}{N^2}\left(\frac{N_{,t}}{N}u_{,t} - \frac{A_{,t}}{A}u_{,x} - \frac{C_{,t}}{C}u_{,y} - \frac{C_{,t}}{C}u_{,z}\right) - \frac{V\left(t,x,y,z\right)}{A^2B^2C}u^2 = 0. \tag{41}$$

对于尺度因子的任意函数形式，背景空间都具有三个 Killing 向量：$\xi_I^1 = \partial_x$、$\xi_I^2 = \partial_y$ 和 $\xi_I^3 = \partial_z$。

因此，由定理 2 可知：(i) 当 $V_i^I(t,x,y,z) = V(t,y,z)$ 时，ξ_I^1 是李对称性；(ii) 当 $V(t,x,y,z) = V_{ii}^I(t,x,z)$ 时，ξ_I^2 是李对称性；(iii) 当 $V(t,x,y,z) = V_{iii}^I(t,x,y)$ 时，ξ_I^3 是李对称性；(iv) 当 $V_{iv}^I(t,x,y,z) = V\left(t, y-\frac{\beta}{\alpha}x, z-\frac{\gamma}{\alpha}x\right)$ 时，$\alpha\xi_I^1+\beta\xi_I^2+\gamma\xi_I^3$ 是李对称性。

在特别情况下，当线元为式 (11) 所示形式时，若且唯若满足以下条件，共形 Killing 向量 X_1 产生克莱因-戈尔登方程的李对称向量 $X = X_1 + \left(-2c\left(\ln\ |C|\right)_{,t} u\right)\partial_u$

$$V_v^I(t,x,y,z) = \frac{cC_{,tt} - (\alpha_1+1)C_{,t}}{cC^3} + \frac{1}{C^2}U\left(xe^{-\frac{t}{c}}, ye^{-\frac{a_1}{c}t}, z\right). \tag{42}$$

同样，对于线元为（11）的 Bianchi I 时空，当且仅当.....时，向量场 $X = X_1 + \alpha\xi_I^1 + \beta\xi_I^2 + \gamma\xi_I^3 + \left(-2c\left(\ln\ |C|\right)_{,t} u\right)\partial_u$ 是克莱因-戈尔登方程的李对称性

$$V_{vi}^I(t,x,y,z) = \frac{cC_{,tt} - (\alpha_1+1)C_{,t}}{cC^3} + \frac{1}{C^2}U\left((x+\alpha)e^{-\frac{t}{c}}, \left(y+\frac{\beta}{a_1}\right)e^{-\frac{a_1}{c}t}, z-\frac{\gamma}{c}\tau\right). \tag{43}$$

另一方面，对于 Bianchi I 线元（13），当势函数.....时，共形 Killing 向量 X_2 是克莱因-戈尔登方程（41）的李对称向量 $X = X_2 - \alpha_2\left[1 + t\left(\ln|C|\right)_{,t}\right]u\partial_u$ 的生成元

$$V_{vii}^I(t,x,y,z) = \frac{1}{t^2C^2}\left(U\left(xt^{-\frac{1}{a_2}}, yt^{-\frac{a_1}{a_2}}, \frac{z}{t}\right) + F(t)\right) \tag{44}$$

其中

$$\begin{aligned} F(t) &= -\frac{1}{a_2C^2}\left(a_2t^2CC_{,ttt} + tC_{,tt}\left(a_2C_{,t} + C\left(a_1 - 4a_2 + 1\right)\right)\right) + \\ &\quad -\frac{1}{a_2C^2}\left(C_{,t}\left(1 + a_1 - 2a_2\right)\left(C - tC_{,t}\right)\right). \end{aligned} \tag{45}$$

此外，当.....时，向量场 $X = X_2 + \alpha\xi_I^1 + \beta\xi_I^2 + \gamma\xi_I^3 - \alpha_2\left[1 + t\left(\ln\ |C|\right)_{,t}\right]\partial_u$ 是克莱因-戈尔登方程的李对称性

$$V_{viii}^I(t,x,y,z) = \frac{1}{t^2C^2}\left(U\left((x+\alpha)t^{-\frac{1}{a_2}}, \left(y+\frac{\beta}{a_1}\right)t^{-\frac{a_1}{a_2}}, \left(z+\frac{\gamma}{a_2}\right)t^{-1}\right) + F(t)\right). \tag{46}$$

4.1.1 不变函数

现在，我们来确定与每个允许的李点对称性相对应的不变函数。应用不变函数可以确定相似变换，并将克莱因-戈尔登方程中的因变量个数减少。

对于向量场 ξ_I^1，不变函数为 $\{t,y,z,u\}$。类似地，对于向量场ξ_I^2，我们确定李不变量 $\{t,x,z,u\}$。此外，对于 ξ_I^3，李不变量为 $\{t,x,y,u\}$；而对于向量场 $\alpha\xi_I^1 + \beta\xi_I^2 + \gamma\xi_I^3$，李不变量为 $\left\{t, y-\frac{\beta}{\alpha}x, z-\frac{\gamma}{\alpha}x, u\right\}$。

此外，对于势函数 $V_v^I$where $X = X_1 + \left(-2c\left(\ln\ |C|\right)_{,t} u\right)\partial_u$为李对称性时，计算得出的李不变量为 $\left\{xe^{-\frac{t}{c}}, ye^{-\frac{a_1}{c}t}, z, uC(t)^2\right\}$。对于势 V_{vi}^I，李不变量为 $\left\{(x+\alpha)\ e^{-\frac{t}{c}}, \left(y+\frac{\beta}{a_1}\right)e^{-\frac{a_1}{c}t}, z-\frac{\gamma}{c}\tau, uC(t)^2\right\}$。类似地

