arXiv:2302.00961v1 [math.OC] 2 Feb 2023

通过弱尖锐性与线性条件化实现归一化纳什均衡的有限收敛判据

Asrifa Sultana†, Shivani Valecha*†

摘要。广义纳什均衡问题在若干复杂经济问题的建模与分析中发挥着重要作用。本文研究由 Rosen 提出的联合凸广义纳什博弈。我们探讨与这类博弈相关的两个重要方面：归一化纳什均衡集合的弱尖锐性，以及正则化 Nikaido-Isoda 函数的线性条件化技术。首先，我们定义归一化纳什均衡集合的弱尖锐性，并以正则化间隙函数刻画这一性质。此外，我们给出充分条件，在这些条件下，正则化 Nikaido-Isoda 函数的线性条件化判据等价于归一化纳什均衡集合的弱尖锐性。我们证明，在弱尖锐性和线性条件化假设下，用于求解联合凸广义纳什博弈中归一化纳什均衡的迭代算法能够有限步终止。最后，作为一项应用，我们估算求解某类特定联合凸广义纳什博弈所需的步数。

关键词。非合作博弈；联合凸广义纳什均衡问题；变分不等式；归一化纳什均衡；Nikaido-Isoda 函数。
数学主题分类。65K10, 90C30, 91A10

1 引言

John F. Nash 提出的纳什均衡概念，最初是为由有限数量参与者组成的非合作博弈定义的 [1]。在纳什均衡问题（NEP）中，假设每位参与者的可行策略集是固定的。后来，Arrow-Debreu [2] 扩展了 NEP，并提出了广义纳什均衡问题（GNEP）的概念。在这类问题中，参与者的策略集可以取决于对手所选择的策略。近年来，GNEP 因其在电力市场 [3], 、微观经济学 [4], 、环境可持续性问题 [5] 及许多其他领域的适用性而受到广泛关注。关于 GNEP 的历史背景及该领域近期发展的简要

*通讯作者。电子邮件- shivaniv@iitbhilai.ac.in
†印度理工学院比莱分校数学系，印度赖布尔 492015。

介绍，可参阅 Facchinei-Kanzow [6] 的一篇文章。

我们回顾一下 [2] 中广义纳什均衡问题的正式定义。考虑集合$\{1, 2, \cdots N\}$，其中包含参与非合作博弈的 N 个参与者。假设参与者 i 控制策略向量 $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$，其中 $\sum_{i=1}^{N} n_i = n$。假设向量 $x = (x_i)_{i=1}^{N} = (x_{-i}, x_i) \in \mathbb{R}^n$ 表示所有N个参与者的策略，其中 $x_{-i} \in \mathbb{R}^{n-n_i}$ 是除 i 之外所有参与者的策略向量。对于对手的任意策略向量 x_{-i}，参与者 i 的可行策略集受限于 $K_i(x_{-i}) \subseteq \mathbb{R}^{n_i}$，并且他打算选择策略 $x_i \in K_i(x_{-i})$，作为下列问题 $P_i(x_{-i})$ 的解：

$$P_i(x_{-i}): \quad \min_{z_i} \ \theta_i(x_{-i}, z_i) \ \text{ subject to } z_i \in K_i(x_{-i}), \tag{1.1}$$

其中 $\theta_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 表示参与者 i 的损失函数。如果符号$Sol_i(x_{-i})$表示 $P_i(x_{-i})$ 的解集，那么，若对每个 $i = 1, 2, \cdots N$ 都有 $\bar{x}_i \in Sol_i(\bar{x}_{-i})$，则向量 $\bar{x} = (\bar{x})_{i=1}^{N}$ 称为广义纳什均衡。

在 Rosen 的一项早期研究中，[7], 讨论了一类重要的广义纳什均衡问题，近期被称为“联合凸广义纳什均衡问题” [8]。对于给定的对手策略向量 x_{-i}，联合凸广义纳什均衡问题中参与者 i 的可行策略集 $K_i(x_{-i})$ 表示为：

$$K_i(x_{-i}) = \{x_i \text{ in } \mathbb{R}^{n_i} \mid (x_{-i}, x_i) \text{ lies in } X\}, \tag{1.2}$$

其中，$X \subseteq \mathbb{R}^n$ 是闭且凸的。

在 [8], 正式引入联合凸广义纳什均衡问题之前，早期文献通过拟变分不等式（QVI）问题 [6, 9] 对经典广义纳什均衡问题进行了刻画。然而，这种刻画并不够实用，因为与变分不等式（VI）问题相比，QVI 领域尚未形成完善的求解技术（更多细节参见 [9] ）。我们回顾一下，对于给定的映射 $F: X \to \mathbb{R}^n$（其中 $X \subseteq \mathbb{R}^n$），变分不等式问题 $VI(F, X)$ 的目标是确定满足以下条件的 $x^* \in X$：

$$\langle F(x^*), y - x^* \rangle \geq 0 \text{ for each } y \in X.$$

在下面的结果中，Facchinei 等人 [8] 指出，在适当条件下，联合凸广义纳什均衡问题的某些解可以通过求解一个相关的 VI 问题获得，

定理 1.1. *[8]* 假设 $X \subset \mathbb{R}^n$ 非空、凸且闭。对于任意i，假设函数 $\theta_i: \mathbb{R}^{n-n_i} \times \mathbb{R}^{n_i} \to \mathbb{R}$ 连续可微，且对于每个 $x_{-i} \in \mathbb{R}^{n-n_i}$，$\theta_i(x_{-i}, .)$ 是一个凸函数。那么，任何求解$VI(F, X)$ 的 $\bar{x} \in X$ 都是联合凸广义纳什均衡问题的一个均衡，其中 $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 被视为 $F(x) = \prod_{i=1}^{N} (\nabla_{x_i} \theta_i(x))$。

