布尔巴基讨论班
75e 年，2022–2023，第o 1201期

2023年1月

直接因子猜想[（据 André 和 Bhatt）]

作者：**Gabriel Dospinescu**

arXiv:2302.00955v1 [math.AC] 2 Feb 2023

直接因子猜想（下文定理 1.1 ）是交换代数中的一个命题，其表述几乎与费马大定理一样初等，却近 50 年悬而未决：该猜想于 1969 年提出（已发表版本见 Hochster（1973年）），并于 2016 年由 André 证明（已发表版本见 André（2018b））。这一命题属于一系列猜想，即“同调猜想”；这些猜想的列表及其相互关系令人眼花缭乱 (1)。特别是，Hochster（1975年、1983年）证明了，对于任意诺特局部环 A，存在 A-Cohen–Macaulay 代数（甚至只需存在 Cohen–Macaulay 模；见 §1.5）即可推出其中大多数猜想，例如直接因子猜想。Hochster 和 Huneke（1992年）还证明了，在等特征情形下，即当 A 含有一个域时，这类 A-代数的存在性。 (2)

本报告旨在阐释 André 在其三篇里程碑式论文（André，2018b，a，2020）中引入的技术，尤其是 Scholze（2012年）引入的完美拟空间如何使我们能够为不等特征的诺特局部环构造 Cohen–Macaulay 代数，从而证明直接因子猜想。 (3) Bhatt 最近令人瞩目的工作（2020年）进一步推进了完美拟技术（借助 Bhatt 和 Scholze（2022年）的棱柱理论，以及 Bhatt 和 Lurie 的黎曼–希尔伯特 p-进对应（2023年）），并建立了（下文定理 1.16 ）一个不等特征情形下的对应版本，推广了 Hochster 和 Huneke（1992年）在正特征情形下的著名定理；该定理蕴含了本文介绍的所有结果，甚至更多。

Bhatt 的结果证明堪称一项真正的壮举，而且据我们所知，所有细节尚未公开，因此我们决定

1. 关于一个远非穷尽的概述，请参见定理 1.12，以及 Hochster（2007年）、Roberts（1992年）和 Hochster（1983年）。2. 早在很久以前，人们就已证明 A-Cohen–Macaulay 模的存在性适用于 A 等特征的情形，参见 Hochster，1975年。3. 在最初取得令人瞩目的应用之后，完美拟空间是 Hodge p-进理论中不可或缺的工具，这一点几乎毋庸置疑（Scholze，2012年、2013年、2015年）。但它们也能解决同调猜想，这一点就不那么明朗了：这些问题大多涉及诺特环，而完美拟环几乎从不满足这一性质。

在这篇论述中聚焦于 André 的文章，尽可能完整地证明上述三篇文章中提到的主要结果，同时借鉴 Bhatt（2018年）的思想来简化某些论证。[4] 我们选择的证明路径并非通往直接因子猜想的最短路径（最短的测地线见 Bhatt 的文章，2018年）；这条路径将带我们了解比猜想本身更强有力的结果。关于这些思想和技术在混合特征奇点理论（这一领域尚处于萌芽阶段）中的应用，我们请读者参阅 Ma 和 Schwede（2018年、2021年）以及 Ma、Schwede、Tucker、Waldron 和 Witaszek（2022年）等人的研究。至于本文所述结果的广泛推广，读者可参阅 Gabber 和 Ramero 那部几乎长得无边无际的著作（2018年）。

约定： 假设所有环都是交换且含幺的，环同态也都是含幺的。若 I 是环 A的一个理想，则称 A 是I-完备的，如果 A 关于 I-进拓扑是分离完备的。对于 $a \in A$，若 A是 a-完备的，即 A 是 aA-完备的，则记作 $A/a := A/aA$。记 $A[I]$ 为 A中被 I的所有元素湮灭的元素所构成的理想。若 $a_1, \ldots, a_d$是 A中的元素，则记 $(a_1, \ldots, a_d) = \sum_{i=1}^{d} a_i A$ 为它们生成的 A 的理想。

致谢： 我谨向 Yves André、Bharghav Bhatt、Nicolas Bourbaki、Kęstutis Česnavičius、Pierre Colmez、Luc Illusie、Wiesława Nizioł 和 Olivier Taïbi 致以诚挚的谢意。他们的评论和建议使我这个该领域的门外汉得以避开许多陷阱，并极大地改善了这份报告的内容和可读性。我尤其感谢 Yves André 的随时相助、热情支持和诸多意见。

1. 猜想的多重面貌

本节旨在陈述交换代数“经典”领域的主要结果[5]，这些结果由 André 和 Bhatt 证明，并解释它们之间的联系。

1.1. 正则环，问题的源头

维数为 A 的诺特局部环 d 称为正则，如果其唯一极大理想由 d 个元素生成（这是可能的最少生成元个数）。这类环的典型例子包括光滑代数簇在域（或离散赋值环）上的局部环，

4. 本报告将给出 A-Cohen–Macaulay 代数存在性的两种证明。它们都采用了一个基本工具，即 André 平坦性引理；其中一种使用了 Faltings 几乎纯性定理（1988 年、2002 年），该定理由 Scholze（2012年）以及 Kedlaya 和 Liu（2015年）加以完善并推广；另一种则不使用该定理。5. 因此，完美体不会出现在本节中。读者可以在 André（2018c）的著作中找到这位大师对各种证明所作的综述，其呈现方式似乎无可超越。

以及它们的完备化，例如 $K[[X_1,\dots,X_n]]$（其中 K 是域或离散赋值环），还有$\mathbf{Z}_p[[X,Y,Z]]/(p-X^5-Y^7-Z^9)$ 等。

尽管正则局部环的定义十分简单，但它们却是精妙问题的取之不尽的来源；甚至要证明一些非常基本的性质也并非易事，例如正则性在对素理想作局部化时保持不变（这可由塞尔定理给出的正则性的同调解释推出），而这使得正则性的概念得以整体化[6]。证明每个正则局部环都是整环并不困难，但要证明它是正规的则需要费一番功夫[7]，而证明它还是唯一分解整环则要困难得多（Auslander–Buchsbaum 定理）。

若 $(A,\mathfrak{m})$ 是一个正则局部环，其完备化 $\hat{A}=\varprojlim_n A/\mathfrak{m}^n$ 是一个完备正则局部环（关于 $\mathfrak{m}$-进拓扑），而 Cohen 结构定理表明，A 在同构意义下具有以下形式之一：

- 或者 $V[[X_1,\dots,X_n]]$ 是 V一个域或完备非分歧离散赋值环（即 V 的极大理想由一个素数 p生成）。那么我们称 A 为非分歧；
- 或者 $V[[X_1,\dots,X_n]]/(p-f)$ 对于一个完备非分歧离散赋值环 V，其剩余特征为 p，以及一个 f属于（p，X_1，……，X_n）²但不属于 $pV[[X_1,\dots,X_n]]$（在这种情况下，我们称$\hat{A}$为分歧）。

1.2. 直接因子猜想的表述

霍赫斯特直接因子猜想（1973年）是本文所要阐述的内容，其表述如下，看起来完全无害：

定理 1.1. — 正则环的每个有限扩张都是分裂的。

具体来说：一个环扩张是一个单射环同态$f\colon A\to B$，若有限，则 f 使 B 成为一个 A-有限生成模；若分裂，则 A 是 A-模 B的一个直和因子；换言之，存在一个 A-线性映射[8]$r\colon B\to A$ 使得 $r(f(a))=a$ 对任意 $a\in A$均成立。

注 *1.2.* — Bhatt（2018）重新审视并简化了 André（2018b）的证明，从而得以建立定理 1.1 的如下导出版，这是 de Jong 提出的猜想：若 A 是一个正则环，且 $f\colon X\to$ 谱(A) 是一个适当且满射态射，那么态射 $A\to \mathrm{R}\Gamma(X,\mathcal{O}_X)$ 在导出范畴 $\mathbf{D}(A)$ 中是分裂的。若 A 是一个 **有理数域**-代数，这可由 Kovács（2000年）的工作推出；Bhatt（2012年）处理了特征 $\mathrm{car}(A)=p$的情形。

6. 若诺特环在任意素理想处的局部化都是正则局部环，则该环是正则的。7. 换言之，它在其分式域中是整闭的。8. 不要求 r 是环同态。

Hochster（1973年）证明了定理 1.1 对于含有一个域的正则环成立，并通过一个非常间接的论证（参见 Hochster 定理 6.1，1983年）将一般情形归结为完备、非分歧且剩余域代数闭的正则局部环情形。Heitmann（2002年）取得了重大进展：他证明了维数 $\dim A = 3$（维数 $\dim A \leq 2$ 的情形可由 Auslander–Buchsbaum 公式推出）。

完美拟技术（更准确地说，是几乎数学与 Faltings 几乎纯性定理（1988年、2002年）之间的联系，似乎很早就已被注意到[9]，但直到 2014年，Bhatt（2014a）才通过这些技术取得了第一个较为一般的结果，处理了 $B[\frac{1}{p}]$ 在 $A[\frac{1}{p}]$ 上为 étale 的情形（甚至是在更弱的假设下）。正是这一系列思想最终导向了该猜想的证明，但直到 André（2018b、a）的工作，才得以处理一般情形。

注释 *1.3*。——a）有限扩张 $f\colon A \to B$ 诺特环的扩张是分裂的，当且仅当对 A 的每个极大理想 $\mathfrak{m}$，所诱导的扩张 $A_{\mathfrak{m}} \to B_{\mathfrak{m}}$ 也是分裂的：存在分裂等价于映射[10]的满射性

$$\mathrm{ev}_1\colon \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}_A}(B, A) \to A,\ r \mapsto r(1),$$

可通过在 A的任意极大理想处局部化来检验 $\mathfrak{m}$，而 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}_A}(B, A)_{\mathfrak{m}} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}_{A_{\mathfrak{m}}}}(B_{\mathfrak{m}}, A_{\mathfrak{m}})$，因为 B是一个有限表示的 A-模。同样，f是分裂的，当且仅当对于 A的忠实平坦扩张 C，扩张 $C \to C \otimes_A B$ 也是分裂的，因为可以在对 C进行基变换后检验 ev_1 的满射性。

b) 定理 1.1 的证明可归结为有限扩张 $f\colon A \to B$ 的情形，其中 A是局部正则完备的，且 B 是整环（因而是局部完备的）。事实上，由 a) 可假设 A是局部的，继而通过使用忠实平坦扩张 $A \to A$，可进一步假设它是完备的。若 B 的一个素理想 $\wp$ 满足 $\dim(B/\wp) = \dim B$，则 $\dim A/(\wp \cap A) = \dim A$，于是 $\wp \cap A = \{0\}$（因为 A 是局部整环），而有限扩张 $A \to B/\wp$ 的任意分裂都给出 $A \to B$的一个分裂。

c) 若 A 是整环且正规有理数域代数，则任意有限扩张 $f\colon A \to B$都是分裂的。事实上，和 b) 中一样，可以假设 B 是整环。若 K 和 L分别是 A 和 B的分式域，由于 A 正规，迹 $\mathrm{Tr}^{L/K}\colon L \to K$将 B 映入 A，而 $[L^{1}:K]\mathrm{Tr}^{L/K}\colon B \to A$ 给出了一个分裂。因此，对于有理数域代数，定理 1.1 是平凡的，而且并非最优。

9. 例如，Wiesława Nizioł 曾这样写信告诉我：「2001年，Lorenzo Ramero 来犹他州拜访我，并在数论研讨班上作了一场报告，介绍他与 Gabber 的工作，以及他们证明几乎纯性猜想的尝试。Paul Roberts 当时在听众席中，对几乎数学技术与 Heitmann 最近证明维数 3 的直和项猜想之间的相似之处感到非常惊讶。Heitmann 先是在几乎情形下工作，之后在某个阶段成功降到了通常情形（借助某些有限性性质？）。Roberts 对此非常兴奋，于是我们开办了一个为期一学期的研讨班，讨论几乎数学和交换代数。不过，研讨班没有取得任何进展，因为当时我们当然还没有一般情形下的几乎纯性。」10. 记 Mod_A 为 A-模的范畴。

d) 若 $\dim A \leq 2$ 定理1.1 可由 Auslander–Buchsbaum 公式推出。若 A 具有正特征，则有许多并不（太）困难的证明可用于证明定理1.1，参见 Bhatt（*2012*年）例 1.3，其中给出了一个上同调证明；另可参见 Hochster（*1983*年）第 6.2段，其中给出了一个简短证明。

1.3. 片段化子

称 片段化子 (英文称为 *splinter*) 为整环 A，使得 A 的每个有限扩张都能分裂。定理 1.1 断言，正则环都是片段化子。每个片段化子都是正规环[(11)]，而对于 **有理数域**-整环代数，其逆命题也成立（注 1.3）。在正特征或混合特征下，情况要复杂得多。Hochster 和 Huneke（1992年，1995）证明了，正特征下局部优良的诺特直和因子环[(12)] 是 Cohen–Macaulay 环；Bhatt（2020年）最近在其精彩的工作中证明，这一结论在混合特征下仍然成立（仍需满足优良性假设）。

片段化子的一个重要来源是（线性）约化群的表示论：若这样的群 G 作用于一个 k代数 R，且该代数是正则环（k 为一个域），那么不变量环 R^G 就是一个片段化子（因为包含映射 $R^G \to R$ 通过 Reynolds 算子有截面，R 是一个片段化子，而片段化子的直和因子仍是片段化子）。

下面是一个例子（归功于 Hochster，1973年）：一个正规、Cohen–Macaulay（甚至是完全交）但不是片段化子的环。设 k 是一个特征为 2 的域，且$R = k[X,Y,Z]/(X^3+Y^3+Z^2) = k[x,y,z]$。将$x$、$y$、$z$映至 U^2、V^2、U^3+V^3的态射 $R \to k[U,V]$ 是有限、单射且没有截面的：若它有截面，则对 R的每个理想 I，都有$R \cap Ik[U,V] = I$；然而 $z \notin (x,y)$，而 $U^3+V^3 \in (U^2,V^2)$。

如果对任意有限满射 $f\colon X \to S$，态射 $\mathsf{O}_S \to f_*\mathsf{O}_X$ 在 S 上相干层范畴 $\mathrm{Coh}(S)$ 中是分裂的，则称概形 S 为 fragmentor。若对任意适当满射 $f\colon X \to S$，态射 $\mathsf{O}_S \to \mathrm{R}f_*\mathsf{O}_X$ 在 $D(\mathrm{Coh}(S))$ 中是分裂的，则称 S 为 D-fragmentor。Bhatt（2012年）证明，诺特 F_p-概形是 fragmentor，当且仅当它是 D-fragmentor。作为比较，对于一个 Q-概形，fragmentor 性质（或多或少，即在较弱的假设下）等价于正规性；而根据 Kovács（2000年）定理，D-fragmentor 性质（或多或少）等价于 S 的奇点至多是有理奇点，参见 Bhatt（2012年）的例 1.1 和 1.2。

详见 André 和 Fiorot（2022年）以及 Bhatt（2012年），其中介绍了片段化子的更多细节和示例。

---

11. 如果 $x \in \mathrm{Frac}(A)$ 在 A 上是整的，那么 $A \to A[x]$ 是有限扩张；若 $x \notin A$，则它不是分裂的，因为任何 A-线性缩并 $r\colon A[x] \to A$ 都必须将 x 映到其自身（如果 $x = \frac{a}{b}$ 与a，$b \in A$ 且 $b \neq 0$，那么 $a = r(a) = r(bx) = br(x)$）。12. 即在每个极大理想处局部化后都是优良的。

1.4. 分裂与纯性

环同态 $f\colon A \to B$ 称为纯的，如果它是普遍单射，即对于任意 A-代数 C，诱导态射 $C \to B \otimes_A C$ 仍为单射；在这种情况下，对于任意 A-模 C，它也仍为单射。任何分裂扩张显然都是纯的。下面介绍纯性概念的两种重要体现：

- 从范畴观点来看，态射 $f\colon A \to B$ 是纯的，当且仅当函子 $(-) \otimes_A B\colon \mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Mod}_B$ 是忠实的。回顾一下，f 被称为平坦（分别为忠实平坦），如果函子 $(-) \otimes_A B$ 是正合的（分别为正合且忠实的）。因此，每个忠实平坦态射都是纯的；

- Olivier（1973年）证明了，态射 $f\colon A \to B$ 是纯的，当且仅当下降理论运行良好 (13) 对于 B-模而言。正如 André 和 Fiorot（2022年）所指出的，这使得我们可以将纯态射看作仿射概形范畴上典范拓扑的覆盖 (14)，从而赋予其一种几何解释。

直和因子猜想重新出现（参见定理 1.7），并借助以下结果表述为一个纯性命题：

命题 1.4. — 诺特环的任意纯有限扩张都是分裂的.

证明。— 不妨设 A 是局部完备的（注释 1.3）。若 E 是 A的剩余域的内射包，则由纯性可知态射 $E \to E \otimes_A B$ 是单射。由于 E 是一个 A-内射模，E 上的恒等映射可延拓为一个 A-模态射 $u\colon E \otimes_A B \to E$，从而得到一个 A-线性态射 $B \to \mathrm{End}_A(E)$。由 Matlis 对偶可知 $\mathrm{End}_A(E) \simeq A$，而复合映射 $B \to \mathrm{End}_A(E) \simeq A$ 是 f的一个分裂。 □

我们可以利用分裂与纯性之间的联系，得出定理 1.1 的重要推论。我们将提及两个这样的应用。若 $f\colon A \to B$ 是纯扩张，则 $A \cap IB = I$ 对任意理想 I 属于 A（这只是将态射 $A/I \to B/IB = B \otimes_A A/I$的单射性换一种说法）。在较弱的假设下，这种理想收缩性质可以刻画纯性：Hochster（1977）证明，诺特正规整环上的有限扩张 $A \to B$，若对 $A \cap IB = I$的每个理想 I都有 A，则该扩张是分裂的。因此，直接因子猜想与下述定理等价（其中一个方向显然成立，正如上文所指出的）。

定理 1.5。—若 $f\colon A \to B$ 是正则环 A的有限扩张，那么$A \cap IB = I$ 对于 A的任意理想 I。

13. 换言之，将 $M \in \mathrm{Mod}_A$ 映到带有其典范下降数据的 $B \otimes_A M$ 的函子，诱导出 Mod_A 与如下范畴之间的等价：由 B-模 N 组成，并带有一个 $B \otimes_A B$-模同构$N \otimes_A B \simeq B \otimes_A N$，且满足通常的余循环条件。14. 这是最细的格罗滕迪克拓扑，在该拓扑下，所有可表示预层都是层。

对于第二个应用，我们回顾一下，环同态 $f\colon A \to B$可以下降平坦性，如果对于每个 $M \in \mathrm{Mod}_A$ 在 $B \otimes_A M$ 上的平坦性 B 都能推出 M上的平坦性。例如，任何纯扩张都能下降平坦性（Olivier，1973）。Raynaud 和 Gruson（1971年）推广 Ferrand 定理，证明任何有限扩张都能下降平坦性。他们提出（原文第二部分的问题 1.4.3）：诺特环的任何整扩张[15] A 是否都能下降平坦性；他们还指出，只需在 A 为正则环时解决这个问题即可。但在这种情况下，由于任何整扩张 1.1 都是纯扩张——它是有限扩张的滤过余极限，而有限扩张均为纯扩张——因此定理 $A \to B$ 1.1 便足以得出结论。因此，直接因子猜想为 Raynaud 和 Gruson 的问题提供了肯定的答案。Ohi（1996年）证明了定理 1.6 和 1.1 实际上是等价的。

定理 1.6。——诺特环的任何整扩张都下降平坦性。

若 A 是一个环，且 $f\colon M \to N$和 $g\colon N \to P$是 A-模的态射，并且 $g \circ f$ 是纯的，那么 f 显然是纯的。因此，定理1.1 便直接成为以下基本定理的推论（将在§1.5中讨论）以及命题1.4。

定理1.7。——对于正则环 A 的任意有限扩张 $A \to B$，存在一个环同态 $B \to C$，使得 $A \to C$ 忠实平坦。

注释 *1.8*。——1. 从几何角度看，可以（依照 André 和 Fiorot，2022年）将定理 1.1 （分别将1.7）重新表述如下：若 Y 是一个诺特正则概形，那么任何有限满射 $f\colon X \to Y$都是典范拓扑（分别是[16] fpqc拓扑）下概形范畴的覆盖。

2. 如果从一个有限且纯的扩张出发 $A \to B$，则可能不存在一个 C如定理 1.7中所述的环 A （即使它是 A 正规，也就是说，fpqc 拓扑严格弱于典范拓扑。André 和 Fiorot 的例 5.5（2022年）尤其简单（容易表述，但不易证明……）：嵌入 $A :=\mathbf{C}[X,Y]^{\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}} \to B :=\mathbf{C}[X,Y]$ （$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ 的非平凡元素通过（X，Y）作用）$\mapsto$（$-X$，$-Y$）是纯的（显然），但不是 fpqc 覆盖（这里用到了 Raynaud 和 Gruson（1971年）的构造（1.4.1.1）；他们是最早给出反例的人）。

15. 假设 A 是诺特的并非多余！16. 请注意，这里说的是拓扑，而不是预拓扑（对于 fpqc 预拓扑，相关命题是错误的）。仿射概形的态射 $f\colon X \to Y$ 是 fpqc 拓扑下的覆盖，当且仅当存在仿射概形的态射 $X' \to X$，使得 $X' \to Y$ 忠实平坦。

1.5. 诺特局部环上的 Cohen–Macaulay 代数 s

与直接因子猜想不同，上述定理 1.7即使在 A 是一个 **有理数域**-代数时也非常困难（现有的所有证明都要通过超滤子技术，将问题约化到正特征环的情形；在那里 Frobenius 大显神通）。当 A 包含一个域时，该定理由 Hochster 和 Huneke（1992年）证明；对于 A 不等特征的情形，则由 André（2018b）（以及最近由 Bhatt（2020年））证明。该定理是 Hochster猜想（1979年）的一种重新表述，后者涉及对任意诺特局部环 A都存在一个 A-Cohen–Macaulay 代数。为解释二者之间的联系，我们需要先回顾一些内容。

设 $(A, \mathfrak{m})$ 是一个诺特局部环。若 $x = (x_1, \dots, x_d)$ 是 $\mathfrak{m}$ 中的一列元素，且 $d = \dim A$，并且 $A/(x_1, \dots, x_d)$ 的维数为 0，换言之，存在 $t \geq 1$ 使得 $\mathfrak{m}^t \subset (x_1, \dots, x_d)$，则称该序列为参数系（或极大截交序列）。另一方面，若 $z = (z_1, \dots, z_k)$ 是 A 中的一列元素，则称其为 A-模 M 中的正则序列，如果 $M/(z_1, \dots, z_k)M \neq 0$，且对任意 $0 \leq i < k$，乘以 z_{i+1} 的映射在 $M/(z_1, \dots, z_i)M$ 中是单射。若 M 是 Cohen–Macaulay A-模，则称之为 Cohen–Macaulay 模；如果 A 中的每个参数系都是 M中的正则序列，则称该模为 Cohen–Macaulay 模。若 B 是一个 A-代数，且 B 是一个 Cohen–Macaulay A-模，则称 B 是 Cohen–Macaulay A-代数。由于没有对 B 施加有限性假设，因此不要将 [17] 此定义与恰好是一个 A-代数 [18]的 Cohen–Macaulay 环的定义混淆。

下面的结果（Bartijn 和 Strooker，1983年，定理 1.7；以及 Hochster 和 Huneke，1995，2.1.d）将这一结果与定理 1.7联系起来。

命题 1.9。— 设 $(A, \mathfrak{m})$ 是一个诺特局部环，并设 M 是一个 A-模。*a)* 如果 A 有一个参数系，且该参数系在 M中是正则序列，那么 M 的 $\mathfrak{m}$-进完备化是一个 *Cohen–Macaulay* A-模。

b) 如果 A 是正则的，那么一个 A-模是 *Cohen–Macaulay* 模，当且仅当它在 A上忠实平坦。

鉴于这一命题，定理 1.7 便成为以下 [19] 结果的推论。该结果回答了 [20] 上文提到的 Hochster 猜想。

---

17. 英语文献中的各种称谓让人有些眼花缭乱：我们在此定义的概念对应于一种平衡的（大）CM A-代数。18. 交换代数的语言其实并不怎么交换……19. 以下论证依据 André（2018b）：设 $\mathfrak{m}$ A $A_{\mathfrak{m}} = \varprojlim_n A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}^n A_{\mathfrak{m}}$ 是 的一个极大理想，设： lim，并设 $\wp$ 是 $\widehat{B \otimes_A A_{\mathfrak{m}}}$ 的一个极小素理想，使得 $A_{\mathfrak{m}} \to B' := (B \otimes_A A_{\mathfrak{m}})/\wp$ 仍为单射且有限（参见注释 1.3，点 b)）。那么 B' 是局部的，并且我们选取一个 Cohen–Macaulay $C(\mathfrak{m})$-代数 B'。于是 $C(\mathfrak{m})$ 在 $A_{\mathfrak{m}}$ 上忠实平坦（命题 1.9）。由于 A 是诺特的， $C := \prod_{\mathfrak{m}} C(\mathfrak{m})$ 在 A上平坦；事实上，它还是忠实平坦的，因为 $\operatorname{Spec}(C) \to \operatorname{Spec}(A)$ 的像在泛化下稳定（由平坦性可知），并且根据构造不包含任何闭点。20. 起初，这关系到 Cohen–Macaulay A-模的存在性：Hochster（1979）对 Cohen–Macaulay A-代数的存在持某种悲观态度……