对于势函数 $V_{vii}^{I}(t,x,y,z)$ 和 $V_{viii}^{I}(t,x,y,z)$，由李对称性 $X_2-\alpha_2\left[1+t(\ln|C|)_{,t}\right]u\partial_u$ 和 $X_2+\alpha\xi_I^1+\beta\xi_I^2+\gamma\xi_I^3-\alpha_2\left[1+t(\ln|C|)_{,t}\right]\partial_u$ 分别给出的李不变量为$\left\{xt^{-\frac{1}{a_2}},yt^{-\frac{a_1}{a_2}},\frac{z}{t},ut^2C(t)^2\right\}$和 $\left\{(x+\alpha)\,t^{-\frac{1}{a_2}},\left(y+\frac{\beta}{a_1}\right)t^{-\frac{a_1}{a_2}},\left(z+\frac{\gamma}{a_2}\right)t^{-1},ut^2C(t)^2\right\}$。

4.1.2 守恒律

应用诺特定理和表达式 (40)，由此得到与克莱因-戈尔登方程 (41) 所允许的李对称性相关的守恒律如下:

$$I^x\left(\xi_I^1\right)=\frac{NABC}{2}\left(\left(\left(-\frac{1}{N^2}u_{,t}^2+\frac{1}{A^2}u_{,x}^2+\frac{1}{B^2}u_{,y}^2+\frac{1}{C^2}u_{,z}^2\right)-V_i^I(t,x,y,z)\,u^2\right)\right). \tag{47}$$

$$I^t\left(\xi_I^1\right)=0\ ,\ I^y\left(\xi_I^1\right)=0\text{ and }I^z\left(\xi_I^1\right)=0. \tag{48}$$

对于向量场 ξ_I^2，存在守恒律

$$I^y\left(\xi_I^2\right)=\frac{NABC}{2}\left(\left(\left(-\frac{1}{N^2}u_{,t}^2+\frac{1}{A^2}u_{,x}^2+\frac{1}{B^2}u_{,y}^2+\frac{1}{C^2}u_{,z}^2\right)-V_{ii}^I(t,x,y,z)\,u^2\right)\right). \tag{49}$$

$$I^t\left(\xi_I^2\right)=0\ ,\ I^x\left(\xi_I^2\right)=0\text{ and }I^z\left(\xi_I^2\right)=0. \tag{50}$$

而对于向量场 ξ_I^3，所得的诺特守恒律为

$$I^z\left(\xi_I^3\right)=\frac{NABC}{2}\left(\left(\left(-\frac{1}{N^2}u_{,t}^2+\frac{1}{A^2}u_{,x}^2+\frac{1}{B^2}u_{,y}^2+\frac{1}{C^2}u_{,z}^2\right)-V_{iii}^I(t,x,y,z)\,u^2\right)\right). \tag{51}$$

$$I^t\left(\xi_I^3\right)=0\ ,\ I^x\left(\xi_I^3\right)=0\text{ and }I^y\left(\xi_I^3\right)=0. \tag{52}$$

对于一般向量场 $\alpha\xi_I^1+\beta\xi_I^2+\gamma\xi_I^3$，我们计算得到守恒律

$$I^x\left(\alpha\xi_I^1+\beta\xi_I^2+\gamma\xi_I^3\right)=\alpha\frac{NABC}{2}\left(\left(\left(-\frac{1}{N^2}u_{,t}^2+\frac{1}{A^2}u_{,x}^2+\frac{1}{B^2}u_{,y}^2+\frac{1}{C^2}u_{,z}^2\right)-V_{iv}^I(t,x,y,z)\,u^2\right)\right), \tag{53}$$

$$I^y\left(\alpha\xi_I^1+\beta\xi_I^2+\gamma\xi_I^3\right)=\beta\frac{NABC}{2}\left(\left(\left(-\frac{1}{N^2}u_{,t}^2+\frac{1}{A^2}u_{,x}^2+\frac{1}{B^2}u_{,y}^2+\frac{1}{C^2}u_{,z}^2\right)-V_{iv}^I(t,x,y,z)\,u^2\right)\right), \tag{54}$$

$$I^z\left(\alpha\xi_I^1+\beta\xi_I^2+\gamma\xi_I^3\right)=\gamma\frac{NABC}{2}\left(\left(\left(-\frac{1}{N^2}u_{,t}^2+\frac{1}{A^2}u_{,x}^2+\frac{1}{B^2}u_{,y}^2+\frac{1}{C^2}u_{,z}^2\right)-V_{iv}^I(t,x,y,z)\,u^2\right)\right) \tag{55}$$

$$I^t\left(\alpha\xi_I^1+\beta\xi_I^2+\gamma\xi_I^3\right)=0\ . \tag{56}$$

对于势 $V_v^I(t,x,y,z)$，存在如下守恒律

$$I^t(X_1)=c\frac{e^{-\frac{t(1+\alpha_1)}{c}}C^4}{2}\left(H_v^I-\left(\left(\ln|C|\right)_{,t}u\right)\frac{1}{C}u^{,t}-\frac{1}{2C}\left(\ln|C|\right)_{,tt}u^2\right). \tag{57}$$

$$I^x\left(X_1\right)=\frac{e^{-\frac{t(1+\alpha_1)}{c}}C^4}{2}\left(xH_v^I-\left(c\left(\ln|C|\right)_{,t}u\right)\frac{1}{C}u^{,x}\right). \tag{58}$$

$$I^y\left(X_1\right)=\frac{e^{-\frac{t(1+\alpha_1)}{c}}C^4}{2}\left(\alpha_1 yH_v^I-\left(c\left(\ln|C|\right)_{,t}u\right)\frac{1}{C}u^{,y}\right). \tag{59}$$

$$I^z\left(X_1\right)=\frac{e^{-\frac{t(1+\alpha_1)}{c}}C^4}{2}\left(-\left(c\left(\ln|C|\right)_{,t}u\right)\frac{1}{N}u^{,z}\right). \tag{60}$$

其中

$$H_v^I=\left(\left(-\frac{1}{C^2}u_{,t}^2+\frac{e^{\frac{2t}{c}}}{C^2}u_{,x}^2+\frac{e^{\frac{2\alpha_1}{c}t}}{C^2}u_{,y}^2+\frac{1}{C^2}u_{,z}^2\right)-V_v^I\left(t,x,y,z\right)u^2\right) \tag{61}$$