这里，$(\nabla_{x_i} \theta_i(x))$ 表示函数 θ_i 关于变量 x_i 的偏导数。根据定理 1.1，联合凸广义纳什均衡问题的任何均衡不一定

都必然满足相应的变分不等式$VI(F,X)$。事实上，通过求解 $VI(F,X)$ 得到的联合凸广义纳什均衡问题的均衡点，特称为规范化纳什均衡（NNE） [8, 10]。过去十年间，人们提出了若干种迭代方法，用于求解联合凸广义纳什均衡问题的规范化纳什均衡（例如参见 [6, 10–12]）。因此，研究这些迭代方法在何种条件下能够经过有限步收敛，是一个重要方面。

现有文献中，可以找到多种关于用于求解优化问题 [13–15], 变分不等式问题 [16, 17], 均衡问题 [18, 19] 和多准则优化 [20]的迭代方法有限终止的研究途径。沿着这一思路，Burke-Ferris [14] 研究了弱尖锐极小值的概念，以探讨用于求解解集非唯一的优化问题的算法能否有限终止。这一概念拓展了 [13, 15] 中针对具有唯一解的优化问题所研究的尖锐极小值概念。随后，Patricksson 在 [16] 以及 Marcotte-Zhu 在 [17] 研究了变分不等式解集的弱尖锐性，以推导用于求解变分不等式的迭代方法的有限收敛结果。另一方面，Moudafi [18] 提出了用于均衡问题的θ-条件准则，该准则拓展并统一了若干现有概念，包括优化问题中的弱尖锐极小值。最近，Nguyen 等人 [19] 为均衡问题的解集引入了弱尖锐性，该性质等价于 1-条件化（或线性条件化）准则。此外，[18, 19] 中的作者证明了用于求解均衡问题的一种迭代方法能够有限终止。据我们所知，目前尚无关于利用弱尖锐性或线性条件准则求解广义纳什均衡问题的迭代方法有限终止性的详细研究。

本文旨在向读者阐明联合凸广义纳什均衡问题有限收敛分析中的两个重要方面：归一化纳什均衡集合的弱尖锐性，以及正则化 Nikaido-Isoda 函数的线性条件化技术。具体而言，我们首先正式定义归一化纳什均衡的弱尖锐性，随后给出其关于正则化间隙函数（用于确定 NNE）的刻画。此外，我们还给出了适当条件，在这些条件下，正则化 Nikaido-Isoda 函数的线性条件化等价于归一化纳什均衡集合的弱尖锐性。作为应用，我们获得了充分条件，保证采用近端点算法 [20, 21] 计算的任意序列经过有限次迭代后收敛到一个解联合凸广义纳什均衡问题的均衡。最后，我们将所得结果用于估计确定由 N 个参与者组成的特定类型博弈的 NNE 所需的步数，其中假设每位参与者的成本函数均为二次函数。

本文按以下顺序组织：第2节回顾后文将用到的基本定义和有用符号。第3节介绍归一化纳什均衡集合的弱尖锐性，并给出其关于正则化间隙函数的刻画。在第

4节，我们首先给出充分条件，在这些条件下，正则化 Nikaido-Isoda 函数的线性条件化等价于 NNE 集合的弱尖锐性。此外，在第5节中，我们利用这一等价关系证明，用于确定 NNE 的迭代算法能够有限终止。最后，我们运用所得结果估算确定某些特定类型博弈的归一化纳什均衡所需的步数。

2 预备知识与记号

对于任意非空集合 $X \subseteq \mathbb{R}^n$，集合 X° 表示极集（参见 [22]），

$$X^\circ = \{x^* \in \mathbb{R}^n | \, \langle x^*, z\rangle \leq 0 \text{ for any } z \in X\}.$$

若 X 为空集，则 $X^\circ = \mathbb{R}^n$。集合 $N_X(x)$ 表示在任意 $x \in \mathbb{R}^n$ 处与 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ 相对应的法锥 [22],

$$N_X(x) = (X - x)^\circ = \begin{cases} \{x^* \in \mathbb{R}^n | \, \langle x^*, z - x\rangle \leq 0, \ \forall \ z \in X\}, & \text{if } x \in \mathbb{R}^n \\ \emptyset, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

而在任意 x 处与 X 相对应的切锥 [22] 为 $T_X(x) = [N_X(x)]^\circ$。或者,

$$T_X(x) = \{\, h \in \mathbb{R}^n | \text{ for any } t_k \downarrow 0, \exists \ h_k \to h \text{ s.t. } x + t_k h_k \in X \text{ for any } k\}.$$

假设 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ 是非空闭凸集，则任意 $z \in \mathbb{R}^n$ 在 X 上的投影为,

$$P_X(z) = \{x \in X | \, \|z - x\| = \inf_{w \in X} \|z - w\|\}.$$

双函数 $\psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 称为在 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ 上伪单调的 [19, 23]，如果对于每一对 x、$z \in X$，只要 $\psi(z, x) \geq 0$，就有 $\psi(x, z) \leq 0$。假设 $X^* \subset X$，则若对于任意 $z \in X^*$ 和 $x \in X$，只要 $\psi(z, x) \geq 0$，就有 $\psi(x, z) \leq 0$，我们称 ψ 关于 X 在集合 X^* 上伪单调（将 [21, Definition 1.2] 中假设的单调性条件重新命名）。若 $-\psi$ 伪单调，则称 ψ 为负伪单调。

本文中，我们对每个参与者的可行策略映射和损失函数作出如下假设 i 。

(A1) 策略映射 K_i 按照式 (1.2) 定义，其中 $X \neq \emptyset$ 是 $\mathbb{R}^n$中的闭凸集;

(A2) 损失函数 $\theta_i : \mathbb{R}^{n-n_i} \times \mathbb{R}^{n_i} \to \mathbb{R}$ 连续可微，并且对于每个 $x_{-i} \in \mathbb{R}^{n-n_i}$，$\theta_i$ 关于 x_i 是凸的。