定理 1.10。— 对于任意诺特局部环 A，都存在一个 A-*Cohen–Macaulay* 代数。

安德烈构造（将在本文后续部分介绍）会用到完美体环，而由此得到的 A-Cohen–Macaulay 代数几乎从来都不是诺特环。这并不令人意外，因为 Hochster 早已证明（Hochster 定理 6.1，1979年），如果 A 是一个完备、正规且非 Cohen–Macaulay 的诺特局部环，并且包含 **有理数域**，那么 A 不含有A诺特 Cohen–Macaulay 代数。另见 Bhatt（2014b）关于正特征下存在“小 Cohen–Macaulay 代数”所面临的上同调障碍 [21]。

定理 1.10 对于 A 等特征的环，或当 $\dim A \leq 3$ 时，早已为人所知；这归功于 Hochster 和 Huneke（1992年）以及 Hochster（2002年）的工作（不等特征下三维的情形关键地用到了 Heitmann 的工作，2002年）。剩下的情形归功于 André（2018b）（关于 Bhatt 的方法，见 §1.7 ）。然而目前看来，这些技术尚未能推动 Hochster 的另一个著名猜想 [22]：每个完备诺特局部环 A 都存在一个 A有限生成的 *Cohen–Macaulay* 模。这个猜想尤为重要，因为它蕴含塞尔猜想（该猜想也已悬而未决约 50 年），即交数严格为正；但除维数 ≤ 2 之外，人们所知甚少。

注 *1.11*。——在一个略有不同的方向上，我们提及法尔廷斯的麦考利化猜想：对于任意准优良诺特概形 X 存在˜ ˜一个科恩-麦考利概形 X 以及一个双有理射影态射 $\pi\colon X \to X$它在 X的科恩-麦考利点集（开集）上方是一个同构。关于证明，甚至在更弱的假设下，请参见 Česnavičius（2021年）。

1.6. 同调猜想

例如，Hochster（2007年）和 Roberts（1992年）对“同调猜想”及其各种交织关系作了出色的介绍。本段仅摘录其中几项，它们可由诺特局部环存在科恩-麦考利代数（甚至仅需科恩-麦考利模）这一事实推出（这得益于 Hochster（1983年）、佩斯金和斯皮罗（1972年）以及埃文斯和格里菲斯（1981年）的工作）。

定理 1.12. — 设$(R, \mathfrak{m})$ 是一个诺特局部环，设 $x \in R$，且 M、N是 R 上非零的有限生成模。

a) (M. Auslander 猜想) 若 M 具有有限投射维数且没有 x-挠，则 R 没有 x-挠。

21. 即 Cohen–Macaulay 代数，它们是基环的有限扩张。22. 有人告诉我，如今人们猜想的恰恰相反……

b) (Bass 问题) 若 M 具有有限内射维数，则 R 是 *Cohen–Macaulay*。

c)（Peskine–Szpiro 交猜想）若 $M \otimes_R N$ 具有有限长度，则dim $N \leq$ pd(M)。

d)（“改进的新交猜想”）设 C 是一个由有限生成自由 R-模构成、集中于次数 $[0, d]$的复形，并且 $H_{>0}(C)$ 具有有限长度。若 $H_0(C)$有一个非零极小生成元 c 被 $\mathfrak{m}$的某个幂湮灭，则维数 $R \leq d$。

e)（“Evans–Griffith syzygy 猜想”）假设 R 是一个 *Cohen–Macaulay* 整环。若 M 是第 k个 *syzygy* 模，具有有限投射维数且非自由，则 M 的秩为 $\geq k$。

在 Hochster 的论文发表时（1979年），上述所有结果在局部环含有一个域或维数为 $\leq$ 2时均已为人所知，而在其余情形中仍是开放问题。埃文斯和格里菲斯证明了[23] Cohen–Macaulay 模的存在性蕴含 d)，而 d) 又蕴含 e)。结合 Hochster（1983年）和 Dutta（1987）的工作，可以证明 d) 等价于直接因子猜想，且 d) 蕴含 c)。Peskine 和 Szpiro（1972年）在存在域的情况下证明了 c)，Roberts（1987）则在一般情况下证明了 c)。Peskine 和 Szpiro 证明了 c) 蕴含 b) 和 a)。

Hochster（1983年，定理 6.1）证明，直接因子猜想等价于另一个同样迷人的猜想，即单项式猜想：

定理 1.13。—如果 $x_1, \ldots, x_n$ 是 *Noether* 局部环$(A, \mathfrak{m})$的一个参数系，那么方程

$$(x_1 \cdots x_n)^k = y_1 x_1^{k+1} + \cdots + y_n x_n^{k+1}$$

没有解$(y_1, \ldots, y_n) \in A^n$，其中 $k \geq 1$。

该定理由定理 1.10 很容易推出，论证大致如下。若 $x_1, \ldots, x_n$ 是一个 A-模 M（对某个环 A）中的正则序列，且 $m_1, \ldots, m_n \in M$ 满足 $x_1 m_1 + \cdots + x_n m_n = 0$，那么对任意 i[24]，有 $m_i \in (x_1, \ldots, x_n)M$。由此可推得[25]：若 a_i 是正整数，且 $m, m_i \in M$ 满足

$$x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} m = x_1^{a_1+1} m_1 + \cdots + x_n^{a_n+1} m_n,$$

那么 $m \in (x_1, \ldots\ldots, x_n)M$。特别是，由于 $M/(x_1, \ldots\ldots, x_n)M \neq 0$，因此不可能有 $x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \in (x_1^{a_1+1}, \ldots\ldots, x_n^{a_n+1})$。

23. 不言自明.....参见 Hochster（1983年）第 2 节。24. 由于 x_n 是 $M/(x_1, \ldots, x_{n-1})M$中的非零因子，因此对某些 $m_i' \in M$，有 $m_n = \sum_{i=1}^{n-1} x_i m_i'$。于是有 $\sum_{i=1}^{n-1} x_i(m_i + x_n m_i') = 0$，从而可由归纳法得出结论。25. 若所有 a_i 都为零，则结论显然成立。否则，取满足 $a_i \neq 0$ 的 i，并令 $z = \prod_{j \neq i} x_j^{a_j}$ 和$x_j' = x_j^{a_j+1}$对应于 $j \neq i$。由于 $x_i^{a_i}(x_i m_i - z m) + \sum_{j \neq i} x_j' m_j = 0$，且 $(x_1', \ldots, x_{i-1}', x_i^{a_i}, x_{i+1}', \ldots, x_n')$ 是正则序列，我们得到 $x_i m_i - z m \in (x_1', \ldots, x_{i-1}', x_i^{a_i}, x_{i+1}', \ldots, x_n')M$，因此 $z m \in (x_1', \ldots, x_{i-1}', x_i, x_{i+1}', \ldots, x_n')M$。对非零的 a_j 的个数作归纳即可得出结论。

注 *1.14*。——上述定理可与下面的陈述作比较，它由 Briançon-Skoda 定理推出：若 A 是一个维数为$\leq n$的正则环，则

$$(x_1 \cdots x_{n+1})^n \in (x_1^{n+1}, \ldots, x_{n+1}^{n+1})$$

对所有 $x_1, \ldots, x_{n+1} \in A$（要证明 $n = 2$ 的情形已经不容易了！）。

1.7. 绝对整闭包中的代数

设 A 是一个整环，并固定其分式域 K^+ 的一个代数闭包 K。 A的绝对整闭包 A^+ 是 A 在 A中的整闭包 K^+。它在同构意义下定义良好，并且关于 A 弱函子性：每个态射f： $A \to B$整环之间的态射都会诱导出 (26) 一个态射 f^+：$A^+ \to B^+$。

为了说明它与上文讨论的猜想之间的联系，我们提及两个有趣的命题。设 $(A, \mathfrak{m})$ 是一个完备整诺特局部环。若 dim $A \leq 2$，则 A^+ 是一个 A-Cohen–Macaulay 代数（任何二维诺特正规整环都是 Cohen–Macaulay 环）。从三维（分别是四维）起，在等特征零（分别是不等特征）的情形下， A^+ 不再是一个 A-Cohen–Macaulay 代数。

在交换代数领域，这是一项真正令人叹为观止的壮举 (27)，Hochster 和 Huneke（1992年）证明了以下结果。该结果立即推出正特征下的定理 1.10，甚至还给出了更强的形式，因为这一构造具有弱函子性：

定理 1.15。— 若 A 是一个优良的诺特整局部环 (28)，其特征为 $p > 0$，则 A^+ 是一个 *A-Cohen–Macaulay* 代数。

若 A 是一个 **有理数域**-代数，这种方法便不再适用，而定理 1.10的证明（以及弱函子性）则需要通过一次精细的正特征约化来完成。

最后，我们以 Bhatt（2020年）提出的以下精彩结果结束这篇冗长的引言。该结果为不等特征情形提供了 Hochster–Huneke 定理的一个类似结论，并立即推出不等特征下的定理 1.10，以及 Cohen–Macaulay 代数的弱函子性。证明极为困难，运用了过去十年间 Hodge p-adic 理论发展的全部成果，以及 Bhatt 和 Scholze 的棱柱理论（2022年）。它无疑值得专门撰文全面阐述.....

定理 1.16。—— 设$(A, \mathfrak{m})$ 是一个剩余特征为 $p > 0$ 的优良诺特整局部环。 A^+ 的 p- 进完备化是一个 A 代数的 *Cohen–Macaulay* 代数。

---

26. 单射的情形显然，现假设 f 是满射；可以找到一个素理想 $\mathfrak{q}$，属于 A^+，且位于 $\wp$之上：$= \ker f$，于是 $A/\wp$单射到 $A^+/\mathfrak{q}$中，后者同构于 B^+。27. 更简洁的证明见 Huneke 和 Lyubeznik 的文章（2007年）。28. 例如，取完备情形。

注 1.17。—— 1. Hochster（1983年）证明，直接因子猜想等价于以下一个颇为简洁的表述：对于任意完备整诺特局部环 $(A,\mathfrak{m})$，A^+ 的 A-对偶非零。若 A 的维数为 n，根据局部对偶，这等价于 $H^n_{\mathfrak{m}}(A^+)\neq\{0\}$。从定理 1.1 可以很容易看出这一非零性（微妙之处在于可以反向推导）：根据 Cohen定理，可以假设 [29] 使得 A 也是正则的；但此时，A^+ 中的任意有限扩张 $A\to B$ 都是分裂的，因此态射 $H^n_{\mathfrak{m}}(A)\to H^n_{\mathfrak{m}}(B)$ 是单射，$H^n_{\mathfrak{m}}(A)\to H^n_{\mathfrak{m}}(A^+)$ 也同样是单射。由于 $H^n_{\mathfrak{m}}(A)\neq\{0\}$，由此即可得出结论。

2. 在定理 1.16 的情形下，我们证明（这是 Bhatt（2020年）论文的核心）：当 $i<\dim(A/p)$ 时，$H^i_{\mathfrak{m}}(A^+/p)$ 为零；当 $i<\dim A$ 时，$H^i_{\mathfrak{m}}(A^+)$ 为零。即使在三维，这类陈述也远远超出了 Heitmann（2002年）的结果（从几乎为零推进到了真正为零！）。这使他能够证明：如果 A 是一个 fragmentor，那么 A 是 Cohen–Macaulay 的：由与上文相同的论证，映射 $H^i_{\mathfrak{m}}(A/p)\to H^i_{\mathfrak{m}}(A^+/p)$ 是单射（因为 A 是一个 fragmentor），因此当 $i<\dim(A/p)$ 时，$H^i_{\mathfrak{m}}(A/p)$ 为零，而 A 是 Cohen–Macaulay 的。

2. 完美拟环：代数方面

本节旨在汇集一些关于「整」完美拟环的结果。这些结果散见于文献之中，如同拼图一般。关于更多细节，请参阅 Bhatt、Morrow 和 Scholze 的奠基性论文（2018年，第 3 节）、Bhatt 和 Scholze（2022年，第 2 和第 3 节）、Česnavičius 和 Scholze（2019年，第 2 节），Kedlaya和Liu 的著作（2015年），以及 Fontaine（2013年）和 Morrow（2019年）在本研讨班上的报告。

固定一个素数 p，并记 $\mathrm{Perf}_{\mathbf{F}_p}$ 为 $\mathbf{F}_p$-完美代数范畴，即 Frobenius态射 $\varphi\colon x\mapsto x^p$ 是自同构的代数（因此，这类代数是约化的）。模 p 约化以及 $W(-)$ 函子，即 p-典型维特向量函子，在 $\mathrm{Perf}_{\mathbf{F}_p}$ 与以下环范畴之间诱导出互逆等价：p-完备、无 p-挠，且模 p 约化后为完美环。

2.1. 维特向量

对于任意 $R\in\mathrm{Perf}_{\mathbf{F}_p}$，都存在唯一的乘法映射，但不一定是加法映射 $[\ ]\colon R\to W(R)$，使得对任意 $a\in R$都有 $[a]\equiv a\pmod p$。任意$x\in W(R)$都可唯一地写成 $x=\sum_{n\geq 0}[x_n]p^n$，其中序列 $(x_n)_{n\geq 0}$ 属于 R。这将非常

29. 这需要稍微花点功夫……

有助于将 x 视为“变量 p 的全纯函数”。因此，很自然会引入记号

$$x(0) := x_0,\ x'(0) := x_1.$$

映射 $x \mapsto x(0)$ 诱导出环同构 $W(R)/p \simeq R$，直接计算可得，对任意 $x, y \in W(R)$，都有

$$(xy)'(0) = x(0)y'(0) + y(0)x'(0), \tag{1}$$

这解释了这一记号。这一观察所带来的乐观情绪，因一般而言 $(x+y)'(0) \neq x'(0)+y'(0)$ 这一事实而有所缓和。然而，上述关系将多次发挥重要作用。

注 *2.1.* — 环 $W(R)$ 带有一个 Frobenius 提升 $\varphi\colon W(R) \to W(R)$，定义为 $\varphi(\sum_{n\geq 0}[x_n]p^n) = \sum_{n\geq 0}[x_n^p]p^n$。映射 $\delta\colon W(R) \to W(R)$ 定义为 $\delta(x) := \frac{\varphi(x)-x^p}{p}$，是 p-导子（按 Buium 的定义），作用于环 $W(R)$ 上，即满足

$$\delta(xy) = x^p\delta(y) + y^p\delta(x) + p\delta(x)\delta(y),\ \delta(x+y) = \delta(x) + \delta(y) + \frac{x^p + y^p - (x+y)^p}{p}$$

对于 x，$y \in W(R)$。该映射在 Bhatt 和 Scholze（2022年）中起着至关重要的作用。注意，$x'(0)^p$ 只是将 p模 $\delta(x)$ 化简所得。

2.2. Fontaine 构造

我们快速回顾一下 Fontaine 提出的几个基本构造。

定义 *2.2*。——环 A 的一个 p-幂强元素，是指由 A 中的元素构成的序列 $(a_n)_{n\geq 0}$，满足对于任意 n都有 $a_{n+1}^p = a_n$。用 $\varprojlim_{x\mapsto x^p} A$ 表示 A中所有p-幂强元素的集合。我们也会不严格地称元素 $a \in A$ 为 p-幂强的，如果它配备了满足 $a_0 = a$的序列 $(a_n)_{n\geq 0} \in \varprojlim_{x\mapsto x^p} A$。我们将用 $a^{p^{-n}}$ 或 a^{1/p^n}代替 a_n，并用 $(a^{p^{-\infty}})$表示由 a_n生成的 A 的理想。注意，“A 的 p-幂强元素 a”这一表述隐含地指定了 a的一个相容根序列 $(a^{p^{-n}})_{n\geq 0}$。

例如，若 $R \in \mathrm{Perf}_{\mathbb{F}_p}$，则映射 $a \mapsto ([a^{1/p^n}])_{n\geq 0}$ 在 R 与 $\varprojlim_{x\mapsto x^p} W(R)$之间诱导出一个双射。更一般地，设 B 是一个 p-完备环。模 p 约化诱导出一个乘法双射，将 $\varprojlim_{x\mapsto x^p} B$ 映到倾斜 $B^\flat := \varprojlim_{x\mapsto x^p} B/p$，其中 B是由满足以下条件的序列 $(x_n)_{n\geq 0}$ 构成的 $\mathbb{F}_p$-完美代数：对任意 n，均有 $x_{n+1}^p = x_n$。逆映射 $\iota\colon B^\flat \to \varprojlim_{x\mapsto x^p} B$ 按如下方式构造：若 $(x_n)_{n\geq 0} \in B^\flat$，且 $b_n \in B$ 是 x_n的任意提升，则序列 $(b_{n+k}^{p^k})_{k\geq 0}$ 在 B 中按 p-进拓扑收敛于一个元素 b_n，该元素不依赖于 b_n的选取，并且 $\iota((x_n)_{n\geq 0}) = (\tilde{b}_n)_{n\geq 0}$。对任意 $x \in B^\flat$，有

$$\iota(x) = (\sharp(x), \sharp(x^{1/p}), \ldots),$$

其中 $\sharp\colon B^\flat \to B$ 是乘法映射（但一般而言不是加法映射），由将 ι 与 $\lim_{\longleftarrow x\mapsto x^p} B \to B$上的第一分量投影复合而得，即

$$\sharp(x_0, x_1, \ldots) = \tilde{b}_0 = \lim_{k\to\infty} b_k^{p^k}.$$

Fontaine理论中的一个经典结果是映射

$$\theta_B\colon W(B^\flat) \to B,\ \theta_B(\sum_{n\geq 0}[a_n]p^n) = \sum_{n\geq 0} a_n^\sharp p^n.$$

这是满足以下条件的唯一环同态：对任意 $b \in B^\flat$，$\theta_B([b]) = b^\sharp$。

所有这些构造都关于 p-完备环 B 具有函子性，并可在更大的 p-完备环范畴中刻画 $W(R)$（对于 $R \in \mathrm{Perf}_{\mathbb{F}_p}$），如下所述。设 B 是一个 p-完备环，且设 $f\colon W(R) \to B$ 是一个环同态。通过取倾斜环可得到一个环同态 $f^\flat\colon R \to B^\flat$，更具体地说，即将 a映射为 $f([a^{1/p^n}])$，$n \geq 0$模 p约化所得到的序列。反之，一个环同态 $g\colon R \to B^\flat$ 诱导出另一个 $f := \theta_B \circ W(g)\colon W(R) \to B$，满足 $f^\flat = g$。因此有

$$f(\sum_{n\geq 0}[a_n]p^n) = \sum_{n\geq 0} g(a_n)^\sharp p^n.$$

可以将上述讨论概括如下：

命题 2.3.— 设 $R \in \mathrm{Perf}_{\mathbb{F}_p}$。映射 $f \mapsto f^\flat$ 和 $g \mapsto \theta_B \circ W(g)$诱导出一个关于环 p-完备的函子双射 B

$$\mathrm{Hom}(W(R), B) \simeq \mathrm{Hom}(R, B^\flat).$$

2.3. 完美拟环

设 $R \in \mathrm{Perf}_{\mathbb{F}_p}$。若 $\xi \in W(R)$ 满足区分元 条件，则称其为区分的；若 $\xi'(0)$ 在 R 中可逆，亦即若 $\xi = [\xi(0)] + pu$，其中 u 在 $W(R)$ 中可逆。因此，ξ 是“一个在 0 附近双全纯的变量 p 的全纯函数”的一种体现。

注 *2.4.* — 设 $R \in \mathrm{Perf}_{\mathbb{F}_p}$，且设 $\xi \in W(R)$ 是一个 distinguished 元素。

a) 对于 $\mathrm{Perf}_{\mathbb{F}_p}$ 中的任意态射 $R \to S$，ξ 的像在 $W(S)$ 中仍然是区分的。我们仍将其记作（略去严谨性）ξ。若 R 是 $\xi(0)$-完备的，则关系 (1) 表明，对于 $W(R)$ 中的任意可逆元素 u，$u\xi$ 在 $W(R)$ 中是区分的。

b) 元素 ξ 在 $W(R)$ 中不是零因子：若 $\xi x = 0$，则 $\xi(0)x(0) = 0$；并且“在 0 处求导”，即利用关系式 (1)，可得 $\xi'(0)x(0) + \xi(0)x'(0) = 0$。因此 $\xi'(0)x(0)^2 = 0$；又因为 $\xi'(0)$ 可逆且 R 是完美的，所以有 $x(0) = 0$。因此，对于某个 $x_1 \in W(R)$，有 $x = px_1$，且 $\xi x_1 = 0$，继而通过迭代得到 $x \in \cap_{n\geq 1} p^n W(R) = \{0\}$。同样的论证表明，若 a、$x \in W(R)$ 满足 $a \mid \xi x$，则 $x(0)^2 \in (a(0)x'(0)\ a(0)x(0)\ a'(0)x(0))$。特别地，若 $p^2 \mid \xi x$，则 $p \mid x$。

现在，我们依照 Bhatt 和 Scholze 的棱柱视角（2022年），来引入迄今为止最一般的一类.....完美拟环：

定义 2.5。— 若环 A 同构于一个环$W(R)/(\xi)$，其中 $R \in \mathrm{Perf}_{\mathbf{F}_p}$且 $\xi \in W(R)$是区分元，则称其为完美类。记Perf为完美拟环范畴，其态射为环的态射。

注记 *2.6*。——完美拟世界中最早出现的对象是完美体[30]，例如$\mathbf{C}_p$，它是**有理数域**$_p$的代数闭包的完备化。随后，Scholze（2012年）提出了定义在此类域上的完美 Banach 代数（其中一些在 Colmez 和 Fontaine（2000年）以及 Colmez（2002年）的文章中已经有所体现……）。Fontaine（2013年）在其讲义中引入了更广泛的一类完美拟环。最后，Bhatt、Morrow 和 Scholze（2018年）引入了最一般的完美拟环类，它与上文引入的类等价。关于它与较早且限制更严格的定义之间的联系，另见命题2.12 。

例 *2.7*。——1. 显然，$\mathrm{Perf}_{\mathbf{F}_p}$ 可识别为 Perf 的由 p 湮灭的对象所组成的子范畴（注意，$p \in W(R)$ 是区分元）。特别地，零环、$\mathbf{F}_p$、$\mathbf{F}_p[T^{1/p^\infty}] := \varinjlim_n \mathbf{F}_p[T^{1/p^n}]$ 都是完美类。

2. 设 $A = W(R)/(\xi)$，其中 $R \in \mathrm{Perf}_{\mathbf{F}_p}$，且 $\xi \in W(R)$ 是区分元。 π de[$\xi(0)^{1/p}$] 在 A 中的像，配上由 $[\xi(0)^{1/p^{n+1}}](n \geq 0)$ 的像给出的根序列，是 A 中一个 p- 幂元（定义 2.2 ）。由于 $\xi = \xi(0) + pu$ 且 u 可逆，因此有 A 的理想等式 $(\pi^p) = (p)$。所以，$\mathbf{Z}_p$ 不仅不是完美拟环，甚至不存在从完美拟环到 $\mathbf{Z}_p$ 的态射。注意，若 $\xi(0) = 0$，则 $\pi = 0$，且 $A \in \mathrm{Perf}_{\mathbf{F}_p}$。

3. 保持上述背景。Frobenius $A/\pi \to A/\pi^p$ 可识别为 Frobenius$R/\xi(0)^{1/p} \to R/\xi(0)$，且这是一个同构。因此，对任意完美环 A，都存在一个元素 p-幂元 $\pi \in A$，使得 $(\pi^p) = (p)$（下文的命题 2.8表明 A 是 π-完备的），并且使 Frobenius $A/\pi \to A/\pi^p$ 成为一个同构。关于部分逆命题，参见命题2.12 。

4. 对于 $R = \mathbf{F}_p[T^{1/p^\infty}]$，环 $W(R)$ 同构于$\mathbf{Z}_p[T^{1/p^\infty}]$ 的 p-进完备化（模 p 化即可证明这一点）。元素 $\xi = [T] - p$ 是特殊的，而 $W(R)/(\xi)$ 同构于 $\mathbf{Z}_p[p^{1/p^\infty}]$的 p-进完备化。同样的论证表明，如果 A 是一个完美拟环，那么其 p-进完备化 $A\langle T^{1/p^\infty}\rangle$ $A[T^{1/p^\infty}] = \varinjlim_n A[T^{1/p^n}]$ 也是完美拟环。

5. 由于 W 与乘积交换，我们很容易看出，任意完美体环的乘积都是完美类。反之并不成立（参见注释 2.13）；而且这将在稍后造成严重问题：完美体环的逆极限（在环范畴中）并不一定是完美类。