对于势函数 $V_{vi}^I(t,x,y,z)$，可推导出相应的守恒律

$$I^t=I^t\left(X_1\right), \tag{62}$$

$$I^x=I^x\left(X_1\right)+\alpha I^x\left(\xi_I^1\right)\ , \tag{63}$$

$$I^y=I^y\left(X_1\right)+\beta I^y\left(\xi_I^1\right)\ , \tag{64}$$

$$I^z=I^z\left(X_1\right)+\gamma I^z\left(\xi_I^1\right)\ , \tag{65}$$

对于 $N(t)=C(t)\quad A(t)=e^{-\frac{t}{c}}C(t)$ 和 $B(t)=e^{-\frac{\alpha_1}{c}t}C(t)$，其中势函数为 $V_{vi}^I(t,x,y,z)$。对于势函数V_{vii}^I，其中 X_2 是李对称向量的生成元，相应的诺特守恒律为

$$I^t\left(X_2\right)=\frac{C^4}{2}t^{2-\frac{1+\alpha_1}{\alpha_2}}\left(\alpha_2 tH_{vii}^I-\alpha_2\left(\left(\ln|C|\right)_{,t}u\right)\frac{1}{C}u^{,t}-\frac{1}{2C}\alpha_2\left[1+t(\ln|C|)_{,t}\right]_{,t}u^2\right). \tag{66}$$

$$I^x\left(X_2\right)=\frac{C^4}{2}t^{2-\frac{1+\alpha_1}{\alpha_2}}\left(xH_{vii}^I-\left(\alpha_2\left[1+t(\ln|C|)_{,t}\right]u\right)\frac{1}{C}u^{,x}\right). \tag{67}$$

$$I^y\left(X_2\right)=\frac{C^4}{2}t^{2-\frac{1+\alpha_1}{\alpha_2}}\left(\alpha_1 yH_{vii}^I-\left(\alpha_2\left[1+t(\ln|C|)_{,t}\right]u\right)\frac{1}{C}u^{,y}\right). \tag{68}$$

$$I^z\left(X_2\right)=\frac{C^4}{2}t^{2-\frac{1+\alpha_1}{\alpha_2}}\left(\alpha_2 zH_{vii}^I-\left(\alpha_2\left[1+t(\ln|C|)_{,t}\right]u\right)\frac{1}{N}u^{,z}\right). \tag{69}$$

其中

$$H_{vii}^I=\left(\left(-\frac{1}{C^2}u_{,t}^2+\frac{1}{C^2t^{2-\frac{2}{\alpha_2}}}u_{,x}^2+\frac{1}{C^2t^{2-\frac{2\alpha_1}{\alpha_2}}}u_{,y}^2+\frac{1}{C^2}u_{,z}^2\right)-V_{vii}^I\left(t,x,y,z\right)u^2\right). \tag{70}$$

最后，对于势函数 $V_{viii}^I(t,x,y,z)$，守恒律为

$$I^t=I^t\left(X_2\right), \tag{71}$$

$$I^x = I^x\left(X_2\right) + \alpha I^x\left(\xi_I^1\right) \ , \tag{72}$$

$$I^y = I^y\left(X_2\right) + \beta I^y\left(\xi_I^1\right) \ , \tag{73}$$

$$I^z = I^z\left(X_2\right) + \gamma I^z\left(\xi_I^1\right) \ , \tag{74}$$

对于 $N(t)$、$=C(t)$、 $A(t)$、$=t^{1-\frac{1}{\alpha_2}}C(t)$， $B(t)$、$=t^{1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}C(t)$，以及势函数 $V_{viii}^I(t,x,y,z)$

4.2 Bianchi III

在 Bianchi III 几何中，克莱因-戈尔登方程可写为

$$\left(-\frac{u_{,tt}}{N^2}+\frac{u_{,xx}}{A^2}+\frac{u_{,yy}}{B^2}+e^{2x}\frac{u_{,zz}}{C^2}\right)+\frac{1}{N^2}\left(\frac{N_{.t}}{N}u_{,t}-\frac{A_{,t}}{A}u_{,x}-\frac{C_{,t}}{C}u_{,y}-\frac{C_{,t}}{C}u_{,z}\right)-\frac{1}{A^4}u_{,x}-\frac{V\left(t,x,y,z\right)}{A^2B^2C}u^2=0. \tag{75}$$

Bianchi III 时空的三个 Killing 向量为 $\xi_{III}^1=\partial_x+z\partial_z$、 $\xi_{III}^2=\partial_y$ 和 $\xi_{III}^3=\partial_z$。因此，(i) 当 $V_i^{III}(t,x,y,z)=V(t,y,ze^{-x})$ 时， ξ_{III}^1是方程 (75) 的李对称性；(ii) 当 $V_{ii}^{III}(t,x,y,z)=V(t,x,z)$ 时， ξ_{III}^2是李对称性；(iii) 当$V_{iii}^{III}(t,x,y,z)=V(t,x,y)$ 时， ξ_{III}^3是李对称性；(iv) 当 $V_{iv}^{III}(t,x,y,z)=V\left(t,y-\frac{\beta}{\alpha}x,\left(z+\frac{\gamma}{\alpha}\right)e^{-x}\right)$时， $\alpha\xi_{III}^1+\beta\xi_{III}^2+\gamma\xi_{III}^3$是李对称性。

对于式（15），当 Bianchi III 时空存在额外的共形 Killing 向量 X_3时，可知向量场 $X=X_3-\left(\frac{2}{m}\frac{A_{,t}}{A}+\lambda\right)u\partial_u$ 是克莱因-戈尔登方程（75）的李对称向量，其中

$$V_v^{III}\left(t,x,y,z\right)=\frac{1}{A^2}e^{-m\lambda t}U\left(x,ye^{-\frac{m}{2}t},ze^{-\frac{m\lambda}{2}t}\right)+\frac{m\left(\lambda-1\right)A_{,t}+2A_{,tt}}{2A^3}. \tag{76}$$