此外，我们假设 $X^* \subset X$ 表示给定广义纳什均衡问题的 NNE 集。

让我们回顾一下 Nikaido-Isoda（NI）函数 $\psi : X \times X \to \mathbb{R}$ （参见[24]），

$$\psi(x, y) = \sum_{i=1}^{N} \big[\theta_i(x_{-i}, x_i) - \theta_i(x_{-i}, y_i)\big].$$

用于确定 NNE 的间隙函数 $V: X \to \mathbb{R}$ 可通过使用 NI函数构造如下（参见 [6]），

$$V(x) = \sup_{y \in X} \psi(x, y). \tag{2.1}$$

文献 [10] 注意到，对于任意给定的 $x \in X$，(2.1) 中的上确界不一定在唯一的 $y \in X$ 处取得，因此间隙函数 V不可微。考虑到 a 是任意正实数，文献 [10] 引入了正则化间隙函数 V_a 来确定 NNE；在一定条件下，该函数在 X 的每一点均可微。函数 V_a 定义为 $V_a(x) = \max_{y \in X} \psi_a(x, y)$，其中 ψ_a: $X \times X \to \mathbb{R}$是正则化 NI 函数 [10],

$$\psi_a(x, y) = \sum_{i=1}^{N} \left[\theta_i(x_{-i}, x_i) - \theta_i(x_{-i}, y_i) - \frac{a}{2} \|x_i - y_i\|^2 \right].$$

现在，我们给出正则化 NI 函数 ψ_a 在解集 X^*上成为负伪单调函数的充分条件。为此，我们对 [21, 定理 2.2]作出修改，得到以下结果。

引理 2.1. *[21]* 设 $X^* \subseteq X$ 为归一化纳什均衡的集合。假设 $\psi_a : X \times X \to \mathbb{R}$ 是正则化 NI 函数，且对于任意 $y \in X$， $\psi_a(., y)$ 是凸函数。那么，

$$\psi_a(x, x^*) \geq 0, \ \textit{for each } x^* \textit{ in } X^* \textit{ and } x \textit{ in } X.$$

注2.1. 可以推知，若对任意 $y \in X$， $\psi_a(., y)$ 都是凸函数，则 ψ_a 在集合 X^* 上关于 X 是负伪单调的。事实上，对于每一对 $x^* \in X^*, x \in X$，根据定义 3.*1]*，我们已经知道 $\psi_a(x^*, x) \leq 0$。此外，根据上述引理，若假设对任意 $y \in X$， $\psi_a(., y)$ 都是凸函数，则可得 $\psi_a(x, x^*) \geq 0$。

假设 $V_a : X \to \mathbb{R}$ 被视为 $V_a(x) = \max_{y \in X} \psi_a(x, y)$，且对于给定的 x ， $y^a(x)$ 是 $\psi_a(x, y)$ 在 X 中的唯一最大化点。那么，Heusinger-Kanzow [10] 给出的以下结果表明，在满足某些条件时， V_a 是一个用于确定 NNE 的可微正则化间隙函数。

引理 2.2. *[10]* 假设假设 (A1) 和 (A2) 成立。那么我们可以得到以下结论，

a) $V_a(x) \geq 0$ *for each* $x \in X$*;*

b) x^* 是 NNE，当且仅当 $x^* \in X$ 满足 $V_a(x^*) = 0$;

c) V_a 连续可微可得，

$$\begin{aligned} \nabla V_a(x) = &\sum_{i=1}^{N} \left[\nabla \theta_i(x_{-i}, x_i) - \nabla \theta_i(x_{-i}, y_i^a(x)) \right] - a(x - y^a(x)) \\ &+ \left[\nabla_{x_1} \theta_1(x_{-1}, y_1^a(x)), \cdots, \nabla_{x_N} \theta_N(x_{-N}, y_N^a(x)) \right]^T. \end{aligned}$$

3 归一化纳什均衡的弱尖锐集

在 [14], 中，Burke-Ferris 首次提出弱尖锐极小值的概念，用以研究具有非唯一解的凸优化问题中若干迭代算法的有限收敛性。该概念扩展了尖锐极小值的概念；对于存在唯一解的优化问题， [13, 15] 对此进行了研究。设 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$ 是一个扩展实值函数。若存在 $\beta>0$ 满足下述条件，则集合 $Y^*\subset\mathbb{R}^n$ 称为最小化问题 $\min_{x\in Y} f(x)$ 的弱尖锐极小值集,

$$f(x)\geq f(x^*)+\beta\, d(x,Y^*),\ \forall\, x\in Y \text{ and } \forall\, x^*\in Y^*. \tag{3.1}$$

后来，Pactricksson [16] 和 Marcotte-Zhu [17] 研究了变分不等式问题解集的弱尖锐性。考虑 $X\subseteq\mathbb{R}^n$ 和一个映射$F:\ X\to\mathbb{R}^n$。那么，变分不等式问题 $VI(F,X)$ 对应于确定满足以下条件的 $x^*\in X$,

$$\langle F(x^*), y-x^*\rangle\geq 0 \text{ for each } y\in X.$$

根据 [16],, 如果存在某个正实数 β 使得以下条件成立，则 $VI(F,X)$ 的解集 X^* 具有弱尖锐性,

$$-F(x^*)+\beta B\subset\bigcap_{x\in X^*}[T_X(x)\cap N_{X^*}(x)]^\circ,\ \forall\, x^*\in X^*, \tag{3.2}$$

其中， B 表示 $\mathbb{R}^n$中的单位球。

根据定理 1.1，凸广义纳什均衡问题的归一化纳什均衡集就是变分不等式问题 $VI(F,X)$ 的解集，其中 F定义为 $F(x)=\prod_{i=1}^N(\nabla_{x_i}\theta_i(x))$。因此，我们仿照 Patricksson [16] 和 Marcotte-Zhu [17]，定义归一化纳什均衡集的弱尖锐性。