30. 注意：完美拟代数闭域与完美拟环（根据定义 2.5）并不是一回事，后者也可以是一个域。在完美拟世界中，并非一切都是完美的……

2.4. 倾斜

下面的结果将在后文中反复使用。

命题 2.8. — 每个完美拟环都是 p-完备的，且其 p-主挠由 p 湮灭。

证明。— 不妨设该环具有形式 $A = W(R)/(\xi)$，其中$R \in \mathrm{Perf}_{\mathbf{F}_p}$ 且 $\xi \in W(R)$ 是区分元。要证明 p 湮灭 $A[p^\infty]$，只需证明 $A[p^2] = A[p]$，换言之，若 $x \in W(R)$ 满足 $\xi \mid p^2 x$，则 $\xi \mid px$；这可由注 2.4 的最后一句推出。接着证明 A 是 p-完备的 (31)。只需证明 $(\xi) \subset W(R)$ 关于 p-进拓扑是闭的。但我们刚刚证明了等式 $(\xi) \cap p^2 W(R) = p((\xi) \cap pW(R))$，而直接归纳可得 $(\xi) \cap p^{n+1} W(R) = p^n((\xi) \cap pW(R))$。 □

设 $R \in \mathrm{Perf}_{\mathbf{F}_p}$，且 $\xi \in W(R)$ 是一个区分元。令 $A = W(R)/(\xi)$，则环 A/p 可识别为 $R/\xi(0)$，特别是*Frobenius* 在 A/p上是满射。这意味着，利用模 p 约化以及相关环的 p-完备性，Fontaine 映射 $\theta_A \colon W(A^\flat) \to A$是满射。为了研究其核，我们先描述 $A^\flat$。由于 R 是完美的且 $A/p \simeq R/\xi(0)$，态射 $x \mapsto x^{p^n}$ 在投影系统 $\{A/p\}$ 与 $\{R/\xi(0)^{p^n}\}$ 之间诱导出一个同构；前者的过渡映射由 Frobenius 诱导，后者的过渡映射则由典范投影诱导。因此，$A^\flat = \varprojlim_{x \mapsto x^p} A/p$ 同构于 R的 $\xi(0)$-完备化 $\hat{R}$，特别是 $A^\flat$ 是 $\xi(0)$-完备的。为了进一步讨论，我们需要：

引理 2.9。— 态射 $R \to \hat{R}$ 诱导出同构 $A \simeq W(\hat{R})/(\xi)$。

证明。— 由于 A 和 $W(\hat{R})/(\xi)$ 是 p-完备的（命题 2.8），只需证明诱导态射 $A/p^n \to W(\hat{R})/(\xi, p^n)$ 对任意$n \geq 1$都是同构。但 $\xi - [\xi(0)]$ 与 p生成同一个理想，因此

$$A/p^n \simeq W(R)/(p^n, \xi) = W(R)/([\xi(0)]^n, \xi) \simeq (W(R)/[\xi(0)]^n)/(\xi).$$

由于 $R/\xi(0)^n \simeq \hat{R}/\xi(0)^n$，态射 $W(R)/[\xi(0)]^n \to W(\hat{R})/[\xi(0)]^n$ 是一个同构，这就完成了证明（沿用上文的同构链，并将 R替换为 $\hat{R}$）。 □

倾斜与维特向量之间的伴随关系（命题 2.3）表明，态射 $\theta_A \colon W(A^\flat) \to A$经由同构 $A^\flat \simeq \hat{R}$和 $A \simeq W(\hat{R})/(\xi)$，可识别为典范投影 $W(\hat{R}) \to W(\hat{R})/(\xi)$，特别地，其核由 ξ生成。由此得到同构

$$\theta_A \colon W(A^\flat)/(\xi) \simeq A, \tag{2}$$

由此得到该理论的第一个基本结果：

31. 一个巧妙的方法是注意到，A 在导出意义下是 p-完备的，并且其 p-主挠是有界集，因此“导出的”一词是多余的……

定理 2.10. — 若 A 是一个完美拟环，且 $\xi \in W(A^\flat)$ 是区分元并生成$\ker(\theta_A)$，那么 A-完美拟代数范畴与 $A^\flat$-完美(0)完备代数范畴等价；此等价通过$B \mapsto B^\flat$ 和 $R \mapsto W(R)/(\xi)$ 给出。

证明。— 只需证明 θ_B：$W(B^\flat)/(\xi) \simeq B$，并且对于任意 A-完美拟代数 B，$B^\flat$ 是 $\xi(0)$-完备的。我们刚刚看到，θ_B 是满射，并且存在一个 distinguished 元素 $\xi_1 \in W(B^\flat)$，使得 $\ker(\theta_B) = (\xi_1)$，其中 $B^\flat$ 是 $\xi_1(0)$-完备的。由于 B 是一个 A-代数，构造映射 θ 的函子性表明，$\xi \in \ker(\theta_B)$，因此对于某个 $v \in W(B^\flat)$，有 $\xi = \xi_1 v$。对其“求导”可得（参见关系式 (1)）$\xi'(0) = \xi_1'(0)v(0) + \xi_1(0)v'(0)$，因此 $\xi_1'(0)v(0) = \xi'(0) - \xi_1(0)v'(0)$ 可逆（因为 $\xi'(0)$ 可逆，而且 $B^\flat$ 是 $\xi_1(0)$-完备的）。由于 $\xi_1'(0)$ 可逆，$v(0)$ 也可逆，因此 v 同样可逆，并且 $(\xi) = (\xi_1)$。特别地，$B^\flat$ 也是 $\xi(0)$-完备的，证明至此完成。 □

下面的稳定性性质将发挥关键作用。

推论 2.11。— 设 A 为一个完美拟环。若 B 和 C 是 A-完美拟代数，则 $B \otimes_A C$ 的 p-进完备化 $B\widehat{\otimes}_A C$ 是一个完美拟环。更确切地说，若 ξ 生成 θ_A 的核：$W(A^\flat) \to A$，则

$$B\widehat{\otimes}_A C \simeq W(B^\flat \otimes_{A^\flat} C^\flat)/(\xi).$$

证明。— $A^\flat$-代数 $R := B^\flat \otimes_{A^\flat} C^\flat$ 是完美的，因为 $A^\flat$、$B^\flat$、$C^\flat$ 都是完美的。由于 ξ 在 $W(R)$ 中仍是区分元，环 $T = W(R)/(\xi)$ 是完美拟环，因而是 p-完备的。态射 $B^\flat \to R$ 和 $C^\flat \to R$ 与典范同构（定理 2.10）$W(A^\flat)/(\xi) \simeq A$、$W(B^\flat)/(\xi) \simeq B$、$W(C^\flat)/(\xi) \simeq C$ 相结合，诱导出一个态射 $B \otimes_A C \to T$。由于 T 是 p-完备的，该态射可延拓为态射 $B\widehat{\otimes}_A C \to T$。要证明它是同构，只需证明对于任意 p-完备环 S，它在 $\mathrm{Hom}(T, S) \to \mathrm{Hom}(B\widehat{\otimes}_A C, S)$ 之间诱导双射即可。由于

$$\mathrm{Hom}(B\widehat{\otimes}_A C, S) = \mathrm{Hom}(B \otimes_A C, S) = \\ \mathrm{Hom}\left(\frac{W(B^\flat)}{(\xi)}, S\right) \times_{\mathrm{Hom}\left(\frac{W(A^\flat)}{(\xi)}, S\right)} \mathrm{Hom}\left(\frac{W(C^\flat)}{(\xi)}, S\right),$$

该结果形式上由命题 2.3. 所给出的伴随关系推出。 □

2.5. 完美拟环与 Frobenius

以下基本结果（Bhatt、Morrow 和 Scholze 的引理 3.9 和 3.10（2018年））在较弱的假设下，提供了检验一个环是否具有完美拟性质的最简单判据。这使得我们无需给出表示式 $W(R)/(\xi)$，就能构造出大量完美拟环，同时也将其与较早的定义联系起来（参见注释 2.6）。

命题 2.12. — 设 A 是一个含有非零因子 $\pi \in A$ 的环，使得 $\pi^p \mid p$，A 是 π-完备的，且由 *Frobenius* 诱导的态射是同构 $A/\pi \simeq A/\pi^p$。那么 A 是完美类。

证明. — 注意， A 是 p-完备的，因为 $\pi^p \mid p$ 且 A 是 π-完备的。因此，要证明 θ_A: $W(A^\flat) \to A$ 的满射性，只需证明 Frobenius 在 A/p 上的满射性。对任意 $x \in A$，Frobenius 模 π^p 的满射性以及 A 的 π-完备性允许我们写出 $x = x_0^p + \pi^p x_1^p + \pi^{2p} x_2^p + \cdots$，其中某些 $x_n \in A$，于是 $x \equiv (x_0 + \pi x_1 + \pi^2 x_2 + \cdots)^p$ (模 p)。

接下来，在 $\theta := \theta_A$ 的核中构造一个 distinguished 元素。Frobenius $A/\pi \to A/\pi^p$ 的满射性以及 A 的 π-完备性给出一个 p-强元素（定义 2.2） $u \in A$，使得 $\pi \equiv u$ (模 π^p)。由于 A 是 π-完备的， π 和 u 生成 A 的同一个理想，因此可以用 u 替换 π，并假设对于某个 $f \in A^\flat$，$\pi = f^\sharp$。由于 θ 是满射的且 $\pi^p \mid p$，存在 $x \in W(A^\flat)$，使得$p = \pi^p \theta(-x) = \theta(-x[f]^p)$。令 $\xi = p + x[f]^p$，则有 $\xi'(0) = 1 + x'(0) f^p$。接下来验证 $A^\flat$ 是 f-完备的，因此 ξ 是区分元，并且 ker$(\theta) = (\xi)$。 □

注 *2.13*。——由命题 2.12 可轻易推出以下结果:

1. 设 A 是一个整环，不含 p-挠，且关于 p-进拓扑分离，并满足 $p \in \widehat{\text{Rad}}(A)$。那么， A的绝对整闭包 A^+ 的 p-进完备化 A^+ 是完美类。2. 环 $\mathbb{Z}_p$ 不是完美类（例 2.7），但 Ax–Sen–Tate 定理[32]表明它是 $\mathbb{Z}_p^+$ 在有理数域 $\mathbb{Q}_p$的绝对伽罗瓦群作用下的不变量环。因此，完美体环的逆极限不一定仍是完美体（另一个例子是子环 $\mathbb{Z}_p[\mu_{p^\infty}]$和 $\widehat{\mathbb{Z}_p[p^{1/p^\infty}]}$，它们包含于 $\widehat{\mathbb{Z}_p^+}$且都是完美体，但它们的交等于 $\mathbb{Z}_p$，并非完美体）。

注 2.14。——棱柱理论使完美拟环与 Frobenius 之间的联系更加清晰。设 A 是一个带有p-导子的环 δ （参见注 2.1），并设 $\varphi(x) = x^p + p\delta(x)$ 是由 δ诱导的 Frobenius 提升。若 I 是 A的一个理想，则称对 (A, I) 为棱柱，若 I在谱 Spec(A) 中定义一个卡蒂埃除子， A 是 (p, I)- 完备的（在导出意义下），且 $p \in I + \varphi(I)A$。Bhatt 和 Scholze（2022）证明（参见该文定理 3.10），完美棱柱范畴（即满足 φ: $A \to A$ 为同构的情形）与完美体范畴等价，该等价由函子 $(A, I) \mapsto A/I$和 $R \mapsto (W(R^\flat), \ker(\theta_R))$ 给出。

2.6. 完美拟环与 p-整闭包

Roberts 的文章（2008）和 André 的文章（2018a）凸显了 p-整闭包（或简称 p-闭包，以简化表述）与完美拟环这一概念之间的基本关系。

32. 取一个序列 $(a_n)_{n\geq 0}$，使得 A 中满足 $a_0 = \pi$ 且 $a_{n+1}^p \equiv a_n$ (模 π^p)，并令 $u = \lim_{n\to\infty} a_n^{p^n}$；序列 $(a_n^{p^n})_{n\geq 0}$ 关于 π-进拓扑是柯西序列。

定义 2.15。——设 A 是环 B 的一个子环。若对于任意满足 $x^p \in A$ 的 $x \in B$，都有 $x \in A$，则称 A 在 B 中是 p-闭的。存在一个包含 A 的最小 p-闭子环 B，称为 p-闭包在 B 中的闭包。

以下观察归功于 Roberts（2008）。在本段余下部分中，固定一个环 A，它带有一个非零因子 π，使得 $\pi^p \mid p$。记φ: $A/\pi \to A/\pi^p$ Frobenius。

命题 2.16。— *a)* $A[\frac{1}{\pi}]$ 中 A 的 p-闭包为

$$R = \left\{ x \in A\left[\frac{1}{\pi}\right] \mid \exists n \geq 0, x^{p^n} \in A \right\}.$$

b) 环 A 在 $A[\frac{1}{\pi}]$ 中是 p-闭的，当且仅当 φ: $A/\pi \to A/\pi^p$ 是单射。

证明。— a) 唯一的难点是证明 R 确实是 $A[\frac{1}{\pi}]$的一个子环，更准确地说，它对加法封闭。取 x, $y \in R$和 n, $k \geq 1$, 使得 x^{p^n}, y^{p^n}, $\pi^k x$, $\pi^k y$ 都属于 A, 并证明令 $N = 2p^n k + n$时有 $(x+y)^{p^N} \in A$, 由此即可得出结论 $x + y \in R$。只需证明对任意 $0 \leq i \leq p^N$, $\binom{p^N}{i} x^{p^N - i} y^i \in A$。若 $p^n \mid i$, 这显然成立，因此假设并非如此。由于 $v_p(i) < n$，故有 $p^{N-n} \mid \binom{p^N}{i}$, 于是 $\pi^{2p^n k} \mid \binom{p^N}{i}$。由于$x^{p^n}$, $y^{p^n} \in A$, 只需证明当 $0 \leq u$, $v < p^n$时, $\pi^{2p^n k} x^u y^v \in A$；这显然成立，因为 $\pi^k x$, $\pi^k y \in A$。

b) 显然，若 A 在 $A[\frac{1}{\pi}]$ 中是 p-闭的，则 φ 是单射。反过来，设 $x \in A[\frac{1}{\pi}]$ 满足 $x^p \in A$，并设 $n \geq 1$ 满足 $\pi^n x \in A$。于是 $(\pi^n x)^p \in \pi^p A$, 所以 $\pi^n x \in \pi A$ 且 $\pi^{n-1} x \in A$。迭代可得 $x \in A$。 □

我们将在定理的证明中用到以下结果4.3。

命题 2.17. — 假设 *Frobenius* $A/\pi \to A/\pi^p$ 是一个同构，且 $g \in A$ 和 π 是 p-幂的（定义 *2.2*），并且 g 模 π是非零因子。对任意 $n \geq 1$, p在 $A[\frac{g}{\pi^n}]$ 中的 $A[\frac{1}{\pi}]$-闭包是 $A[\frac{g^{1/p^j}}{\pi^{n/p^j}}, j \geq 0]$, 其完备化$\pi$-进完备化是完美类的。

证明。——代数 $C := A[\frac{g^{1/p^j}}{\pi^{n/p^j}}, j \geq 0]$ 是其子代数 $A[\frac{g^{1/p^j}}{\pi^{n/p^j}}]$的递增并集，并且显然包含于 $A[\frac{1}{\pi}]$中 $A[\frac{g}{\pi^n}]$ 的 p-闭包内。

记 φ_R: $R/\pi \to R/\pi^p$ 为一个 A-代数 R的 Frobenius。只需证明 φ_C 是双射：的完备化 π- 进 C 将是完美类的（命题 2.12），且 C 将在 $C[\frac{1}{\pi}] = A[\frac{1}{\pi}]$ 中 p- 闭合 $C[\frac{1}{\pi}] = A[\frac{1}{\pi}]$（命题 2.16），因此等于 $A[\frac{1}{\pi}]$中 $A[\frac{g}{\pi^n}]$的 p-闭包。

设 $u_j = \pi^{n/p^j} X^{1/p^j} - g^{1/p^j} \in A[X^{1/p^j}]$。由于 g不是模 π的零因子，下面的注记 2.18 给出了同构 $A[\frac{g^{1/p^j}}{\pi^{n/p^j}}] \simeq A[X^{1/p^j}]/(u_j)$, 且与 j的变化相容，因此得到一个同构 $C \simeq B/I$ 与 $B = A[X^{1/p^\infty}]$以及 $I = (u_0, u_1, \ldots\ldots)$ 相容。由于 φ_A是双射，同样可知 φ_B也是双射。利用这些

同余式 $u_{j+1}^p \equiv u_j$ （模 $\pi^p B$），可以容易地推出 $\varphi_{B/I}$ 是一个同构。

□

注记 *2.18*。——设 R 为一个环，$r \in R$ 为非零因子。若 $s \in R$ 模 r是非零因子，则自然态射 $R[X]/(rX - s) \to R[\frac{s}{r}] \subset R[\frac{1}{r}]$是一个同构（习题！）。

2.7. 两个重要的技术性结果

我们经常要处理没有 p-挠的环，而一个环的完美拟性质很适合传递到它的最大无 p-挠商：

命题 2.19。——若 $A \simeq W(R)/(\xi)$（其中 $R \in \mathrm{Perf}_{\mathbb{F}_p}$ 且 ξ 为区分元）是一个完美拟环，那么 $A/A[p^\infty] \simeq W(R/\mathrm{Ann}(\xi(0)))/\xi$ 也是。

证明。——回顾一下，$A[p^\infty] = A[p]$（命题 2.8）。写作 $\xi = [\xi(0)] + pu$，其中 u 在 $W(R)$ 中可逆，并注意到 $S := R/\mathrm{Ann}(\xi(0))$ 是完美的（事实上，若 $x^p\xi(0) = 0$ 则 $(x\xi(0))^p = 0$，因此 $x\xi(0) = 0$）。典范投影 $f\colon R \to S$ 诱导出一个态射 $f\colon W(R) \to W(S)$。若 $a \in A[p]$ 可提升为 $x \in W(R)$，则存在 $y \in W(R)$ 使得 $px = \xi y$。我们有 $f(y) \in pW(S)$，因为 $\xi(0)y(0) = 0$（所以$f(y(0)) = 0$）。由此可得 $f(x) \in (\xi)W(S)$，且态射 $A \to W(S)/(\xi)$ 可分解为态射 $A/A[p] \to W(S)/(\xi)$，显然是满射。它也是单射：若 $a \in A$ 可提升为 $x \in W(R)$，且在 $W(S)/(\xi)$ 中的像为零，则对于某个 $y \in W(S)$，有 $f(x) = \xi y$。设 $z \in W(R)$ 是 y 的一个提升，则 $[\xi(0)](x - \xi z) = 0$，于是 $(\xi - pu)(x - \xi z) = 0$ 且 $\xi \mid px$，因此 $a \in A[p]$。

□

以下结果将在后文中反复使用。其证明相当巧妙。

命题 2.20. — 每个完美拟环 A 都是约化的，并且对任意元素 p- 幂强（定义 *2.2*）$a \in A$，a- 主挠 $A[a^\infty]$ 被 A 的$(a^{p^{-\infty}})$湮灭。

证明。— 第二点是第一点的形式推论：若 $a^n x = 0$对某个 $x \in A$成立，则 $(a^{n/p}x)^p = 0$，因此 $a^{n/p}x = 0$，因为 A 是约化的。设 $\pi \in A$ 是一个 p-幂强元素，满足 $(\pi^p) = (p)$（例 2.7）。先假设 A 无p-挠。若 $a \in A$ 满足 $a^p = 0$，同构 $A/\pi \simeq A/\pi^p$ 表明，对某个 $b \in A$，有 $a = \pi b$。由于 $(\pi^p) = (p)$，且 A 无 p-挠，因此有 $b^p = 0$。反复迭代便推出 $a \in \cap_n \pi^n A = \cap_n p^n A = \{0\}$，从而得证。

在一般情形下，根据命题 2.19 以及 $A/(\pi^{p^{-\infty}})$ 的约化性（甚至是完美性！），只需证明自然态射 $A \to A/A[p] \times A/(\pi^{p^{-\infty}})$ 的单射性。设 $a \in A[p] \cap (\pi^{p^{-\infty}})$，并令 $x \in W(R)$ 是 a 的一个代表元。由于$a \in (\pi^{p^{-\infty}})$，有 $x(0) \in (\xi(0)^{p^{-\infty}})$。设 $R = A^\flat$，于是 $A \simeq W(R)/(\xi)$。因为 $pa = 0$，存在 $y \in W(R)$ 使得 $px = \xi y$。因此有 $\xi(0)y(0) = 0$ 且 $\xi'(0)y(0) + \xi(0)y'(0) = x(0)$，故 $y(0) \in (\xi(0)^{p^{-\infty}})$。但是 $\xi(0) \in$ 湮灭子$(y(0))$，且 R 是完美的，因此 $(\xi(0)^{p^{-\infty}}) \subset$湮灭子$(y(0))$，这迫使 $y(0)^2 = 0$，进而 $y(0) = 0$。因此有 $\xi \mid x$ 且 $a = 0$。

□

3. 完美拟代数：解析方面

本节（沿用上一节的记号）固定一个素数 p （由此得到完美拟环的概念），以及一个域 K，它带有一个非阿基米德绝对值 $|\cdot|\colon K\to\mathbf{R}_{\geq 0}$，其单位球 K^0 是一个完美拟环。由于 K^0 是 p-完备的（命题2.8），有 $p\in \mathrm{Rad}(K^0)$，因此$|p|<1$。固定一个元素 $\pi\in K^0$ 如下：

- 若特征为 K，则取任意非零元素 $\pi\in K^0$，使得 $|\pi|<1$。
- 否则，选取 $\ker(\theta_{K^0})$ 的一个 distinguished 生成元 $\xi\in W((K^0)^\flat)$，并记

$$\pi=\theta_{K^0}([\xi(0)^{1/p}])=(\xi(0)^{1/p})^\sharp\in K^0.$$

因此 $\pi^pK^0=pK^0$ (例2.7)，所以 $|\pi|<1$。元素 π 配备根系 $(\pi^{1/p^n}:=(\xi(0)^{1/p^{n+1}})^\sharp)_{n\geq 0}$ 是 p-强的（定义2.2）。

D在两种情况下，$K^0/\pi\simeq K^0/\pi^p$ 通过 Frobenius，π 都是 p-强的，并且 $|\pi|<1$.

