概率测度空间中连续性包含的 Carathéodory 理论与先验估计*

Benoît Bonnet-Weill†和 Hélène Frankowska‡

2024年11月6日

arXiv:2302.00963v3 [math.OC] 5 Nov 2024

摘要

本文将作者近期提出的紧支撑概率测度空间中微分包含理论的基础，拓展至一般 Wasserstein 空间。在这一背景下，我们证明了一个新的皮亚诺式存在性结果，适用于仅满足 Carathéodory 正则性假设的这类动力学。该结果建立在一种自然但此前尚未探索的集值改编之上：Filippov 提出的半离散欧拉格式，原用于研究右端关于时间变量可测的常微分方程。借助其中的一些方法，并结合针对连续性方程解的新估计，我们还显著改进了早期版本中的 Filippov 估计，以及在 Cauchy-Lipschitz 框架下推导的连续性包含解集的紧性与松弛性质。

关键词： 连续性包含、最优传输、集值分析、皮亚诺存在定理、Filippov 估计、紧性与松弛。

MSC2020 学科分类： 28B20, 34A60, 34G20, 46N20,49Q22

目录

1 引言 **2**

2 预备知识 **4**

2.1 巴拿赫空间中的测度论与最优传输.52.2 集值分析与连续函数的拓扑性质 . . . . . 72.3 概率测度空间中的连续性方程与微分包含 10

3 佩亚诺式存在性与 Carathéodory 框架14

4 Cauchy-Lipschitz 框架下的先验估计、紧性与松弛22

4.1 解的存在性与 Filippov 估计.224.2 解集的紧性与松弛性质.28

附录 **34**

A 引理的证明 2.10 .34B 引理的证明 2.15 .35C 命题的证明 2.21 .36D 命题的证明 2.23 .37

*本材料基于空军科学研究办公室通过资助编号 *FA9550-18-1-0254* 支持的研究工作。

†LAAS-CNRS，图卢兹大学，法国国家科学研究中心，罗什上校大道 7 号，法国图卢兹 F-31400。电子邮件：benoit.bonnet@laas.fr (通讯作者)

‡法国国家科学研究中心、IMJ-PRG、UMR 7586、索邦大学，法国巴黎 Jussieu 广场 4 号，邮编 75252。电子邮件：helene.frankowska@imj-prg.fr

1 引言

近年来，测度空间中的连续性方程已成为多个数学领域广泛关注的研究对象。以往，这类偏微分方程的分析通常在勒贝格空间或 Sobolev 空间中进行，并可据此建立经典的适定性结果；然而，纯数学与应用数学中的若干研究方向促使人们开始探讨这些动力学更一般、较弱的解概念。

在这些研究工作中，最具影响力的成果之一，是现代最优传输理论的发展——相关论述见于 [7, 74, 77] ——以及测度空间中梯度流理论的发展。事实上，先驱性著作 [60, 65]中提出的概念，后来在 [7] 中得到形式化，阐明了这样一个事实：通过对定义在概率测度空间上的能量泛函应用连续时间最速下降格式，可以构造出具有极不规则驱动场的输运方程的弱解。这一影响深远的观察使人们能够对物理学、理性力学和生物学中遇到的各种演化方程推导出一般性的适定性结果，其依据在于这些方程具有变分结构，参见例如 [7, 25, 27, 41, 55, 60, 63, 65, 75] 及其中的参考文献。这一创新视角之所以令人着迷，既源于其理论价值，也源于其在设计数值方法方面的实际高效性与适应性 [10, 24, 67]。类似地，均场博弈理论 [23, 58, 62]——处于控制理论与变分法之间——在很大程度上推动了测度空间中动力学问题的普及。顺带一提，这些新兴研究趋势中的一些核心概念，已在大量多尺度模型中获得了重要应用，这些模型旨在高效描述行人流 [35, 64, 71] 以及意见传播模型 [2, 56, 72] 和群集动力学 [1, 26, 28]。另一个充分运用了这套成果的活跃研究领域是均场控制 [14, 17, 29, 44, 45, 46, 59], ，该领域催生了若干对经典理论的重要拓展，详见下文。

在上述背景下，越来越多的研究聚焦于偏微分方程分析、动力系统理论与最优传输的交叉领域，致力于为以下形式的柯西问题推导一般性的适定性结果

$$\begin{cases} \partial_t \mu(t) + \operatorname{div}_x(v(t,\mu(t))\mu(t)) = 0, \\ \mu(0) = \mu^0. \end{cases} \tag{1.1}$$

其中，初始数据 $\mu^0 \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^d)$ 是一个博雷尔概率测度，而速度场 $v : [0,T] \times \mathscr{P}(\mathbb{R}^d) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 是一个勒贝格-博雷尔映射，它可以是非局部的，也就是说，它允许依赖于测度变量本身。正如上一段所提到的，能够为 (1.1) 有意义地推导适定性结果的主要框架之一是 Wasserstein 梯度流（参见例如 [7, 第 11]章），其中 $v(t,\mu(t)) \in L^p(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d;\mu(t))$ 被定义为测度空间上某个泛函的（次）梯度。类似地，在均场博弈理论中，前向测度动力学的适定性通常源于一个变分原理，该原理要求各参与者的共同成本满足适当的凸性条件 [62]。值得注意的是，当动力学具有哈密顿结构时，对于不规则驱动场也有一般性的存在性结果，例如参见 [6]。另一方面，正如 [7, 第 8], 章的讨论所充分强调的，(1.1) 中的动力学可以自然地解释为瓦瑟斯坦流形——或者更确切地说，丛——$(\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)\ W_p(\cdot,\cdot))$ 上的常微分方程，其中 $p \in (1,+\infty)$。因此，在缺乏底层变分结构的情况下，我们应当预期，上述柯西问题的适定性更可能源于驱动向量场的正则性。在这种情况下，现有文献中的结果可分为两类，具体取决于速度场是否为非局部。

◇当 v： $[0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 与测度变量无关时，已知的最优适定性条件有两类：一类是在初始测度任意时满足 Carathéodory 假设（或其细微变体）；另一类是在初始测度相对于勒贝格测度绝对连续时，空间变量具有 Sobolev [36] 或有界变差 [3] 正则性，并结合散度的积分界或更一般的不可压缩性假设。 [12], 后一类解的结构性概念——即

通常称为正则拉格朗日流——以及经典的柯西–利普希茨理论，均在[4]中作了综述。

◇当 $v\colon\ [0,T]\times\mathscr{P}(\mathbb{R}^d)\times\mathbb{R}^d\mapsto\mathbb{R}^d$ 也依赖于测度变量时，关于（1.1）适定性的一般充分条件，目前仅在柯西–利普希茨和 Carathéodory 正则性框架下可得（例如参见 [14, 34, 70] 及其中的参考文献）。尤其是，目前尚无已知的将拉格朗日流概念推广至非局部连续性方程情形的结果。

我们以介绍近期一系列研究作为本节文献综述的结尾。这些研究始于 [69]，并由[19, 31, 68], 进一步推进；作者们探讨了对（1.1）的松弛，其中驱动场被定义在切丛上的概率测度所取代。这一研究方向——与早期研究 [11] 颇为相似——与杨测度理论有很强的相似性，并已取得非常有前景的成果，揭示了测度空间中的压缩半群与各种欧拉格式之间的相互作用。

沿着这一系列研究的脉络，本文旨在对 Wasserstein 空间中的连续性包含 理论作出若干影响深远的改进；这一理论的详细阐述始于我们先前的工作 [14]。在该工作中，给定一个紧支撑测度 $\mu^0\in\mathscr{P}_c(\mathbb{R}^d)$ 和一个集值映射 $(t,\ \mu)\in[0,T]\times\mathscr{P}_c(\mathbb{R}^d)\rightrightarrows V(t,\ \mu)\subset L^p(\mathbb{R}^d,\ \mathbb{R}^d;\ \mu)$，我们将柯西问题的解定义为

$$\begin{cases}\partial_t\mu(t)\in-\mathrm{div}_x\Big(V(t,\mu(t))\mu(t)\Big),\\ \mu(0)=\mu^0,\end{cases}\tag{1.2}$$

所有绝对连续曲线 $\mu(\cdot)\in$绝对连续$([0,T],\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d))$ 的集合，其中存在一个 $\mathscr{L}^1$-可测选择 $t\in[0,T]\mapsto v(t)\in V(t,\mu(t))$，使得式 (1.1) 成立。考虑这类对象的主要动机在于，微分包含以及更广泛的集值分析，在控制理论和变分法中发挥着重要作用，相关参考文献如 [8, 9, 33, 78] 和 [22, 32] 所示。它们为建立变分问题的存在性结果[43], 、推导一阶和二阶最优性条件（无论是以庞特里亚金最大值原理 [47, 52, 51, 54] 还是 Hamilton-Jacobi-Bellman方程 [48, 53]的形式），以及研究最优轨线的定性性质 [21]，提供了便利的工具。凭借其数学上的灵活性，这些框架近来已开始为均场控制和均场博弈领域所采用 [15, 16, 20, 29, 59, 68]。与其他用于定义测度空间中微分包含解的概念（例如 [30, 59], ）相比，我们的方法具有如下优势：它与向量空间中微分包含的现代理论相一致（例如 [8, 9], 中的综述），并且在概念上与 Wasserstein 空间的几何结构以及按照 [7, 65]将连续性方程解释为广义常微分方程的观点相兼容。此外，我们的构造非常适合研究控制问题，因为它确保受控测度动力学的解与其集值对应理论之间存在一一对应关系。

本文的首项主要贡献是为（1.2）给出一个皮亚诺式的存在性结果，见定理 3.2，且仅基于 Carathéodory 正则性假设即可得到。具体而言，我们证明，若 $V\colon[0,T]\times\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)\rightrightarrows C^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$ 关于 $\mathscr{L}^1$ 可测，关于 $t\in[0,T]$ 连续且具有凸像，那么（1.2）从任意初始数据出发都存在解。众所周知，对于右端并非利普希茨的微分包含，要证明解的存在性，容许速度必须是凸的（例如参见 [8, 第 2]章），即使在有限维向量空间这一熟悉的背景下也是如此。我们的证明策略围绕 Filippov 针对 Carathéodory 常微分方程提出的半离散欧拉格式的一种巧妙集值改编展开（例如参见 [42, 第 1]章）。据我们所知，即便对于经典微分包含，这种方法此前也未曾被研究过。此外，该方法还依赖于研究连续性方程解的紧性的一些较新方法，我们认为这些方法本身也具有独立的研究价值。

本文的第二项贡献，是将 [14], 针对紧支撑测度曲线得出的结论，推广到一般 Wasserstein 空间的情形。其中首要的

关键结果是所谓的 Filippov 估计，见定理 4.2。该估计保证方程 (1.2) 存在一个解，且该解与预先给定的测度曲线之间的距离受到精确控制。在控制系统中进行扰动分析和线性化时，这类估计对于构造可容许轨迹极为有用。第二项结果是，当动力学的右端为凸时，解集具有紧性；无论是在最优控制理论还是变分法中，这一性质几乎都是基于弱紧性论证的每个存在性证明所必需的。第三项也是最后一项结果是所谓的松弛定理，该定理断言，在缺乏凸性的情况下，方程 (1.2) 的解集的闭包与动力学经过凸化后的柯西问题的解集的闭包一致。这三项关键性质常结合使用，以便在不同背景下推导最优控制问题的精确一阶和二阶最优性条件，例如，针对常微分方程，[49, 50] 针对无限维巴拿赫空间中的一般演化方程，以及我们先前关于 [15] 均场最优控制问题的研究。值得注意的是，研究 Hamilton-Jacobi-Bellman 方程解的精细性质时，松弛定理也至关重要，因为它使我们能够在不失一般性的前提下，假定存在与相应值函数相关联的最优轨线。