定义3.1. 设 $X^*\subseteq X$ 表示给定凸 $GNEP$的归一化纳什均衡集合。若存在某个 $\gamma>0$ 使得集合 X^*满足弱尖锐性性质，则

$$-\prod_{i=1}^N(\nabla_{x_i}\theta_i(x^*))+\gamma B\subseteq\bigcap_{x\in X^*}[T_X(x)\cap N_{X^*}(x)]^\circ,\ \forall\, x^*\in X^* \tag{3.3}$$

其中， B 表示 $\mathbb{R}^n$中的单位球。

在 [17], Marcotte-Zhu 给出了合适的条件，使得 $VI(F,X)$ 的解集满足弱尖锐性，当且仅当存在某个$\beta>0$ 满足,

$$G(y)\geq\beta d(y,X^*),\ \text{for any } y\in X \tag{3.4}$$

考虑到 G 表示对偶间隙函数,

$$G(y) = \sup_{w \in X} \langle F(w), y - w \rangle.$$

上述由 Marcotte-Zhu [17] 给出的不等式 (3.4) 促使我们研究：在什么充要条件下，可以用正则化间隙函数 V_a 来刻画 NNE 集合的弱尖锐性 V_a（定义见引理 2.2）。

定理 3.1. 假设 $\psi_a : X \times X \to \mathbb{R}$ 表示正则化 NI 函数，并且对于任意 $y \in X$，$\psi_a(., y)$ 是凸函数。那么，归一化纳什均衡 $X^* \subseteq X$ 的集合满足弱尖锐性，当且仅当存在满足以下条件的 $\gamma > 0$:

$$V_a(x) \geq \gamma \, d(x, X^*) \text{ for any } x \in X. \tag{A}$$

证明. 考虑函数 $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$，其定义为 $F(x) = \prod_{i=1}^{N} (\nabla_{x_i} \theta_i(x))$。我们旨在证明，若由 NNE 构成的集合 X^* 满足弱尖锐性，则 (A) 成立。根据 (3.3)，可得某个满足以下条件的 $\gamma > 0$：

$$-F(x^*) + \gamma b \in [T_X(x^*) \cap N_{X^*}(x^*)]^\circ \tag{3.5}$$

对于每个 b 属于 B 且 x^* 属于 X^*。

假设任意选取 x^* 属于 X^*，则可以证明，对于 x^*，包含关系 (3.5) 成立当且仅当,

$$\langle F(x^*), z \rangle \geq \gamma \|z\| \text{ for each } z \in T_X(x^*) \cap N_{X^*}(x^*). \tag{3.6}$$

显然，若已知包含关系 (3.5) 成立，则对每个 $b \in B$ 都可得到以下不等式,

$$\langle -F(x^*) + \gamma b, z \rangle \leq 0 \text{ for each } z \in T_X(x^*) \cap N_{X^*}(x^*)$$

现在，令 $b = \frac{z}{\|z\|}$，即可轻松推出 (3.6)。反过来，假设不等式 (3.6) 成立。那么对于所有 b 属于 B 且 z 属于 $T_X(x^*) \cap N_{X^*}(x^*)$，有

$$\langle -F(x^*) + \gamma b, z \rangle \leq -\langle F(x^*), z \rangle + \gamma \|z\| \leq 0$$

这表明，对于任意 $b \in B$，$-F(x^*) + \gamma b \in [T_X(x^*) \cap N_{X^*}(x^*)]^\circ$。

现在，根据 [10]，可以很容易地验证，如果对每个 $y \in X$，$\psi_a(., y)$都是凸函数，那么 V_a 就是凸函数。事实上，对每个 $x \in X$，由于 $\psi_a(x, .)$严格凹，我们总能得到唯一的最大化点。假设 $y^a(x)$表示当 $x \in X$时 $\psi_a(x, .)$的唯一最大化点。设 x、$w \in X$ 和$t \in [0, 1]$ 为任意值，那么假设 $tx + (1 - t)w = w_t$，可得:

$$\begin{aligned}
V_a(w_t) &= \max_{y \in X} \psi_a(w_t, y) \\
&= \psi_a(w_t, y^a(w_t)) \\
&\leq t\psi_a(x, y^a(w_t)) + (1 - t)\psi_a(w, y^a(w_t)) \\
&\leq t\psi_a(x, y^a(x)) + (1 - t)\psi_a(w, y^a(w)) \\
&= tV_a(x) + (1 - t)V_a(w).
\end{aligned}$$

由于根据引理 2.2，V_a 是连续可微函数，因此我们观察到，对于任意 $x^* \in X^*$，$\nabla V_a(x^*) = F(x^*)$。事实上，根据引理 2.2，我们已有：

$$\nabla V_a(x) = \sum_{i=1}^{N}[\nabla\theta_i(x_{-i}, x_i) - \nabla\theta_i(x_{-i}, y_i^a(x))] + [\nabla_{x_i}\theta_i(x_{-i}, y_i^a(x))]_{i=1}^N - a(x - y^a(x)) \tag{3.7}$$

对任意 $x \in X$。根据 [10, 命题 3.4], , 点 x^* 属于 NNE 集合 X^* 当且仅当 $x^* = y^a(x^*)$。因此，由方程（3.7）可得，

$$F(x^*) = \nabla V_a(x^*) \text{ for each } x^* \text{ in } X^*. \tag{3.8}$$

现在，设 $x \in X$ 任意。由于集合 X^* 是闭凸的，存在唯一的点 $x^* \in X^*$ 满足 $x^* = P_X(x)$ 和 $(x - x^*) \in T_X(x^*) \cap N_{X^*}(x^*)$。最后，利用函数 V_a 的凸性和可微性可得，

$$\begin{aligned} V_a(x) &\geq V_a(x^*) + \langle \nabla V_a(x^*), x - x^* \rangle \\ &= \langle F(x^*), x - x^* \rangle \\ &\geq \gamma \|x - x^*\| = \gamma d(x, X^*). \end{aligned}$$