若 A 是一个 K^0-平坦代数（即不含 π-挠），则记

$$A_*=\pi^{-1/p^\infty}A:=\{f\in A[\frac{1}{\pi}]\mid \pi^{1/p^n}f\in A \text{ pour tout } n\geq 0\},$$

一个包含 A 且包含于 $\pi^{-1}A$中的 $A[\frac{1}{\pi}]$ 的子 K^0-代数。

注 *3.1*。——容易看出 $(A_*)_*=A_*$，并且若 A 是 π-完备的（分别地，p-闭的（定义 2.15）于 $A[\frac{1}{\pi}]$中，则 A_* 也如此。若 $(A_i)_{i\in I}$是由 K^0-平坦代数组成的射影系统，则 $(\varprojlim_{i\in I}A_i)_*\simeq\varprojlim_{i\in I}(A_i)_*$。

3.1. 一致巴拿赫代数

记 Ban_K 为 K-巴拿赫代数的范畴，即由带有超度量范数 $|\cdot|\colon A\to\mathbf{R}_{\geq 0}$ 的 K-代数 A所构成的范畴，该范数定义在 K向量空间 A 上，满足对于所有 $a,\ b\in A$（且若 $A\neq 0$则 $|1|=1$），并且使 A 在诱导距离下成为完备度量空间。Ban_K 中的态射是同时为 K-代数态射的利普希茨连续映射。

Berkovich [33] 构造了一个从 Ban_K 到紧致拓扑空间的函子，它将 $(A,|\cdot|)\in\mathrm{Ban}_K$ 映到其*Berkovich* 谱$\mathrm{M}(A)$，即由满足以下条件的乘法半范数组成的集合[34] $x\colon A\to\mathbf{R}_{\geq 0}$，使得对任意 $f\in A$，都有 $x(f)\leq|f|$，并赋予使求值映射 $x\mapsto x(f)$ 对 $f\in A$ 连续的最弱拓扑。我们将用 $|f(x)|$ 代替 $x(f)$。

设 $(A,\ |\cdot|)\in\mathrm{Ban}_K$。子集

$$A^0=\{f\in A\mid \sup_{n\geq 1}|f^n|<\infty\}$$

33. 在下文中，我们本可以（或者应该……）用 Huber 空间替换 Berkovich 空间。我们之所以这样选择，是为了避免让读者接触 Huber 理论中涉及的众多定义；这些定义在本文中不会起到重要作用。34. 因此，我们要求 $x(f+g)\leq\max(x(f)\ x(g))\ x(fg)=x(f)x(g)$，且当 $A\neq 0$ 时，$x(1)=1$。

是 K^0-代数 A 的一个子代数，包含 A 的单位球，特别是 $A^0[\frac{1}{\pi}] = A$。我们将用 A^0_* 代替 $(A^0)_*$。若记

$$|f|_{\mathrm{sp}} = \lim_{n\to\infty} |f^n|^{1/n} = \inf_{n\geq 1} |f^n|^{1/n}$$

元 $f \in A$的谱半范数，可以使用基本公式 (35)

$$|f|_{\mathrm{sp}} = \max_{x\in\mathcal{M}(A)} |f(x)| \text{ et } A^0_* = \{f \in A \,|\, |f|_{\mathrm{sp}} \leq 1\}.$$

称 $(A, |\cdot|) \in \mathrm{Ban}_K$ 是一致的，当且仅当 A^0 是 A的有界子集。这当且仅当 $|\cdot|$ 等价于 $|\cdot|_{\mathrm{sp}}$（使用包含映射 $\{f \in A \,|\, |f|_{\mathrm{sp}} < 1\} \subset A^0 \subset \{f \in A \,|\, |f|_{\mathrm{sp}} \leq 1\}$），此时 (36)

$$A^0 = A^0_* = \{f \in A \,|\, |f|_{\mathrm{sp}} \leq 1\} = \{f \in A \,|\, |f(x)| \leq 1, \text{ pour tout } x \in \mathcal{M}(A)\} \qquad (3).$$

记 Ban^u_K 为 Ban_K 中由 K-一致巴拿赫代数构成的全子范畴。

称 A是谱的，如果 $|f| = |f|_{\mathrm{sp}}$对任意 $f \in A$成立；这当且仅当 A^0 是 A的单位球，此时 A 是一致的。

3.2. 分析—代数词典，范畴解释

读者可以在 André 文章（*2018a*）第 2.3 段找到一份详尽的分析—代数字典。

命题 3.2。— 设 $(A, |\cdot|) \in \mathrm{Ban}^u_K$。该 K^0-代数 A^0 是平坦的，π-完备且p-闭（定义 *2.15*）于 $A = A^0[\frac{1}{\pi}]$中。因此，*Frobenius* $A^0/\pi \to A^0/\pi^p$ 是单射。

证明。— 唯一不显然之处在于 A^0 是 p-闭的这一事实，但只需仔细考察等式（3）即可确信这一点。 □

设 $\mathcal{C}$ 为由 K^0-平坦代数和 π-完备 S构成的范畴，其中 S 在 p中是-闭的 $S[\frac{1}{\pi}]$（定义 2.15），且 $S_* = S$。对于 $S \in \mathcal{C}$和 $f \in A := S[\frac{1}{\pi}]$定义如下

$$|f| := \inf\{|k| \,|\, k \in K \setminus \{0\}, \frac{f}{k} \in S\}.$$

于是 (37) $(A, |\cdot|)$成为一个 K-谱的（因此一致的）Banach 代数，使得$A^0 = S$。由此得到：

命题 3.3。— 函子 $(A, |\cdot|) \mapsto A^0$ 诱导出一个范畴等价

$$\mathrm{Ban}^u_K \simeq \mathcal{C}.$$

35. 第一个是 Berkovich 的谱半径公式；第二个由显然的包含关系 $\{f \in A \,|\, |f|_{\mathrm{sp}} < 1\} \subset A^0 \subset \{f \in A \,|\, |f|_{\mathrm{sp}} \leq 1\}$ 很容易推出。36. 对于第一个等式，注意若 $f \in A^0_*$，那么 f^{p^n} 对任意 n都属于有界集 $p^{-1}A^0$。37. 只需知道 S 是平坦的、π-完备的，并满足 $S = S_*$，即可证明 $|\cdot|$ 是 A上的 K-Banach 代数范数，其单位球为 S。由关系 $S = \{f \in A \,|\, f^p \in S\}$可得 $|f^p| = |f|^p$，进而对任意 $f \in A$ 都有 $|f| = \lim_{n\to\infty} |f^{p^n}|^{1/p^n} = |f|_{\mathrm{sp}}$，因此 A确实是谱的。

注记 3.1表明 $\mathcal{C}$ 拥有所有小极限（其计算方式与 K^0-代数范畴中的相同）以及所有滤过余极限：若 $(S_i)_{i\in I}$是 $\mathcal{C}$中的一个滤过归纳系统，其在 $\mathcal{C}$ 中的余极限为 S_*，其中 S 是环范畴中余极限 $\varinjlim_{i\in I} S_i$的π-进完备化。

因此，Ban_K^u 范畴拥有所有小极限，也拥有所有滤过余极限。Ban_K^u 到 Ban_K 的包含映射有一个左伴随 $A \mapsto A^u$；A 的一致化 A^u 是其关于谱半范数的分离完备化。由于 Ban_K有推挽（由完备张量积给出），Ban_K^u 也有推挽：若 $A \to B$ 和 $A \to C$ 是 Ban_K^u中的态射，对应的推挽为 $B\widehat{\otimes}_A^u C := (B\widehat{\otimes}_A C)^u$。计算 $(B\widehat{\otimes}_A^u C)^0$ 并不容易，但我们将看到，在完美类 Banach 代数的完美世界中，这一计算（几乎）是可行的。

3.3. 完美拟完备巴拿赫代数

请记住，K-完美拟完备巴拿赫代数 并非与作为完美拟环的 K-代数相同：

定义 3.4. — 一个 K-完美拟完备巴拿赫代数是 $(A, |\cdot|)$ 中的一个对象，满足 A^0 是一个完美拟环。记 Perf_K 为 Ban_K^u 的全子范畴，其对象为 K-完美拟完备巴拿赫代数。

我们来检验这一定义与 Scholze（2012年）中的原始定义是否相容：

命题 3.5. — 一个 K^0-平坦且 π-完备 B 的代数是完美拟环，当且仅当 *Frobenius* $B/\pi \to B/\pi^p$ 是同构；此时 B_* 是一个完美拟环，且 B在 p中是 $B[\frac{1}{\pi}]$-闭的（定义 *2.15*）。特别地，$A \in \mathrm{Ban}_K^u$属于 Perf_K，当且仅当 *Frobenius* $A^0/\pi \to A^0/\pi^p$ 是同构，或者等价地[38]，是满射。

证明。——不妨设 $\mathrm{car}(K) = 0$。如果 B 是一个完美拟环，定理 2.10 表明 $B \simeq W(B^\flat)/(\xi)$。由于 $\pi = \theta_{K^0}([\xi(0)^{1/p}])$，Frobenius$B/\pi \to B/\pi^p$ 是一个同构，因此（命题 2.16）B 在 $B[\frac{1}{\pi}]$中是 p-闭的。逆向结论由命题 2.12 得出。设 B 是一个完美拟环。由于 B_* 是平坦的且 π-完备，只需（根据刚才的论证）证明 Frobenius $B_*/\pi \to B_*/\pi^p$ 是一个同构。但由于 B 在 $B[\frac{1}{\pi}]$中是 p-闭的，B_* 在 $B_*[\frac{1}{\pi}]$中也是如此，因此 $B_*/\pi \to B_*/\pi^p$ 是单射的。设 $x \in B_*$，则 $\pi x \in B$ 因而 $\pi x = a^p + \pi^p b$，其中 a、$b \in A$。由于 $x = (\pi^{-1/p}a)^p + \pi^{p-1}b$ 且 B_* 在 $B[\frac{1}{\pi}]$中是 p-闭的，我们有 $\pi^{-1/p}a \in B_*$，因此 $B_* = B_*^p + \pi B_*$。通过迭代并利用 $\pi^p \mid p$ 这一事实，可得 $B_* = B_*^p + \pi^p B_*$，从而结论成立。

□

注 *3.6*。— 1. B_* 的完美拟性质并非完全无关紧要：如果 $A \in \mathrm{Perf}_K$ 并且 $g \in A^0$ 不是零因子，那么尚不清楚（参见 André 的问题 3.5.1（2018a））代数

$$g^{-1/p^\infty}A = \cap_{n\geq 1} g^{-1/p^n}A \subset A[\tfrac{1}{g}]$$

38. 由于 A 是一致的，A^0 在 A中与 p接近，因此 Frobenius $A^0/\pi \to A^0/\pi^p$ 是单射 f.

仍属于 Perf_K。这个代数将在后续自然地出现（例如参见定理 5.1）。

2. 假设 $\mathrm{car}(K) = 0$，并令 $K^\flat := (K^0)^\flat[\frac{1}{\xi_0}]$，为一个特征为 p 的完美类域。结合上述命题和定理 2.10，可以轻易得到 Scholze（2012）所诱导的范畴等价 $\mathrm{Perf}_K \simeq \mathrm{Perf}_{K^\flat}$，其由函子 $A \mapsto A^\flat := (A^0)^\flat[\frac{1}{\xi_0}]$ 和 $R \mapsto W(R)[\frac{1}{\pi}]/(\xi)$ 给出（这种方法见于 Fontaine（2013年）以及 Kedlaya和Liu（2015年）的著作）。

3. 范畴 Perf_K 拥有所有滤过余极限，这些余极限与 Ban_K^u 中的相同：如果 $(B_i)_{i\in I}$ 是 Perf_K 中的一个滤过归纳系统，那么 $\overline{A} := (\varinjlim_{i\in I} B_i^0)_*$ 是完美类域（命题 3.5）。范畴等价 $\mathrm{Perf}_K \simeq \mathrm{Perf}_{K^\flat}$ 以及 $\mathrm{Perf}_{K^\flat}$ 的显式描述[39] 表明，Perf_K 也拥有所有小极限；但当 $\mathrm{car}(K) = 0$ 时，它们与 Ban_K^u 中的极限不同，即使对于有限极限也是如此。参见 André（2018a）的预防性例子 3.8.2 和 3.8.5。第 1) 点是 Ban_K^u 中的极限与 Perf_K 中的极限在 $\mathrm{car}(K) = 0$ 时存在差异所导致的另一个困难例子。

3.4. Scholze 逼近引理

我们将需要下面这个技术性但基础的结果。原始证明（Scholze，2012年 在稍有不同的背景下）相当技术性；另见 Česnavičius 和 Scholze（2019年）中引理 2.3.1 的证明，该证明采用了 Kedlaya 的一个论证。

若 A 是一个环且 $\pi \in A$，则记 $\mathrm{Spa}_\pi(A)$ 为绝对值[40] $|\cdot|\colon A \to \Gamma \cup \{0\}$ 的集合，其中 Γ 是一个全序阿贝尔群（记法采用乘法形式），并且满足：对任意 $f \in A$，有 $|f| \le 1$，且 $\lim_{n\to\infty} |\pi^n| = 0$。若 π 是非零因子，则记 $\mathrm{Spa}(A[\frac{1}{\pi}], A)$ 为 $\mathrm{Spa}_\pi(A)$ 中可延拓为 $A[\frac{1}{\pi}]$ 上绝对值的 $|\cdot| \in$ 所成的子集。

定理 3.7 (逼近引理)。— 设 A 是一个完美拟环，并设 $\pi \in A$ 使得 A 是 π-完备的，且 $\pi^p \mid p$。对于任意 $f \in A$ 和 $n \in \mathbf{N}$，存在 $g \in A$ p-强（定义 *2.2*），使得

$$|f - g| \le |p| \cdot \max(|g|, |\pi|^n), \ \textit{pour tout}\ |\cdot| \in \mathrm{Spa}_\pi(A);$$

特别地，$|f| \le |\pi|^n$ 当且仅当 $|g| \le |\pi|^n$。

命题 *3.8*。— 设 A 是一个环，$\pi \in A$ 是非零因子，且 $x \in A[\frac{1}{\pi}]$。*a)* 若对于所有 $|\cdot| \in \mathit{Spa}(A[\frac{1}{\pi}], A)$，都有 $|x| < 1$，则存在 $n \ge 1$ 使得 $x^n \in \pi A$。*b)* 若 $y \in A[\frac{1}{\pi}]$ 满足对于所有 $|\cdot| \in \mathit{Spa}(A[\frac{1}{\pi}] = A[x][\frac{1}{\pi}], A[x])$，都有 $|x - y| < 1$，则 y 属于 $A[\frac{1}{\pi}]$ 中 $A[x]$ 的 p-闭包（定义 *2.15*）。

39. 这是 $\mathrm{Ban}_{K^\flat}^u$ 的完美 $K^\flat$-Banach 代数的全子范畴。40. 要求 $|ab| = |a||b|$，$|a+b| \le \max(|a|, |b|)$，对于 $a, b \in A$，$|0| = 0$ 以及 $|1| = 1$ 若 $A \neq \{0\}$。

证明。— a) 是标准结论，证明见 Česnavičius 和 Scholze 的引理 2.3.2（2019年）。b) 由此可得 (41)。 □

3.5. 近似代数的近似回顾

Gabber 和 Ramero 的著作（2003）全面阐述了 Faltings 的近似数学理论 (42)，而 André 的文章（2018a）第 1 节则对核心要点作了出色的概述。

固定一个环 V，并赋予其一个 p-强元素（定义 2.2） g，由此得到一个幂等理想 $\mathfrak{m} = (g^{p^{-\infty}})$（也可以简单地、不严格地说，我们处于的框架 g^{1/p^∞}中）。Gabber 和 Ramero（。1.7）2003中的命题表明$\mathfrak{m}\otimes_V \mathfrak{m}$ 是一个 V-平坦模（若 V无 g-挠，则这是显然的），因此 Gabber 和 Ramero（2003）的结果适用。

定义 3.9。— 设 $f\colon\ M \to N$ 是一个 V-模态射。称

- M 是几乎为零，若 $\mathfrak{m}M = 0$;
- f 是几乎单射（分别地，几乎满射；分别地，一个几乎同构），若ker f（分别地，coker$f$；分别地，两者）几乎为零；
- M 是几乎平坦，若对于任意单射态射 $N \to P$（其中 $N \to P$是 V-模的态射），$M \otimes_V N \to M \otimes_V P$都是几乎单射；这等价于对所有 $i > 0$ 和 $N \in$ 模$_V$，$\mathrm{Tor}_i^A(M, N)$几乎为零。类似地，定义几乎投射模的概念；
- M 是几乎忠实平坦，若 M 几乎平坦，且$M \otimes_V N$ 几乎为零能推出 N 几乎为零，对任意 $N \in$模$_V$ 均成立；
- M 是几乎有限生成，若对任意 n，存在一个有限生成的 V-子模$N \subset M$，使得 $g^{1/p^n} M \subset N$。

如果 W是一个 V-代数，那么 g在 W中仍然是 p-幂的，因此可以将上述定义应用于 W-模，由此得到几乎平坦的 W-模等概念。这一观察用于下述定义：

定义 3.10. — 设 $g\colon\ A \to B$ 是一个 V-代数的态射。称

- g 是几乎无分歧 的，如果 B 是一个几乎平坦的 A-模，并且是一个（通过乘法 $B \otimes_A B \to B$）几乎投射的 $B \otimes_A B$-模；
- g 是几乎有限étale，当且仅当 g 几乎无分歧，且 B 是一个几乎有限生成且几乎投射的 A-模。

41. 由 a) 可知，存在 $d \geq 0$ 使得 $(x - y)^{p^d} \in \pi A[x]$。42. 这似乎是一种不明说却写出 $o(1)$ 的方式。 . .

3.6. 完美体奇迹

Scholze 的以下结果（2012年）至少可以说令人惊讶：它们在通常仿射代数中的类似结果完全不成立。在完美拟世界里，（几乎）每天都是春天……

定理 3.11. — 设 $A \in \mathrm{Perf}_K$ 并设 $A \to B$ 和 $A \to C$ 是 Perf_K 中的两个态射。那么 $B\hat{\otimes}_A C \in \mathrm{Perf}_K$ 以及自然态射 (43)

$$B^0\hat{\otimes}_{A^0}C^0 \to (B\hat{\otimes}_A C)^0$$

是一个几乎同构（在 π^{1/p^∞} 的框架下）。

证明. — 不妨设 $\mathrm{car}(K) = 0$。环 $R = B^0\hat{\otimes}_{A^0}C^0$ 和 $S := R/R[p^\infty]$ 是完美类环（推论 2.11 和命题 2.19）。命题 3.5 表明 $S_* \in \mathbf{C}$（参见 § 3.2），因此 $T := S[1/\pi] = S_*[1/\pi]$ 具有规范的 K-谱赋范巴拿赫代数结构，使得 $T^0 = S_*$，并且有 $T \in \mathbf{Perf}_K$。由于 B 和 C 是一致的，显然的态射 $B^0 \to R \to S$ 和 $C^0 \to R \to S$ 可延拓为（在 $\mathbf{Ban}_K$ 中的）态射 $B \to T$ 和 $C \to T$，从而得到一个态射 $B\hat{\otimes}_A C \to T$。按如下方式构造其逆。设 X 是 $B\hat{\otimes}_A C$ 的单位球。由于 B 和 C 是一致的，存在 $c \geq 1$，使得 B^0 和 C^0 在 $B\hat{\otimes}_A C$ 中的像包含于 $p^{-c}X$。诱导的态射 $S \to B\hat{\otimes}_A C$ 的像包含于 $p^{-2c}X$，因此可延拓为态射 $T \to B\hat{\otimes}_A C$，它是态射 $B\hat{\otimes}_A C \to T$ 的逆。

由此可得 $B\hat{\otimes}_A C \in \mathrm{Perf}_K$ 且 $(B\hat{\otimes}_A C)^0$ 同构于 $T^0 = S_*$。态射 $R \to S \to S_*$ 是几乎同构，因为理想 $(\pi^{p^{-\infty}})$ 湮灭了 $R \to S$（命题 2.20）的核和余核，也湮灭了 $S \to S_*$。 □

若 $B \in \mathbf{Ban}_K$ 且 $f_1, \ldots, f_n, g \in B$ 生成单位理想，则存在一个 B- 泛 Banach 代数 $B\mathbf{h}^{\frac{f_1,\ldots,f_n}{g}}\mathbf{i}$，其中 g 可逆，且 $\frac{f_i}{g}$ ~~的幂~~有界。具体而言，$B\mathbf{h}^{\frac{f_1,\ldots,f_n}{g}}\mathbf{i}$ 是 Banach 代数 $B\mathbf{h}T_1, \ldots, T_n\mathbf{i} = B\hat{\otimes}_K K\mathbf{h}T_1, \ldots, T_n\mathbf{i}$ 对由 ~~$gT_i - f_i$~~ 生成的理想之闭包取商所得。

定理 3.12. — 设 $A \in \mathrm{Perf}_K$，且设 $f_1, \ldots, f_n, g \in A$ 生成 A 的单位理想。

a) 有 $A\langle \frac{f_1,\ldots,f_n}{g} \rangle \in \mathrm{Perf}_K$。

b) 若 $f_1, \ldots, f_n, g$ 是 p-强幂的（定义 2.2），在 A^0 中，且 $A^0\langle (\frac{f_1}{g})^{1/p^\infty}, \ldots, (\frac{f_n}{g})^{1/p^\infty} \rangle$ 是 π-进完备化的 $A^0[\frac{f_i^{1/p^n}}{g^{1/p^n}},\ n \geq 0]$，那么自然态射

$$A^0\left\langle \left(\frac{f_1}{g}\right)^{1/p^\infty}, \ldots, \left(\frac{f_n}{g}\right)^{1/p^\infty} \right\rangle \to A\left\langle \frac{f_1, \ldots, f_n}{g} \right\rangle^0$$

是一个几乎同构（在 π^{1/p^∞} 的框架下）。

43. 左侧完备化是 π-进的。

证明。——详细内容见 Scholze（2012）第6节。下文这个非常巧妙的“归约到普适情形”论证出自 André (2018a)。点 a) 可由点 b) 和定理 3.7 推出。由于 $f_i, g \in A^0$ 是 p-强的，我们有一个态射 $S := K^0\langle T_1^{1/p^\infty}, \dots, T_n^{1/p^\infty}, U^{1/p^\infty}\rangle[\frac{1}{\pi}] \to A$，它属于 Ban_K，将 T^{1/p^j} 映到 f_i^{1/p^j}，将 U^{1/p^j} 映到 g^{1/p^j}。取 $N \geq 1$ 使得 $\pi^N \in (f_1, \dots, f_n, g) \subset A^0$。那么 $A\widehat{\otimes}_S S\langle \frac{\pi^N}{T_1}, \dots, \frac{T_n}{U}\rangle$ 和 $A\langle \frac{f_1}{g}, \dots, \frac{f_n}{g}\rangle$ 具有相同的泛性质，因此这两个 Banach 代数同构。于是，定理 3.11 将证明归约到“普适情形”，也就是说，只需验证 $S, S\langle \frac{\pi^N}{T_1}, \dots, \frac{T_n}{U}\rangle \in \mathrm{Perf}_K$，并验证态射 $K^0\langle T_1^{1/p^\infty}, \dots, T_n^{1/p^\infty}, U^{1/p^\infty}\rangle \to S^0$ 和 $S^0\langle (\frac{T_1}{U})^{1/p^\infty}, \dots, (\frac{T_n}{U})^{1/p^\infty}, (\frac{\pi^N}{U})^{1/p^\infty}\rangle \to S\langle \frac{\pi^N}{T_1}, \dots, \frac{T_n}{U}\rangle^0$ 是几乎同构；这可通过直接计算（相当繁琐……）得出。

□

下面这个基本结果是第5节中一切论证的基础，它是*Faltings* 的近乎纯性定理，后经 Scholze（2012年）以及 Kedlaya和Liu（2015年）推广。关于证明（非常微妙），见 Scholze（2012年）的第7节；补充内容见 André（。42018a）的第3段。

定理3.13. — 设 $(A, |\cdot|) \in \mathrm{Perf}_K$. 对任意有限 *étale* A-代数 B，存在一个 K-*Banach* 代数范数 $||\cdot||$，定义在 B 上，使得态射 $(A, |\cdot|) \to (B, ||\cdot||)$连续， $B \in \mathrm{Perf}_K$，且 B^0 是 A^0 的几乎有限*étale*（在 π^{1/p^∞} 框架下）。若 $A \to B$ 是单射，则 B^0 在 A^0 上几乎忠实平坦。

4. ANDRÉ 的平坦性引理

本节专门讨论 André 工作的第一个支柱——他的平坦性引理。这是一条基础性命题，绝非平庸之论，而是本报告主要结果证明中将系统使用的工具。在 Bhatt 和 Scholze（2022年）、Česnavičius 和 Scholze（2019年）、Dine（2022年）的工作以及 Gabber 和 Ramero 的著作（2018年）中，可以找到它的进一步完善和推广，以及一些引人注目的应用。特别是，在 Bhatt 和 Scholze（2022年）论文第 7.3 段中，可以找到一个纯代数证明（但并不容易），该证明没有用到完美拟空间理论。

沿用第 3 节开头引入的记号和约定。

4.1. 近似平坦性引理

本节将讨论的问题如下：给定$A \in \mathrm{Perf}_K$ 和 $g \in A^0$，我们希望构造一个 A-代数 $B \in \mathrm{Perf}_K$，使得其中的g 是 p-强的（定义2.2），并且使 B^0/π 在 A^0/π上几乎忠实平坦（在 π^{1/p^∞} （§3.5）的框架下）。

一个朴素的想法是考察 A-泛 Banach 代数，并赋予它一套相容的 p^∞-次方根 g，即 $A\langle T^{1/p^\infty}\rangle/(T-g)$。代数 $A\langle T^{1/p^\infty}\rangle$ 是完美体胚的（注意 $A\langle T^{1/p^\infty}\rangle^0 = A^0\langle T^{1/p^\infty}\rangle$ 并利用2.7中的观察），因此是一致的，

但一般而言，一致性不会传递到商上。于是我们进一步将其替换为它的一致化（§ 3.2）

$$A\langle g^{1/p^\infty}\rangle := \left(A\langle T^{1/p^\infty}\rangle/\overline{(T-g)}\right)^u.$$

André 的一个颇为神奇的结果（2018b）[44] 解决了我们的问题：

定理 4.1. — 有 $A\langle g^{1/p^\infty}\rangle \in \mathrm{Perf}_K$ 和 $A\langle g^{1/p^\infty}\rangle^0/\pi$ 在 A^0/π 上几乎忠实平坦（在 π^{1/p^∞} 的框架下）。

对于任意 π^d，我们有一个模 $d \geq 1$的类似陈述，它可由该定理形式地推出。证明分两步进行，详述如下：先将 $A\langle g^{1/p^\infty}\rangle$ 与完美拟代数 $A\langle T^{1/p^\infty}\rangle$的局部化联系起来，然后利用 § 3.4和 3.6的结果深入分析这些局部化。