因此，对于势函数，向量场 $X=X_3+\alpha\xi_{III}^1+\beta\xi_{III}^2+\gamma\xi_{III}^3-\left(\frac{2}{m}\frac{A_{,t}}{A}+\lambda\right)u\partial_u$ 是方程（75）的李对称性

$$V_{vi}^{III}\left(t,x,y,z\right)=\frac{1}{A^2}e^{-m\lambda t}U\left(x-\frac{\alpha m}{2}t,\left(y+\beta\right)e^{-\frac{m}{2}t},\left(z+\frac{\gamma}{\lambda+\alpha}\right)e^{-\frac{m(\lambda+\alpha)}{2}t}\right)+\frac{m\left(\lambda-1\right)A_{,t}+2A_{,tt}}{2A^3}. \tag{77}$$

4.2.1 不变函数

接下来，我们推导上述各势函数对应情形下的不变函数。对于 $V_i^{III}(t,x,y,z)$，李不变量为 $\{t,y,ze^{-x},u\}$；对于 $V_{ii}^{III}(t,x,y,z)$ 和李对称向量 ξ_{III}^2，我们确定李不变量 $\{t,x,z,u\}$；而对于势函数 $V_{iii}^{III}(t,x,y,z)$，根据 ξ_{III}^3，李不变量为 $\{t,x,y,u\}$。同理，对于一般向量

场 $\alpha\xi^1_{III}+\beta\xi^2_{III}+\gamma\xi^3_{III}$ 和势函数 $V^{III}_{iv}(t,x,y,z)$，相应的李不变量为 $\left(t,y-\frac{\beta}{\alpha}x,\left(z+\frac{\gamma}{\alpha}\right)e^{-x},\right.$ $\left.u\right)$。

当真共形 Killing 向量产生李对称性时，对于势函数为 $V^{III}_{v}(t,x,y,z)$ 的克莱因-戈尔登方程（75），李不变量为 $\left\{x,ye^{-\frac{m}{2}t},ze^{-\frac{m\lambda}{2}t},e^{m\lambda t}u\right\}$；而对于势函数为 $V^{III}_{v}(t,x,y,z)$ 的情形，所得李不变量为 $\left\{x-\frac{\alpha m}{2}t,(y+\beta)\ e^{-\frac{m}{2}t},\left(z+\right.\right.$

4.2.2 守恒律

对于克莱因-戈尔登方程（75）的 Noether 守恒律，当$V^{III}_{i}(t,x,y,z)$ 时，可得

$$I^x\left(\xi^1_{III}\right)=\frac{NABC}{2}e^{-x}\left(\left(\left(-\frac{1}{N^2}u^2_{,t}+\frac{1}{A^2}u^2_{,x}+\frac{1}{B^2}u^2_{,y}+\frac{e^{2x}}{C^2}u^2_{,z}\right)-V^{III}_i\left(t,x,y,z\right)u^2\right)\right) \tag{78}$$

$$I^z\left(\xi^1_{III}\right)=\frac{NABC}{2}e^{-x}\left(z\left(\left(-\frac{1}{N^2}u^2_{,t}+\frac{1}{A^2}u^2_{,x}+\frac{1}{B^2}u^2_{,y}+\frac{e^{2x}}{C^2}u^2_{,z}\right)-V^{III}_i\left(t,x,y,z\right)u^2\right)\right) \tag{79}$$

$$I^t\left(\xi^1_{III}\right)=0\text{ and }I^y\left(\xi^1_{III}\right)=0. \tag{80}$$

对于势函数 $V^{III}_{ii}(t,x,y,z)$，Noether 守恒律的分量如下

$$I^y\left(\xi^2_{III}\right)=\frac{NABC}{2}e^{-x}\left(\left(\left(-\frac{1}{N^2}u^2_{,t}+\frac{1}{A^2}u^2_{,x}+\frac{1}{B^2}u^2_{,y}+\frac{e^{2x}}{C^2}u^2_{,z}\right)-V^{III}_{ii}\left(t,x,y,z\right)u^2\right)\right) \tag{81}$$

$$I^t\left(\xi^2_{III}\right)=0\ ,\ I^x\left(\xi^2_{III}\right)=0\text{ and }I^z\left(\xi^2_{III}\right)=0. \tag{82}$$

同样，对于 $V^{III}_{iii}(t,x,y,z)$，我们确定守恒律

$$I^z\left(\xi^3_{III}\right)=\frac{NABC}{2}e^{-x}\left(\left(\left(-\frac{1}{N^2}u^2_{,t}+\frac{1}{A^2}u^2_{,x}+\frac{1}{B^2}u^2_{,y}+\frac{e^{2x}}{C^2}u^2_{,z}\right)-V^{III}_{ii}\left(t,x,y,z\right)u^2\right)\right) \tag{83}$$

$$I^t\left(\xi^3_{III}\right)=0\ ,\ I^x\left(\xi^3_{III}\right)=0\text{ and }I^y\left(\xi^3_{III}\right)=0. \tag{84}$$

对于势为 $V^{III}_{iv}(t,x,y,z)$ 的克莱因-戈尔登方程，守恒律的分量为

$$I^x\left(\alpha\xi^1_{III}+\beta\xi^2_{III}+\gamma\xi^3_{III}\right)=\alpha I^x\left(\xi^1_{III}\right)\ , \tag{85}$$

$$I^y\left(\alpha\xi^1_{III}+\beta\xi^2_{III}+\gamma\xi^3_{III}\right)=\beta I^y\left(\xi^2_{III}\right)\ , \tag{86}$$

$$I^z\left(\alpha\xi^1_{III}+\beta\xi^2_{III}+\gamma\xi^3_{III}\right)=\alpha I^z\left(\xi^1_{III}\right)+\gamma I^z\left(\xi^3_{III}\right), \tag{87}$$

and

$$I^t\left(\alpha\xi^1_{III}+\beta\xi^2_{III}+\gamma\xi^3_{III}\right)=0, \tag{88}$$