由于 $V_a(x^*) = 0$（见引理 2.2），第二步中的等式由（3.8）成立，最后一个不等式由（3.6）成立。

反过来，设存在某个 $\gamma > 0$，使得给定的不等式（A）对 NNE 集合 X^* 成立。接下来，我们要证明 X^* 满足（3.2）。任取 $x^* \in X^*$，可知 $T_X(x^*) \cap N_{X^*}(x^*) = \{0\}$ 蕴含 $-F(x^*) + \gamma B \subset [T_X(x^*) \cap N_{X^*}(x^*)]^\circ$。设某个非零向量 s 属于 $T_X(x^*) \cap N_{X^*}(x^*)$，则 $\langle s, s\rangle > 0$，因而 $x^* + s \notin X^*$。这意味着存在一个超平面 $\mathcal{H}_s$，它经过点 x^*，且与 s 正交，并将 $x^* + s$ 与 X^* 分隔开。由于 $s \in T_X(x^*)$，对于任意满足 $x^* + t_k s_k \in X$ 的序列 $t_k \downarrow 0$，我们可以得到一个收敛至 s 的序列 s_k。此外，可以得到一个 $k \in \mathbb{N}$，使得对每个 $k > k$，$\mathcal{H}_s$ 都将 $x^* + t_k s_k$ 与 X^* 分隔开。因此，

$$d(x^* + t_k s_k, X^*) \geq d(x^* + t_k s_k, \mathcal{H}_s) = \frac{t_k \langle s, s_k\rangle}{\|s\|}, \ \forall\ k > \tilde{k}. \tag{3.9}$$

由于对于每个 x，$V_a(x) \geq \gamma d(x, X^*)$，且对于每个 x^*，$V_a(x^*) = 0$，根据不等式 (3.9)，我们可以得出以下条件成立，

$$\frac{V_a(x^* + t_k s_k) - V(x^*)}{t_k} \geq \gamma \frac{\langle s, s_k\rangle}{\|s\|}, \ \forall\ k > \tilde{k}.$$

现在，利用函数 V_a 的可微性，我们得到：对于任意 $0 \neq s \in T_X(x^*) \cap N_{X^*}(x^*)$，$\langle \nabla V_a(x^*)\ s\rangle \geq \gamma\|s\|$。最终，对于任意 $b \in B, s \in T_X(x^*) \cap N_{X^*}(x^*)$，$\langle \gamma b - \nabla V_a(x^*)\ s\rangle \leq 0$ 成立。结合方程（3.8），可得：

$$-F(x^*) + \gamma B \subseteq [T_X(x^*) \cap N_{X^*}(x^*)]^\circ \text{ for each } x^* \text{ in } X^*. \tag{3.10}$$

由于函数 V_a 是凸且可微的，根据引理 [25, Lemma 1]，我们注意到 ∇V_a 在 X^* 上为常数。因此，对于每个属于 X^* 的 x^*，存在某个 $C \in \mathbb{R}$，使得 $\nabla V_a(x^*) = C = F(x^*)$。最后可以观察到，$F$ 在 X^* 上为常数这一事实，连同包含关系 (3.10)，可推出 (3.3)。

□

注3.1. 我们注意到，Marcotte-Zhu *[17]*通过使用对偶间隙函数刻画了变分不等式问题的弱尖锐解集。此外，Liu-Wu*[26]* 在假设原始间隙函数为 Gateaux 可微的条件下，研究了以原始间隙函数表示的类似刻画。我们给出了用于确定 NNE 的正则化间隙函数的误差界；根据 *[10]*，该函数可微。类似地，考虑变分不等式问题的正则化原始间隙函数，无需任何可微性假设，也可以得到这类误差界。

4 线性条件正则化Nikaido-Isoda函数

Moudafi 在 [18]中提出了 θ-条件双函数的概念。利用这一概念，作者证明，在某些适当条件下，近端点方法经过有限步后可收敛于均衡问题的解。设 $X \times X \to \mathbb{R}$ 为定义在集合 $X \subseteq \mathbb{R}^n$上的双函数T。均衡问题旨在确定某个 $x^* \in X$，使得:

$$T(x^*, z) \geq 0, \text{ for every } z \in X.$$

假设 X^* 表示上述均衡问题的解集。那么，如果存在满足以下条件的 $\gamma > 0$，则称 T为某个 $\theta > 0$下的 θ-条件化 [18]：

$$-T(x, P_{X^*}(x)) \geq \gamma[d(x, X^*)]^\theta, \text{ for every } x \in X.$$

此外，如果 $\theta = 1$，则称 T 是线性条件化的。

根据 [10, 定义 3.1], ，我们知道，任意点 $x^* \in X$ 是 NNE，当且仅当:

$$-\psi_a(x^*, y) \geq 0, \text{ for every } y \in X. \tag{4.1}$$

因此，如果存在满足以下条件的某个 $\gamma > 0$，正则化 NI 函数便是线性条件化的:

$$\psi_a(x, P_{X^*}(x)) \geq \gamma d(x, X^*), \text{ for every } x \in X. \tag{4.2}$$

4.1 正则化 NI 函数的线性条件化与 NNE 集合弱尖锐性之间的关系

在以下结果中，我们给出保证正则化的 Nikaido-Isoda 函数 [18] 的线性条件化等价于 NNE 集合弱尖锐性的适当条件。

定理 4.1. 假设 $\psi_a : X \times X \to \mathbb{R}$ 表示正则化 NI 函数，并且对任意 $y \in X$， $\psi_a(.,y)$ 是凸函数。那么，由 NNE 构成的 $X^* \subset X$ 满足弱尖锐性，当且仅当 ψ_a 是线性条件化的。

证明. 假设 X^* 满足弱尖锐性。由 (3.3) 可得，

$$\gamma B - F(x^*) \subseteq [T_X(x^*) \cap N_{X^*}(x^*)]^\circ, \text{ for each } x^* \text{ in } X^*.$$