4.1.1. $A\mathbf{h}g^{1/p^\infty}\mathbf{i}$ 的另一种描述。— 设 $B \in \mathbf{Ban}_K^u$、$f \in B$和 $I = \overline{fB} \subset B$。应将代数 $(B/I)^u \in \mathbf{Ban}_K^u$ 视为扎里斯基闭集 $V(I)$ 上的解析函数代数。由于 $x \in \mathbf{M}(B)$ 被 f 湮灭，当且仅当对于每个 $n \geq 1$ 都有 $|f(x)| \leq |\pi^n(x)|$，所以 $(B/I)^u$ 无非是代数的归纳极限 $\varinjlim_n B_n$（在 $\mathbf{Ban}_K^u$ 范畴中，参见 § 3.2）

$$B_n := (B\langle f/\pi^n\rangle)^u.$$

事实上，对于 $S \in \mathbf{Ban}_K^u$，从 $\varinjlim_n B_n$到 S的态射（在 $\mathbf{Ban}_K$中）等价于一个态射 φ: $B \to S$，使得对所有 $n \geq 1$，$\varphi(f/\pi^n) \in S^0$；而这恰恰意味着 φ 可经由 $(B/I)^u$ 分解（因为 S 是一致的）。

现在将 $B = A\mathbf{h}T^{1/p^\infty}\mathbf{i}$ 和 $f = T - g$ 纳入上述讨论。由于 B 是完美类的，每个代数 $B\mathbf{h}f/\pi^n\mathbf{i}$ 也是完美类的（定理 3.12），因此 $B_n = B\mathbf{h}f/\pi^n\mathbf{i}$ 和 $C := A\mathbf{h}g^{1/p^\infty}\mathbf{i} \in \mathbf{Perf}_K$，因为它们是完美拟代数在 $\mathbf{Ban}_K^u$ 中的滤过余极限（注 3.6）。由于 $C^0 = (\widehat{\varinjlim_n B_n^0})_*$ 几乎同构于 $\widehat{\varinjlim_n B_n^0}$，代数 C^0/π 几乎同构于 $\varinjlim_n B_n^0/\pi$。因此，只需证明每个 B_n^0/π 在 A^0/π上几乎忠实平坦。接下来固定 $n \geq 1$。

4.1.2. $A\mathbf{h}T^{1/p^\infty}\mathbf{i}$ 的局部化分析及证明的完成。——由逼近引理（定理 3.7），存在一个 p-强元素 $h \in B^0$，使得对于任意 $|\cdot| \in \mathbf{Spa}_\pi(B^0)$，都有$|h-f| \leq |p| \cdot \max(|h|, |\pi^n|)$。由于对于任意$|\cdot| \in \mathbf{Spa}(B^0[\frac{1}{\pi}], B^0)$，都有$|\frac{h-f}{\pi}| < 1$，且 B^0在 $B^0[\frac{1}{\pi}]$中是 p-闭的（定义 2.15）（命题 3.2），命题 3.8 表明

$$h \equiv f \pmod{\pi B^0}.$$

不等式 $|h-f| \leq |p| \cdot \max(|h|, |\pi^n|)$ 也表明 $B_n \simeq B\langle \frac{h}{\pi^n}\rangle$，由定理 3.12 可得 B_n^0/π 几乎同构于 $\varinjlim_j C_j/\pi$，其中 $C_j = B^0[\frac{h^{1/p^j}}{\pi^{n/p^j}}] \subset B$。我们将证明每个 C_j/π 在 A^0/π上都是忠实平坦的，由此即可得出结论。通过逐步约化，只需证明 $C_j/\pi^{1/p^j}$ 在 $A^0/\pi^{1/p^j}$上是忠实平坦的。

44. 下述陈述摘自 Bhatt 的文章（2018年）。

我们有 $B^0 = A^0\langle T^{1/p^\infty}\rangle$，因此 $B^0/\pi \simeq (A^0/\pi)[T^{1/p^\infty}]$，特别是 $B^0/\pi^{1/p^j} \simeq B^0/\pi$通过 $x \mapsto x^{p^j}$ （因为态射 $A^0/\pi^{1/p^j} \to A^0/\pi$ 也如此，参见命题 3.5），且 $f = T - g$ 模 π 不是零因子。由于 $h \equiv f$（模 πB^0），h 也如此，注记 2.18 给出一个同构 $C_j \simeq B^0[X^{1/p^j}]/(u_j)$，其中 $u_j = \pi^{n/p^j} X^{1/p^j} - h^{1/p^j}$。因此，态射 $x \mapsto x^{p^j}$ 和同余式 $h \equiv f$（模 πB^0）诱导出同构

$$C_j/\pi^{1/p^j} \simeq B^0[X^{1/p^j}]/(\pi^{1/p^j}, h^{1/p^j}) \simeq$$

$$B^0[X]/(\pi, h) \simeq B^0[X]/(\pi, f) \simeq ((A^0/\pi)[T^{1/p^\infty}]/(T-g))[X],$$

将 $C_j/\pi^{1/p^j}$ 表示为 $A^0/\pi^{1/p^j} \simeq A^0/\pi$-模的有限生成自由模的滤过余极限，由此即可得出结论。

4.2. 平坦性引理

Gabber 和 Ramero（2018年）以及 Bhatt 和 Scholze（2022年）的以下结果，是对定理 4.1 的广泛推广和精细化。它有许多应用，例如研究完美拟代数空间中的 Zariski闭子空间，以及棱柱上同调（Bhatt 和 Scholze，2022年）等。

定理4.2 (André 平坦性引理)。— 设 A 为一个完美拟环。存在一个 A-完美拟代数 B，使得 B/p 在 A/p 上忠实平坦，并且使得每个 $x \in B$ 都是 p-幂零的（定义 2.2）。甚至可以选择 B 使得每个首一多项式 $P \in B[X]$ 在 B 中都有一个根。

我们只使用[45] 定理 4.3 如下，该定理通过一次略显繁琐的迭代推出上述定理（详见 Česnavičius 和 Scholze（2019年）对定理 2.3.4 的证明）。证明采用 Česnavičius 和 Scholze（2019年）对 Gabber 和 Ramero 论证的表述。基本上，在定理 4.1的证明中，局部化所扮演的角色由 p-整闭包（定义 2.15）取代。

定理 *4.3*。— 设 R 是一个环，带有一个 p-强元素（定义 *2.2*） π，且该元素是非零因子，并且 $\pi^p \mid p$ 和 $R/\pi \simeq R/\pi^p$ 通过 *Frobenius* 相联系。设 $P \in R[X]$| R为单位元，且设 B 为 $R[X^{1/p^\infty}]/P$ 在 $(R[X^{1/p^\infty}]/P)[1/\pi]$ 中的 p-整闭包（定义 *2.15*）。B 的 π-完备化是完美类的、无 π-挠的，并且 B/π 在 R/π上忠实平坦。

注意到，根据构造，P 在 B中有一个 p次方根，并且$R[X^{1/p^\infty}]/P$ 是无 π-挠的，因为 P 是单位元，因此模 π非零因子。

证明。—设 $A = R[X^{1/p^\infty}]$。由于 Frobenius $A/\pi \to A/\pi^p$ 是一个同构，A是 p在 $A[\frac{1}{\pi}]$ 中的 π- 完备化 $\hat{}A$ 是完美类（命题 2.12 ）。设 $I = PA\left[\frac{1}{\pi}\right]$，并设 u: $A[\frac{1}{\pi}] \to (A/P)[\frac{1}{\pi}] \simeq A[\frac{1}{\pi}]/I$为典范投影。

45. 甚至可以省去这一段，只使用定理4.1

对于 $f \in A$和 $n \geq 1$，记 $C_{n,\ f}$ p-闭包为 $A[\frac{f}{\pi^n}]$ 在 $A[\frac{1}{\pi}]$中的闭包，并记 $C_{\infty,\ f} = \cup_{n\geq 1} C_{n,\ f}$。那么 $I = \cup_{n\geq 1} \frac{P}{\pi^n} A = \cup_{n\geq 1} \frac{P}{\pi^n} C_{\infty,\ P}$是 $C_{\infty,\ P}$的 π-可除理想，且投影 u诱导一个同构

$$C_{\infty,P}/I \simeq B,$$

从而得到同构 $B/\pi^n \simeq C_{\infty,\ P}/\pi^n$ 对任意 $n \geq 1$。事实上，一个元素$x \in A[\frac{1}{\pi}]$ 满足 $u(x) \in B$当且仅当存在 $d \geq 0$使得 $x^{p^d} \in A + I$(命题 2.16)，这等价于说 $x \in C_{\infty,\ P}$。因此，只需证明 $C_{n,\ P}$ 的 π-进完备化是完美类，且对任意 $n \geq 1$，$C_{n,\ P}/\pi$ 在 R/π 上忠实平坦。

由于 $\hat{}A$ 是完美类（命题 2.12），定理 3.7 给出一个 p-幂零元素 $g \in A$，使得对任意 $|\ |$，$|P - g| \leq |p| \max(|g|, |\pi^n|)$。$\cdot\ | \in \mathrm{Spa}_\pi(A) \simeq \mathrm{Spa}_\pi(A)$。设 $(q_j)_{j\geq 0}$ 是 A 中的一个序列，满足对任意 $j \geq 0$都有 $q_j \equiv g^{1/p^j}$ (模 $\pi^{n+p}\hat{A}$)。我们有

$$|P - q_0| \leq |\pi^p| \max(|q_0|, |\pi^n|),\ \text{pour tout}\ |\cdot| \in \mathrm{Spa}_\pi(A). \tag{4}$$

引理 4.4. — 存在 $d \geq 1$，使得对任意 j，都有 $q_j^{p^j} \equiv P$ (模 $\pi^{1/p^d}A$)，并且 q_j 模 π 不是零因子。

证明. — 由关系式 (4) 和命题 3.8 可知存在 $d \geq 1$ 使得 $(P - q_0)^{p^d} \in \pi A$，因此 $P - q_0 \in \pi^{1/p^d} A$(因为 A在 p中是 -闭的 $A[\frac{1}{\pi}]$)。注意到 $q_j^{p^j} \equiv g \equiv q_0$ (模 $\pi\hat{}A$)，且 P 模 π 不是零因子。

□

引理 4.5. — 有 $C_{n,P} = \cup_{j\geq 0} A[\frac{q_j}{\pi^{n/p^j}}]$，且其 π-完备化是完美胚的 e.

证明. — 记 $x_j = \frac{q_j}{\pi^{n/p^j}} \in A[\frac{1}{\pi}]$和 $y_j = \frac{g^{1/p^j}}{\pi^{n/p^j}} \in \hat{A}[\frac{1}{\pi}]$。那么 $x_{j+1}^p - x_j \in \pi A$(因为 $q_{j+1}^p - q_j \in \pi^{n+p}A$) 且 $y_{j+1}^p = y_j$，因此 $T := A[x_0, x_1, \ldots] \subset A[\frac{1}{\pi}]$ (分别为$S := \hat{A}[y_0, y_1, \ldots] \subset \hat{A}[\frac{1}{\pi}]$) 是子代数 $A[x_j]$ (分别为 $\hat{A}[y_j]$) 的递增并集，$\hat{}$ 和 $T \subset C_{n,\ q_0}$。由于 $x_j - y_j \in \pi A$ 且 q_j 模 π(引理 4.4)，故有自然同构

$$A[x_j]/\pi \simeq A[X]/(\pi, \pi^{n/p^j}X - q_j) \simeq \hat{A}[X]/(\pi, \pi^{n/p^j}X - g^{1/p^j}) \simeq \hat{A}[y_j]/\pi,$$

从而得到一个同构 $T/\pi \simeq S/\pi$。但 S 是完美类的（命题 2.17），因此 Frobenius $T/\pi^{1/p} \to T/\pi$是一个同构。由此可知 T是 p-close 于 $T[\frac{1}{\pi}] = A[\frac{1}{\pi}]$，因此 $T = C_{n,\ q_0}$，并且 π-进完备化的 T是完美类的。注意到$C_{n,\ P} = C_{n,\ q_0}$，根据关系式 (4) 以及命题3.8的点 b)，即可得出结论。

□

最后，要完成定理4.3 的证明，只需证明每个

$$A[q_j/\pi^{n/p^j}] \simeq R[T, X^{1/p^\infty}]/(\pi^{n/p^j}T - q_j)$$

在 R 模 π上忠实平坦。根据引理 4.4，只需抄录定理 4.1证明的结尾。

□

5. 安德烈的拟完美阿布扬卡引理

本节致力于证明 André 策略的另一根支柱：他那个艰深的 Abhyankar 完美化引理（André，2018a）。先回顾经典情形：给定一个不等特征（0，p）的正则局部环 A上的有限平坦扩张 B。假设该扩张沿着由方程 $f=0$定义的正规交叉除子分歧，其中 f 是 p的倍数，并且分歧指数与 p互素。此时，只需添入 f 的根，其阶可被所有分歧指数整除，然后取整闭包，即可使扩张变为 étale（但不对 f取逆）。在完美类框架中，关于分歧的假设并非必要，但结论仅在几乎数学的框架中成立（§ 3.5）。读者可在 Gabber 和 Ramero 的著作（2018年）（§ 16。9）以及 Bhatt 和 Scholze 的论文（2022年）（§ 10。2）中找到重要的推广和改进。

可以将 Abhyankar 完美化引理视为 Faltings、Scholze 和 Kedlaya–Liu 的几乎纯性定理（定理 3.13）在分歧情形下的推广。事实上，该定理将在证明中发挥关键作用。

沿用第 3 节开头的记号。

5.1. 黎曼延拓定理

André 的下述结果[46]（受 Scholze（2015年）第 II 节中的结果启发）是 Bartenwerfer 定理（1976）的完美类版本（而后者本身是经典复流形黎曼延拓定理的刚性解析版本）：若 X 是一个正规刚性解析仿射概形，那么在 X 的处处不稠密解析闭集的补集上定义的任何有界解析函数，都能唯一延拓为 X上的有界解析函数。我们将看到，在完美拟世界中，正规性假设是多余的。

设 $B\in\mathrm{Perf}_K$ 且设 $g\in B^0$ 是一个元素 p-强的（定义 2.2），且不是零因子。设 $B_n=B\langle\frac{\pi^n}{g}\rangle\in\mathrm{Perf}_K$ 是定义在 3.12定理所述轨迹上的解析函数完美拟代数，其值为 $|\pi^n|\le|g|$ 的 $\mathcal{M}(B$，并设 $B_\infty=\lim_{\longleftarrow n}B_n$ 是定义在 K非零轨迹上的解析函数的完备 g-代数。记作

$$g^{-1/p^\infty}B^0:=\bigcap_{n\ge1}g^{-1/p^n}B^0$$

由满足以下条件的 $f\in B[\frac{1}{g}]$ 构成的子环：对所有 $n\ge1$，均有 $g^{1/p^n}f\in B^0$。

定理 5.1.—*a)* $g^{-1/p^\infty}B^0$ 在 $B[\frac{1}{g}]$ 中的子环是 B^0 在 $B[\frac{1}{g}]$中的完全整闭包[47]，且 $B[\frac{1}{g}]$ 在 B_∞中整闭。

46. 证明以及主定理的一个更强版本（后续将起关键作用）取自 Bhatt（2018年）。47. 也就是说，指 $f\in B[\frac{1}{g}]$ 的集合，其幂都包含在 B^0的某个有限生成 $B[\frac{1}{g}]$-模中。

b) 态射 $B[\frac{1}{g}] \to B_\infty$ 是单射，且 $g^{-1/p^\infty}B^0$ 的像为 $B_\infty^0 := \varprojlim_n B_n^0$.

态射 $B[\frac{1}{g}] \to B_\infty$的单射性可归结为 $B \to B_\infty$的单射性。若 $f \in B$在 B_∞中的像为零，则 fg在 M(B) 上为零，因此谱范数为零；由于 B 是一致的，我们有 $fg = 0$，进而有 $f = 0$。设 C 为 B^0在 $B[\frac{1}{g}]$中的完全整闭包。若 $f \in g^{-1/p^\infty}B^0$，则对任意 n都有 $f^n \in g^{-1}B^0$，因此 $f \in C$。反过来，设 $f \in C$。存在 N，使得对任意 $n \geq 1$，$f^n \in (\pi g)^N B^0$。由于 B^0在 B 中是 p-闭的（定义 2.15；命题 3.2），对任意$k \geq 1$都有 $(\pi g)^{N/p^k} f \in B^0$，因此对所有 k、$\ell \geq 1$，$\pi^{1/p^\ell} g^{N/p^k} f \in B^0$。由此，对任意 k和 $f \in g^{-1/p^\infty}B^0$，都有 $g^{N/p^k} f \in B_*^0 = B^0$，这就证明了 $C = g^{-1/p^\infty}B^0$。

若 $f \in B_\infty$ 在 $B[\frac{1}{g}]$ 上整，则存在 N 使得 $(\pi g)^N f$ 在 B^0 上整。然而，B_n 中任何在 B^0 上整的元素 x 都属于 B_n^0，因为 B_n 是一致的（事实上，x 的各次幂都属于 B_n 的某个有限生成子 B_n^0-模，而该子模由一致性可知在 B_n 中有界）。因此，$(\pi g)^N f \in B_\infty^0$。要完成定理 5.1 的证明，只需证明（这正是关键所在）$B[\frac{1}{g}] \to B_\infty$ 将 $g^{-1/p^\infty}B^0$ 与 B_∞^0 等同起来。由于 $B^0 = B_*^0$，只需验证对所有 $f \in B_\infty^0$ 和 $k \geq 1$，$(\pi g)^{1/p^k} f \in B^0$。这可由取极限从下述更精细的结果推出；该结果由 Bhatt（2018）给出，还需要一些预备知识。

我们置于几乎数学的框架（§ 3.5）中。若一个 B^0-模的射影系统 $\{M_n\}_{n\geq 1}$ 满足：对于任意 $k \geq 0$ 和 $n \geq 1$，都存在 $m \geq n$，使得 $(\pi g)^{1/p^k}$ 消去 M_m 在 M_n 中的像，则称它几乎为零。等价地，对任意 $k \geq 1$，自然态射 $\{M_n[(\pi g)^{1/p^k}]\}_{n\geq 1} \to \{M_n\}_{n\geq 1}$ 是 pro-B^0-模的同构。若 pro-B^0-模之间的态射 $f\colon \{M_n\}_{n\geq 1} \to \{N_n\}_{n\geq 1}$ 的核与余核都是几乎为零的射影系统，则称它为几乎同构。

定理 5.2. — 对于任意 $d \geq 1$，逆系统的态射

$$\{B^0/\pi^d B^0\}_{n\geq 1} \to \{B_n^0/\pi^d B_n^0\}_{n\geq 1}$$

在$(\pi g)^{1/p^\infty}$的框架下是一个几乎同构。

证明。——通过逐步约化，可以假设 $d = 1$。首先假设g 模 π不是零因子。那么每个 $f_n\colon B^0/\pi B^0 \to B_n^0/\pi B_n^0$ 都是单射：若 $F \in B^0$ 在 B_n^0 中的像为 πG，且 $G \in B_n^0$，则 $u := \frac{Fg}{\pi} \in B$ 满足[48] $|u|_{\mathrm{sp}} \leq 1$，于是 $Fg \in \pi B^0$，进而 $F \in \pi B^0$。

接下来，固定 k，$n \geq 1$并证明 $(\pi g)^{1/p^k}$湮灭了 coker(f_{n+p^k}) 在 coker(f_n) 中的像，从而可以在 g 模 π不是零因子的情形下得出结论。设 $i_n\colon B^0 \to B_n^0$ 为典范态射。我们要证明，若$f \in B_{n+p^k}^0$ 在 B_n^0中的像为 F，则 $(\pi g)^{1/p^k} F \in \pi B_n^0 + i_n(B^0)$。令 $S = B^0[(\frac{\pi^{n+p^k}}{g})^{1/p^j},\ j \geq 0] \subset B_{n+p^k}^0$，自然态射 $\widehat{S} := \varprojlim_d S/\pi^d \to B_{n+p^k}^0$是一个

48. 事实上，设 $x \in$ M(B)，那么要么 $|\pi(x)|^n \leq |g(x)|$，此时 $|u(x)| = |G(x)| \cdot |g(x)| \leq 1 \cdot 1 = 1$；要么 $|\pi(x)|^n > |g(x)|$，此时 $|u(x)| \leq |\pi(x)|^{n-1}|F(x)| \leq 1 \cdot 1 = 1$。

在 π^{1/p^∞}（定理 3.12）的框架下几乎同构，因此 $\pi^{1/p^k} f \in S + \pi B^0_{n+p^k}$。因此，只需证明当 $g^{1/p^k} H \in \pi B^0_n + i_n(B^0)$ 是 $h = (\frac{\pi^{n+p^k}}{g})^e$对任意 $e \in \mathbf{Z}_{\geq 0}[1/p]$ 的像时成立；这显然成立，因为 $\pi^{p^k e}$ 是 π的倍数，对于 $e \geq 1/p^k$ 以及

$$g^{1/p^k} H = \begin{cases} i_n(g^{\frac{1}{p^k}-e}\pi^{(n+p^k)e}) \in i_n(B^0), \text{ si } e < 1/p^k \\ i_n(g^{1/p^k})\pi^{p^k e}(\frac{\pi^n}{g})^e \in \pi B^0_n, \text{ sinon.} \end{cases}$$

还需摆脱关于 g的假设。由于 $g \in B^0$ 是 p-强的，我们有一个态射 $R := K\langle T^{1/p^\infty} \rangle \to B$，将 T^{1/p^j}映射到 g^{1/p^j}，并且 $B_n \simeq B \hat{\otimes}_R R_n$，其中$R_n = R\langle \frac{\pi^n}{T} \rangle$。定理 3.11 给出了一个几乎同构

$$B^0/\pi \otimes_{R^0/\pi} R^0_n/\pi \simeq B^0_n/\pi,$$

并且由于 T 在 R^0中模 π 不是零因子，前面的结论表明态射 $\{R^0/\pi\} \to \{R^0_n/\pi\}_{n\geq 1}$ 是投影系统的几乎同构，这使我们很容易得出 $\{B^0/\pi\} \to \{B^0_n/\pi\}_{n\geq 1}$ 是一个几乎同构。

□

5.2. Abhyankar 完美化引理

沿用定理 5.1之前刚引入的记号。设 C 是 $B[1/g]$上的有限 étale 代数。若 $A \to B$ 是一个环同态，记 $\mathrm{fi}(A, B) \subset B$ 为 A 在 B中的整闭包。令

$$\tilde{C}^0 = \mathrm{fi}(g^{-1/p^\infty} B^0, C).$$

我们将看到（命题 5.6），代数 $\tilde{C} := \tilde{C}^0[\frac{1}{p}] = \mathrm{fi}(g^{-1/p^\infty} B, C)$ 具有自然的 K-一致 Banach 代数结构，其中 $\tilde{C}^0 = (\tilde{C})^0$ （特别是 $\tilde{C}^0$ 是 p-完备的）。

假设 K 具有零特征，并置身于$(\pi g)^{1/p^\infty}$几乎数学的框架中（*§ 3.5*）。André 的文章（2018a）中的一个主要结果表述如下（回顾一下，ξ 是 $\ker(\theta_{K^0})$ 的一个 distinguished 生成元）：

定理 5.3（Abhyankar 完美化引理）。—

a) 态射 $\theta\colon W((\tilde{C}^0)^\flat)/\xi \to \tilde{C}^0$ 是单射且几乎同构。特别地，*Frobenius* 在 $\tilde{C}^0/p$ 上几乎满射。

b) 对任意 $n \geq 1$， B^0/p^n-代数 $\tilde{C}^0/p^n$ 都是几乎有限 *étale*；如果 C 在 $B[\frac{1}{g}]$上是忠实平坦的，那么它也是几乎忠实平坦的。

注记 *5.4.* — 与几乎纯性定理不同，目前尚不清楚$\tilde{C}^0$ 是否是 B^0上的几乎有限生成代数。如果确实如此，便可据此推出 $\tilde{C}^0$ 是 B^0上的几乎有限 étale 代数。可以证明（André 的命题 5.2.3（2018a）），即使如此，后一结论在对 g取逆之后仍然成立。

证明占据接下来的几个段落，其中代数发挥着重要作用

$$C_n := C \otimes_{B[\frac{1}{g}]} B_n,\ C_\infty := \varprojlim_n C_n,\ C_\infty^0 := \varprojlim_n C_n^0.$$

存在典范同构 (49)

$$C_{n+1}\widehat{\otimes}_{B_{n+1}} B_n \simeq C_{n+1} \otimes_{B_{n+1}} B_n = (C \otimes_{B[\frac{1}{g}]} B_{n+1}) \otimes_{B_{n+1}} B_n \simeq C \otimes_{B[\frac{1}{g}]} B_n = C_n.$$

注释 *5.5.* — a) 由于 C在 $B[\frac{1}{g}]$上是有限秩局部自由的，单射态射（定理 5.1）$B[\frac{1}{g}] \to B_\infty$诱导出一个单射$C \to C \otimes_{B[\frac{1}{g}]} B_\infty$，而自然态射 $C \otimes_{B[\frac{1}{g}]} B_\infty \to C_\infty$是一个同构。因此可以通过 C将 C_∞识别为 $c \mapsto (c \otimes 1)_{n\geq 1}$的一个子代数。

b) 由于 C_n 在 $B_n \in \mathrm{Perf}_K$上是有限 étale 的，因此有 $C_n \in \mathrm{Perf}_K$，且 C_n^0 在 B_n^0 上几乎有限 étale（几乎纯性定理 3.13）。同构 $C_{n+1}\widehat{\otimes}_{B_{n+1}} B_n \simeq C_n$结合定理 3.11 表明，自然态射 $C_{n+1}^0\widehat{\otimes}_{B_{n+1}^0} B_n^0 \to C_n^0$ 是一个几乎同构（初步是在 π^{1/p^∞}的框架下，但因此在（πg）$^{1/p^\infty}$的框架下也成立）。