从更技术的角度来看，要拓展这些结果，我们需要对连续性包含的定义有新的认识，因为我们需要一种新的函数空间框架，既适用于处理具有无界支撑的速度，又具有良好的拓扑性质。这些思考促使我们研究由取值于 $C^0(\mathbb{R}^d,\ \mathbb{R}^d)$ 的速度选择驱动的连续性包含，其中该空间赋予局部一致收敛拓扑；值得一提的是，它是一个可分的弗雷歇空间，其紧子集恰好可由阿尔泽拉-阿斯科利定理刻画。我们认为，采用这一全新的视角，能够以更简洁、更一般、或许也更为精炼的方式研究测度动力学。最后需要强调的是，尽管本文使用的一些工作假设比我们先前工作中的假设更严格，主要是为了应对所考察测度可能具有无界支撑这一事实，但下文给出的结果在作少量技术性调整后严格包含了 [14], 中的结果。最后还需指出，我们的一些研究成果建立在关于低正则性要求下连续性方程的全新定量稳定性估计之上，这些结果对同行研究者也应具有独立的参考价值。

本文的贡献和结构可概述如下。第 2 节中，在回顾测度论、最优传输、集值分析和泛函分析的若干概念后，我们分别在命题 2.21 和命题 2.23 中，为连续性方程的解推导出新的紧性与稳定性估计。随后，我们根据速度选择来定义集合值映射 $V\colon [0,T]\times\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)\rightrightarrows C^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$ 所对应的 (1.2) 的解，其中速度选择关于连续函数空间的标准 Fréchet拓扑可测（见下文定义2.12）。接着，在第 3 节中，我们在仅假设动力学的右端为 Carathéodory 且取凸值的条件下，于定理 3.2 中证明了 (1.2) 的一个新存在性结果。之后，我们在第 4 节转向 Cauchy-Lipschitz框架，并讨论可由此推导的微分包含理论的主要结果。在第4.1节中，我们首先建立 Filippov 估计的两个适用范围广泛的版本：先在定理 4.2 中给出局部版本，再在推论 4.4 中给出全局版本。随后，我们在第4.2节关注 (1.2) 解集的拓扑性质。在定理 4.5 中，我们首先证明，当动力学的右端具有凸像时，解集在一致收敛拓扑下是紧的。在定理 4.6 中，我们进一步放宽凸性要求，并证明在这种情况下，解集的闭包与凸化柯西问题的解集闭包一致。最后，本文以一个附录收尾，其中给出了若干技术结果和估计的证明。

2 预备知识

在接下来的章节中，我们将介绍测度论、集值分析、最优传输和一般测度动力学方面的预备结果。

2.1 巴拿赫空间中的测度论与最优传输

在本节的预备部分，我们回顾巴拿赫空间中测度论和最优传输的基本概念，前者主要参考 [5, 13, 39]，后者主要参考 [7]。

测度与积分理论的基本概念。给定一个可分巴拿赫空间 $(X, \|\cdot\|_X)$，记其拓扑对偶为 X^*，并用 $\langle\cdot,\cdot\rangle_X$ 表示相应的对偶配对。下文中，符号 $C_b^0(X, \mathbb{R}^d)$ 表示从 X 到 $\mathbb{R}^d$ 的连续有界映射所构成的向量空间；特别地，若 $X = \mathbb{R}^m$ 对某个 $m \geq 1$ 成立，则用 $C_c^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ 表示紧支集无穷次可微函数所构成的向量空间。设 $(Y, d_Y(\cdot,\cdot))$ 为完备可分度量空间，更一般地，我们用 $C^0(X, Y)$ 表示从 X 到 Y 的连续映射集合，并用 $\mathrm{AC}(I, Y)$ 表示定义在区间 $I \subset \mathbb{R}$ 上、取值于 Y 的绝对连续弧集合。此外，$\mathrm{Lip}(\Omega; Y)$ 表示从子集 $\Omega \subset X$ 到 Y 的利普希茨映射空间；对于元素 $\phi \in \mathrm{Lip}(\Omega; Y)$，其利普希茨常数记为 $\mathrm{Lip}(\phi; \Omega)$。

下文中，给定闭集 $\Omega \subset X$，我们将考虑由 $\mathbb{R}^d$- 值有限拉东测度构成的向量空间 $\mathscr{M}(\Omega; \mathbb{R}^d)$。根据里斯表示定理（例如参见 [5, 定理 1.54]），已知当 Ω 为紧集时，后者在对偶配对的作用下与巴拿赫空间 $(C^0(\Omega; \mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{C^0(\Omega;\mathbb{R}^d)})$ 的拓扑对偶同构

$$\langle \boldsymbol{\nu}, \phi \rangle_{C^0(\Omega;\mathbb{R}^d)} := \sum_{i=1}^{d} \int_\Omega \phi_i(x) \mathrm{d}\boldsymbol{\nu}_i(x), \tag{2.1}$$

该对偶配对定义在所有 $\boldsymbol{\nu} \in \mathscr{M}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ 和 $\phi \in C^0(\Omega; \mathbb{R}^d)$ 上。全文中，我们用 $\mathscr{P}(\Omega)$ 表示 Ω 上赋予窄拓扑的博雷尔概率测度空间；该拓扑是使映射

$$\mu \in \mathscr{P}(\Omega) \mapsto \int_X \phi(x) \mathrm{d}\mu(x) \in \mathbb{R} \tag{2.2}$$

对每个元素 $\phi \in C_b^0(\Omega; \mathbb{R})$ 都连续的最粗拓扑。测度论中的一个标准结论（例如参见 [7,注 5.1.2]）是，赋予窄拓扑的 $\mathscr{P}(\Omega)$ 是一个可分空间，我们记为

$$\mu_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup^*} \mu,$$

由2.2在 $\mathscr{P}(\Omega)$所诱导的收敛概念。

给定两个可分巴拿赫空间 $(X, \|\cdot\|_X)$ 和 $(Y, \|\cdot\|_Y)$，以及某个 $p \in [1, +\infty)$，我们将用 $(L^p(\Omega; Y; \mu), \|\cdot\|_{L^p(X;Y;\mu)})$ 表示从子集 $\Omega \subset X$ 到 Y 的映射空间，这些映射关于测度 $\mu \in \mathscr{M}(\Omega; \mathbb{R}_+)$ 在博赫纳意义下是 p-可积的（例如参见 [39, 第二章]）。类似地，我们将 $L^\infty(\Omega; Y; \mu)$ 记作从 X 到 Y 的本质有界映射空间；当 $X := I$ 是一个区间且 $\mu := \mathscr{L}^1$ 是标准的一维勒贝格测度时，对于 $p \in [1, +\infty]$ 我们采用更简洁的记法 $(L^p(I, Y), \|\cdot\|_{L^p(I)})$。下面回顾 $L^1(I, X)$ 中弱紧性的一个有力判据，其表述见 [38, 推论 2.6]（另见较早的版本 [37, 76]）。

定理 2.1（博赫纳可积映射的弱紧性判据）。设（X，$\|\cdot\|_X$）是一个可分巴拿赫空间，$I \subset \mathbb{R}$ 是一个区间，且（$v_n(\cdot)$）$\subset L^1(I, X)$。假设存在一个映射$m(\cdot) \in L^1(I, \mathbb{R}_+)$，以及由 X 的弱紧子集构成的族（K_t）$_{t\in I}$，使得

$$\|v_n(t)\|_X \leq m(t) \qquad and \qquad v_n(t) \in K_t$$

对 $\mathscr{L}^1$-几乎处处的 $t \in [0, T]$ 及每个 $n \geq 1$ 都成立。那么，存在一个子序列（$v_{n_k}(\cdot)$）$\subset L^1(I, X)$，它弱收敛到一个元素 $v(\cdot) \in L^1(I, X)$。特别地

$$\int_I \langle \boldsymbol{\nu}(t), v(t) - v_{n_k}(t) \rangle_X \, \mathrm{d}t \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

对于每个 $\boldsymbol{\nu}(\cdot) \in L^\infty(I, X^*) \subset L^1(I, X)^*$。

最优传输与 Wasserstein 空间。 本文中，记号 $\mathscr{P}_p(X)$ 表示概率测度的子集，其中 阶矩 $p \in [1,+\infty)$ 有限，即

$$\mathcal{M}_p^p(\mu) := \int_X |x|^p \mathrm{d}\mu(x) < +\infty.$$

在以下定义中，我们回顾经由 Borel 映射得到像测度的已知概念，以及传输计划的概念。

定义 2.2 （像测度与传输计划）。 测度 $\mu \in \mathscr{P}(X)$ 经 *Borel* 映射 $f\colon X \to Y$得到的像，记作 $f_\sharp\mu \in \mathscr{P}(Y)$，定义为

$$f_\sharp\mu(B) = \mu(f^{-1}(B)),$$

对每个 *Borel* 集 $B \subset Y$均成立。给定两个概率测度 $\mu,\nu \in \mathscr{P}(X)$，若元素$\gamma \in \mathscr{P}(X \times X)$ 满足以下条件，则称其为 μ 与 ν之间的传输计划，记作 $\gamma \in \Gamma(\mu,\nu)$:

$$\pi^1_\sharp\gamma = \mu \qquad and \qquad \pi^2_\sharp\gamma = \nu,$$

其中 $\pi^1,\pi^2\colon X \times X \to X$ 表示到第一和第二因子的投影。

当 $(X,\mathrm{k}\cdot\mathrm{k}_X) := (\mathbb{R}^d,|\cdot|)$ 是一个赋有通常欧几里得结构的 d 维实向量空间时，最优传输理论中的一个标准结果表明，对于任意 $p \in [1,+\infty)$，量

$$W_p(\mu,\nu) := \inf_{\gamma\in\Gamma(\mu,\nu)} \left(\int_{\mathbb{R}^{2d}} |x-y|^p \mathrm{d}\gamma(x,y) \right)^{1/p} \tag{2.3}$$

对每个 μ， $\nu \in \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$ 都是 $\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$ 上的一个距离。此外，由变分法直接法很容易推出，式（2.3）中的下确界总能取到，我们将相应的 $\Gamma_o(\mu,\ \nu)$ 集合记为 p-最优传输计划。在以下命题中，我们回顾 *Wasserstein* 空间的一些主要性质，并给出一个实用的距离估计。

命题 2.3 (Wasserstein 空间的拓扑)。 度量空间 $(\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)\ W_p(\cdot,\ \cdot))$ 是完备且可分的，并且 *Wasserstein* 距离诱导窄拓扑 (2.2)，即

$$W_p(\mu_n,\mu) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \textit{if and only if} \qquad \begin{cases} \mu_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup^*} \mu, \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} |x|^p \mathrm{d}\mu_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^d} |x|^p \mathrm{d}\mu(x), \end{cases}$$

对任意序列 $(\mu_n) \subset \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$ 以及每个 $\mu \in \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$。此外，子集 $\mathscr{K} \subset \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$ 关于度量 $W_p(\cdot,\cdot)$ 诱导的拓扑是相对紧的，当且仅当它满足

$$\sup_{\mu\in\mathscr{K}} \int_{\{x\ s.t.\ |x|\geq k\}} |x|^p \mathrm{d}\mu(x) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

也就是说，当且仅当它是一致 p-可积的。

证明。 我们建议感兴趣的读者参阅 [7, 第 7] 或 [77, 第 6]。 □

命题 2.4 （经典最优传输估计）。 给定某个 μ， $\nu \in \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$，有

$$\int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)\mathrm{d}(\mu-\nu)(x) \ \leq\ \mathrm{Lip}(\phi;\mathbb{R}^d)W_1(\mu,\nu) \ \leq\ \mathrm{Lip}(\phi;\mathbb{R}^d)W_p(\mu,\nu) \tag{2.4}$$