其势函数为 $V^{III}_{iv}(t,x,y,z)$。

此外 ，对于 $V^{III}_{v}(t,x,y,z)$，守恒律具有以下分量

$$I^t\left(X_3\right)=\frac{\bar{A}^4e^{\frac{(3m\lambda-1)}{2}t}e^{-x}}{2}\left(\frac{2}{m}H^{III}_V-\left(\left(\frac{2}{m}\frac{\bar{A}_{,t}}{\bar{A}}+\lambda\right)u\right)\frac{1}{A}u^{,t}-\frac{1}{2\bar{A}e^{\frac{m}{2}\lambda t}}\left(\frac{2}{m}\frac{\bar{A}_{,t}}{\bar{A}}+\lambda\right)_t u^2\right). \tag{89}$$

$$I^x\left(X_3\right)=\frac{\bar{A}^4e^{\frac{(3m\lambda-1)}{2}t}e^{-x}}{2}\left(-\left(\left(\frac{2}{m}\frac{\bar{A}_{,t}}{\bar{A}}+\lambda\right)u\right)\frac{1}{\bar{A}e^{\frac{1}{2}\lambda t}}u^{,x}\right). \tag{90}$$

$$I^y\left(X_3\right)=\frac{\bar{A}^4e^{\frac{(3m\lambda-1)}{2}t}e^{-x}}{2}\left(yH^{III}_V-\left(\left(\frac{2}{m}\frac{A_{,t}}{A}+\lambda\right)u\right)\frac{1}{\bar{A}e^{m(\lambda-1)t}}u^{,y}\right). \tag{91}$$

$$I^z\left(X_3\right)=\frac{\bar{A}^4e^{\frac{(3m\lambda-1)}{2}t}e^{-x}}{2}\left(\lambda zH^{III}_V-\left(\left(\frac{2}{m}\frac{\bar{A}_{,t}}{\bar{A}}+\lambda\right)u\right)\frac{1}{\bar{A}e^{-x}}u^{,z}\right). \tag{92}$$

此时

$$H^{III}_V=\left(\left(-\frac{1}{\bar{A}^2e^{m\lambda t}}u^2_{,t}+\frac{1}{\bar{A}^2}u^2_{,x}+\frac{1}{\bar{A}^2e^{m(\lambda-1)t}}u^2_{,y}+\frac{e^{2x}}{C^2}u^2_{,z}\right)-V^{III}_v\left(t,x,y,z\right)u^2\right)$$

最后，对于势 $V^{III}_{vi}(t,x,y,z)$，与一般对称向量 $X_3+\alpha\xi^1_{III}+\beta\xi^2_{III}+\gamma\xi^3_{III}-\left(\frac{2}{m}\frac{A_{,t}}{A}+\lambda\right)u\partial_u$ 相关的克莱因 - 戈尔登方程 (75) 的守恒律具有以下分量

$$\begin{aligned}
I^t &= I^t\left(X_3\right)\ , &(93)\\
I^x &= I^x\left(X_3\right)+\alpha I^x\left(\xi^1_{III}\right)\ , &(94)\\
I^y &= I^y\left(X_3\right)+\beta I^y\left(\xi^2_{III}\right)\ , &(95)\\
I^z &= I^z\left(X_3\right)+\alpha I^z\left(\xi^1_{III}\right)+\gamma I^z\left(\xi^3_{III}\right)\ , &(96)
\end{aligned}$$

其中 $N=\bar{A}(t)\,e^{\frac{m}{2}\lambda t}$, $B=\bar{A}(t)\,e^{\frac{m}{2}(\lambda-1)^t}$, $C(t)=\bar{A}(t)$ 以及 $A(t)=e^{m\lambda t}\bar{A}(t)$，势函数为 $V^{III}_{vii}(t,x,y,z)$。

4.3 Bianchi V

对于 Bianchi V 时空，克莱因-戈尔登方程为

$$\left(-\frac{u_{,tt}}{N^2}+\frac{u_{,xx}}{A^2}+e^{-2x}\left(\frac{u_{,yy}}{B^2}+\frac{u_{,zz}}{C^2}\right)\right)+\frac{1}{N^2}\left(\frac{N_{,t}}{N}u_{,t}-\frac{A_{,t}}{A}u_{,x}-\frac{C_{,t}}{C}u_{,y}-\frac{C_{,t}}{C}u_{,z}\right)+\frac{2}{A^4}u_{,x}-\frac{V\left(t,x,y,z\right)}{A^2B^2C}u^2=0 \tag{97}$$

Bianchi V 时空的 Killing 向量为 $\xi_V^1 = \partial_x - y\partial_z - z\partial_z$、 $\xi_V^2 = \partial_y$ 和 $\xi_V^3 = \partial_z$。

因此，根据定理 2，我们发现：(i) 当 $V_i^V(t,x,y,z) = V(t,e^x y,e^x z)$ 时， ξ_{III}^1 是克莱因-戈尔登方程 (97) 的李对称性；(ii) 当 $V_{ii}^V(t,x,y,z) = V(t,x,z)$ 时， ξ_V^2是李对称性；(iii) 当 $V_{iii}^V(t,x,y,z) = V(t,x,y)$ 时， ξ_V^3是李对称性；(iv) 当 $V_{iv}^V(t,x,y,z) = V\left(t,\left(y-\frac{\beta}{\alpha}\right)e^x,\left(z-\frac{\gamma}{\alpha}\right)e^x\right)$时， $\alpha\xi_V^1+\beta\xi_V^2+\gamma\xi_V^3$是李对称性。