5.2.1. 整闭包的识别。——本段将证明以下结果。

命题 5.6。—— C 到 C_∞ 的包含映射将 $\tilde{C}^0$ 识别为 C_∞^0。

因此， $\tilde{C}:= \tilde{C}^0[\frac{1}{p}]$可识别为一致巴拿赫代数$C_n$ 与$(\tilde{C})^0 = \tilde{C}^0$的一致极限。命题的证明需要一些预备知识。

引理 5.7。——有 $C_\infty^0 = \mathrm{fi}(B_\infty^0,\ C_\infty)$。

证明。——若 $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \mathrm{fi}(B_\infty^0, C_\infty)$，则 x_n 在 B_n^0上整，因此它的幂仍属于 C_n 的某个有限生成 C_n^0-模，而 $x_n \in C_n^0$，因为 C_n是一致的。因此 $x \in C_\infty^0$。对于另一个包含关系，设 $x = (x_n)_{n\geq 0} \in C_\infty^0$，并设$\chi_n \in B_n[X]$ 为 C_n中乘以 x_n 的特征多项式。由于$C_{n+1} \otimes_{B_{n+1}} B_n \simeq C_n$，存在 $\chi \in B_\infty[X]$，它诱导所有 χ_n。由凯莱–哈密顿定理，对任意 n，有 $\chi_n(x_n) = 0$，因此 $\chi(x) = 0$。下文的引理 5.8 表明，对任意 n，都有$\chi_n \in B_n^0[X]$，所以 $\chi \in B_\infty^0[X]$ 且 $x \in \mathrm{fi}(B_\infty^0, C_\infty)$，证明完毕。 □

引理 5.8. — 设 $R \to S$ 是 *K-Banach* 代数之间的有限 *étale* 态射。对于任意 $s \in S^0$，s 的特征多项式的系数都属于 R^0。

证明。— 设 $a_0, \ldots, a_n$ 是这个多项式的系数。我们要证明 $\max_{0\leq i\leq n} |a_i|_{\mathrm{sp}} \leq 1$，或者说（参见 § 3.1），对任意 $x \in \mathrm{M}(S)$，都有 $\max_{0\leq i\leq n} |a_i(x)| \leq 1$。若 L 是 x 的完备剩余域，则我们要证明 $a_i(x)$ 属于 L^0。可以用 $L \to S \otimes_R L$ 替换 $R \to S$，因此不妨设 $R = L$；此时 S 是 R 的有限扩张的乘积；结论由此得出。 □

49. 前者是因为 C_{n+1} 是一个有限生成射影模。

引理 5.9. — 在 C_∞ 内部有 $C = C_\infty^0[\frac{1}{pg}]$。

证明。— 记 $T = C_\infty^0[\frac{1}{pg}]$。由于 C 在 $B[\frac{1}{g}] = B^0[\frac{1}{pg}]$ 上是整的，对于任意 $x \in C$，存在 $n \geq 0$，使得 $(pg)^n x$ 在 $B^0 \subset B_\infty^0$ 上是整的，因此属于 $\mathrm{fi}(B_\infty^0, C_\infty) = C_\infty^0$（引理 5.7）。于是 $C \subset T$。下面证明 $T \subset C$。根据引理 5.7 以及同构（定理 5.1）$B[\frac{1}{g}] \simeq B_\infty^0[\frac{1}{pg}]$，有 $T \subset \mathrm{fi}(B[\frac{1}{g}], C \otimes_{B[\frac{1}{g}]} B_\infty)$。由于态射 $B[\frac{1}{g}] \to C$ 是整的，有 $\mathrm{fi}(B[\frac{1}{g}], C \otimes_{B[\frac{1}{g}]} B_\infty) = \mathrm{fi}(C, C \otimes_{B[\frac{1}{g}]} B_\infty)$。由于 $B[\frac{1}{g}] \to C$ 是 étale，自然态射 $C \otimes_{B[\frac{1}{g}]} \mathrm{fi}(B[\frac{1}{g}], B_\infty) \to \mathrm{fi}(C, C \otimes_{B[\frac{1}{g}]} B_\infty)$ 是同构。最后，根据定理 5.1，$\mathrm{fi}(B[\frac{1}{g}], B_\infty) = B[\frac{1}{g}]$，因此 $T \subset C$。□

我们通过使用引理5.6 、5.7 和5.9 以及等式（在 B_∞中，参见定理5.1）$g^{-1/p^\infty} B^0 = B_\infty^0$，完成命题

$$\tilde{C}^0 = \mathrm{fi}(g^{-1/p^\infty} B^0, C) = \mathrm{fi}(B_\infty^0, C_\infty^0[\frac{1}{pg}]) = C_\infty^0.$$

引理5.9还有一个重要推论:

推论 5.10。—由典范投影 $C_\infty^0[\frac{1}{p}] \to C_n$ 诱导的态射 $f\colon\ C_\infty^0[\frac{1}{p}]\hat{\otimes}_B B_n \to C_n$ 是一个同构。

证明。—由（引理5.9）可得

$$C_n = C \otimes_{B[\frac{1}{g}]} B_n = C_\infty^0[\frac{1}{pg}] \otimes_{B[\frac{1}{g}]} B_n \simeq C_\infty^0[\frac{1}{p}] \otimes_B B_n,$$

因此得到一个态射 $h\colon C_n \to C_\infty^0[\frac{1}{p}]\hat{\otimes}_B B_n$，它是 B_n-模之间的态射（由于 C_n 是 B_n 上的有限生成投射模，故自动连续），满足 $f \circ h$ 为恒等映射。可以验证，$h \circ f$ 在 $C_\infty^0[\frac{1}{p}]\hat{\otimes}_B B_n$中 $C_\infty^0[\frac{1}{p}] \otimes_B B_n$的像上是恒等映射，因此由连续性和稠密性可知，它在$C_\infty^0[\frac{1}{p}]\hat{\otimes}_B B_n$上也为恒等映射。因此，$f$是一个同构。□

5.2.2. 射影系统研究 $\{C_n^0/\pi^d\}$ 以及证明的收尾。——Ban 中的极限与 Perf 中的极限 ${}^{u}_{K}$ 之间的差异 ${}_{K}$ (注 3.6) 将在本段中充分显现。

回顾一下，ξ 是 $\ker(\theta_{K^0})$ 的一个 distinguished 生成元，而 π 是 $[\xi(0)^{1/p}]$ 的像。令 $R_n = (C_n^0)^\flat$，便得到（定理 2.10）同构$\theta_{C_n^0}\colon\ C_n^0 \simeq W(R_n)/\xi$，它们与 n 的变化相容。由于 C_n^0 没有 p-挠，因此这些 R_n 没有 $\xi(0)$-挠，故 $R = \varprojlim_n R_n \simeq (C_\infty^0)^\flat \in \mathrm{Perf}_{\mathbb{F}_p}$ 也没有 $S := W(R)/\xi$ 是一个平坦的完美拟代数代数。

命题 5.11. — 自然态射 $C_\infty^0/\pi \to \varprojlim_n (C_n^0/\pi)$ 和 $S \to C_\infty^0$ 在框架 $(\pi g)^{1/p^\infty}$下是几乎同构，且 $S \to C_\infty^0$ 是单射。

证明。——自然态射 $\varprojlim_n (C_n^0/\pi^d) \to \varprojlim_n (C_n^0/\pi^e)$ 对所有 $d > e$ 都几乎满射：由 K^0-平坦性可知，对于 C_n，只需证明 $R^1\varprojlim_n (C_n^0/\pi)$ 几乎为零；然而

射影系统 $\{B_n^0/\pi\}_{n\geq 1}$ 几乎 Mittag-Leffler (50) (这是定理 5.2 的直接推论），而几乎同构 $C_{n+1}^0/\pi \otimes_{B_{n+1}^0/\pi} B_n^0/\pi \to C_n^0/\pi$ (注 5.5) 表明射影系统 $\{C_n^0/\pi\}_{n\geq 1}$。

因此，射影系统$\{\varprojlim_n (C_n^0/\pi^d)\}_{d\geq 1}$ 的过渡映射几乎满射，从而态射几乎满射

$$C_\infty^0 \simeq \varprojlim_d (\varprojlim_n (C_n^0/\pi^d)) \to \varprojlim_n (C_n^0/\pi).$$

由于 $C_\infty^0/\pi \to \varprojlim_n (C_n^0/\pi)$显然是单射，因此它是几乎同构。

要证明 $S \to C_\infty^0$ 是单射且几乎同构，只需模 π 验证这一点（两个代数在 K^0 上平坦且 π-完备）。但是$S/\pi \simeq R/\xi(0)^{1/p}$，$C_n^0/\pi \simeq R_n/\xi(0)^{1/p}$，并且我们已经看到 $C_\infty^0/\pi \to \varprojlim_n (C_n^0/\pi)$是单射且几乎同构。因此，只需验证 $R/\xi(0)^{1/p} \to \varprojlim_n (R_n/\xi(0)^{1/p})$是单射且几乎同构。单射性显然，因为 R_n 没有 $\xi(0)^{1/p}$-挠。它几乎同构这一事实源于（如上所述，利用 $\xi(0)$-完备性及 R_n），典范映射$\varprojlim_n (R_n/\xi(0)^{p^k}) \to \varprojlim_n (R_n/\xi(0)^{p^{k-1}})$几乎满射。这可通过利用 R_n 的完美化，并对几乎满射态射（参见第一段）$\varprojlim_n (C_n^0/\pi^p) \to \varprojlim_n (C_n^0/\pi)$依次应用Frobenius得到；该态射可识别为$\varprojlim_n (R_n/\xi(0)) \to \varprojlim_n (R_n/\xi(0)^{1/p})$。

□

令 $T = S[\frac{1}{p}] = S_*[\frac{1}{p}] \in \mathrm{Perf}_K$（命题 3.5）。命题 5.11 给出一个几乎同构 $T \simeq C_\infty^0[\frac{1}{p}]$。由于 πg 在 B_n 中可逆，这诱导出一个同构 $T\widehat{\otimes}_B B_n \simeq C_\infty^0[\frac{1}{p}]\widehat{\otimes}_B B_n$，由此（推论 5.10）得到一个同构 $T\widehat{\otimes}_B B_n \simeq C_n$。由于 T、B、B_n 属于 Perf_K，自然态射 $T^0\widehat{\otimes}_{B^0} B_n^0 \to (T\widehat{\otimes}_B B_n)^0$ 是一个几乎同构（定理 3.11）。因此我们得到几乎同构，且它们与 n 和 d 的变化相容

$$T^0/\pi^d \otimes_{B^0/\pi^d} B_n^0/\pi^d \simeq C_n^0/\pi^d.$$

由几乎纯性定理3.13，B_n^0/π^d-代数 C_n^0/π^d 是几乎有限 étale（并且是忠实平坦的，若 C在$B[\frac{1}{g}]$上是忠实平坦的）。上述同构与定理5.2 以及下面的引理5.12 结合起来表明，T^0/π^d 是几乎有限 étale（并且是忠实平坦的，若 C在$B[\frac{1}{g}]$上是忠实平坦的），底域为 B^0/π^d。但是 $T^0 = S_*$几乎同构于 S，后者几乎同构于 C_∞^0（命题5.11），最终由命题 $\tilde{C}^0$ 5.6与相识别。这就完成了定理5.3的证明。

上面的证明中起到重要作用的下述引理，使我们能够将 B_n^0/π^d-代数 C_n^0/π^d（由几乎纯性定理给出）的性质转移到B^0/π^d-代数 T^0/π^d上。在 Gabber 和 Ramero（*2018*）第 14.2 节中，可以找到比下述陈述精确得多、一般得多的结果。

50. 若一个 B^0-模的射影系统 $\{M_n\}_{n\geq 1}$ 满足：对所有 k, n，都存在 $m \geq n$ 使得 $(\pi g)^{1/p^k}\mathrm{Im}(M_m \to M_n) \subset \mathrm{Im}(M_t \to M_n)$ 对任意 $t \geq m$ 均成立，则称其几乎 Mittag-Leffler。

引理 5.12。——设$\mathcal{P}$ $\in$ {平坦、忠实平坦、投射且有限生成}。设 M 为一个B^0/π^d-模，并且 $M_n := M \otimes_{B^0/\pi^d} B_n^0/\pi^d$。

a) 如果对所有 n， B_n^0/π^d-模 M_n 都几乎满足$\mathcal{P}$，那么 M 也几乎满足$\mathcal{P}$。

b) 如果 M 是一个 B^0/π^d-代数，并且对所有 n， M_n 都是一个 B_n^0/π^d-代数且几乎有限 *étale*，那么 M 在 B^0/π^d 上几乎有限 *étale*（几乎有限 *étale* 和忠实平坦的情形亦然）。

证明。——这是以下事实的形式推论：射影系统$\{B_n^0/\pi^d\}$ “几乎恒定，值为 B^0/π^d ”（定理 5.2），以及P的范畴解释（按照 Yoneda）。详情参见 Gabber 和 Ramero（2018年）的定理 14.2.39。 □

6. Cohen–Macaulay 代数的存在性

在本节（这是本次报告的核心）接下来的内容中，我们固定一个素数p （由此得到完美拟环的概念）。假设下文涉及的所有诺特局部环的剩余特征均为 p。为避免冗长的修饰语列表，我们引入：

定义 6.1. — 范畴 [51] CLI_p 的对象是完备、整环、不等特征且剩余域完美（特征为 p）的诺特局部环；其态射是局部环之间的局部态射。

本节旨在阐释以下定理的证明。结合 Hochster 和 Huneke 的工作（1992年），它推出了引言中的定理 1.10。

定理 6.2. — 对于任意 $A \in \mathrm{CLI}_p$，都存在一个 A的 *Cohen–Macaulay* 代数。

参见定理 6.18 和 6.20，可见更强、更精确的结果。Ma（2021年）注意到，André 的构造（2020年）给出了上述定理的一种相对直接的 [52] 证明，无须使用困难的 Abhyankar 完美化引理（如 André，2018b）中所用：首先处理正则环的情形，在这种情况下构造一个 ACohen–Macaulay 代数 完美类 C （这是标准做法），然后将环 $A \in \mathrm{CLI}_p$ 写成正则环 A_0 的商，并利用 C 和 André 平坦性引理构造一个 A 代数，它是几乎完美类且几乎 *Cohen–Macaulay* C' （精确表述见命题 6.14，但其表述不太易读）。我们调整 Ma 的方法，也得到该构造的一种弱形式的函子性，从而重新得到 André（2020年）的一项主要结果（不过，原文中还可找到远强于本文所述结果的结论）。另一种构造，即 C' （André 的构造，2018b），则主要利用以下事实： A

51. CLI 是“完备局部整环”的缩写，下标 p 表示剩余特征以及剩余域是否完美。52. 根据安德烈平坦性引理——这可一点也不平坦！

是一个 有限扩张 的完备正则局部环 A_0，并结合 Abhyankar 完美化引理与 André 平坦性引理来构造 C'。因此，两种证明都只产生一个“几乎 Cohen–Macaulay 代数（几乎完美类）”，但 Hochster（2002年）的工作已表明，这足以完成定理 6.2的证明。Gabber 发现了另一种更规范且直接的方法，可以将几乎 Cohen–Macaulay 代数转化为真正的这类代数；该方法见 Gabber 和 Ramero（*2018*年）著作第 17.5 节。本节将介绍一种更简单、更直接的版本。

6.1. CM 完美拟代数

固定一个相容的序列 $(p^{1/p^n})_{n\geq 0}$，其中包含 p 在**有理数域**$\mathbb{Q}_p$ 的代数闭包中的根，并定义完美拟代数域

$$K := \widehat{\mathbf{Z}_p[p^{1/p^\infty}]}[\frac{1}{p}],$$

使得 $K^0 = \widehat{\mathbf{Z}_p[p^{1/p^\infty}]}$。设 $p^\flat := (p, p^{1/p}, p^{1/p^2}, \ldots) \in K^{0,\flat}$，且 $\xi := p - [p^\flat]$ 是 $W(K^{0,\flat})$ 的一个 distinguished 元素。记 $\mathrm{Perf}^{\mathrm{tf}}_{K^0}$ 为 K^0-代数完美拟代数无 p-挠范畴。

定义 6.3. — 设 A 是一个诺特局部环。 A-CM 代数（分别地， A- CM 完美拟代数）是一个 *Cohen–Macaulay* 代数（分别地，是一个同时属于$\mathrm{Perf}^{\mathrm{tf}}_{K^0}$的 *$A$-Cohen–Macaulay* 代数）。

接下来我们需要以下结果:

引理 6.4。— 设$(x_1, \ldots, x_d)$ 是代数 $C \in \mathrm{Perf}^{\mathrm{tf}}_{K^0}$中的一个正则序列，其中$x_1 = p$。 C 的$(x_1, \ldots, x_d)$-进完备化$\hat{}C$ 属于$\mathrm{Perf}^{\mathrm{tf}}_{K^0}$。

证明。— 详细内容见 André（2020）的命题 2.2.1。由于$\sim I := (x_1, \ldots, x_d)$是有限生成的， C 是 I-完备的（因此也是 p-完备的）。若 $z \in C$满足$pz \in I^{nd}C$，则 $z \in I^{n-1}C$。事实上，我们有 $I^{nd} \subset (p^n, x_2^n, \ldots, x_d^n)$，因此存在 $y \in C$使得 $p(z - p^{n-1}y) \in (x_2^n, \ldots, x_d^n)C$；再由$(p, x_2^n, \ldots, x_d^n)$的正则性可得$z - p^{n-1}y \in (x_2^n, \ldots, x_d^n)C$以及 $z \in I^{n-1}C$。由此立即推出 $\widehat{C}$没有p-挠，且理想 $p^{1/p}\widehat{C}$ 和 $p\widehat{C}$ 在 $\widehat{C}$ 中关于 I-进拓扑是闭的，因此 $\widehat{C}/p \simeq \widehat{C/p}$, $\hat{}C/p^{1/p} \simeq \widehat{C/p^{1/p}}$。最后利用命题 2.12 得证。 □

引理 *6.5*。— 设 *$(A, \mathfrak{m})$* 是 $\in$ *CLI^p* （定义 *6.1*），且设 C 是一个 A-完美拟代数 *CM*、$\mathfrak{m}$-完备。对于所有 z_1，……，$z_n \in A$，存在一个 C-完美拟代数 *CM*、$\mathfrak{m}$-完备的 C'，其中 z_1，……，z_n 是 p-强幂的（定义 *2.2*）。

证明。——根据定理 4.3 存在一个 C-代数 $P \in \mathrm{Perf}^{\mathrm{tf}}_{K^0}$ 在 C模 p 忠实平坦，且其中 $z_1, \ldots, z_n$ 是 p- 次幂的。若 $(x_1, \ldots, x_d)$ 是 A 的参数系，且 $x_1 = p$，则 $(x_1, \ldots, x_d)$ 是 C 中的正则序列，并且通过它在 P 上的忠实平坦性模 p，它在 C中仍然是正则序列。根据

命题 1.9 完备化 $(x_1,\dots,x_d)$-进完备化（它也是 $\mathfrak{m}$-进完备化） C'的 P 是一个 A-完全 CM 代数 $\mathfrak{m}$，它根据引理 6.4 属于 Perf。 □

6.2. 正则局部环上的 CM 完美拟代数

定理 6.6和 6.8是著名的 Kunz 结果（1969）在不等特征情形下的类比：对于一个特征为 A 的诺特环 p，以下每个断言都等价于 A的正则性：

- φ 的 Frobenius $A\to A$： A 是平坦态射。
- 存在一个完美且忠实平坦的 A-代数。

回顾一下（命题 1.9）：对于一个正则局部环 A，一个 A-代数是 CM 的，当且仅当它在 A上忠实平坦。利用 Kunz 定理的简单部分和以下结果，可以很容易地推得：对于任意满足 A 且 $p\in \mathrm{Rad}(A)$ 的正则环，存在一个 A-完美拟代数，且其为忠实平坦。

定理 6.6. — 对于任意不等特征的正则局部环 $(A,\mathfrak{m})$，都存在一个 A-完美拟代数CM，且它是 $\mathfrak{m}$-完备的。

在应用中，我们只需要考虑形如 $W(k)[[T_1,\dots,T_d]]$ 的环的定理，其中 k 是特征为 p 的完美域；此时证明完全是初等的。

ˆ证明. — 不妨设 A 是完备的，因为 A 对 A 的完备化在 A 上忠实平坦。由 Cohen 结构定理以及 A 的正则性，存在一个完备且绝对非分歧的赋值环 V [53]，以及一个元素 $f\in V[[X_1,\dots,X_n]]$；若 $p\in\mathfrak{m}\setminus\mathfrak{m}^2$，可将其选为 $f=X_1$ 的形式，否则可将其选为理想 $(p,X_1,\dots,X_n)^2$ 中的元素，使得

$$A\simeq V[[X_1,\dots,X_n]]/(p-f).$$

首先，假设 k 是完美的。令

$$A_j=V[[X_1^{1/p^j},\dots,X_n^{1/p^j}]]/(p-f),\ A_\infty=\varinjlim_j A_j$$

ˆ并证明 A_∞ 的 A_∞ p-进完备化是一个忠实平坦的 A 完美拟代数。态射 $A\to A_j$ 是局部的、单射的、有限的且平坦的，因而是忠实平坦的。因此， A_∞ 是一个忠实平坦的 A 代数，而下面的引理表明，ˆ $\sim A_\infty$ 在 A 上仍然忠实平坦。显然， A_∞ 没有 p 挠，且 A_∞/p 上的 Frobenius 满射。我们证明存在 $\pi\in\widehat{A}_\infty$ 使得 $(\pi^p)=(p)$。当 $f=X_1$ 时这显然成立，因此假设 $f\in(p,X_1,\dots,X_n)^2$。由于 $A_\infty=A_\infty^p+pA_\infty$（因而 $\mathfrak{m}_{A_\infty}=\mathfrak{m}_{A_\infty}^p+pA_\infty$）且 $p\in\mathfrak{m}_{A_\infty}^2$，可得对某些 π，$y\in\mathfrak{m}_{A_\infty}$ 有 $p=\pi^p+py$，于是 $(p)=(\pi^p)$。最后，利用命题 2.12，并注意到 Frobenius $A_\infty/\pi\to A_\infty/\pi^p$ 是单射（因为 A_∞ 是正规环〔所有 A_j 都是正则的，因而是正规的〕），所以在 $A_\infty[\frac{1}{\pi}]$ 中是 p-闭的，即得结论。

53。这意味着 V 的极大理想是 pV。

¯在一般情形下，设 k 是 k 的一个代数闭包，并设 $V \to W$ 是绝对非分歧赋值环的一个忠实平坦扩张，使得 W 的¯剩余域为 k。由于 $W[[X_1, \ldots, X_n]]$ 是一个忠实平坦的 $V[[X_1, \ldots, X_n]]$ 代数（例如由下面的引理可知），$W[[X_1, \ldots, X_n]]/(p - f)$ 是 A 的一个忠实平坦扩张，其剩余域代数闭。然而，$W[[X_1, \ldots, X_n]]/(p - f)$ 根据前文具有一个忠实平坦的完美拟代数 S，满足所需条件。

由上述内容可知，存在一个 A-完美拟代数 CM。其完备化 $\mathfrak{m}$-进完备化满足引理6.4和6.7的要求。 □

我们用到了以下结果（参见 André 的引理 1.1.1（2018b））：

引理 6.7。— 设 I 是诺特环 A 的一个理想，且设 B 是一个 A-平坦代数。对任意 A-模 X，记作$\hat{}X = \lim_{\leftarrow n} X/I^n X$ 。

a) 对任意有限生成 A-模 M，自然态射 $M \otimes_A \hat{}B \to \widehat{M \otimes_A B}$ 是一个同构。

b) A-代数$\hat{}B$ 是平坦的；若 $I \subset \mathrm{Rad}(A)$，则它甚至是忠实平坦的。

证明. — a) 直接应用 Artin–Rees引理可得，函子 F：$M \mapsto M \otimes_A B$ 在有限生成 A-模上是正合的。由于当 M 是 A上的有限生成自由模时，态射 f_M: $M \otimes_A B \to M \otimes_A B$ 是同构，因此根据一个标准论证，对任意 A 上的有限生成 M，它也成立。

b) 平坦性可直接由 a) 及其证明推出。假设$I \subset$Rad(A)，且 B 在 A上忠实平坦。设 M 是一个有限生成的 A-模，满足 $M \otimes_A \hat{}B = 0$。那么 $M \otimes_A B/IB = 0$，因此 $M/IM \otimes_A B = 0$，继而 $M/IM = 0$，并且（由中山引理） $M = 0$。 □