对每个 $\phi \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$。

2.2 集值分析与连续函数的拓扑性质

本节回顾一些集值分析和泛函分析的记号与结果。对于前者，我们主要参考专著 [8, 9]，对于后者则参考相关的参考著作 [57, 73]。

下文中，我们用 $(E, d_E(\cdot,\cdot))$ 表示一个可分的弗雷歇空间，即一个完备可分的局部凸拓扑向量空间 E，其拓扑由平移不变度量$d_E(\cdot,\cdot)$诱导。在此背景下，我们将集合 $B \subset E$ 的闭凸包 定义为

$$\overline{\mathrm{co}}(B) := \overline{\bigcup_{N\geq 1} \left\{ \sum_{i=1}^{N} \alpha_i b_i \quad \text{s.t.} \quad b_i \in B,\ \alpha_i \in [0,1] \quad \text{for } i \in \{1,\dots,N\} \quad \textit{and} \quad \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1 \right\}}^{E},$$

其中“$\overline{\bullet}^{E}$”表示关于 $d_E(\cdot,\cdot)$ 的闭包。我们还将使用通用记号 n

$$\mathrm{dist}_E(x\,;\mathcal{Q}) := \inf_{y\in\mathcal{Q}} d_E(x,y)$$

表示元素 $x \in E$ 与闭集 $\mathcal{Q} \subset E$之间的距离。

集值分析。给定两个完备可分度量空间 $(X, d_X(\cdot,\cdot))$ 和 $(Y, d_Y(\cdot,\cdot))$，我们用 $\mathcal{F}\colon X \rightrightarrows Y$表示 $\mathcal{F}(\cdot)$ 是一个从 X到 Y的集值映射（或多值函数）。如果对每个 $x \in X$，集合 $\mathcal{F}(x) \subset Y$都是闭集（相应地，在该概念适用时为凸集），则称此集值映射具有闭像（相应地，具有凸像）。此外，我们将其图 定义为

$$\mathrm{Graph}(\mathcal{F}) := \Big\{ (x,y) \in X \times Y \ \text{ s.t. } y \in \mathcal{F}(x) \Big\}.$$

下面，我们回顾定义在实数轴某个子区间 $I \subset \mathbb{R}$ 上的集值映射的标准可测性概念，该子区间赋有勒贝格可测集构成的完备 σ-代数。

定义 2.5（可测集值映射与可测选择）。若多值函数 $\mathcal{F}\colon I \rightrightarrows Y$满足以下条件，则称其为 $\mathscr{L}^1$-可测：

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{O}) := \Big\{ t \in I \ \text{ s.t. } \mathcal{F}(t) \cap \mathcal{O} \neq \emptyset \Big\}$$

对每个开集 $\mathcal{O} \subset Y$，它都是 $\mathscr{L}^1$-可测的。若映射 $f\colon I \to Y$ 是 $\mathcal{F}(\cdot)$的一个可测选择，则它是 $\mathscr{L}^1$-可测的，且对 $\mathscr{L}^1$-几乎处处的 $t \in I$，有 $f(t) \in \mathcal{F}(t)$。

在下面的定理中，我们重述集值分析中的一个深刻结果，该结果保证了像为完备可分度量空间闭子集的可测多值函数存在可测选择。

定理 2.6（可测选择的存在性）。每个 $\mathscr{L}^1$-可测集值映射 $\mathcal{F}\colon I \rightrightarrows Y$，只要其像非空且闭，就存在一个可测选择。

在后续论述中，我们将使用集值映射的连续性和*Lipschitz* 正则性这两个概念，以下定义将对它们作出回顾。在这些定义中，我们分别用$\mathbb{B}_X(x,\ r)$和 $\mathbb{B}_Y(y,\ r)$表示以 $x \in X$和 $y \in Y$为中心、半径为 $r > 0$ 的闭球；对于任意 $\Omega \subset X$，采用简写记号 $\mathbb{B}_X(\Omega\ r) := \{x \in X$满足 $d_X(x,\ x') \leq r$ for some $x' \in \Omega\}$。

定义 2.7（连续集值映射）。若多值函数 $\mathcal{F}\colon X \rightrightarrows Y$在 $x \in X$ 处满足以下两个条件，则称其在 $x \in X$ 处连续：

（i） $\mathcal{F}(\cdot)$在 $x \in X$处上半连续，即对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得

$$\mathcal{F}(x') \subset \mathbb{B}_Y(\mathcal{F}(x), \varepsilon)$$

对所有 $x' \in \mathbb{B}_X(x, \delta)$。

(ii) $\mathcal{F}(\cdot)$ 在 $x \in X$ 处是下半连续 的，即对于每个 $\varepsilon > 0$ 以及每个 $y \in \mathcal{F}(x)$，存在$\delta > 0$ 使得

$$\mathcal{F}(x') \cap \mathbb{B}_Y(y, \varepsilon) \neq \emptyset$$

对所有 $x' \in \mathbb{B}_X(x, \delta)$。

定义 2.8 (利普希茨连续集值映射)。 若存在常数 $L > 0$，使得多值函数 $\mathcal{F} : X \rightrightarrows Y$ 满足

$$\mathcal{F}(x') \subset \mathbb{B}_Y\Big(\mathcal{F}(x)\,, Ld_X(x, x')\Big),$$

对每个 $x, x' \in X$。

下文中，我们将经常借助度量空间之间更一般的*Carathéodory* 集值映射概念，其定义如下。

定义 2.9 (Carathéodory集值映射)。 若集值映射 $\mathcal{G}: I \times X \rightrightarrows Y$ 满足：对所有 $x \in X$， $t \in I \rightrightarrows \mathcal{G}(t, x)$ 均为 $\mathscr{L}^1$-可测；且对几乎所有 $t \in I$， $x \in X \rightrightarrows \mathcal{G}(t, x)$ 关于 $\mathscr{L}^1$ 连续，则称其为Carathéodory 映射。

在以下引理中——其证明概要见附录A ——我们陈述改编自[9, 第 8 节。1] 以及 [79, 第 9] 节的可测选择原理，后文将广泛使用这些原理。在该处，我们设 $\varphi: I \times Y \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ 是一个满足下列条件的扩展实值函数

$$\varphi(t, y) = \sup_{n \geq 1} \varphi_n(t, y) \tag{2.5}$$

对于几乎处处的 $\mathscr{L}^1$- $t \in I$ 以及所有 $y \in Y$，其中 $(\varphi_n(\cdot, \cdot))$ 是一个逐点单调递增的 Carathéodory映射序列。这尤其意味着，对于每个 $y \in Y$， $t \in I \mapsto \varphi(t, y)$ 都是 $\mathscr{L}^1$-可测的；而对于几乎处处的 $t \in I$- $\mathscr{L}^1$， $y \in Y \mapsto \varphi(t, y)$ 是下半连续的。

引理 2.10 (可测选择原理)。 设 $\mathcal{F}: I \rightrightarrows Y$ 和 $\mathcal{G}: I \times X \rightrightarrows Y$ 是两个像非空的集值映射，且 $\varphi: I \times Y \to \mathbb{R}_+$ 如上所述。此外，固定两个 $\mathscr{L}^1$-可测函数 $x : I \to X$ 和 $L: I \to \mathbb{R}_+$。

(a) 设 *S* ***uppose that*** $\mathcal{F}(\cdot)$ 是 $\mathscr{L}^1$-可测的，且具有紧像，并且集值映射 *ma* p

$$t \in I \rightrightarrows \mathcal{F}(t) \cap \Big\{y \in Y \ \text{ s.t. } \varphi(t, y) \leq L(t)\Big\}$$

具有非空像。因此，后者是 $\mathscr{L}^1$-可测的，并且存在一个可测选择$t \in I \mapsto f(t) \in \mathcal{F}(t)$，使得对 $\mathscr{L}^1$-几乎处处的 $t \in I$， $\varphi(t, f(t)) \leq L(t)$。

(b) 假设 *S* ***uppose that*** $\mathcal{F}(\cdot)$ 是 $\mathscr{L}^1$-可测的，且具有紧像。那么，集值映射

$$t \in I \rightrightarrows \mathcal{F}(t) \cap \Big\{y \in Y \ \ s.t.\ \varphi(t, y) = \inf_{z \in \mathcal{F}(t)} \varphi(t, z)\Big\}$$

是 $\mathscr{L}^1$-可测的，且具有非空闭像，因此存在可测选择。

(c) 假设 $\mathcal{G}(\cdot, \cdot)$ 是具有闭像的 *Carathéodory* 映射。那么，集值映射 $t \in I \rightrightarrows \mathcal{G}(t, x(t))$ 是 $\mathscr{L}^1$-可测的，因此存在可测选择。

我们以陈述 Aumann 积分凸性定理的一个改编版本，结束这篇集值分析入门；感兴趣的读者可参见 [9, 定理 8.6.4]。

定理 2.11 （Aumann积分的凸性）。 设（$X, \|\cdot\|_X$）是一个可分巴拿赫空间，并设 $\mathcal{F}: I \to X$ 是一个具有非空闭像的集值映射，且可积有界，即存在某个 $k(\cdot) \in L^1(I, \mathbb{R}_+)$ 使得

$$\mathcal{F}(t) \subset k(t)\mathbb{B}_X,$$

对几乎所有的 $\mathscr{L}^1$- $t \in I$，均有此结论。因此，对于任意可测集 $\Omega \subset I$、任意可测选择 $t \in I \mapsto f(t) \in \mathrm{co}\,\mathcal{F}(t)$ 以及任意 $\delta > 0$，都存在一个可测选择 $t \in I \mapsto f_\delta(t) \in \mathcal{F}(t)$，使得

$$\left\| \int_\Omega f(t)\mathrm{d}t - \int_\Omega f_\delta(t)\mathrm{d}t \right\|_X \leq \delta.$$

关于 $C^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$ 的拓扑与度量。 在本文中，我们几乎只研究其取值为 $C^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$ 的子集的多值函数。根据开创性研究 [80]，众所周知，为该空间赋予的最自然拓扑是紧集上一致收敛——或紧收敛——其定义和显著特征将在下文回顾。

定义2.12 （紧收敛拓扑）。称连续映射序列 $(v_n)\subset C^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$ 在紧集上一致收敛于某个 $v\in C^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$，如果

$$\|v-v_n\|_{C^0(K,\mathbb{R}^d)}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0,$$

对每个紧集 $K\subset\mathbb{R}^d$ 均成立。此收敛概念在 $C^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$ 上诱导的拓扑是完备、可分的，并由平移不变度量

$$\mathsf{d}_{\mathrm{cc}}(v,w):=\sum_{k=1}^{+\infty}2^{-k}\min\left\{1\,,\|v-w\|_{C^0(B(0,k),\mathbb{R}^d)}\right\}\tag{2.6}$$

定义，适用于每个 $v,w\in C^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$。因此，后者赋予 $(C^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d),\mathsf{d}_{\mathrm{cc}}(\cdot,\cdot))$ 可分*Fréchet*空间的结构。

在后续论述中，我们始终将 $C^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$ 赋予由 $\mathsf{d}_{\mathrm{cc}}(\cdot,\cdot)$ 诱导的可分Fréchet拓扑；有趣的是，该拓扑还为 Carathéodory 向量场提供了函数刻画，正如下述引自 [66，第 511] 页的结果所示。

引理 2.13 (将 Carathéodory 向量场视为 $C^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$ 上的可测函数)。 向量场$(t,x)\in I\times\mathbb{R}^d\mapsto v(t,x)\in\mathbb{R}^d$ 是 *Carathéodory* 向量场，当且仅当其函数提升 $t\in I\mapsto v(t)\in C^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$关于紧集上一致收敛拓扑是 $\mathscr{L}^1$-可测的。