最后，对于线元 (17)，当势具有函数 (76) 的形式时，向量场 $X = X_3 - \left(\frac{2}{m}\frac{A_{,t}}{A}+\lambda\right)u\partial_u$ 是克莱因-戈尔登方程的李对称性；而当.....时， $X = X_3+\alpha\xi_V^1+\beta\xi_V^2+\gamma\xi_V^3-\left(\frac{2}{m}\frac{A_{,t}}{A}+\lambda\right)u\partial_u$ 是李对称性

$$V_v^V(t,x,y,z) = \frac{1}{A^2}e^{-m\lambda t}U\left(x-\frac{\alpha m}{2}t,\left(y+\frac{\beta}{\alpha-1}\right)e^{\frac{m(\alpha-1)}{2}t},\left(z+\frac{\gamma}{\alpha-\lambda}\right)e^{-\frac{m(\alpha-\lambda)}{2}t}\right) + \frac{m(\lambda-1)A_{,t}+2A_{,tt}}{2A^3}. \quad (98)$$

4.3.1 不变函数

与之前一样，我们确定每个势函数对应的已允许对称向量的李不变量。具体而言，对于势 $V_i^V(t,x,y,z)$，与李对称性 ξ_{III}^1相关的不变函数为 $\{t,e^x y,e^x z,u\}$。对于势函数 $V_{ii}^V(t,x,y,z)$，我们确定不变量 $\{t,x,z,u\}$；而对于 $V_{iii}^V(t,x,y,z)$，不变量为 $\{t,x,y,u\}$。此外，对于 $V_{iv}^V(t,x,y,z)$，与一般向量场 $\alpha\xi_V^1+\beta\xi_V^2+\gamma\xi_V^3$相关的相应不变函数为 $\left\{t,\left(y-\frac{\beta}{\alpha}\right)e^x,\left(z-\frac{\gamma}{\alpha}\right)e^x,u\right\}$。

最后，对于其余由真共形 Killing 向量生成李对称性的情形，当势为 $V_v^{III}(t,x,y,z)$ 时，李不变量为 $\left\{x,ye^{-\frac{m}{2}t},ze^{-\frac{m\lambda}{2}t},e^{m\lambda t}u\right\}$；而当势为 $V_v^V(t,x,y,z)$ 且李对称性为 $X_3+\alpha\xi_V^1+\beta\xi_V^2+\gamma\xi_V^3-\left(\frac{2}{m}\frac{A_{,t}}{A}+\lambda\right)u\partial_u$ 时，相应的李不变量为 $\left\{x-\frac{\alpha m}{2}t,\left(y+\frac{\beta}{\alpha-1}\right)e^{\frac{m}{(\alpha-1)2}t},\left(z+\frac{\gamma}{\alpha-\lambda}\right)e^{-\frac{m}{(\alpha-\lambda)2}t},e^{m\lambda t}u\right\}$。

接下来我们推导守恒律。

4.3.2 守恒律

克莱因-戈尔登方程 (97) 和势函数 $V_i^V(t,x,y,z)$ 的守恒律具有以下分量

$$I^x\left(\xi_V^1\right) = \frac{NABC}{2}e^x\left(\left(\left(-\frac{1}{N^2}u_{,t}^2+\frac{1}{A^2}u_{,x}^2+\frac{e^{-x}}{B^2}u_{,y}^2+\frac{e^{-x}}{C^2}u_{,z}^2\right)-V_i^V(t,x,y,z)u^2\right)\right), \quad (99)$$

$$I^y\left(\xi_V^1\right)=\frac{NABC}{2}e^x\left(-y\left(\left(-\frac{1}{N^2}u_{,t}^2+\frac{1}{A^2}u_{,x}^2+\frac{e^{-x}}{B^2}u_{,y}^2+\frac{e^{-x}}{C^2}u_{,z}^2\right)-V_i^V\left(t,x,y,z\right)u^2\right)\right), \tag{100}$$

$$I^z\left(\xi_V^1\right)=\frac{NABC}{2}e^x\left(-z\left(\left(-\frac{1}{N^2}u_{,t}^2+\frac{1}{A^2}u_{,x}^2+\frac{e^{-x}}{B^2}u_{,y}^2+\frac{e^{-x}}{C^2}u_{,z}^2\right)-V_i^V\left(t,x,y,z\right)u^2\right)\right), \tag{101}$$

and

$$I^t\left(\xi_V^1\right)=0\ . \tag{102}$$

对于 $V_{ii}^V(t,x,y,z)$，可得

$$I^y\left(\xi_V^2\right)=\frac{NABC}{2}e^x\left(\left(\left(-\frac{1}{N^2}u_{,t}^2+\frac{1}{A^2}u_{,x}^2+\frac{e^{-x}}{B^2}u_{,y}^2+\frac{e^{-x}}{C^2}u_{,z}^2\right)-V_{ii}^V\left(t,x,y,z\right)u^2\right)\right), \tag{103}$$

$$I^t\left(\xi_V^2\right)=0\ ,\ I^x\left(\xi_V^2\right)=0\ \text{and}\ I^z\left(\xi_V^2\right)=0\ . \tag{104}$$

对于 $V_{iii}^V(t,x,y,z)$，我们得到

$$I^z\left(\xi_V^3\right)=\frac{NABC}{2}e^x\left(\left(\left(-\frac{1}{N^2}u_{,t}^2+\frac{1}{A^2}u_{,x}^2+\frac{e^{-x}}{B^2}u_{,y}^2+\frac{e^{-x}}{C^2}u_{,z}^2\right)-V_{iii}^V\left(t,x,y,z\right)u^2\right)\right), \tag{105}$$

$$I^t\left(\xi_V^3\right)=0\ ,\ I^x\left(\xi_V^3\right)=0\ \text{and}\ I^y\left(\xi_V^3\right)=0\ . \tag{106}$$