以下结果的证明明显更加复杂，因此我们将读者引向 Bhatt、Iyengar 和 Ma（2019年），因为我们不会用到该结果。

定理 6.8。— 设 A 是一个诺特环，使得 $p \in \mathrm{Rad}(A)$。若存在一个A-完美拟代数且忠实平坦，则 A 是正则的。

6.3. 一项关键技术结果

本段中固定一个环 $(A, \mathfrak{m}) \in \mathrm{CLI}_p$(定义 *6.1*) 以及 $\wp \in$ 谱$A[\frac{1}{p}]$，高度为 $c \geq 1$。因此有 $A/\wp \in \mathrm{CLI}_p$。

命题 6.9。— 存在 $g \in A \setminus \wp$ 的倍数 p，以及一个参数系 $(f_1, \ldots, f_c, x_1, \ldots, x_d)$ 属于 A，其中 $x_1 = p$ 且

$$g\wp \subset \sqrt{(f_1, \ldots, f_c)} \subset \wp.$$

序列（x_1，……，x_d）是 $A/\wp$ 的参数系。

证明。——根据克鲁尔主理想定理（以及一个关于避开素理想的标准论证），存在 $f_1, \ldots\ldots, f_c \in \wp$，使得 $\mathrm{ht}(p, f_1, \ldots\ldots, f_c) = c+1$。因此，$(p, f_1, \ldots\ldots, f_c)$ 可扩充为 A 的一个参数系 $(f_1, \ldots\ldots, f_c, x_1, \ldots\ldots, x_d)$，其中 $x_1 = p$。由于 $\wp$ 是约化~~环 A' 的~~极小素理想：$= A/\sqrt{(f_1, \ldots\ldots, f_c)}$，$\wp$ 中的每个元素都是 A' 中的零因子，因此存在 g（可将其选为 p 的倍数，因为 $p \notin \wp$）。 □

定义 *6.10*。—设 R 为一个带有 p-强元素（定义 *2.2*） g的环，并设 S 为一个 R-代数。S 中的元素序列 $x = (x_1, \ldots, x_d)$ 称为几乎正则的（在框架 g^{1/p^∞}中），如果理想 $(g^{p^{-\infty}})$ 对任意 i 都湮灭（*54*） $(x_1,\ldots,x_i):(x_{i+1})\ (x_1,\ldots,x_i)$，但不湮灭 $S/(x_1, \ldots, x_d)$（特别是 $g \neq 0$）。

需要注意的是，在 S 中的正则序列没有理由一定是几乎正则的（！）：即使 $S/(x_1, \ldots, x_d)$ 非零，也完全可能被 $(g^{p^{-\infty}})$湮灭。下面这个微妙的结果（取自并改编自 André（2020年））表明，在我们的情形中不会出现这种恶作剧。

命题 6.11. — 设 $(f_1, \ldots, f_c, x_1, \ldots, x_d)$ 是 A 的一个参数系，其中 $x_1 = p$。设 C 是一个 A-代数 CM， $\mathfrak{m}$-完备，且其中 $p, f_1, \ldots, f_c$ 都是p-幂的（定义*2.2*）。令

$$\bar{C} := C/(f_1^{p^{-\infty}}, \ldots, f_c^{p^{-\infty}})C,\ \widehat{\overline{C}} = \varprojlim_n \overline{C}/p^n.$$

a) 序列 $(x_1, \ldots, x_d)$ 在 C和 $\overline{C}$中都是正则的。

b) 若 $C \in \mathrm{Perf}^{\mathrm{tf}}_{K^0}$，则同样有 $\widehat{\overline{C}}$.

c) 设 $\wp \in V(f_1, \ldots, f_c)$，并设 $g \in A \setminus \wp$是一个在 C 中变成 p-幂的元素。序列 $(x_1, \ldots, x_d)$ 在 g^{1/p^∞} 的框架下（定义 *6.10*），在 $\overline{C}$和 $\overline{C}$中几乎正则。

证明。——a) 由于 $x_1 = p$，只需证明 $(x_1, \ldots, x_d)$ 在 $\bar{C} = \varinjlim_n C/(f_1^{1/p^n}, \ldots, f_c^{1/p^n})$ 中是正则的，或者说，对于任意 n，$(x_1, \ldots, x_d)$ 在 $C/(f_1^{1/p^n}, \ldots, f_c^{1/p^n})$ 中是正则的。这显然成立，因为序列 $(f_1^{1/p^n}, \ldots, f_c^{1/p^n}, x_1, \ldots, x_d)$ 在 C 中是正则的(55)。

b) 根据 a) $\widehat{\overline{C}}$ 没有 p-挠。利用命题2.12，只需验证 Frobenius $\overline{C}/p^{1/p} \to \overline{C}/p$ 是一个同构；这直接由定义以及由 Frobenius 诱导的同构 $C/p^{1/p} \simeq C/p$ 即可得到。

c) 这要昂贵得多。根据 a)，只需验证 $C/(x_1, \ldots\ldots, x_d)$ 不被 $(g^{p^{-\infty}})$ 湮灭。假设事实并非如此，因此

$$(g^{p^{-\infty}})C \subset (f_1^{p^{-\infty}}, \ldots, f_c^{p^{-\infty}})C + (x_1, \ldots, x_d)C,$$

特别是 $g \in \mathfrak{m}^n C + \sqrt{\wp C}$ 对任意 n。

54. 若 I，J 是环 S 的两个理想，则记 $I\colon J = \{s \in S \mid sJ \subset I\}$。55. 回顾一下，若 M 是环 R 上的一个模，且 $x_1, \ldots\ldots, x_n \in R$，$e_1, \ldots\ldots, e_n \in \mathbf{Z}_{>0}$，那么序列 $(x_1, \ldots\ldots, x_n)$ 在 M 中是正则的，当且仅当序列 $(x_1^{e_1}, \ldots\ldots, x_n^{e_n})$ 是正则的。

设 $C = C/\wp C$, $A = A/\wp$，并记 $\bar{x}$ 为 x 在 C（分别为 A）中的像，其中 $x \in C$（分别为 $x \in A$）。设 $f\colon C \to A$ 是 A-模之间的一个态射。对任意 $n \geq 1$，存在$\alpha \in \mathfrak{m}^n C$和 $N \geq 1$，使得 $(g-\alpha)^N \in \wp C$，因此 $(\bar{g}-\overline{\alpha})^N = 0$ 在 $\bar{C}$中。应用f，得到 $\bar{g}^N f(1) - \binom{N}{1}\bar{g}^{N-1} f(\overline{\alpha}) + \cdots + (-1)^N f(\overline{\alpha^N}) = 0$，其中 $f(\overline{\alpha}^k) \in \mathfrak{m}_C^{nk}$。于是$x := f(1)\overline{g} \in \bar{A}$满足形如 $x^N + a_1 x^{N-1} + \cdots + a_N = 0$ 的方程，其中$a_i \in \mathfrak{m}_{\bar{A}}^{ni}$（当然依赖于 n）。

我们证明这将迫使 $x = 0$。A 在其分式域中的整闭包是一个诺特正规整环（永田定理），因此是离散赋值环的交 $(V_i)_{i\in I}$（将该整闭包局部化于其高度为 1 的素理想所得的环），且态射 $A \to V_i$ 是局部的。在这样的环中，x的像 y 满足形如 $y^N + b_1 y^{N-1} + \cdots + b_N = 0$ 的方程，其中 $b_j \in \mathfrak{m}_{V_i}^{jn}$（取决于 n）。这迫使 $v(y^N) \geq \min_{1\leq j\leq N}(v(b_j) + (N-j)v(y))$，继而对任意 n 都有 $v(y) \geq n$，最终得到 $y = 0$ 和 $x = 0$。

因此，在 $A = A/\wp$ 中有 $f(1)\bar{g} = 0$，继而有 $f(1) = 0$，因为 $g \notin \wp$。对任意的 $t \in C$，将此应用于态射 $c \mapsto f(tc)$，可知 $f = 0$，换言之，$\mathrm{Hom}^{\mathrm{Mod}_{A/\wp}}(C/\wp C,\ A/\wp) = \{0\}$，这与下面的引理矛盾。 □

引理 6.12。——设 A 是一个完备整诺特局部环，且 $\wp$ 是 A 的一个素理想。若 C 是一个 A-代数CM，则 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{Mod}_A}(C, A)$ 和$\mathrm{Hom}^{\mathrm{Mod}_{A/\wp}}(C/\wp C, A/\wp)$ 均非零。

证明。——以下这个非常漂亮的论证归功于 Hochster（1994）。设 $A_0 \to A$ 是一个有限扩张，其中 A_0 是正则完备局部环，剩余域为 k，并设 $q = A_0 \cap \wp$。若 E（分别为 E'）是 A_0-模（分别为 A_0/q-模）k 的内射包，则由 Matlis 对偶可得 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{Mod}_{A_0}}(C, A_0) \simeq \mathrm{Hom}^{\mathrm{Mod}_{A_0}}(C \otimes_{A_0} E, E)$，以及 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{Mod}_{A_0/q}}(C/qC, A_0/q) \simeq \mathrm{Hom}^{\mathrm{Mod}_{A_0/q}}(C/qC \otimes_{A_0/q} E', E')$。这些模均非零，因为 $C \otimes_{A_0} E$ 和 $C/qC \otimes_{A_0/q} E$ 均非零；这是因为 C（分别为 C/qC）作为 A代数 CM，在A_0（分别为 A_0/q）上忠实平坦（命题 1.9）。

最后，要从 A_0-对偶转到 A-对偶（下面针对 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{Mod}_A}(C, A)$ 给出的论证，对于 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{Mod}_{A/\wp}}(C/\wp C, A/\wp)$ 也完全相同）。设 $f\colon C \to A_0$ 是一个非零的 A_0- 线性态射。对于任意 $c \in C$，都有一个 A_0-线性态射$\varphi_c\colon A \to A_0, a \mapsto f(ac)$。映射 $F\colon C \to X := \mathrm{Hom}^{\mathrm{Mod}_{A_0}}(A, A_0)$ $c \mapsto \varphi_c$ 是非零的且为 A-线性的。由于态射 $A_0 \to A$ 是有限的，A-模 X 在 A 上有限生成且无挠 (56)，因此可嵌入一个有限生成自由 A-模 A^j。将其投影到 A^j 的某个因子上，再与 F 复合，便得到 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{Mod}_A}(C, A)$ 中的一个非零元素。 □

56. 若 $a \in A \setminus \{0\}$ 且 $f \in X$满足 $a.f = 0$，那么对于任意 $P \in XA_0[X]$ 和任意$x \in A$，$f(P(a)x) = 0$；只需取 P 使得 $P(a) \in A_0 \setminus \{0\}$，即可得出 $f(x) = 0$。

6.4. 几乎完美拟代数与几乎 CM 代数的构造

设 $P \in \mathrm{Perf}^{\mathrm{tf}}_{K^0}$ 并设 $g \in P\setminus\{0\}$ 是一个元素 p-强幂（定义 2.2），且是 p的倍数。我们不假设 P是无 g-挠的。设 $\iota: P \to P[\frac{1}{g}]$为典范态射，并考虑 P-代数

$$Q := g^{-1/p^\infty}P = \bigcap_{n\geq 0}\left\{x \in P\Big[\frac{1}{g}\Big] \mid g^{1/p^n}x \in \iota(P)\right\} \subset P\Big[\frac{1}{g}\Big].$$

g 在 Q 中的像 p是-强的，是的倍数 p 且是非零因子。态射$\iota\colon P \to P[\frac{1}{g}]$诱导出一个几乎同构 $\iota\colon P \to Q$（在 g^{1/p^∞}的框架下），因为 $(g^{p^{-\infty}})$湮灭 $P[g^\infty]$（引理 2.20）。若 P, g如上所述，则称 Q 为一个几乎完美拟代数。

下面这个不太好看的结果可由综合以上各段的结果得到。

命题 *6.13*。 — 设 $(A, \mathfrak{m}) \in \mathit{CLI}_p$*(*定义 *6.1)*，$\wp \in$谱$A[\frac{1}{p}]$，并设 $g \in pA \mid \wp$及 $(f_1, \ldots, f_c, x_1, \ldots, x_d)$ 如命题 *6.9* 中所述。对于任意 A-完美拟代数 *CM* $\mathfrak{m}$-完备的 C，存在一个 C-代数 $P \in \mathit{Perf}^{\mathrm{tf}}_{K^0}$，其中 g 变为p-强且非零，并嵌入交换图中

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A/\wp \\ \downarrow & & \downarrow \\ P & \longrightarrow & Q := g^{-1/p^\infty}P \end{array}$$

并且使得$(x_1, \ldots\ldots, x_d)$ 在 P中的像构成一个正则且几乎正则序列（在 g^{1/p^∞}的框架下，定义*6.10*）由 p-幂元组成。

证明。——由引理 6.5，可找到一个 A-完美拟代数 CM，$\mathfrak{m}$-完备的 C_1，它是一个 C-代数，在其中 $g, f_1, \ldots, f_c, x_1, \ldots, x_d$ 都变成 p-幂元。设 $\tilde{C}_1 = C_1/(f_1^{p^{-\infty}}, \ldots, f_c^{p^{-\infty}})C_1$。命题 6.11 表明 $P := \varprojlim_n \tilde{C}_1/p^n \in \mathrm{Perf}^{\mathrm{tf}}_{K^0}$，并且 $(x_1, \ldots, x_d)$ 是 P 中的一个正则且几乎正则序列（在 g^{1/p^∞} 的框架下）。特别地，$g \neq 0$ 在 P 中，否则对于所有 n 都有 $g^{1/p^n} = 0$（因为 P 是约化的，参见命题 2.20），因此 $(g^{p^{-\infty}})$湮灭子 $P/(x_1, \ldots, x_d)$，矛盾。

还需要验证态射 $A \to P$ 可通过 $A/\wp \to g^{-1/p^\infty}P$进行分解。如果 $f \in \wp$那么 $gf \in \sqrt{(f_1, \ldots, f_c)}$，因此 gf在 $\tilde{C}_1$中变为幂零元，因此在 P中也如此。由于 P是约化的（命题 2.20），f 在 P中的像落在 $P[g]$ 中，因此 $A \to P$可通过 $A/\wp \to P/P[g^\infty] \to g^{-1/p^\infty}P$进行分解。 □

命题 *6.14*。——对于任意 $A \in \mathit{CLI}_p$（定义 *6.1*），存在 A 的一个参数系 $(x_1, \ldots, x_d)$，其中 $x_1 = p$，一个元素 $g \in A$ 以及一个对象 $P \in \mathit{Perf}^{\mathrm{tf}}_{K^0}$，使得$g$ 是 p-强的（定义 *2.2*），且在 P 中非零，并且 $Q := g^{-1/p^\infty}P$ 是一个 A- 代数，其中（$x_1, \ldots, x_d$）是一个几乎正则序列（在 g^{1/p^∞}的框架下，定义 *6.10*）。

证明。——设 A的剩余域为 k 。存在 n以及一个满射 $A_0 :=W(k)[[T_1,\dots,T_n]] \to A$。设 $\wp =$为 ker($A_0 \to A$)，因此 $A \simeq A_0/\wp$。定理 6.6 给出一个 CM 完美类代数且 $\mathfrak{m}_{A_0}$-完备的 C。将上述命题应用于这些数据（以 A_0 代替 A），即可得出结论；并注意到，在 g^{1/p^∞}的框架下，P 与 Q几乎同构。 □

6.5. Gabber 构造

为了完成定理 6.2 的证明，必须从一个 Cohen– Macaulay 近似代数过渡到一个真正的代数。关于 Hochster 的部分修改方法，请参见 André 的命题4。1。2 （2018b）。下面我们将介绍 Gabber 构造（一种略作修改的版本），它奇迹般地简单而直接。另请参见 Gabber 和 Ramero 的著作第17。5 节（2018年），其中有补充内容。

设 A 是一个环，且 $g \in A$ 是一个非零的 p-幂元素（定义 2.2）So it

$$S = \{(g^{a_n})_{n\geq 0} \in A^{\mathbf{N}} |\ a_n \in \mathbf{N}[\frac{1}{p}],\ \lim_{n\to\infty} a_n = 0\}.$$

显然， S 是 $A^{\mathbf{N}}$的一个乘法子集，其中不含 0：=(0，0，.....)。如果 M是一个 A-模，那么 $M^{\mathbf{N}}$ 就是一个 $A^{\mathbf{N}}$-模，并定义

$$\mathcal{G}(M) := S^{-1}M^{\mathbf{N}}.$$

引理 6.15. — 若 $f\colon M \to N$ 是 A-模（在 g^{1/p^∞} 框架下）的几乎同构，则诱导的态射 $\mathcal{G}(f):\mathcal{G}(M) \to \mathcal{G}(N)$ 是一个同构。

证明. — 简记 (x_n)，而不写作 $(x_n)_{n\geq 0}$。若 G(f)($(m_n)_s$) $= 0$，则 $(f(m_n))_s$ $= 0$ 在 $S^{-1}N^{\mathbf{N}}$ 中，因此存在 $s' =(g^{a'_n}) \in S$，使得 $s'(f(m_n)) = 0$，换言之，对任意 n，都有 $g^{a'_n} f(m_n) = 0$。由于 $(g^{p^{-\infty}})$ 消去 ker f，可得 $g^{a'_n+1/p^n} m_n = 0$。因此 s'':=$(g^{a'_n+1/p^n}) \in S$，且 $s''(m_n) = 0$ 在 MN 中，于是 $(m_n)_s = 0$。

接下来，设$(k_n)_s$ $\in$G(N)。由于$(g^{p^{-\infty}})$ 消灭余核(f)，对任意 n，存在$m_n \in M$使得 $g^{1/p^n} k_n = f(m_n)$。令 $s' = s\cdot(g^{1/p^n}) \in S$，则$(k_n)s$ =G(f)($(m_n)_{s'}$)，由此即可得出结论。 □

若 C 是一个 A-代数，则G(C)也通过对角态射$A \to A^{\mathbf{N}}$成为一个 A-代数。

引理 6.16. — 设 C 是一个 A-代数，且 $x = (x_1,\dots,x_d)$ 是 A中的一个序列。若 x在 C 中（在 g^{1/p^∞}框架下）几乎正则，则 x 在$\mathcal{G}(C)$中成为一个正则序列。

证明. — 首先证明 G(C)/($x_1,\dots,x_d$)G(C) $\neq${0}。否则，存在 $\alpha_i \in S^{-1}C^{\mathbf{N}}$ 使得 $1 = \sum_{i=1}^d x_i\alpha_i$，因此对某些 $s \in S$ 和 $y_i \in C^{\mathbf{N}}$，有 $1 = \sum_{i=1}^d x_i \frac{y_i}{s}$。存在 $s' \in S$ 使得 $s'(s - \sum_{i=1}^d x_i y_i) = 0$ 属于 $C^{\mathbf{N}}$。若 $s = (g^{a_n})_{n\geq 0}$ 且 $s' = (g^{a'_n})_{n\geq 0}$，则可推出（投影到第 n 个分量）$g^{a_n+a'_n} \in (x_1,\dots,x_d)C$ 对任意 n 都成立。由于 $a_n + a'_n \to 0$，由此可知 $(g^{p^{-\infty}})$ 湮灭 $C/(x_1,\dots,x_d)$，这与 x 在 C 中几乎正则矛盾。

剩下要验证的是：若 $a \in \mathsf{G}(C)$ 满足 $ax_{i+1} \in (x_1, \dots, x_i)\mathsf{G}(C)$，则 $a \in (x_1, \dots, x_i)\mathsf{G}(C)$。存在 $s \in S$ 和 b、$z_k \in C^{\mathbf{N}}$，使得 $a = \frac{b}{s}$ 且 $ax_{i+1} = \sum_{k=1}^{i} x_k \frac{z_k}{s}$；并且存在 $s' \in S$ 使得 $s'(bx_{i+1} - \sum_{k=1}^{i} x_k z_k) = 0$。若 $s' = (g^{a'_n})$，则（投影到第 n 个分量） $g^{a'_n} b_n x_{i+1} \in (x_1, \dots, x_i)C$。由于 $(g^{p^{-\infty}})$ 湮灭 $(x_1,\dots,x_i)C:(x_{i+1})C(x_1,\dots,x_i)C$，由此可知对任意 n， $g^{a'_n+1/p^n} b_n \in (x_1, \dots, x_i)C$ 均成立。因此可以写成

$$g^{a'_n+1/p^n} b_n = \sum_{k=1}^{i} x_k u_{n,k}$$

对于某些 $u_{n,\,k} \in C$。若设 $u_k = (u_{n,\,k})_{n\geq 0} \in C^{\mathbf{N}}$ 和 $s'' = (g^{1/p^n})_{n\geq 0}$，则可在 $C^{\mathbf{N}}$ 中写成 $s's''b = \sum_{k=1}^{i} x_k u_k$，因此 $a = \frac{b}{s} = \sum_{k=1}^{i} x_k \frac{u_k}{ss's''} \in (x_1, \dots, x_i)\mathsf{G}(C)$。 □

引理 6.17。— 若 C 是一个完美拟环，则 $\mathcal{G}(C)$ 的 p-进完备化是一个完美拟环。

证明。— $C^{\mathbf{N}}$ 是完美拟环的乘积，因此是一个完美环。于是只需证明，完美拟环的一个局部化的 p-进完备化仍然是完美类，参见 Česnavičius 和 Scholze，2。1。6 2019年。 □

6.6. Cohen–Macaulay完美代数的构造，弱函子性

现在，我们可以综合上述结果，证明对任意 A，都存在 $A \in \mathrm{CLI}_p$-Cohen–Macaulay 代数。该结论最早由 André 在其论文中证明（2018b），随后 Shimomoto 在其论文中进一步完善（2018年），得到如下形式：

定理 6.18. — 对任意 $(A, \mathfrak{m}) \in \mathrm{CLI}_p$ *(定义 6.1)*，存在一个 A-完美类代数 CM *(定义 6.3)*，且 $\mathfrak{m}$-完备。

证明。— 设 $g, x_1, \dots, x_d, P$ 和 Q 如命题 6.14 中所述。几乎同构 $P \to Q$ 诱导出同构 $\mathsf{G}(P) \simeq \mathsf{G}(Q)$（引理 6.15），因此 $\mathsf{G}(Q) \simeq \mathsf{G}(P)$ 经 p-进完备化后成为一个完美拟环（引理 6.17）。序列 $(x_1, \dots, x_d)$ 在 $\mathsf{G}(Q)$ 中变为正则序列（引理 6.16），尤其是 $\mathsf{G}(Q) \in \mathsf{Perf}^{\mathrm{tf}}_{K^0\infty}$。由引理 6.4 可知，$\mathsf{G}(Q)$ 的 $\mathfrak{m}$-进完备化是一个 A-完美拟 Cohen–Macaulay 代数，且 $\mathfrak{m}$-完备。 □

注 6.19。——不难推得，任意不等特征为 $(0, p)$ 的完备诺特局部环 $(A, \mathfrak{m})$ 都存在一个 A-完美拟代数 CM 代数（定义 6.3），且它是 $\mathfrak{m}$-完备的。事实上，我们很容易看出（使用 Cohen 定理），存在一个剩余域代数闭且忠实平坦于 A 的完备诺特局部 A-代数 $\tilde{A}$。设 $\wp$ 是 $\tilde{A}$ 的一个极小素理想，满足 $\dim \tilde{A}/\wp = \dim A$。那么 $\tilde{A}/\wp \in \mathrm{CLI}_p$，因此存在一个 $\tilde{A}/\wp$-完美拟代数 CM 代数 $\tilde{C}$，它自动成为一个 $\tilde{A}$-完美拟代数 CM 代数。由于 $A \to \tilde{A}$ 忠实平坦，$\tilde{A}$ 的任意参数系都可扩张为 $\tilde{A}$ 的参数系，因而在 $\tilde{C}$ 中成为正则序列。因此，$\tilde{C}$ 是一个 $\tilde{A}$-完美拟代数 CM 代数。

只需对 C 关于拓扑 $\mathfrak{m}$-进拓扑完备化，然后应用引理 6.4 即可得证。

上述方法相当灵活，足以重新得到 André 论文中的一项基本结果（2020年）：

定理6.20。—— 设 $f\colon A \to A'$ 是一个到 CLI^p （定义 *6.1*）中的满射态射。对于任意 A-完美拟代数CM 且 $\mathfrak{m}_A$-完备的 C，存在一个 A'-完美拟代数 CM 且 $\mathfrak{m}_{A'}$-完备的 C'，使其嵌入一个交换图中

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A' \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \longrightarrow & C' \end{array}$$

证明。—— 可以假设 f 是典范投影 $A \to A/\wp$，其中 $\wp \in \mathrm{Spec}\, A[\frac{1}{p}]$。只需在上述证明中用命题 6.13替代命题 6.14的用法即可。事实上，定理 6.18 证明中所用的论证表明，$\mathfrak{m}$-进完备化 C' 的 $\mathcal{G}(Q)$ （其中 Q如命题 6.13所述）符合要求：它是一个 A'-完美拟代数 CM，且 $\mathfrak{m}_{A'}$-完备；此外，我们有一个态射 $P \to C'$，因而也有一个态射 $C \to C'$，它按构造嵌入一个与定理中相同的交换图。