鉴于这一结果，我们将系统地把 $\mathscr{L}^1$-可测映射 $t\in I\mapsto v(t)\in C^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$ 与 Carathéodory 向量场 $v\colon I\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ 等同起来，从而在向量空间中进行研究

$$\mathscr{L}(I,C^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)):=\left\{v:I\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d\ \text{ s.t. } v(\cdot,\cdot)\text{ is a Carathéodory vector field}\right\}.$$

除了具有良好的拓扑性质外，紧集上一致收敛这一概念尤其适合用于表述紧性结果，以下 [73,定理 11.28] 中阿尔泽拉-阿斯科利定理的一个一般版本便说明了这一点。

定理 2.14 （阿尔泽拉-阿斯科利紧性定理）。设$(v_n)\subset C^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$ 是一个在紧集上一致有界且等度连续的映射序列。那么，存在一个元素$v\in C^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$，使得

$$\mathsf{d}_{\mathrm{cc}}(v_{n_k},v)\underset{k\to+\infty}{\longrightarrow}0,$$

沿着某个子序列 $(v_{n_k})\subset C^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$。类似地，如果 $K\subset\mathbb{R}^d$ 是紧的，且$(v_n)\subset C^0(K,\mathbb{R}^d)$ 是一列一致有界且等度连续的映射，那么存在 $v\in C^0(K,\mathbb{R}^d)$，使得

$$\|v-v_{n_k}\|_{C^0(K,\mathbb{R}^d)}\underset{k\to+\infty}{\longrightarrow}0,$$

沿着某个子序列 $(v_{n_k})\subset C^0(K,\mathbb{R}^d)$。

证明。第一个紧性结论的证明见 [73, 定理 11.28], 第二个结论则直接由标准的阿尔泽拉-阿斯科利定理得出。□

为了表述第 4 节的适定性结果，我们还需要为连续映射引入一种全局邻近性概念，它本质上强于度量 $\mathsf{d}_{cc}(\cdot,\cdot)$所给出的局部概念。因此，我们还将考虑如下定义的扩展上确界度量：

$$\mathsf{d}_{\sup}(v,w):=\sup_{x\in\mathbb{R}^d}|v(x)-w(x)|\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\},\tag{2.7}$$

对每个 $v,w\in C^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$ 都成立。在下面的引理中，为了完整起见，我们重述一个经典结果。该结果表明，$\mathsf{d}^{\sup}(\cdot,\cdot)$ 在拓扑向量空间 $\mathscr{L}(I,C^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d))$ 上的自然提升是完备的，也就是说，其柯西序列都收敛。

引理 2.15 （扩展度量积分的完备性）。 考虑一列映射$(v_n(\cdot)) \subset \mathscr{L}(I, C^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d))$ 满足柯西条件

$$\int_0^T \mathsf{d}_{\sup}(v_n(t), v_m(t))\mathrm{d}t \underset{n,m\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{2.8}$$

那么，存在一个元素 $v(\cdot) \in \mathscr{L}(I, C^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d))$ 使得

$$\int_0^T \mathsf{d}_{\sup}(v_n(t), v(t))\mathrm{d}t \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

证明。Th 由于该结果的证明相当标准，我们将其推迟到下文的附录 B 中。 □

2.3 Cont概率测度空间中的连续性方程与微分包含

本节回顾测度空间中连续性方程的已知结果，沿用通常的柯西–利普希茨理论和叠加型理论，例如文献 [4, 7], ，并介绍本文作者在文献[14]中提出的相应集值理论。

给定一个实数 $p \in [1, +\infty)$、时间范围 $T > 0$ 以及速度场 $v\colon [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$，我们将重点关注柯西问题的适定性和定性性质

$$\begin{cases} \partial_t \mu(t) + \mathrm{div}_x(v(t)\mu(t)) = 0, \\ \mu(\tau) = \mu_\tau, \end{cases} \tag{2.9}$$

其中（τ， μ_τ） $\in [0,T] \times \mathscr{P}_p$（$\mathbb{R}^d$）是固定数据，而 μ（$\cdot$） $\in C^0$（I， $\mathscr{P}$（$\mathbb{R}^d$））是测度的一条窄连续曲线。式（2.9）第一行中出现的动力学称为连续性方程，并按分布的意义理解

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\partial_t \phi(t,x) + \langle \nabla_x \phi(t,x), v(t,x)\rangle\Big)\mathrm{d}\mu(t)(x)\mathrm{d}t = 0,$$

对每个测试函数 $\phi \in C_c^\infty((0, T) \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R})$。本文中，我们主要考虑满足以下全部或部分假设的速度场；这些假设是采用柯西-Lipschitz 框架研究连续性方程时的标准假设。

假设（CE）。

（i）向量场 $v\colon [0,T]\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 是 *Carathéodory* 型的，并且存在映射 m（$\cdot$） $\in L^1$（$[0,T], \mathbb{R}_+$）使得

$$|v(t,x)| \le m(t)(1 + |x|),$$

对于 $\mathscr{L}^1$-几乎处处的 $t \in [0,T]$ 以及所有 $x \in \mathbb{R}^d$。

(ii) 存在一个映射 $l(\cdot) \in L^1([0,T], \mathbb{R}_+)$ 使得

$$\mathrm{Lip}(v(t)\,; \mathbb{R}^d) \le l(t),$$

对于几乎处处的 $t \in [0,T]$（相对于 $\mathscr{L}^1$）。

值得注意的是，尽管通常假设速度场关于 $x \in \mathbb{R}^d$ 在 [14] 中局部满足利普希茨条件，且文献中其他处理紧支撑测度的研究也作此假设，但要推导（**(CE)**-(ii) 中的全局条件对于在（$\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$ W_p $(\cdot,\cdot)$）中的定量稳定性估计是必要的。在下文的定义中，我们回顾由 Carathéodory 向量场生成的同胚流这一概念。

定义 2.16 (同胚流)。 设 $v\colon [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 是满足假设 **(CE)** 的速度场。那么，我们用 $(\Phi^v_{(\tau,t)}(\cdot))_{\tau, t\in[0,T]} \subset C^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ 表示解柯西问题的唯一<*strong*>同胚半群</*strong*>

$$\Phi^v_{(\tau,t)}(x) = x + \int_\tau^t v(s, \Phi^v_{(\tau,s)}(x))\mathrm{d}s,$$

对所有时间 $\tau, t \in [0,T]$ 以及任意 $x \in \mathbb{R}^d$。

在假设 (CE)的 Cauchy–Lipschitz 假设下，连续性方程的解在 $(\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)\ W_p(\cdot,\cdot))$ 中满足以下强适定性结果。下文中，给定某个$q \in [1,+\infty]$，为简洁起见，我们将频繁地写作 $\|\cdot\|_q := \|\cdot\|_{L^q([0,T])}$。

定理 *2.17*（连续性方程的经典适定性）。设 $(\tau, \mu_\tau) \in [0,T] \times \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$ 且$v\colon\ [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$是满足假设（*CE*）*-(i)* 的速度场。那么，柯西问题 *(2.9)* 存在正向解 $\mu(\cdot) \in AC([\tau,T], \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d))$，并且存在常数 $c_p > 0$，该常数仅取决于 p、$\mathcal{M}_p(\mu^0)$ 的大小以及 $\|m(\cdot)\|_1$，，使得

$$W_p(\mu(t_1), \mu(t_2)) \le c_p \int_{t_1}^{t_2} m(s)\mathrm{d}s, \tag{2.10}$$

对所有时间 $0 \le t_1 \le t_2 \le T$成立。如果进一步假设（**CE**）-(ii) 成立，那么(2.9) 的解唯一，在 $[0,T]$上全局定义，并可显式表示为

$$\mu(t) = \Phi^v_{(\tau,t)}(\cdot)_\sharp \mu_\tau, \tag{2.11}$$

对所有时间 $t \in [0,T]$。

证明。这些结论可由 [7, 第 8 节1] 中的若干标准结果与下文命题2.21 中给出的矩估计结合得出。

□

定义 2.16 和定理 2.17 共同表明，在 Cauchy-Lipschitz框架下，连续性方程的解可以明确写成初始数据沿速度场生成的特征曲线输运后的结果。当后者的正则性较低时，仍可借助叠加测度的概念，为这一想法赋予严格的含义。下文中，我们用 $\Sigma_T := C^0([0,T], \mathbb{R}^d)$ 表示从 $[0,T]$ 到 $\mathbb{R}^d$的连续弧空间。

定义 2.18 (叠加测度)。若元素 $\boldsymbol{\eta} \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^d \times \Sigma_T)$ 与勒贝格-博雷尔速度场 $v\colon [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$（时间起点为 $\tau \in [0,T]$）相关，且集中于满足下列条件的点对集合 $(x,\sigma) \in \mathbb{R}^d \times$绝对连续$([0,T], \mathbb{R}^d)$，则称其为一个叠加测度。

$$\sigma(t) = x + \int_\tau^t v(s, \sigma(s))\mathrm{d}s \tag{2.12}$$

对所有时间 $t \in [\tau,T]$。

可以通过所谓的2.9的求值映射，在所有时间 $t \in [0,T]$ 上建立叠加测度与（

$$\mathsf{e}_t : (x,\sigma) \in \mathbb{R}^d \times \Sigma_T \mapsto \sigma(t) \in \mathbb{R}^d.$$

更确切地说，可以验证：如果 $\boldsymbol{\eta} \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^d \times \Sigma_T)$ 是与速度场 $v\colon [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$相关联的叠加测度，使得（$\pi_{\mathbb{R}^d}$）$_\sharp \boldsymbol{\eta} = \mu_\tau$——其中 $\pi_{\mathbb{R}^d}\colon (x,\ \sigma) \in \mathbb{R}^d \times \Sigma_T \mapsto x \in \mathbb{R}^d$表示向空间分量的投影——并且满足以下局部可积性条件

$$\int_\tau^T \int_{\mathbb{R}^d \times \Sigma_T} \mathbb{1}_K(\sigma(t)) |v(t,\sigma(t))| \mathrm{d}\boldsymbol{\eta}(x,\sigma)\mathrm{d}t < +\infty$$

对每个紧集 $K \subset \mathbb{R}^d$都成立，那么由 $\mu(t)$ 定义的曲线：$= (\mathsf{e}_t)_\sharp \boldsymbol{\eta}$对所有时间 $t \in [\tau,T]$都是（2.9）的一个解。下面的定理回顾这一结论的逆命题——在文献中通常称为叠加原理——例如参见 [4, 定理 3。4]。

定理 2.19 (叠加原理)。设 $\tau,\ \mu_\tau) \in [0,T] \times \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$ 且 $\mu(\cdot) \in$绝对连续$([\tau,T],\ \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d))$是以下方程的一个解：(2.9)，该方程由满足以下条件的勒贝格-博雷尔速度场驱动：$v\colon\ [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 满足

$$\int_\tau^T \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|v(t,x)|}{1+|x|} \mathrm{d}\mu(t)(x)\mathrm{d}t < +\infty. \tag{2.13}$$

那么，存在一个叠加测度 $\boldsymbol{\eta}_\mu \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^d \times \Sigma_T)$，其意义见定义 *2.18*，使得$(\mathsf{e}_t)_\sharp \boldsymbol{\eta}_\mu = \mu(t)$ 对所有时间 $t \in [\tau,T]$均成立。