根据定理 3.1 的证明可知，对每个 $x^* \in X^*$， $F(x^*) = \nabla V_a(x^*)$。因此，我们得到

$$\gamma B - \nabla V_a(x^*) \subseteq [T_X(x^*) \cap N_{X^*}(x^*)]^\circ, \text{ for each } x^* \text{ in } X^*. \tag{4.3}$$

任取 X 中的点 x 。由于 X^* 是闭凸集，可以得到唯一的点 $x^* \in X^*$ ，使得 $P_{X^*}(x) = x^*$ 。

现在我们断言 ψ_a 是线性条件化的。事实上，考虑到 $P_{X^*}(x) = x$，这一断言显然成立。假设 $P_{X^*}(x) \neq x$，则由包含关系 (4.3) 以及 $(x - x^*) \in T_X(x^*) \cap N_{X^*}(x^*)$ 可得，

$$\left\langle \frac{\gamma(x - x^*)}{\|x - x^*\|} - \nabla V_a(x^*), x - x^* \right\rangle \leq 0.$$

由此进一步得到，

$$\gamma\|x - x^*\| - \langle \nabla V_a(x^*), x - x^* \rangle \leq 0. \tag{4.4}$$

根据 [10, 命题 3.4], ，任意点 x^* 属于 X^* 当且仅当 $x^* = y_a(x^*)$，其中 $y_a(x^*)$ 满足以下最大化问题，

$$V_a(x^*) = \max_{y \in X} \psi_a(x^*, y).$$

因此，根据 Danskin 定理 [9] ，对于任意 x^* ，若其属于 X^* ，则有，

$$\nabla V_a(x^*) = \nabla_x [\psi_a(x^*, y)]_{(y = y_a(x^*))}$$

其中， $\nabla_x \psi_a(x^*, y)$ 表示函数 ψ_a 关于 x 在点 $x = x^*$处的偏导数。现在，根据不等式 (4.4)，有，

$$\gamma d(x, X^*) \leq \langle \nabla_x \psi_a(x^*, x^*), x - x^* \rangle. \tag{4.5}$$

由于对每个 $y \in X$， $\psi_a(.,y)$ 都是凸函数，且 $\psi_a(x^*, x^*) = 0$，因此有，

$$\langle \nabla_x \psi_a(x^*, x^*), x - x^* \rangle \leq \psi_a(x, x^*). \tag{4.6}$$

最后，由不等式 (4.5) 和 (4.6) 可得，

$$\psi_a(x, P_{X^*}(x)) \geq \gamma d(x, X^*).$$

反过来，我们假设 ψ_a 是线性条件化的。我们证明 X^* 满足弱锐性判据。设 $x \in X$ 任意。由于对于每个 x 属于X，都存在唯一的向量 $y_a(x)$ 满足，

$$V_a(x) = \max_{y \in X} \psi_a(x, y).$$

因此，由于（4.2），$V_a(x) = \psi_a(x, y_a(x)) \geq \psi_a(x, P_{X^*}(x)) \geq \gamma d(x, X^*)$。最后，利用定理 3.1，我们确认 X^* 满足弱尖锐条件。

□

注 4.1。*[19]*中的作者研究了一个涉及双函数 F 的均衡问题。根据 *[19,* 注 *3],*，为了确保当均衡问题的解集满足弱尖锐条件时，F 是线性条件化的，双函数 F 必须具有单调性。然而，在定理 4.1 中，我们证明了正则化 NI 函数 ψ_a 的线性条件化等价于 NNE 集合的弱尖锐性，其中 ψ_a 不一定是单调的。事实上，正则化 NI 函数 ψ_a 在集合 X 上甚至不是伪单调的。根据引理 2.1，X^* 相对于 X 在解集上是负伪单调的（有关双函数各种单调性性质的更多信息，请参见 *[23]*）。

5 迭代算法的有限终止

现在，我们证明：如果 NNE 集满足弱尖锐性（等价地，正则化 NI 函数是线性条件化的），则近端点算法 [18, 21] 会在有限步后终止。为此，我们应用前几节推导出的结果。

根据 (4.1)，可以使用近端点算法 (PPA) 来确定 NNE 集。任意选取 $x_0 \in X$，则由 PPA 生成的序列$\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ 为 [18, 21],

$$\psi_a(x_{k+1}, z) - \frac{1}{r_k}\langle z - x_{k+1}, x_{k+1} - x_k \rangle \leq 0, \text{ for each } z \in X, \tag{5.1}$$

其中，序列 $\{r_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ 对每个 k 都满足 $r_k > 0$，且 $\liminf_{k \to \infty} r_k = r > 0$。

定理 5.1. 假设对于任意 $y \in X$，$\psi_a(., y)$ 都是凸函数。那么，对于由 (5.1) 生成的每个序列 $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$，若满足以下任一条件，则可得到某个 $k_\circ \in \mathbb{N}$，使得对所有 $k > k_\circ$ 均有 $x_k \in X^*$，

(a) 正则化 NI 函数 ψ_a 是线性条件化的;

(b) 归一化纳什均衡集合 X^* 满足弱尖锐性性质。

证明。假设假设条件 (a) 成立。由于 ψ_a 是线性条件化的，我们可以得到满足条件的某个 $\gamma > 0$，

$$\psi_a(x, P_{X^*}(x)) \geq \gamma d(x, X^*). \tag{5.2}$$

为了推导出所述结果，我们首先证明，由近端点算法 (5.1) 生成的任意序列 $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 满足 $\|x_k - x_{k+1}\| \to 0$，当 $k \to \infty$ 时。设 $z \in X$ 任意，则 (5.1) 中的表达式可写为，

$$\psi_a(x_{k+1}, z) + \frac{1}{2r_k}\|x_k - x_{k+1}\|^2 + \frac{1}{2r_k}\|z - x_{k+1}\|^2 - \frac{1}{2r_k}\|z - x_k\|^2 \leq 0.$$