□

注*6.21*. — 1. André 的定理 4.1.1 （2020年）以及 Gabber 和 Ramero 的著作（2018年）中给出了更精细、更一般的形式，不过上述定理已经包含了许多关键难点。

2. 利用 Cohen分解，可以推得任意态射$f\colon A \to A'$ 在 CLI^p 中都可以嵌入如下图表，其中涉及一个A-CM 代数 C 和一个 A'-CM 代数 C'。这有许多应用，例如可参见 Hochster 和 Huneke 的论文（1995）。这里只提一个显著的推论：若 A是一个正则局部环，且是子环 A'的分裂扩张，那么 A' 就是一个Cohen–Macaulay环[57]。

7. 通过 Abhyankar 完美化引理构造 Cohen–Macaulay代数

在本节最后，我们介绍 André 的初始方法（2018b），该方法利用 Abhyankar 完美化引理来构造 Cohen–Macaulay 代数。可以进一步推进这一方法，从而得到定理 6.20(André 的论文（2020年）中便是如此），但我们在此不作此尝试。

57. 这一结果此前已由 Heitmann 和 Ma 在不等特征下证明（2018年），早于 André 的论文（2020年）。

对于任意 K^0-代数，记作 Rnotons $R^\natural = W(R^\flat)/(p - [p^\flat])$。若 $P \in \mathrm{Perf}^{\mathrm{tf}}_{K^0}$，则 $P^\natural \simeq P$经由 θ_P，因此若 R是一个 P-代数，则 $R^\natural$是一个 $P \simeq P^\natural$-代数。若 R是 p-完备的，则任意态射 $P \to R$ 都可典范地分解为 $P \to R^\natural \to R$。

7.1. 基本构造

受命题*6.13*的启发，我们考虑以下情形。给定

- 一个态射 $A\prime \to A$ 在 CLI^p（定义 6.1）中，以及一个元素 $g \in pA\prime$。
- 一个代数 $P \in \mathrm{Perf}_{\mathrm{tf}\ K^0}$，在其中 g 变得 p-强且非零，并嵌入一个交换图中

$$\begin{array}{ccc} A' & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ P & \longrightarrow & Q := g^{-1/p^\infty} P \end{array}$$

注意，g 在 Q 中的像非零，因为 P 是约化的。

设 $A \to A_1$ 是一个有限扩张，在将 g求逆后为 étale，并令[58]

$$\mathcal{F}(A_1) = \mathrm{fi}(Q, A_1 \otimes_A Q[\frac{1}{g}]).$$

由于 $A \to A_1$是整的，自然态射 $A_1 \to A_1 \otimes_A Q[\frac{1}{g}]$ 可分解为经由 $\mathrm{F}(A_1)$，从而导出一个交换图

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ Q & \longrightarrow & \mathcal{F}(A_1) \end{array}$$

考虑 P-代数

$$\mathcal{P}(A_1) := \mathcal{F}(A_1)^\natural.$$

尚不清楚 $\mathrm{F}(A_1)$ 是否是 p-完备的，但上述结果的证明将表明确实如此，因此态射 $P \to Q \to \mathrm{F}(A_1)$ 可分解为$P \to \mathrm{P}(A_1) \to \mathrm{F}(A_1)$。

命题 7.1. — 设 $A \to A_1$ 是一个有限扩张，在将 g求逆后为 *étale*。P-代数 $\mathcal{P}(A_1)$ 在 P 上模 p 几乎忠实平坦（在 g^{1/p^∞} 框架下），且无 g-挠，并且 $g^{-1/p^\infty}\mathcal{P}(A_1) = \mathcal{F}(A_1)$。

这个结果是 Abhyankar 完美化引理的一个应用，不过验证假设需要一些预备知识。

引理 7.2. — 若 $S \in \{Q, Q^\natural\}$，则代数 S 是 p-完备的、无 g-挠的，并且在 $S[\frac{1}{p}]$ 中是 p-闭的。

58. 回顾一下，$\mathrm{fi}(A, B)$ 表示 A and B 的整闭包。

证明. — 设 $R = Q^\natural$。由于 Q 无 g-挠且 $p \mid g$，代数 Q无 p-挠。 R 也同样如此，因为 $p^\flat$ 在$Q^\flat$ 中不是零因子：若 $x = (x_n)_{n\geq 0} \in Q^\flat$ 满足 $p^\flat x = 0$，且 $a_n \in Q$ 是 $x_n \in Q/p$的一个提升，则对于任意 n，有 $a_n \in p^{1-1/p^n}Q$ 和 $a_n \equiv a_{n+1}^p \equiv 0$ (模 pQ)，因此 $x = 0$。

环 R 是 p-完备的，因为它是完美类（命题 2.8）。我们证明 Q 是 p-完备的。设 $g_n = g^{\frac{1}{p^n}-\frac{1}{p^{n+1}}}$。态射 $\iota\colon \ P \to P[\frac{1}{g}]$ 诱导出一个同构 (59)

$$\alpha\colon Q \to \varprojlim_{\cdot g_n} \iota(P),\ x \mapsto (g^{1/p^n}x)_{n\geq 0}.$$

由于 $I := (g^{p^{-\infty}})$ 湮灭了 $\iota\colon P \to \iota(P)$ 的核并包含 g_n，态射 ι诱导出逆系统 $\{P, (\cdot g_n)\}$ $\to \{\iota(P), (\cdot g_n)\}$ 的一个同构，因此

$$Q \simeq \varprojlim_{\cdot g_n} \iota(P) \simeq \varprojlim_{\cdot g_n} P.$$

由于 P是 p-完备且无 p-挠，因此容易推出 Q 是 p-完备的。

我们证明 Q（分别地， R）在 $Q[\frac{1}{p}]$（分别地， $R[\frac{1}{p}]$）中是 p-闭的。命题 3.5 表明， P（分别地， R）在 $P[\frac{1}{p}]$（分别地， $R[\frac{1}{p}]$）中是 p-闭的。要得出结论，只需证明若 $x \in Q$满足 $x^p \in pQ$，则 $\frac{x}{p^{1/p}} \in P[\frac{1}{g}]$属于 Q；或者说，对任意 α、$\beta \in I$，都有 $\alpha\beta\frac{x}{p^{1/p}} \in \iota(P)$。由于 $x \in Q$和 $x^p \in pQ$，存在 a、$b \in P$使得 $\alpha x = \iota(a)$ 且 $(\alpha x)^p = p\iota(b)$。于是 $\beta^p(a^p - pb)$ $= 0$ （因为 $a^p - pb \in$ 属于 $\ker(\iota)$，且 I 湮灭 $\ker(\iota)$），故 $(\beta a)^p \in pP$。由于 P在 $P[\frac{1}{p}]$中是 p-闭的，这迫使 $\beta a \in p^{1/p}P$且 $\alpha\beta\frac{x}{p^{1/p}} = \iota(\frac{\beta a}{p^{1/p}}) \in \iota(P)$，从而得出结论。

□

引理 7.3。 — 态射 $\theta_Q\colon \ Q^\natural \to Q$ 是单射，且 $(g^{p^{-\infty}})$ 湮灭其余核。因此， $Q = g^{-1/p^\infty}Q^\natural \subset Q^\natural[\frac{1}{g}]$，并且 $Q^\natural$无 g-挠。

证明。 — 仍记 $R = Q^\natural$。我们来证明 $\theta_Q\colon R \to Q$ 是单射，特别是 g 不是 R中的零因子。由于根据上面的命题， R 和 Q 均无 p-挠且是 p-完备的，只需证明 $R/p \simeq Q^\flat/p^\flat \to Q/p$是单射；这可由 Frobenius $Q/p^{1/p} \to Q/p$的单射性推出，参见引理 7.2。由于 $\iota\colon P \to Q$ 在 g^{1/p^∞} 框架下是几乎同构，且可分解为 $P \to R \to Q$，要得出结论，只需证明 $P \to R$ 是几乎同构，或者说，证明 $\iota^\flat\colon P^\flat \to Q^\flat$也是几乎同构，这显然成立。 □

引理 7.4. — 有理数域代数 $B := Q^\natural[\frac{1}{p}]$具有完美类巴拿赫代数结构，且无有理数域挠，使得 $g^{-1/p^\infty}B^0 = Q$，尤其是 $B[\frac{1}{g}] = Q[\frac{1}{g}] \simeq P[\frac{1}{g}]$。

证明。——根据命题 3.5，代数 $Q_*^\natural := p^{-1/p^\infty}Q^\natural$ 是完美类的，因此$B := Q^\natural[\frac{1}{p}]$具有一种 K-完美拟完备巴拿赫代数结构，且无 g-挠，使得 $B^0 = Q_*^\natural$。由于 $p \mid g$ 和 $Q = g^{-1/p^\infty}Q^\natural$ （引理 7.3），我们得到

$$g^{-1/p^\infty}B^0 = g^{-1/p^\infty}Q_*^\natural = g^{-1/p^\infty}Q^\natural = Q,$$

59. 单射性显然；若 $(x_n)_{n\geq 0} \in \varprojlim_{\cdot g_n} \iota(P)$，则序列 $(g^{-1/p^n}x_n)_{n\geq 0}$ 在$P[\frac{1}{g}]$中是常值序列，其值 x按定义属于 Q，且 $\alpha(x) = (x_n)_{n\geq 0}$。

由此即可得出结论。 □

现在让我们回到命题 7.1 的证明。根据引理 7.4 ，可以在 $B := Q^\natural[\frac{1}{p}]$ 上赋予一种 K-完美拟完备巴拿赫代数结构，使其无 g 挠，且满足 $g^{-1/p^\infty}B^0 = Q$，特别是 $B[\frac{1}{g}] = Q[\frac{1}{g}] \simeq P[\frac{1}{g}]$。由于 $A \to A_1$ 在反转 g 后是 étale 的，代数 $C = A_1 \otimes_A B[\frac{1}{g}] = A_1 \otimes_A Q[\frac{1}{g}]$ 是 $B[\frac{1}{g}]$ 上有限、étale 且忠实平坦的。Abhyankar 完美化引理 (60) 表明，F (A') 在模 p 意义下对 B^0 几乎忠实平坦，因此在模 p 意义下对 P 也几乎忠实平坦（因为在 g^{1/p^∞} 的框架下， B^0 和 P 几乎同构），并且态射 $\mathrm{P}(A_1) = \mathrm{F}(A_1)^\natural \to \mathrm{F}(A_1)$ 是单射，其余核被 $(g^{p^{-\infty}})$ 消灭。由此即可得出结论。

7.2. 命题6.14的新证明

命题 7.1和 André 平坦性引理提供了命题 (61) 的新证明6.14。如上一节所述，这通过 Gabber 构造蕴含定理 6.18。

设 $A \in \mathrm{CLI}_p$，并设 $(x_1, \ldots, x_d)$ 为一个参数系，其中 $x_1 = p$。 $W(k)$-代数之间的态射 $A_0 := W(k)[[T_2, \ldots, T_d]] \to A, T_i \mapsto x_i$ 是有限且单射的。取 $g \in pA_0 \setminus \{0\}$ 使得 $A_0[\frac{1}{g}] \to A[\frac{1}{g}]$ 是 étale 的，并设 $P \in \mathrm{Perf}^{\mathrm{tf}}_{K^0}$ 是一个忠实平坦的 A_0-代数模 p 于 A_0，其中 g 变为 p-强（参见定理 6.6 和 4.3；定理 4.1 也可以）。

引理 7.5。— 序列 $(x_1, \ldots, x_d)$ 在 P 中是正则且几乎正则的（在 g^{1/p^∞}的框架下），并且 g 在 P 中的像不为零。

证明。— 若 g 在 P 中的像为零，那么对任意 n，它模 p^n 后也为零；然而 $A_0/p^n \to P/p^n$ 是忠实平坦的，因此 $g \in \cap_{n\geq 1} p^n A_0 = \{0\}$，这与 $g \in A_0 \setminus \{0\}$ 矛盾。其次，由于 P 模 p 后在 A_0 和 $x_1 = p$ 上忠实平坦，该序列在 P 中是正则的。接下来还需说明为什么包含映射 $(g^{p^{-\infty}})P \subset (x_1, \ldots, x_d)P$ 不可能成立。若它成立，则对任意 k，都有 $g \in (x_1, \ldots, x_d)^k P$；又由于对任意 n， P/p^n 在 A_0/p^n 上忠实平坦，这将推出$g \in \bigcap_k (x_1, \ldots, x_d)^k$，进而由 Krull 交定理得到 $g = 0$。 □

应用命题 7.1 于恒等态射 $A_0 \to A_0$，取 $A_1 = A$ ，可得到一个 P-完美拟代数 $\mathcal{P}(A)$ ，它模 p 在 P上几乎忠实平坦，其中 g 是非零因子，且它嵌入如下交换图中

$$\begin{array}{ccc} A_0 & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ P & \longrightarrow & g^{-1/p^\infty}\mathrm{P}(A) \end{array}$$

代数 $\mathrm{e}\,\mathcal{P}(A)$ 响应命题6.14 所提出的要求，借助下述引理 :

60. 注意，考虑到上面的讨论，按照定理 $\mathcal{F}(A') = \tilde{C}^0$ 的记号，有 5.3。61. 事实上，这是该结果的第一个证明，由 André 提出（2018b）。

引理 7.6。— 设 R 是一个无 p-挠环， $g \in R$ 是一个 p-强元素，且 $x = (x_1、\ldots\ldots、x_d)$ 是 R 中的一个序列，其中 $x_1 = p$。如果 x 在 R 中（在 g^{1/p^∞} 框架下）几乎正则，那么在任意满足以下条件的 R-代数 S 中，它仍然几乎正则：该代数在模 p 的意义下是 R 上几乎忠实平坦的。

证明。——设 $I = (g^{p^{-\infty}}) \subset R$。由于 $S/(x_1, \ldots, x_d)$ 在 $R/(x_1, \ldots, x_d)$ 上几乎忠实平坦（因为 $x_1 = p$），态射 $R/(x_1, \ldots, x_d) \to S/(x_1, \ldots, x_d)$ 几乎单射，因此 $S/(x_1, \ldots, x_d)$ 并非几乎为零。为了证明 I 湮灭 $(x_1,\ldots,x_i)S : x_{i+1}S/(x_1,\ldots,x_i)S$，可以假设 $i > 0$，因为 S 没有 p-挠。记 $\bar{R} := R/p$，$\bar{S} := S/p$。只需证明 湮灭 $(x_2,\ldots,x_i)\bar{S} : x_{i+1}\bar{S}/(x_2,\ldots,x_i)\bar{S}$。由 在 $\bar{R}$ 上的几乎平坦性可得一个几乎同构[62]

$$(x_2, \ldots, x_i)\bar{S} : x_{i+1}\bar{S} \simeq ((x_2, \ldots, x_i)\bar{R} : x_{i+1}\bar{R})\bar{S},$$

由此即可得出结论。 □

参考文献

Yves André（2018a）. « 完美胚 Abhyankar 引理 », 高等科学研究所数学出版物, **127**, 第 1-70 页. (2018b). « 直接因子猜想 », 高等科学研究所数学出版物,**127**, 第 71-93 页. (2018c). « 完美拟空间与同调猜想 », 载于：国际数学家大会论文集, *2018*年国际数学家大会，里约热内卢，巴西，*2018*年*8*月*1*日至*9*日。第二卷。特邀报告。新泽西州哈肯萨克：世界科学出版社；里约热内卢：巴西数学会（SBM），第 277-289 页. (2020). « Cohen–Macaulay 代数的弱函子性 », 美国数学学会杂志, **33**(2), 第 363-380 页. Yves André 与 Luisa Fiorot（2022）. « 仿射概形上的典范拓扑、fpqc 拓扑与有限拓扑：研究现状 », 比萨高等师范学院年刊，科学类（第*5*辑），**23**(1), 第 81-114 页. Wolfgang Bartenwerfer（1976）. « 非阿基米德情形下的第一个黎曼可去奇点定理 », 纯粹与应用数学杂志, **286/287**, 第 144-163 页. Jaap Bartijn 与 Jan R. Strooker（1983）. 单项式修改. Paul Dubreil 与 Marie-Paule Malliavin 代数研讨班，第35届，论文集，巴黎，1982，数学讲义 1029，192-217（1983）. Bhargav Bhatt（2012）. « 正特征下的导出劈裂体 », 组合数学,**148**(6), 第 1757-1786 页。

62. 只需与 S 正合列作张量积

$$0 \to (x_2, \ldots, x_i) : x_{i+1}\bar{R} \to \bar{R} \to \bar{R}/(x_2, \ldots, x_i).$$

———（2014a）. « 几乎直和项 », 《名古屋数学杂志》, 214, 第 195-204 页. (2014b). « 小型 Cohen–Macaulay 代数不存在 », 《代数杂志》, 411, 第 1-11 页. (2018). « 关于直和项猜想及其导出变体 », 《数学发明》, 212 (2), 第 297-317 页. (2020). « 绝对整闭包的 Cohen–Macaulay性 ». arXiv. 网址：https://arxiv.org/abs/2008.08070. Bhargav Bhatt、Srikanth B. Iyengar 与 Linquan Ma（2019）. « 正则环与完美（拟）代数 », 《代数通讯》, 47 (6), 第 2367-2383 页. Bhargav Bhatt 与 Jacob Lurie（2023）. « 一个 p-adic Riemann–Hilbert 函子：$\mathbb{Z}/p^n$ 系数 ». 撰写中. Bhargav Bhatt、Matthew Morrow 与 Peter Scholze（2018）. « 整数 p-adic Hodge 理论 », 高等科学研究所数学出版物, 128, 第 219-397 页. Bhargav Bhatt 与 Peter Scholze（2022）. « 棱镜与棱镜上同调 », 《数学年刊》（第2辑）, 196 (3), 第 1135-1275 页. Kęstutis Česnavičius（2021）. « 诺特概形的 Macaulay化 », 《杜克数学杂志》, 170 (7), 第 1419-1455 页. Kęstutis Česnavičius 与 Peter Scholze（2019）. « 平坦上同调的纯性 ». 预印本. 网址：https://arxiv.org/abs/1912.10932. Pierre Colmez （2002）. « 有限维 Banach 空间 », 《朱西厄数学研究所杂志》, 1 (3), 第 331-439 页. Pierre Colmez 与 Jean-Marc Fontaine（2000）. « p-adic 半稳定表示的构造 », 《数学发明》, 140 (1), 第 1-43 页. Dimitri Dine（2022）. « 拓扑谱与完美拟Tate环 », 《代数与数论》, 16 (6), 第 1463-1500 页. Sankar P. Dutta（1987）. « 关于典范元素猜想 », 美国数学会汇刊, 299, 第 803-811 页. E. Graham Evans 与 Phillip Griffith（1981）. « 合冲问题 », 《数学年刊》（第2辑）, 114, 第 323-333 页. Gerd Faltings（1988）. « p-adic Hodge 理论 », 美国数学学会杂志, 1 (1), 第 255-299 页. (2002). « 几乎 étale 扩张 », 载于： p-adic 上同调及算术应用（II）. 第 279 卷 . Astérisque. 巴黎：法国数学会，第 185-270 页 . Jean-Marc Fontaine（2013）. « 完美体、几乎纯性与单值-权重[——据 Peter Scholze] », 载于：布尔巴基讨论班. 第二卷，2011/2012. 报告 1043–1058. Astérisque 352. 巴黎：法国数学会（SMF），509-534，例. Ofer Gabber 与 Lorenzo Ramero（2003）. 几乎环理论. 第 1800 卷. 数学讲义. 柏林：施普林格. (2018). « 几乎环与完美拟空间 ». 预印本. 网址：https://pro.univ

———

Raymond Heitmann（2002）. « 三维情形下的直和项猜想. »《数学年刊》（2），156（2），第 695-712 页。Raymond Heitmann 和 Linquan Ma（2018）. « 大 Cohen–Macaulay 代数与混合特征下 Tor 映射的消失猜想》，《代数与数论》，12（7），第 1659-1674 页。Melvin Hochster（1973）. « 正则环整扩张所产生的收缩理想》，《名古屋数学杂志》，51，第 25-43 页。（1975）.《交换环上模的同调理论专题》。第 24 卷。《数学区域会议丛书》。美国数学学会（AMS），普罗维登斯，罗得岛州。（1977）. « 优良诺特环中的循环纯性与纯性》，《美国数学会汇刊》，231，第 463-488 页。（1979）. « 大、小 Cohen-Macaulay 模》。载于：《模论》（美国数学会特别会议论文集，华盛顿大学，西雅图，华盛顿州，1977）。第 700 卷。《数学讲义》。施普林格，柏林，第 119-142 页。（1983）. « 局部上同调模中的典范元素与直和项猜想》，《代数杂志》，84，第 503-553 页。（1994）. « 坚实闭包»，载于：《交换代数：齐次关系、重数与双有理代数》（马萨诸塞州南哈德利，1992）。第 159 卷。《当代数学》。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，第 103-172 页。（2002）. « 通过 Heitmann 定理构造三维情形下的大 Cohen–Macaulay 代数。»《代数杂志》，254（2），第 395-408 页。（2007）. « 新旧同调猜想»，《伊利诺伊数学杂志》，51（1），第 151-169 页。Melvin Hochster 和 Craig Huneke（1992）. « 无限整扩张与大 Cohen–Macaulay 代数》，《数学年刊》（2），135（1），第 53-89 页。（1995）. « 大 Cohen–Macaulay 代数存在性的应用»，《数学进展》，113（1），第 45-117 页。Craig Huneke 和 Gennady Lyubeznik（2007）. « 正特征下的绝对整闭包»，《数学进展》，210（2），第 498-504 页。Kiran S. Kedlaya 和 Ruochuan Liu（2015）. 相对 p-进 Hodge 理论：基础。第 371 卷。Astérisque。巴黎：法国数学会（SMF）。Sándor J. Kovács（2000）. « 有理奇点的刻画»，《杜克数学杂志》，102（2），第 187-191 页。Ernst Kunz（1969）. « 特征为 p 的正则局部环的刻画»，《美国数学杂志》，91，第 772-784 页。Linquan Ma（2021）. « 通过平坦性引理给出直和项定理的简短证明》。网址：https://www.math.purdue.edu/~ma326/DSC.pdf。Linquan Ma 和 Karl Schwede（2018）. « 正则环中的完美拟空间乘子理想/测试理想及符号幂的界»，《数学发明》，214（2），第 913-955 页。

———(2021）. « 通过完美类大 Cohen–Macaulay 代数研究混合特征下的奇点》，《杜克数学杂志》，170（13），第 2815-2890 页。Linquan Ma、Karl Schwede、Kevin Tucker、Joe Waldron 和 Jakub Witaszek（2022）. « 混合特征下伴随理想与纯对数终端奇点的类比》，《代数几何杂志》，31，第 497-559 页。Matthew Morrow（2019）. « Fargues-Fontaine 曲线与钻石 [，据 Fargues、Fontaine 和 Scholze] 》，载于：《布尔巴基讨论班》。2017/2018 年卷。第 1136–1150 讲。Astérisque 414。巴黎：法国数学会（SMF），第 533-572 页，例。大井武雄（1996）. « 直和项猜想与平坦性的下降》，《美国数学会会刊》，124（7），第 1967-1968 页。Jean-Pierre Olivier（1973）. « 纯映射下若干初等性质的下降》，《巴西科学院年刊》，45，第 17-33 页。Christian Peskine 和 Lucien Szpiro（1972）. « 有限投射维数与局部上同调。应用于证明 M. Auslander、H. Bass 和 A. Grothendieck 的猜想》，高等科学研究所数学出版物，42，第 47-119 页。Michel Raynaud 和 Laurent Gruson（1971年）. « 平坦性与投射性的判据。模的“平坦化”技术》，《数学发明》，13，第 1-89 页。Paul Roberts（1987）. « 交定理》，《科学院报告》，巴黎，I 辑，304，第 177-180 页。（1992）. « 同调猜想》，载于：《交换代数与代数几何中的自由分解》（桑丹斯，犹他州，1990）。第 2 卷。《数学研究札记》。Jones 与 Bartlett，波士顿，马萨诸塞州，第 121-132 页。（2008）. « 混合特征环的根闭包》。预印本。网址：https://arxiv.org/abs/0810.0215。Peter Scholze（2012）. « 完美拟空间》，高等科学研究所数学出版物，116，第 245-313 页。（2013）. « 刚性解析簇的 p-进 Hodge 理论》，《数学论坛 Pi》，1，e1，77。（2015）. « 局部对称簇上同调中的挠》，《数学年刊》（2），182（3），第 945-1066 页。下本一真（2018）. « 通过 André 定理构造整完美类大 Cohen–Macaulay 代数》，《数学年刊》，372（3-4），第 1167-1188 页。

Gabriel Dospinescu UMPA，里昂高等师范学院，法国国家科学研究中心电子邮件：gabriel.dospinescu@ens-lyon.fr