在本节余下部分，我们将为由勒贝格-博雷尔速度场驱动的方程（2.9）的解推导一系列有用的矩估计和稳定性估计 $v\colon\ [0,T]\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$，并附加假设：存在一个映射 $m(\cdot)\in L^1([0,T],\mathbb{R}_+$，使得

$$|v(t,x)|\le m(t)(1+|x|) \tag{2.14}$$

对 $\mathscr{L}^1$几乎处处的 $t\in[0,T]$ 以及 $\mu(t)$-几乎处处的 $x\in\mathbb{R}^d$成立。尽管其中一些基础技术已在我们先前的工作 [14], 中探讨过，但以下结果是新的，它们在限制较少的正则性假设下得到证明，并且需要若干额外论证。我们首先陈述 [14, 引理 1], 中已建立结果的一种改写，其证明[1] 只需进行少量技术性调整，便可直接由后者推出。

引理 2.20 (诱导最优传输的叠加计划)。 考虑两条测度曲线$\mu(\cdot)\ \nu(\cdot)\,\mathrm{AC}([\tau,T],\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d))$，它们由勒贝格-博雷尔速度场 $v,w\colon\ [0,T]\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$驱动，并满足逐点次线性估计

$$|v(t,x)|\le m(t)(1+|x|)\qquad and\qquad |w(t,y)|\le m(t)(1+|y|)$$

对 $\mathscr{L}^1$几乎处处的 $t\in[\tau,T]$ 以及 $\mu(t)\times\nu(t)$-几乎处处的 $(x,y)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$。此外，令 $\boldsymbol{\eta}_\mu,\boldsymbol{\eta}_\nu\in\mathscr{P}($ $\mathbb{R}^d\times\Sigma_T)$ 为定理 2.19给出的两个叠加测度，使得

$$\mu(t)=(\mathsf{e}_t)_\sharp\boldsymbol{\eta}_\mu\qquad and\qquad \nu(t)=(\mathsf{e}_t)_\sharp\boldsymbol{\eta}_\nu$$

对所有时间 $t\in[\tau,T]$ 均成立。于是，对于每个 $\gamma_\tau\in\Gamma_o(\mu(\tau)\ \nu(\tau))$，存在$\hat{}\boldsymbol{\eta}_{\mu,\nu}\in\Gamma(\boldsymbol{\eta}_\mu,\boldsymbol{\eta}_\nu)$ 使得

$$(\pi_{\mathbb{R}^d},\pi_{\mathbb{R}^d})_\sharp\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\mu,\nu}=\gamma_\tau\qquad and\qquad (\mathsf{e}_t,\mathsf{e}_t)_\sharp\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\mu,\nu}\in\Gamma_o(\mu(t),\nu(t))$$

对所有时间 $t\in[\tau,T]$ 均成立。

下文中，我们利用定理 2.19 和引理 2.20中的一般叠加结果，证明命题 2.9中的解的矩估计和一致可积不等式，见命题 2.21；同时证明关于初始数据和驱动场的两个稳定性估计，见命题 2.23。为便于阅读，这些结果的证明分别推迟至附录 C 和 D 。

命题 2.21 (矩估计和一致可积估计)。 给定 $(\tau,\mu_\tau)\in\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$ 以及$\mu(\cdot)\in$绝对连续$([\tau,T],\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d))$ 为方程 (2.9) 的一个解，其驱动场为勒贝格-博雷尔速度场 $v\colon\ [0,T]\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$，且满足次线性估计 (2.14)。那么，以下矩估计

$$\mathcal{M}_p(\mu(t))\le C_p\Big(\mathcal{M}_p(\mu_\tau)+\int_\tau^t m(s)\mathrm{d}s\Big)\exp\Big(C_p'\,\|m(\cdot)\|^p_{L^1([\tau,t])}\Big), \tag{2.15}$$

对所有时间 $t\in[\tau,T]$均成立，其中常数 C_p、$C_p'>0$ 由下式明确给出

$$C_p:=2^{(p-1)/p}\qquad and\qquad C_p':=\tfrac{2^{p-1}}{p}. \tag{2.16}$$

此外，对每个 $R>0$，以下一致可积性估计

$$\sup_{t\in[\tau,T]}\int_{\{x\ \text{s.t.}\ |x|\ge R\}}|x|^p\,\mathrm{d}\mu(t)(x)\ \le\ C_T^p\int_{\{x\ \text{s.t.}\ |x|\ge R/C_T-1\}}(1+|x|)^p\,\mathrm{d}\mu_\tau(x), \tag{2.17}$$

成立，其中 $C_T:=\max\ \{1,\mathrm{k}m(\cdot)\mathrm{k}_1\}\exp\ (\mathrm{k}m(\cdot)\mathrm{k}_1)$。

注 2.22 （精细矩不等式）。在下文中，我们将经常使用如下事实：若某个速度场 $v\colon\ [0,T]\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ 满足如下形式的稍更一般的次线性不等式

$$|v(t,x)|\le m(t)\Big(1+|x|+M(t)\Big),$$

[1]在 [14], 引理 1 的证明中，用于建立相关叠加测度序列相对窄紧性的强制泛函，其定义有一个小小的注意事项。尽管如此，只需将后者设为 $+\infty$ 满足 x，σ的有序对 ($\in\mathbb{R}^d\times\Sigma_T$所构成的闭集之外，其中 $|\dot\sigma(t)|\le m(t)(1+|\sigma(t)|$，结论仍然成立。

对 $\mathscr{L}^1$-几乎处处的 $t \in [0,T]$ 以及所有 $x \in \mathbb{R}^d$成立，其中 $M(\cdot) \in L^\infty([0,T], \mathbb{R}_+)$ 是先验给定的，则相应的测度曲线 $\mu(\cdot) \in \mathrm{AC}([\tau,T], \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d))$ 满足

$$\mathcal{M}_p(\mu(t)) \le C_p\Big(\mathcal{M}_p(\mu_\tau) + \int_\tau^t m(s)(1+M(s))\mathrm{d}s\Big) \exp\Big(C_p' \, \|m(\cdot)\|^p_{L^1([\tau,t])}\Big),$$

对所有时间 $t \in [\tau,T]$成立。后一个不等式可通过逐字重复附录 C 中详述的论证得到，同时将 $m(\cdot)$ 替换为 $m(\cdot)(1+M(\cdot))$。

命题 *2.23*（连续性方程的两个一般稳定性估计）。设 $\mu_\tau, \nu_\tau \in \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$ 和 $\mu(\cdot)\ \nu(\cdot) \in AC([\tau,T], \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d))$ 是方程 *(2.9)* 的两个解，它们分别由满足假设（*CE*）的 *Carathéodory* 速度场 $v\colon [0,T]\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 驱动，以及由符合逐点次线性估计的勒贝格-博雷尔速度场$w\colon [0,T]\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 驱动

$$|w(t,y)| \le m(t)(1+|y|), \tag{2.18}$$

for $\mathscr{L}^1$-几乎处处的 $t \in [0,T]$ 以及 $\nu(t)$-几乎处处的 $y \in \mathbb{R}^d$。那么，如果由此定义的映射 $\boldsymbol{b}\ \ y$

$$t \in [\tau,T] \mapsto \|v(t) - w(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d;\nu(t))}$$

是勒贝格可积的，则有以下全局稳定性估计

$$W_p(\mu(t),\nu(t)) \le C_p\Big(W_p(\mu_\tau,\nu_\tau) + \int_\tau^t \|v(s)-w(s)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d;\nu(s))}\,\mathrm{d}s\Big) \exp\Big(C_p' \, \|l(\cdot)\|^p_{L^1([\tau,t])}\Big), \tag{2.19}$$

对所有时间 $t \in [\tau,T]$成立，其中 $C_p,\ C_p' > 0$ 定义于 (2.16)。更一般地，在我们的假设下，该映射

$$t \in [\tau,T] \mapsto \|v(t) - w(t)\|_{L^\infty(B(0,R),\mathbb{R}^d;\nu(t))},$$

对每个 $R>0$ 都是勒贝格可积的，并且以下局部稳定性估计

$$\begin{aligned} W_p(\mu(t),\nu(t)) \le C_p\Big(W_p(\mu_\tau,\nu_\tau) + \int_\tau^t \|v(s)-w(s)\|_{L^\infty(B(0,R),\mathbb{R}^d;\nu(s))}\,\mathrm{d}s + \mathcal{E}_\nu(\tau,t,R)\Big) \\ \times \exp\Big(C_p' \, \|l(\cdot)\|^p_{L^1([\tau,t])}\Big), \end{aligned} \tag{2.20}$$

对所有时间 $t \in [\tau,T]$ 成立，其中额外的误差项由下式给出

$$\mathcal{E}_\nu(\tau,t,R) := 2\,\|m(\cdot)\|_{L^1([\tau,t])}\,(1+C_T)\Big(\int_{\{y \text{ s.t. } |y|\ge R/C_T - 1\}} (1+|y|)^p \mathrm{d}\nu_\tau(y)\Big)^{1/p}. \tag{2.21}$$

其中 $C_T := \max\{1,\ \mathrm{k}m(\cdot)\mathrm{k}_1\} \exp(\mathrm{k}m(\cdot)\mathrm{k}_1)$。

注记 *2.24*（与 [14]中的估计之比较）。上述命题 *2.23* 中给出的稳定性估计在以下两方面改进了 *[14]* 中的结果。首先，全局不等式 *(2.19)* 现在对满足次线性不等式 *(2.14)* 的一般勒贝格-博雷尔速度场 $w\colon [0,T]\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 成立，而不要求后者为 *Carathéodory*。其次，据我们所知，涉及定量误差项 $\mathcal{E}_\nu(\tau,t,R)$ 的不等式 *(2.20)* 是全新的；它对于弥补紧致收敛度量 $d_{cc}(\cdot,\cdot)$ 只能获得函数之间局部且非一致的偏差估计这一不足将至关重要。

我们通过回顾 *Wasserstein* 空间中的连续性包含 的定义，结束本节预备内容。本文作者在 [14] 中首次提出了这一概念，将其作为连续性方程的一种自然的集值推广。事实上，其定义采用了广为接受的观点：微分包含的解应理解为绝对连续曲线，其导数是容许速度的可测选择，参见例如 [9, 第 10]章。

定义 2.25 （在 $(\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)\ W_p(\cdot,\cdot))$ 中的连续性包含）。设 $V\colon [0,T]\times\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d) \rightrightarrows C^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$为一个集值映射。若曲线 $\mu(\cdot)\in \mathrm{AC}([0,T],\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d))$ 满足连续性包含连续性包含

$$\partial_t\mu(t)\in -\mathrm{div}_x\Big(V(t,\mu(t))\mu(t)\Big) \tag{2.22}$$

如果存在一个 $\mathscr{L}^1$-可测选择 $t\in[0,T]\mapsto v(t)\in V(t,\mu(t))\subset C^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$，使得轨迹-选择对 $(\mu(\cdot)\ v(\cdot))$ 是连续性方程的一个解

$$\partial_t\mu(t)+\mathrm{div}_x(v(t)\mu(t))=0,$$

（在分布意义下）。

3 Carathéodory 框架下的皮亚诺存在性

本节针对以下形式的集值柯西问题，建立一个一般性的存在性结果：

$$\begin{cases}\partial_t\mu(t)\in -\mathrm{div}_x\Big(V(t,\mu(t))\mu(t)\Big),\\ \mu(0)=\mu^0,\end{cases} \tag{3.1}$$

在 Wasserstein 空间中表述为 $(\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)\ W_p(\cdot,\cdot))$，并满足下文列出的 Carathéodory 正则性假设。我们的方法基于对 Filippov 针对微分方程提出的半离散欧拉格式进行细致改造，参见例如 [42, 第 1 章——定理 1]。据我们所知，这种方法完全新颖，因为它似乎尚未用于有限维向量空间中的微分包含。在测度动力学背景下，后者也可视为相对于例如 [31, 69, 70]中所发展的方法的一种形式。我们还要强调，我们的证明策略借助定理 2.1 的弱 [14, 46], 紧性 L^1判据，大幅改进了平均场控制文献中探讨的若干相关紧性论证，参见例如 [14, 46], 得益于定理2.1。