设 $x^* \in X^*$ 任意。然后，考虑 $z = x^*$ 可得，

$$\psi_a(x_{k+1}, x^*) + \frac{1}{2r_k}\|x_k - x_{k+1}\|^2 + \frac{1}{2r_k}\|x^* - x_{k+1}\|^2 - \frac{1}{2r_k}\|x^* - x_k\|^2 \leq 0. \tag{5.3}$$

由于 $x^* \in X^*$ 是一个 NNE，由 (4.1) 可知，对任意 $z \in X$，都有 $\psi_a(x^*, z) \leq 0$。最终，由引理 2.1 可知，对任意 $z \in X$，都有 $\psi_a(z, x^*) \geq 0$。因此，由不等式 (5.3) 可得，

$$\|x_{k+1} - x_k\|^2 \leq \|x^* - x_k\|^2 - \|x^* - x_{k+1}\|^2. \tag{5.4}$$

由此进一步得到，

$$\sum_{k=0}^{\infty}\|x_{k+1} - x_k\|^2 \leq \|x^* - x_0\|^2 < \infty.$$

因此，当 $k \to \infty$ 时，$\|x_{k+1} - x_k\| \to 0$。

我们注意到，由于 $\liminf_{k\to\infty} r_k = r > 0$，数列 $\{\frac{1}{r_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 有界。因此，当 $k \to \infty$ 时，$\frac{1}{r_k}\|x_{k+1} - x_k\| \to 0$。等价地，对于 $\gamma > 0$，存在某个 $k_\circ \in \mathbb{N}$ 满足，

$$\frac{1}{r_k}\|x_{k+1} - x_k\| < \gamma \text{ for each } k \geq k_\circ. \tag{5.5}$$

我们旨在证明，对于每个 $k > k_\circ$，都有 $x_k \in X^*$。反之，假设对于某个 $j > k_\circ$，有 $x_j \notin X^*$，则 $d(x_j, X^*) \neq 0$（因为 $X^* \subset X$ 是闭凸的）。因此，由 (5.1) 可得，

$$\psi_a(x_j, P_{X^*}(x_j)) \leq \frac{1}{r_{j-1}} d(x_j, X^*)\left\|x_j - x_{j-1}\right\|. \tag{5.6}$$

结合 (5.2) 和 (5.6)，我们得到以下不等式，

$$\left\|x_j - x_{j-1}\right\| \geq \gamma r_{j-1}.$$

但是，这与 (5.5) 矛盾，因为 $j - 1 \geq k_\circ$。最终，对于所有 $k > k_\circ$，x_k 都在 X^* 中。

根据定理 4.1，正则化 NI 函数 ψ_a 是线性条件化的，当且仅当 X^* 满足弱尖锐性。因此，在假设 (b) 成立的情况下，证明即得。

□

5.1 二次损失函数博弈的应用

考虑一个联合凸广义纳什均衡问题，其中每个参与者的损失函数都是借助矩阵定义的。我们将前几节得到的结果应用于此类博弈，从而估计确定其归一化纳什均衡所需的迭代次数。我们按照 [19] 中提出的一些论证来证明下面的结果。

定理 5.2. 假设,

$$\theta_i(x) = \frac{1}{2}(x_i)^T A_{ii} x_i + \sum_{l=1, l\neq i}^{N} (x_l)^T A_{li} x_i \ \forall i = 1, 2, \cdots N.$$

其中 $x = (x_i)_{i=1}^N \in \mathbb{R}^n$, A_{li} 是 $\mathbb{R}^{n_l \times n_i}$ 中的矩阵，且 A_{ii} 是满足 $\sum_{i=1}^N n_i = n$ 的对称矩阵。考虑如下定义的正定矩阵 C ,

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}A_{11} & A_{12} & \cdots A_{1N} \\ A_{21} & \frac{1}{2}A_{22} & \cdots A_{2N} \\ \vdots & & \\ A_{N1} & A_{N2} & \cdots \frac{1}{2}A_{NN} \end{bmatrix}.$$

假设 $\delta > 0$ 表示 $C + C^T$ 的最小特征值。如果归一化纳什均衡集满足弱尖锐条件，那么考虑 $a \in (0, \delta]$ 和 $\frac{1}{r_k} \in (0, \epsilon)$，对于某个 $\epsilon > 0$，可知对于某个初始点 $x_\circ$，近端点算法（5.1）在 $k_\circ + 1$ 次迭代内收敛，其中 $x_\circ$ 属于 X，且

$$k_\circ \leq \frac{d(x_\circ, X^*)^2 \epsilon^2}{\gamma^2}.$$

证明. 根据 [27, 命题 3.1.2], , 可知与上述广义纳什均衡问题对应的正则化 NI 函数 $\psi_a(x, y) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 关于 x 是凸的，对任意 $y \in X$ 均成立。由于假设 X^* 满足弱尖锐性，因此根据定理 4.1，可知 ψ_a 是线性条件化的。现在，根据定理 5.1，我们得到某个 $k_\circ \in \mathbb{N}$, 它满足$x_k \in X^*$, 对于每个 $k > k_\circ$ 均成立，其中 $\{x_k\}$ 是由近端点算法（5.1）生成的序列。

沿用定理 5.1 的证明，读者可以观察到，当 $k \to \infty$ 时，$\|x_{k+1} - x_k\| \to 0$。因此，我们得到满足以下条件的某个最小正数 $k_\circ \in \mathbb{N}$:

$$\|x_{k+1} - x_k\| < \frac{\gamma}{\epsilon} \text{ for all } k \geq k_\circ. \tag{5.7}$$