对于一般的向量场 $\alpha\xi_V^1+\beta\xi_V^2+\gamma\xi_V^3$ 和势 $V_{iv}^V(t,x,y,z)$，可得

$$I^x\left(\alpha\xi_V^1+\beta\xi_V^2+\gamma\xi_V^3\right)=\alpha I^x\left(\xi_V^1\right)$$

$$I^y\left(\alpha\xi_V^1+\beta\xi_V^2+\gamma\xi_V^3\right)=\alpha I^y\left(\xi_V^1\right)+\beta I^y\left(\xi_V^2\right)$$

$$I^z\left(\alpha\xi_V^1+\beta\xi_V^2+\gamma\xi_V^3\right)=\alpha I^z\left(\xi_V^1\right)+\gamma I^z\left(\xi_V^3\right)$$

and

$$I^t\left(\alpha\xi_V^1+\beta\xi_V^2+\gamma\xi_V^3\right)=0,$$

其中势函数为 $V_{iv}^V(t,x,y,z)$。

由李对称向量 $X=X_3-\left(\frac{2}{m}\frac{A_{,t}}{A}+\lambda\right)u\partial_u$，我们确定守恒律

$$I^t\left(X_3\right)=\frac{\bar{A}^4e^{\frac{(3m\lambda-1)}{2}t}e^x}{2}\left(\frac{2}{m}H_V^V-\left(\left(\frac{2}{m}\frac{\bar{A}_{,t}}{\bar{A}}+\lambda\right)u\right)\frac{1}{A}u^{,t}-\frac{1}{2\bar{A}e^{\frac{m}{2}\lambda t}}\left(\frac{2}{m}\frac{\bar{A}_{,t}}{\bar{A}}+\lambda\right)_t u^2\right). \tag{107}$$

$$I^x\left(X_3\right)=\frac{\bar{A}^4e^{\frac{(3m\lambda-1)}{2}t}e^x}{2}\left(-\left(\left(\frac{2}{m}\frac{\bar{A}_{,t}}{\bar{A}}+\lambda\right)u\right)\frac{1}{\bar{A}e^{\frac{1}{2}\lambda t}}u^{,x}\right). \tag{108}$$

$$I^{y}\left(X_{3}\right)=\frac{\bar{A}^{4}e^{\frac{(3m\lambda-1)}{2}t}e^{x}}{2}\left(yH_{V}^{V}-\left(\left(\frac{2}{m}\frac{A_{,t}}{A}+\lambda\right)u\right)\frac{1}{\bar{A}e^{m(\lambda-1)t}e^{x}}u^{,y}\right). \tag{109}$$

$$I^{z}\left(X_{3}\right)=\frac{\bar{A}^{4}e^{\frac{(3m\lambda-1)}{2}t}e^{x}}{2}\left(\lambda zH_{V}^{V}-\left(\left(\frac{2}{m}\frac{\bar{A}_{,t}}{\bar{A}}+\lambda\right)u\right)\frac{1}{\bar{A}e^{x}}u^{,z}\right). \tag{110}$$

其中

$$H_{V}^{V}=\left(\left(-\frac{1}{\bar{A}^{2}e^{m\lambda t}}u_{,t}^{2}+\frac{1}{\bar{A}^{2}}u_{,x}^{2}+\frac{e^{-x}}{\bar{A}^{2}e^{m(\lambda-1)t}}u_{,y}^{2}+\frac{e^{-x}}{C^{2}}u_{,z}^{2}\right)-V_{v}^{III}\left(t,x,y,z\right)u^{2}\right).$$

最后，具有势函数 $V_v^V(t,x,y,z)$ 的 Bianchi V 背景空间中的克莱因-戈尔登方程具有如下分量的守恒律

$$I^{t} = I^{t}\left(X_{3}\right), \tag{111}$$

$$I^{x} = I^{x}\left(X_{3}\right)+\alpha I^{x}\left(\xi_{V}^{1}\right), \tag{112}$$

$$I^{y} = I^{y}\left(X_{3}\right)+\alpha I^{y}\left(\xi_{V}^{1}\right)+\beta I^{y}\left(\xi_{V}^{2}\right), \tag{113}$$

$$I^{z} = I^{z}\left(X_{3}\right)+\alpha I^{z}\left(\xi_{V}^{1}\right)+\gamma I^{z}\left(\xi_{V}^{3}\right). \tag{114}$$

5 结论

我们详细研究了在弯曲时空中保持具有非恒定势函数的克莱因-戈尔登方程不变的无穷小变换。具体而言，我们确定了该克莱因-戈尔登方程所允许的全部李对称性和诺特对称性。我们考察了描述均匀各向异性宇宙学的四维黎曼流形。我们写出了 Bianchi I、Bianchi III 和 Bianchi V 时空中的克莱因-戈尔登方程，并确定了所有使克莱因-戈尔登方程具有非平凡李对称性和诺特对称性的未知势函数形式。

我们利用了一些已有结果，这些结果将克莱因-戈尔登方程的无穷小变换（即李对称性和诺特对称性）与定义拉普拉斯算子的黎曼流形度量张量的共形代数元素联系起来。因此，我们详细展示了所研究的三个时空的共形Killing矢量。对于任意尺度因子，这些时空具有由这些 Killing 向量构成的三维共形代数。然而，当尺度因子取某些特殊函数时，时空允许存在真共形 Killing 向量。存在两种线元形式的 Bianchi I 时空允许真共形 Killing 向量，而线元的一种特定形式.....