假设（P）。

(i) 集值映射 $(t,\mu)\in[0,T]\times\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d) \rightrightarrows V(t,\mu)\subset C^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$ 是 *Carathéodory* 映射，且其像非空、闭且凸。

(ii) 存在一个映射 $m(\cdot)\in L^1([0,T],\mathbb{R}_+)$，使得对于 $\mathscr{L}^1$-几乎处处的 $t\in[0,T]$，任意 $\mu\in\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$ 以及每个 $v\in V(t,\mu)$，都有

$$|v(x)|\le m(t)\Big(1+|x|+\mathcal{M}_p(\mu)\Big).$$

对所有 $x\in\mathbb{R}^d$。

(iii) 对于所有紧集 $\mathscr{K}\subset\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$ 和 $K\subset\mathbb{R}^d$，存在一个映射 $l(\cdot)\in L^1([0,T],\mathbb{R}_+)$ 以及连续模 $\omega\colon \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$，使得对于 $\mathscr{L}^1$-几乎处处的 $t\in[0,T]$、任意$\mu\in\mathscr{K}$和每个 $v\in V(t,\mu)$，都有

$$|v(t,x)-v(t,y)|\le l(t)\omega(|x-y|)$$

对所有 x、$y\in K$ 均成立。

(iv) 对于每个紧集 $\mathscr{K}\subset\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$，存在一个映射 $L(\cdot)\in L^1([0,T],\mathbb{R}_+)$ 以及一个连续模 $\omega\colon \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$，使得对于 $\mathscr{L}^1$-几乎处处的 $t\in[0,T]$、任意 $\mu,\nu\in\mathscr{K}$以及每个 $v\in V(t,\mu)$，存在 $w\in V(t,\nu)$ 满足

$$\mathsf{d}_{\mathrm{cc}}(v,w)\le L(t)\,\omega(W_p(\mu,\nu)).$$

关于前述假设，需要说明两点。首先，我们强调，出现在假设 $l(\cdot)$ $L(\cdot) \in L^1([0,T],\mathbb{R}_+)$ 以及局部连续模 ω： $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ 中的映射和局部连续模均局限于紧集上。尽管如此，为了使记号尽可能简洁，我们没有将这种依赖关系明确表示出来。其次，正如引言中所述，微分包含理论中的一个众所周知的事实是：在 Cauchy-Lipschitz 框架之外，通常必须对容许速度施加凸性假设，才能建立解的存在性，即使在有限维欧几里得空间中也是如此（例如参见 [8, 第 2]章）。

注 3.1 （满足我们假设的集值映射示例）。一个相关的集值映射示例 V： $[0,T] \times \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d) \rightrightarrows C^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ 满足假设 **(P)** 由如下形式的受控系统的容许速度集给出

$$V(t,\mu) := \Big\{ v(t,\mu,u) \in C^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d) \ \text{ s.t. } u \in U \Big\}.$$

其中，$(U, d_U(\cdot,\cdot))$ 是表示容许控制输入的紧度量空间，而 $v\colon [0,T]\times\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d) \times U \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 是一个向量场，它关于 $(t,u) \in [0,T]\times U$ 满足 *Carathéodory* 条件，同时关于 $(\mu,x) \in \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d) \times \mathbb{R}^d$ 局部一致连续，且相应常数是时间的勒贝格可积函数。在较简单的情形下，若映射 $(\mu,x) \in \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d) \times \mathbb{R}^d \mapsto v(t,\mu,u,x) \in \mathbb{R}^d$ 是全局利普希茨的，且其常数由时间的勒贝格可积函数给出，那么这个控制理论模型也符合第 4 节的假设（*CI*）。

接下来，我们陈述并证明本节的主要结果，该结果给出了在假设 3.1 下，满足 **(P)** 的解的存在性。

定理 3.2 （连续性包含的佩亚诺式存在性）。设 $V\colon [0,T]\times\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d) \rightrightarrows C^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$ 是满足假设 **(P)** 的集值映射。那么，对任意 $\mu^0 \in \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$，柯西问题

$$\begin{cases} \partial_t \mu(t) \in -\mathrm{div}_x\Big(V(t,\mu(t))\mu(t)\Big), \\ \mu(0) = \mu^0, \end{cases}$$

至少存在一个解 $\mu(\cdot) \in$ 绝对连续$([0,T], \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d))$。

定理 3.2 的证明采用一个分为五个步骤的构造性方案。步骤 1 中，我们先构造一列轨迹-选择对，它们满足带有延迟速度包含的连续性方程；接着在步骤 2 中证明，这些轨迹-选择对满足一致的矩界、正则性界和一致可积性界。步骤 3 中，我们进一步证明，这些估计蕴含该轨迹-选择对序列存在适当的弱聚点。为完成证明，我们还将在步骤 4 中证明，测度极限曲线满足由相应速度选择驱动的连续性方程；最后在步骤 5 中证明，该速度选择本身是容许速度集中的一个可测选择。

定理 3.2的证明。下文的目标是构造一列轨迹-选择对 $(\mu_n(\cdot)\ \ v_n(\cdot)) \in$ 绝对连续 $([0,T], \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)) \times \mathscr{L}([0,T], C^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d))$ 解的柯西问题

$$\begin{cases} \partial_t \mu_n(t) + \mathrm{div}_x(v_n(t)\mu_n(t)) = 0, \\ \mu_n(0) = \mu^0. \end{cases} \tag{3.2}$$

后者将被选取为满足延迟逐点速度包含关系

$$v_n(t) \in V\Big(t, \mu_n(t - \tfrac{T}{n})\Big), \tag{3.3}$$

对于 $\mathscr{L}^1$-几乎处处的 $t \in [0,T]$–在此以及下文中，按约定令 $\mu_n(t) := \mu^0$ 对于 $t \in [-\frac{T}{n}, 0]$–，以及一致的矩和正则性界

$$\mathcal{M}_p(\mu_n(t)) \le \mathcal{C} \qquad \text{and} \qquad W_p(\mu_n(\tau),\mu_n(t)) \le c_p \int_\tau^t m(s)\mathrm{d}s \tag{3.4}$$

对所有时间 $0 \le \tau \le t \le T$ 以及每个 $n \ge 1$。其中，常数 $\mathcal{C}, c_p > 0$ 仅取决于 $p, \mathcal{M}_p(\mu^0)$ 的大小以及 $\|m(\cdot)\|_{L^1}$。

步骤 1 – 序列的构造。 给定一个整数 $n \geq 1$，我们通过对 $k \in \{0, \dots, n-1\}$ 进行归纳法，明确构造满足上述条件的一对 $(\mu_n(\cdot)\ v_n(\cdot))$。首先，令 $I_n^0 := [0, \frac{T}{n}]$ 并注意，在假设 **(P)**-(i) 和 (ii) 下，集值映射

$$t \in I_n^0 \rightrightarrows V(t, \mu^0) \subset C^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$$

是 $\mathscr{L}^1$-可测的，且在局部一致收敛拓扑下具有非空闭像。因此，根据定理 $t \in I_n^0 \mapsto v_n^0(t) \in V(t,\ \mu^0)$ 可测选择由定理 2.6 给出，而相应的 Carathéodory 速度场 $v_n^0 :\ I_n^0 \times \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$ 满足次线性估计

$$|v_n^0(t,x)| \leq m(t)\Big(1 + |x| + \mathcal{M}_p(\mu^0)\Big),$$

对几乎所有 $t \in I_n^0$（相对于 $\mathscr{L}^1$），以及所有 $x \in \mathbb{R}^d$，这由假设 (P)-(ii) 和引理 2.13 得出。特别地，它满足假设 (CE)-(i)；由定理 2.17 在区间$I := I_n^0$上应用于 $v(t,x) := v_n^0(t,x)$，存在一个解 $\mu_n^0(\cdot) \in$绝对连续$(I_n^0, \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d))$，满足柯西问题

$$\begin{cases} \partial_t \mu_n^0(t) + \mathrm{div}_x(v_n^0(t)\mu_n^0(t)) = 0, \\ \mu_n^0(0) = \mu^0. \end{cases}$$

对 $k \in \{1, \dots, n-1\}$ 重复这一过程，下面将详细说明如何归纳地构造一族轨迹-选择对 $(\mu_n^k(\cdot)\ v_n^k(\cdot)) \in$绝对连续$(I_k, \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)) \times \mathscr{L}(I_k, C^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d))$，它们定义在时间区间族 $I_n^k := [\frac{kT}{n}, {}_{(k+1)_n}{}^{T}]$ 上。

首先，注意到对于 $\mathscr{L}^1$-几乎处处的 $t \in [0,T]$，集合 $V(t, \mu_n^{k-1}(t)) \subset C^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d$在由$\mathsf{d}_{cc}(\cdot,\cdot)$诱导的拓扑下是紧的，这是由假设$(\mathbf{P})$-$(ii)$和$(iii)$，结合阿尔泽拉-阿斯科利定理得出的。其次，由假设$(\mathbf{P})$-$(i)$，根据引理2.10-$(c)$可知

$$t \in I_n^k \rightrightarrows V\Big(t, \mu_n^{k-1}(t - \tfrac{T}{n})\Big) \subset C^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$$

是一个 $\mathscr{L}^1$-可测集值映射，其像非空。因此，由前文可知，它存在一个可测选择

$$t \in I_n^k \mapsto v_n^k(t) \in V\Big(t, \mu_n^{k-1}(t - \tfrac{T}{n})\Big). \tag{3.5}$$

此外，由引理2.13 和假设$(\mathbf{P})$-(ii)，向量场 $v_n^k :\ I_n^k \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 是 Carathéodory 的，并满足次线性估计

$$|v_n^k(t,x)| \leq m(t)\Big(1 + |x| + \mathcal{M}_p(\mu_n^{k-1}(t - \tfrac{T}{n}))\Big) \tag{3.6}$$

对于 $\mathscr{L}^1$-几乎处处的$t \in I_n^k$，所有 $x \in \mathbb{R}^d$以及每个 $k \in \{1, \dots, n-1\}$均成立。因此，通过在时间区间 $I := I_n^k$上应用定理 2.17，并令 $v(t,x) := v_n^k(t,x)$，随后可将 $\mu_n^k(\cdot) \in$定义为AC$(I_n^k, \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d))$中的一个解，该解满足柯西问题

$$\begin{cases} \partial_t \mu_n^k(t) + \mathrm{div}_x(v_n^k(t)\mu_n^k(t)) = 0, \\ \mu_n^k(\frac{kT}{n}) = \mu_n^{k-1}(\frac{kT}{n}). \end{cases}$$

根据连续性方程解的经典拼接性质（例如，参见 [40, 引理 44]），由下式定义的轨迹-选择对（$\mu_n(\cdot)\ v_n(\cdot)$）$\in$绝对连续$([0,T], \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)) \times \mathscr{L}([0,T], C^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d))$

$$\mu_n(t) := \mu_n^k(t) \qquad \text{and} \qquad v_n(t) := v_n^k(t), \tag{3.7}$$

对于 $t \in I_n^k$和 $k \in \{0, \dots, n-1\}$ 是柯西问题 (3.2) 的解。此外，利用 (3.5) 可以验证，该轨迹-选择对满足移位逐点包含 (3.3)。

步骤 2 – 一致矩估计与正则性估计。 我们现在的目标是建立 (3.4) 中假定的一致正则性与矩估计。首先请注意，由步骤 1 中详细描述的构造以及命题 2.21，曲线 $(\mu_n(\cdot)) \subset$ 绝对连续$([0,T],\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d))$ 满足