我们断言，对于每个 $k > k_\circ$, $x_k \in X^*$。反之，假设 $x_j \notin X^*$ 对某个

$j > k_\circ$。令 $P_{X^*}(x_j) = y_j$，则由线性条件化和（5.1）可得，

$$\begin{aligned}\gamma\|x_j - y_j\| = \gamma d(x_j, X^*) &\leq \psi_a(x_j, y_j)\\ &\leq \frac{1}{r_j}\langle y_j - x_j, x_j - x_{j-1}\rangle\\ &< \gamma\|y_j - x_j\|.\end{aligned}$$

显然，这一矛盾得出：对于任意 $k > k_\circ$，都有 $x_k \in X^*$。

现在，由不等式 (5.4) 可轻易得到以下结论，

$$\begin{aligned}\|x^* - x_\circ\|^2 &\geq \|x^* - x_1\|^2 + \|x_1 - x_\circ\|^2\\ &\geq \cdots\\ &\geq \|x^* - x_{k_\circ}\|^2 + \sum_{v=0}^{k_\circ - 1}\|x_{v+1} - x_v\|^2\\ &\geq \sum_{v=0}^{k_\circ - 1}\|x_{v+1} - x_v\|^2\end{aligned}$$

因此，利用不等式 (5.7) 可得以下结论，

$$d(x_\circ, X^*)^2 = \inf_{x^* \in X^*}\|x^* - x_\circ\|^2 \geq \sum_{v=0}^{k_\circ - 1}\|x_{v+1} - x_v\|^2 \geq \frac{(k_\circ)\gamma^2}{\epsilon^2},$$

由此可得所需的估计，

$$k_\circ \leq \frac{d(x_\circ, X^*)^2\epsilon^2}{\gamma^2}.$$

□

致谢
第一作者感谢印度科学与工程研究委员会（SERB）提供的经费支持，资助项目为（MTR/2021/000164）。第二作者感谢印度新德里的大学拨款委员会（UGC）在本研究期间提供的经费支持，资助项目为（1313/(CSIRNETJUNE2019)）。

参考文献

[1] J. Nash，n人博弈中的均衡点，美国国家科学院院刊 36 (1950), 48–49。

[2] K.J. Arrow, G. Debreu，竞争经济均衡的存在性，《计量经济学》22 (1954), 265–290。

[3] D. Aussel, A. Sultana, V. Vetrivel，拟变分不等式和广义纳什均衡问题投影解的存在性，《优化理论与应用杂志》170 (2016), 818–837。[4] J. Cotrina, J. Z ́u ̃niga：时变广义纳什均衡问题。《优化理论与应用杂志》179 (2018), 1054–1064。[5] D. Salas, K.C. Van, D. Aussel, L. Montastruc，具有盲输入的交换网络优化设计及其在生态工业园区中的应用，《计算机与化学工程》143 (2020), 1-18。[6] F. Facchinei, C. Kanzow，广义纳什均衡问题，《运筹学年刊》175 (2010), 177–211。[7] J.B. Rosen，凹 n 人博弈均衡点的存在性与唯一性，《计量经济学》33 (1965), 520–534。[8] F. Facchinei, A. Fischer, V. Piccialli，关于广义纳什博弈与变分不等式，《运筹学快报》35 (2007), 159–164。[9]F. Facchinei, J.S. Pang，有限维变分不等式与互补问题（第1卷），施普林格，纽约，2003。[10] A. Von Heusinger, C. Kanzow，利用 Nikaido-Isoda 型函数对广义纳什均衡问题进行优化重构，《计算优化与应用》43 (2009), 353–377。[11] B. Panicucci, M. Pappalardo, M. Passacantando，通过优化求解广义纳什均衡问题，《优化快报》3 (2009), 419–435。[12]M. Fukushima，受限广义纳什均衡与控制罚算法，《计算管理科学》8 (2011), 201–218。[13] F. Al-Khayyal, J. Kyparisis，非线性规划与变分不等式算法的有限收敛，《优化理论与应用杂志》70 (1991), 319–332。[14] J.V. Burke, M.C. Ferris，数学规划中的弱尖锐极小值，《SIAM 控制与优化杂志》31 (1993), 1340–1359。[15]B.T. Polyak，尖锐极小值。控制科学研究所讲义，莫斯科，苏联，国际应用系统分析研究所广义拉格朗日函数及其应用研讨会，国际应用系统分析研究所，拉克森堡，奥地利，1979。[16] M. Patriksson，非线性规划与变分不等式下降算法的统一框架，林雪平大学，瑞典，1993。[17] P. Marcotte, D. Zhu，变分不等式的弱尖锐解，《SIAM 优化杂志》9 (1998), 179–189。

[18] A. Moudafi，关于均衡问题近端方法的有限收敛与强收敛，《数值泛函分析与优化》28（2007年），1347–1354。[19] L. Van Nguyen，Q.H. Ansari，X. Qin，均衡问题的线性条件化、弱尖锐性与有限收敛，《全球优化杂志》77（2020年），1–20。[20] G.C. Bento，J.X. Cruz Neto，A. Soubeyran，一种用于多准则优化的近端点型方法，《集值变分分析》22（2014），557–573。[21] S.D. Flˆam，A.S. Antipin，利用近端类算法进行均衡规划，《数学规划》78（1996），29–41。[22] R.T. Rockafellar，《凸分析》，普林斯顿大学出版社，新泽西州，2015。[23] G. Bigi，M. Passacantando，均衡问题算法中出现的十二种单调性条件，《优化方法与软件》30（2015），323–337。[24] H. Nikaido，K. Isoda，关于非合作凸博弈的注记，《太平洋数学杂志》5（1955），807–815。[25] J. Zhou，C. Wang，关于数学规划中迭代算法有限终止的一则注记，《运筹学快报》36（2008），715–717。[26] Y. Liu，Z. Wu，利用原始间隙函数刻画变分不等式的弱尖锐解，《优化快报》10（2016），563–576。[27] A. Von Heusinger，广义纳什均衡问题的数值方法，博士论文，Universit¨at W¨urzburg，2009年。