Bianchi III，以及 Bianchi V 时空的一种特定线元，其中存在一个真共形 Killing 向量。

因此，对于我们系统阐述的所有特定线元，本文给出了克莱因-戈尔登方程存在李对称性和诺特对称性时势的所有函数形式。这种分析对于理解微分方程对称性与背景几何之间的关系至关重要，同时也表明，借助微分几何工具，可以简单且系统地推导出这些对称性。最后但同样重要的是，应用 Noether 第二定理可以轻松构造 Noether 守恒律。

致谢：作者感谢北方天主教大学研究与技术发展副校长办公室（Vridt）通过“微分几何与应用研究中心”提供的支持，批准号：Vridt No - 096/2022年。

参考文献

[1] N.H. Ibragimov，《微分方程的 Lie 群分析》CRC 手册，第一卷：对称性、精确解与守恒律，CRS Press LLC，佛罗里达州（2000）[2] G.W. Bluman 和 S. Kumei，《微分方程的对称性》，Springer-Verlag，纽约（1989）[3] H. Stephani，《微分方程：利用对称性求解》，剑桥大学出版社，纽约（1989）[4] P.J. Olver，《Lie 群在微分方程中的应用》，Springer-Verlag，纽约（1993）[5] A.A. Chesnokov，旋转浅水方程的对称性与精确解，《欧洲应用数学杂志》20，461（2009）[6] B. Bira、T.R. Sekhar 和 D. Zeidan，利用 Lie 群理论求解若干时间分数阶演化方程的精确解，《计算数学与应用》71，46（2016）[7] R.Z. Zhdanov，常微分方程的李对称性与可积性，《数学物理杂志》39，6745（1998）

[8] P.G.L. Leach、K.S. Govinder 和 K. Andriopoulos，隐藏与不那么隐藏的对称性，《应用数学杂志》2012，890171（2012）[9] P. Nattermann 和 H.-D. Doebner，规范分类、李对称性与一类非线性薛定谔方程的可积性，《非线性数学物理杂志》3，302（1996）¨S. Jamal 和 A.G. Johnpillai，四阶图案形成偏微分方程：部分对称性与近似对称性，《数学建模与分析》25，198（2020）[10] D. Huang 和 N.M. Ivanova，一类变系数非线性电报方程的群分析与精确解，《数学物理杂志》48，073507（2007）[11] G.M. Webb 和 G.P. Zank，磁流体力学与气体动力学中的流体重标记对称性、李点对称性和拉格朗日映射，《数学物理杂志 A：数学理论》40，545（2007）[12] R. Al-deiakeh、M. Alquran、M. Ali、A. Yusuf 和 S. Momani，关于时间分数阶（[13] ）维 Zakharov-Kuznetsov (q,p,r) 方程的李对称性群分析、显式级数解与守恒律，《几何物理杂志》176，104512（2022）2■+■1诺特，埃米（1918年），《不变变分问题》，哥廷根皇家科学学会《数学物理类通报》2，235–267[14]U. Camci，哥德尔型时空中的测地运动对称性，《宇宙学与天体粒子物理学杂志》07，002（2014）¨U. Camci 和 A. Yildirim，若干类 pp 波时空中的李对称性与诺特对称性，《物理学文摘》89，084003 ¨A.H. Bokhari、A.H. Kara、A.R. Kashif 和 F.D. Zaman，时空的诺特对称性与 Killing 矢量及等距变换，《国际理论物理杂志》45，1029（2006）[15] T. Feroze、F.M. Mahomed 和 A. Qadir，等距变换与底层空间测地线方程对称性之间的联系，《非线性动力学》45，65（2006）¨A. Paliathanasis、M. Tsamparlis 和 M.T. Mustafa，pp 波时空中波动方程与克莱因-戈尔登方程的李点对称性和诺特点对称性分类，《非线性科学与数值模拟通讯》55，68（2018）

[20] S. Jamal 和 G. Shabbir，pp波真空类及波动方程的诺特对称性，《Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.》13，1650109（2016）[21] K.F. Dialektopoulos、J.L. Said 和 Z. Oikonomopoulou，通过诺特对称性对远平行 Horndeski 宇宙学进行分类，《EPCJ》82，259（2022）[22] H.R. Fazlollahi，量子宇宙学（T）与完整的诺特对称性，《Physics of Dark Energy》28，100523（2020）[23] S. Bahamonte、U. Camci 和 S. Capozziello，扩展远平行引力宇宙学中的诺特对称性与边界项，《Class. Quantum Grav.》36，065013（2019）[24] Y. Zhang、Y.-G. Gong、Z.-H. Zhu，多标量场情景中的诺特对称性方法，《Phys. Lett. B》688，13（2010）[25]A.V. Aminova，微分方程的射影变换与对称性，《Sbornik: Mathematics》186，1711（1995）[26] M. Tsamparlis 和 A. Paliathanasis，测地线方程的李对称性与诺特对称性及共线变换，《《General Relativity and Gravitation》》42，2957（2010）[27] A. Mitsopoulos 和 M. Tsamparlis，形式为……的时变动力系统的二次第一积分，《Mathematics》9，1503（2021）[28] A. Mitsopoulos 和 M. Tsamparlis，自治动力系统的高阶第一积分，几何物理杂志 170，1043583 （ 2021 ）[29] A. Paliathanasis 和 M. Tsamparlis，薛定谔方程与克莱因–戈尔登方程李点对称性的几何起源，《Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.》11，1450037（2014年）[30] K. Yano，李导数理论及其应用，北荷兰出版社，阿姆斯特丹（1955）[31] L. Hsu 和 J. Wainwright，自相似空间均匀宇宙学，《Class. Quantum Grav.》3，1105（1986）[32] T. Harada、H. Maeda 和 B.J. Carr，含暗能量的自相似宇宙学解。II. 黑洞、裸奇点与虫洞，《Phys. Rev. D》77，024022（2008）

[33] H. Stephani、D. Kramer、M. MacCallum、C. Hoenselaers 和 E. Herlt，《爱因斯坦场方程的精确解》，第二版，剑桥大学出版社，纽约（2003）[34] M.P. Ryan 和L.C. Shepley，《齐性相对论宇宙学》，普林斯顿大学出版社，新泽西州（1975）[35] M. Tsamparlis、A. Paliathanasis 和 L. Karpathopoulos，存在共形 Killing 向量的 Bianchi I 时空精确解，《《General Relativity and Gravitation》》47，1（2015）[36] A. Mitsopoulos、M. Tsamparlis 和 A. Paliathanasis，《《Modern Physics Letters A》》34，1950326（2019）[37] Y. Bozhkov 和 I.L. Freire，黎曼流形的特殊共形群与非线性泊松方程的李点对称性，《Journal of Differential Equations》249，872（2010）