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathcal{M}_p(\mu_n(t)) < +\infty$$

对每个 $n \geq 1$。这使我们能够应用注释2.22中的矩估计，在当前情境下可写为

$$\mathcal{M}_p(\mu_n(t)) \leq C_p\Big(\mathcal{M}_p(\mu^0) + \int_0^t m(s)\Big(1+\mathcal{M}_p(\mu_n(s-\tfrac{T}{n}))\Big)\mathrm{d}s\Big)\exp\Big(C_p' \left\|m(\cdot)\right\|^p_{L^1([0,t])}\Big), \tag{3.8}$$

对所有时间 $t \in [0,T]$，再次采用约定：当 $t \in [-\frac{T}{n}, 0]$ 时，$\mu_n(t) = \mu^0$。定义映射 $\hat{m}(\cdot) \in L^1([0,2T], \mathbb{R}_+)$ 如下：

$$\hat{m}(t) := \begin{cases} m(t) & \text{if } t \in [0,T], \\ 0 & \text{if } t \in [T,2T], \end{cases} \tag{3.9}$$

可将（3.8）中给出的估计改写为

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_p(\mu_n(t)) &\leq C_p\Big(\mathcal{M}_p(\mu^0) + \int_0^t m(s)\mathrm{d}s + \int_0^{T/n} m(s)\mathcal{M}_p(\mu^0)\mathrm{d}s \\
&\qquad + \int_0^{\max\{0,\, t-T/n\}} m(s+\tfrac{T}{n})\mathcal{M}_p(\mu_n(s))\mathrm{d}s\Big)\exp\Big(C_p' \left\|m(\cdot)\right\|^p_{L^1([0,t])}\Big) \\
&\leq C_p(1+\mathcal{M}_p(\mu^0))\Big(1+\left\|m(\cdot)\right\|_{L^1([0,t])}\Big)\exp\Big(C_p' \left\|m(\cdot)\right\|^p_{L^1([0,t])}\Big) \\
&\qquad + C_p\Big(\int_0^t \hat{m}(s+\tfrac{T}{n})\mathcal{M}_p(\mu_n(s))\mathrm{d}s\Big)\exp\Big(C_p' \left\|m(\cdot)\right\|^p_{L^1([0,t])}\Big),
\end{aligned}$$

其中，第一个不等式由简单的变量替换得到，第二个不等式则源于 $\hat{m}(\cdot)$ 和 $\mathcal{M}_p(\mu_n(\cdot))$ 的非负性。因此，应用标准的格朗沃尔引理可得

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_p(\mu_n(t)) &\leq C_p(1+\mathcal{M}_p(\mu^0))\Big(1+\left\|m(\cdot)\right\|_{L^1([0,t])}\Big) \\
&\qquad \times \exp\left(C_p' \left\|m(\cdot)\right\|^p_{L^1([0,t])} + C_p \left\|\hat{m}(\cdot)\right\|_{L^1([0,t+T/n])} \exp\Big(C_p' \left\|m(\cdot)\right\|^p_{L^1([0,t])}\Big)\right)
\end{aligned}$$

对所有时间 $t \in [0,T]$。进而，注意到

$$\left\|\hat{m}(\cdot)\right\|_{L^1([0,t+T/n])} \leq \left\|m(\cdot)\right\|_1$$

对所有时间 $t \in [0,T]$ 以及每个 $n \geq 1$ 根据（3.9），还存在一个常数 $\mathcal{C} > 0$其仅取决于 p、$\mathcal{M}_p$（μ^0）以及$\|m$（$\cdot$）$\|_1$，，使得

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathcal{M}_p(\mu_n(t)) \leq \mathcal{C}$$

对每个 $n \geq 1$。特别是，速度场 $(v_n(\cdot)) \subset \mathscr{L}([0,T], C^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d))$ 满足一致次线性界

$$|v_n(t,x)| \leq (1+\mathcal{C})m(t)(1+|x|) \tag{3.10}$$

对 $\mathscr{L}^1$-几乎处处的 $t \in [0,T]$，所有 $x \in \mathbb{R}^d$ 以及每个 $n \geq 1$。因此，根据定理 2.17，存在一个常数 $c_p > 0$，它仅取决于 p、$\mathcal{M}_p(\mu^0)$ 和 $\|m(\cdot)\|_1$，使得

$$W_p(\mu_n(\tau), \mu_n(t)) \leq c_p \int_\tau^t m(s)\mathrm{d}s$$

对所有时间 $0 \leq \tau \leq t \leq T$。总之，我们已经证明，曲线序列 $(\mu_n(\cdot)) \subset$绝对连续$([0,T],\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d))$ 满足一致矩估计与绝对连续性估计 (3.4)。

步骤 3 – 轨迹-选择对序列的相对紧性。接下来，我们证明，步骤 2 的正则性估计可推出步骤 1 中构造的对序列 $(\mu_n(\cdot)\ v_n(\cdot)) \subset$ 绝对连续$([0,T],\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)) \times \mathscr{L}([0,T],C^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d))$ 的相对紧性。事实上，首先注意到，利用命题 2.21 的矩不等式 (2.15) 和一致可积性界 (2.17)，可能需要使用不同的常数 $C_T > 0$，可由命题 2.3 推得存在一个紧集 $\mathscr{K} \subset \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$，它仅依赖于 μ^0 和 $\mathrm{k}m(\cdot)\mathrm{k}_1$, ，使得

$$\mu_n(t) \in \mathscr{K} \tag{3.11}$$

对所有时间 $t \in [0,T]$。因此，考虑到序列 $(\mu_n(\cdot)) \subset \mathrm{AC}([0,T],\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$ 满足一致正则性估计（3.4），由完备可分度量空间上的阿尔泽拉-阿斯科利定理（例如，参见 [61, 第7章—定理 18]）可得

$$\sup_{t\in[0,T]} W_p(\mu_n(t),\mu(t)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{3.12}$$

对于某条曲线 测度的 $\mu(\cdot) \in \mathrm{AC}([0,T],\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d))$，沿着一个不重新标记的子序列。

关于速度选择序列，注意到对于每个 $m \geq 1$，$(v_n(\cdot)) \subset \mathscr{L}([0,T],C^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d))$ 在 $B(0,m)$ 上的空间限制构成一个可积有界序列，这是由 (3.10) 的次线性估计所致。此外，结合 (3.11) 和经典阿尔泽拉–阿斯科利定理，由假设 (P)-(iii) 可知，存在一个紧集族 $(\mathcal{K}_t^m)_{t\in[0,T]} \subset C^0(B(0,m)\ \mathbb{R}^d)$，使得

$$V\Big(t,\mu_n(t-\tfrac{T}{n})\Big)_{|B(0,m)} := \Big\{ v_{|B(0,m)} \in C^0(B(0,m),\mathbb{R}^d) \text{ s.t. } v \in V\Big(t,\mu_n(t-\tfrac{T}{n})\Big)\Big\} \subset \mathcal{K}_t^m$$

对于几乎处处的 $\mathscr{L}^1\ t \in [0,T]$ 以及任意 $n,m \geq 1$，其中 $v_{|B(0,m)}$ 表示函数 $v \in C^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$ 在 $B(0,m)$ 上的限制。因此，通过反复应用定理 2.1，并进行标准的对角线论证，我们可知存在一个 Carathéodory 向量场 $v(\cdot) \in \mathscr{L}([0,T],C^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d))$，使得对每个 $R > 0$，都有

$$v_n(\cdot) \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} v(\cdot) \tag{3.13}$$

弱收敛于 $L^1([0,T],\ C^0(B(0,\ R)\ \mathbb{R}^d))$，其中子序列依赖于 $R > 0$。特别地，这一收敛性质意味着

$$\int_0^T \langle \boldsymbol{\nu}(t), v(t) - v_n(t)\rangle_{C^0(B(0,R),\mathbb{R}^d)} \mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{3.14}$$

当 $\boldsymbol{\nu}(\cdot) \in L^\infty([0,T],\mathscr{M}(B(0,R)\ \mathbb{R}^d))$ 时，同样由定理 2.1，还可直接验证

$$\mathcal{M}_p(\mu(t)) \leq \mathcal{C} \qquad \text{and} \qquad W_p(\mu(\tau),\mu(t)) \leq c_p \int_\tau^t m(s)\mathrm{d}s$$

对所有时间 $t \in [0,T]$ 由（3.12）可知，而（3.10）和（3.13）经应用 Mazur 引理（例如参见 [18, 推论 3.8]）可得

$$|v(t,x)| \leq (1+\mathcal{C})m(t)(1+|x|), \tag{3.15}$$

对于几乎处处的 $\mathscr{L}^1$- $t \in [0,T]$，以及所有 $x \in \mathbb{R}^d$。

步骤 4 – 极限轨迹-选择对的动力学。 在此阶段，我们需要证明，由步骤 3 的紧性论证得到的极限轨迹-选择对 $(\mu(\cdot)\ v(\cdot)) \in \mathrm{AC}([0,T],\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)) \times \mathscr{L}([0,T],C^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d))$ 是柯西问题的分布解

$$\begin{cases} \partial_t\mu(t) + \mathrm{div}_x(v(t)\mu(t)) = 0, \\ \mu(0) = \mu^0. \end{cases} \tag{3.16}$$

首先，注意到由 (3.12) 以及步骤 1 中详细说明的构造可直接得出 $\mu(0) = \mu^0$。因此，接下来只需证明可以在 (3.2) 的弱形式中令 $n \to +\infty$ 趋于极限。该弱形式为：

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\partial_t \phi(t,x) + \langle \nabla_x \phi(t,x), v_n(t,x) \rangle \Big) \mathrm{d}\mu_n(t)(x) \mathrm{d}t = 0 \tag{3.17}$$

对所有 $\phi \in C_c^\infty((0,T) \times \mathbb{R}^d)$ 以及每个 $n \geq 1$。利用（3.12）的一致收敛性质以及命题 2.3，可以直接验证

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t \phi(t,x) \mathrm{d}\mu_n(t)(x) \mathrm{d}t \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t \phi(t,x) \mathrm{d}\mu(t)(x) \mathrm{d}t. \tag{3.18}$$

此外，注意到 [7, 定理12.1。1] 中针对有界 Carathéodory 向量场给出的收敛结果，对可积有界的 Carathéodory 向量场仍然成立——只需按照 [7, 引理5.1。7] 的思路作相应调整——由（3.15）结合（3.12）和命题 2.3 可得

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \langle \nabla_x \phi(t,x), v(t,x) \rangle \mathrm{d}\mu_n(t)(x) \mathrm{d}t \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \langle \nabla_x \phi(t,x), v(t,x) \rangle \mathrm{d}\mu(t)(x) \mathrm{d}t. \tag{3.19}$$

因此，合并（3.18）和（3.19），可以验证，为了通过令（3.16）中 $n \to +\infty$ 在（3.17）中取值而恢复动力学的弱形式，只需证明

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \langle \nabla_x \phi(t,x), v(t,x) - v_n(t,x) \rangle \mathrm{d}\mu_n(t)(x) \mathrm{d}t \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{3.20}$$

对每个 $\phi \in C_c^\infty((0,T) \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R})$，可能需要取一个子序列。为此，我们考虑如下形式的测试函数

$$\phi(t,x) := \zeta(t)\psi(x)$$

对所有 $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$ 以及某个 $(\zeta, \psi) \in C_c^\infty((0,T) \mathbb{R}) \times C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ 均成立，其线性张成在$C_c^\infty((0,T) \times \mathbb{R}^d$, $\mathbb{R})$ 中稠密（例如参见 [7, 第 8] 章）。接着令 $R_\psi > 0$ 满足 $\mathrm{supp}(\psi) \subset B(0, R_\psi)$，并注意到根据步骤 3，存在 $(v_n(\cdot)) \subset \mathscr{L}([0,T], C^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d))$ 的一个子序列，我们不再重新标记该子序列，使得 (3.13) 在 $L^1([0,T], C^0(B(0,R) \mathbb{R}^d))$ 中成立，其中

$$R := (1 + R_\psi) \max \Big\{ 1, (1 + \mathcal{C}) \|m(\cdot)\|_1 \Big\} \exp\Big((1 + \mathcal{C}) \|m(\cdot)\|_1 \Big). \tag{3.21}$$

在这种情况下，我们断言

$$\sup_{\sigma \in \mathrm{AC}([0,T], \mathbb{R}^d)} \Big\{ \Big| \int_0^T \zeta(t) \langle \nabla \psi(\sigma(t)), v(t, \sigma(t)) - v_n(t, \sigma(t)) \rangle \mathrm{d}t \Big| \text{ s.t. } \dot{\sigma}(t) = v_n(t, \sigma(t)) \\ \text{for } \mathscr{L}^1\text{-almost every } t \in [0,T] \Big\} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{3.22}$$

事实上，反设存在某个 $\varepsilon > 0$、Carathéodory 向量场 $(v_{n_k}(\cdot)) \subset \mathscr{L}([0,T], C^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d))$ 的一个子序列，以及曲线 $(\sigma_k(\cdot)) \subset$ 绝对连续$([0,T], \mathbb{R}^d)$ 的一个序列，使得

$$\dot{\sigma}_k(t) = v_{n_k}(t, \sigma_k(t))$$

对于 $\mathscr{L}^1$-几乎处处的 $t \in [0,T]$，并且

$$\Big| \int_0^T \zeta(t) \langle \nabla \psi(\sigma_k(t)), v(t, \sigma_k(t)) - v_{n_k}(t, \sigma_k(t)) \rangle | \mathrm{d}t \Big| \geq \varepsilon \tag{3.23}$$

对每个 $k \geq 1$，都存在一个序列 (τ_k)，使得 $\subset \mathrm{supp}(\zeta)$，且 $\sigma_k(\tau_k) \in B(0, R_\psi)$ 对每个 $k \geq 1$均成立。结合 (3.10) 中的估计和格朗沃尔引理，可得

$$|\sigma_k(t)| \leq R \qquad \text{and} \qquad |\sigma_k(t) - \sigma_k(\tau)| \leq (1 + \mathcal{C})(1 + R) \int_\tau^t m(s) \mathrm{d}s$$

对所有时间 $0 \le \tau \le t \le T$ 以及每个 $k \ge 1$，其中 $R > 0$ 如 (3.21) 中所给。于是，由阿尔泽拉-阿斯科利定理，存在一条曲线 $\sigma(\cdot) \in$ 绝对连续$([0,T],\mathbb{R}^d)$，使得

$$\sup_{t\in[0,T]} |\sigma(t) - \sigma_k(t)| \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{3.24}$$

沿着一个不再重新标记的子序列。此外，由假设 **(P)**-(iii) 以及勒贝格控制收敛定理可知

$$\sup_{n\ge1} \int_0^T |v_n(t,\sigma_k(t)) - v_n(t,\sigma(t))| \mathrm{d}t \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{3.25}$$

结合 (3.23)，进一步可得

$$\left| \int_0^T \zeta(t) \left\langle \nabla\psi(\sigma(t)), v(t,\sigma(t)) - v_{n_k}(t,\sigma(t)) \right\rangle \mathrm{d}t \right| \ge \frac{\varepsilon}{2}, \tag{3.26}$$

当 $k \ge 1$ 充分大时。然而，将 (3.14) 的弱紧性应用于映射 $t \in [0,T] \mapsto \boldsymbol{\nu}(t) := \zeta(t)\nabla\psi \cdot \delta_{\sigma(t)} \in \mathscr{M}(B(0,R)\ \mathbb{R}^d)$，必然有

$$\int_0^T \zeta(t) \left\langle \nabla\psi(\sigma(t)), v(t,\sigma(t)) - v_{n_k}(t,\sigma(t)) \right\rangle \mathrm{d}t \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{3.27}$$

沿着一个不再重新标记的子序列，这与 (3.26) 矛盾。

最后，我们注意到，根据定理 2.19，存在一个与 $(\boldsymbol{\eta}_n) \subset \mathscr{P}(\mathbb{R}^d \times \Sigma_T)$ 相关联的叠加测度序列 $(v_n(\cdot)) \subset \mathscr{L}([0,T], C^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d))$，满足

$$(\pi_{\mathbb{R}^d})_\sharp \boldsymbol{\eta}_n = \mu^0 \qquad \text{and} \qquad (\mathsf{e}_t)_\sharp \boldsymbol{\eta}_n = \mu_n(t),$$

对于所有时间 $t \in [0,T]$ 以及每个 $n \ge 1$。那么，根据 (3.22) 和富比尼定理，可以验证

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^T \zeta(t) \int_{\mathbb{R}^d} \langle \nabla\psi(x), v(t,x) - v_n(t,x) \rangle \mathrm{d}\mu_n(t)(x) \mathrm{d}t \right| \\
&\quad = \left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d\times\Sigma_T} \zeta(t) \left\langle \nabla\psi(\sigma(t)), v(t,\sigma(t)) - v_n(t,\sigma(t)) \right\rangle \mathrm{d}\boldsymbol{\eta}_n(x,\sigma)\mathrm{d}t \right| \\
&\quad \le \sup_{(x,\sigma)\in\mathrm{supp}(\boldsymbol{\eta}_n)} \left| \int_0^T \zeta(t) \left\langle \nabla\psi(\sigma(t)), v(t,\sigma(t)) - v_n(t,\sigma(t)) \right\rangle \mathrm{d}t \right| \\
&\quad \le \sup_{\sigma\in\mathrm{AC}([0,T],\mathbb{R}^d)} \left\{ \left| \int_0^T \zeta(t) \left\langle \nabla\psi(\sigma(t)), v(t,\sigma(t)) - v_n(t,\sigma(t)) \right\rangle \mathrm{d}t \right| \text{ s.t.} \right. \\
&\qquad\qquad \left. \dot\sigma(t) = v_n(t,\sigma(t)) \text{ for } \mathscr{L}^1\text{-almost every } t \in [0,T] \right\} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

由此可得（3.22），进而得到（3.20）。因此，我们已建立轨迹—速度选择对（$\mu(\cdot)$ $v(\cdot)$ $\in$绝对连续$([0,T],\ \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)\ \times \mathscr{L}([0,T],\ C^0(\mathbb{R}^d,\ \mathbb{R}^d)$ 是（3.16）的一个解。

步骤 5 – 极限速度选择的可容许性。在最后这一步中，我们通过证明极限 Carathéodory 向量场 $v(\cdot) \in \mathscr{L}([0,T], C^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d))$ 是（3.2）的一个可容许速度选择，从而完成定理 3.2 的证明，即

$$v(t) \in V(t,\mu(t)) \tag{3.28}$$

对于 $\mathscr{L}^1$几乎处处 $t \in [0,T]$。为此，我们回顾一下，序列 $(\mu_n(\cdot))$ $\subset$绝对连续$([0,T], \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d))$ 根据 (3.4) 等度连续，这意味着对于每个 $\delta > 0$，都存在一个整数 $N_\delta \ge 1$ 使得

$$W_p\Big(\mu_n(t - \tfrac{T}{n}), \mu_n(t)\Big) \le \delta,$$

对于所有时间 $t \in [0,T]$，只要 $n \geq N_\delta$。现在考虑曲线 $\tilde{\mu}_n(\cdot) \in$绝对连续$([0,T],\ \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d))$，其定义为 $\tilde{\mu}_n(t) := \mu_n(t - \frac{T}{n})$，对所有时间 $t \in [0,T]$ 均成立，并注意到

$$\sup_{t\in[0,T]} W_p(\tilde{\mu}_n(t), \mu(t)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{3.29}$$

由于前文所述，且

$$v_n(t) \in V(t, \tilde{\mu}_n(t)), \tag{3.30}$$

对几乎处处的 $\mathscr{L}^1$。此时，我们回顾一下，集值映射 $t \in [0,T] \rightrightarrows V(t,\mu(t)) \subset C^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$ 根据假设（P）-(ii) 和 (iii) 具有非空紧像，并且根据引理 2.10-(c) 是 $\mathscr{L}^1$-可测的。此外，注意到由假设（P）-(iv) 以及 (3.11) 可知，存在映射 $l(\cdot) \in L^1([0,T],\mathbb{R}_+)$ 和连续模 $\omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$，二者都可能依赖于 $\mathscr{K} \subset \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$，使得

$$V(t,\mu(t)) \cap \left\{ w \in C^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d) \text{ s.t. } \mathsf{d}_{\mathrm{cc}}(v_n(t), w) \leq l(t)\,\omega\Big(W_p(\tilde{\mu}_n(t),\mu(t))\Big) \right\}$$

对每个 $\mathscr{L}^1$-几乎处处的 $t \in [0,T]$都非空。因此，由引理 2.10-(a) 可知，对于每个$n \geq 1$，都存在一个可测选择

$$t \in [0,T] \mapsto \tilde{v}_n(t) \in V(t,\mu(t)) \tag{3.31}$$

使得

$$\mathsf{d}_{\mathrm{cc}}(\tilde{v}_n(t), v_n(t)) \leq l(t)\,\omega\Big(W_p(\tilde{\mu}_n(t),\mu(t))\Big)$$

对 $\mathscr{L}^1$-几乎处处 $t \in [0,T]$成立。由勒贝格控制收敛定理结合（3.12）和（3.13），进一步可得

$$\tilde{v}_n(\cdot) \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} v(\cdot) \tag{3.32}$$

在 $L^1([0,T],\ C^0(B(0,\ R)\ \mathbb{R}^d))$ 中弱收敛，其中子序列可能因 $R > 0$ 而异。最后，我们考虑由下式定义的函数集

$$\mathscr{V}_R := \left\{ w(\cdot) \in L^1([0,T], C^0(B(0,R),\mathbb{R}^d)) \text{ s.t. } w(t) \in V(t,\mu(t))_{|B(0,R)} \text{ for } \mathscr{L}^1\text{-almost every } t \in [0,T] \right\}$$

对每个 $R > 0$ 均成立，并注意到这些函数集在 $L^1([0,T],C^0(B(0,\ R)\ \mathbb{R}^d))$ 的强拓扑下是闭的。由于根据假设 (P)-(i)，这些函数集是凸的，因此由 [18, 定理 3.7] 可知，它们在 $L^1([0,T],C^0(B(0,\ R)\ \mathbb{R}^d))$ 中也弱闭。因此，由 (3.31) 和 (3.32)，可推知这些映射

$$v(\cdot)_{|B(0,R)} : t \in [0,T] \mapsto v(t)_{|B(0,R)} \in C^0(B(0,R),\mathbb{R}^d)$$

属于 $\mathscr{V}_R$对每个 $R > 0$均成立，这等价于 $v(t) \in V(t,\ \mu(t))$对 $\mathscr{L}^1$-几乎处处$t \in [0,T]$成立，从而完成定理 3.2的证明。 □

注 3.3（关于通过欧拉格式证明定理3.2 的选择）。为了证明具有 *Carathéodory* 右端的连续性包含存在解，一种颇具吸引力的策略（例如在 *[8, 第 2.1 节——定理 3]* 或 *[53, 定理 2.9]*, 中采用）是先考虑一个足够正则的精确或近似速度选择 $(t,\mu) \in [0,T]\times\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d) \mapsto v(t,\mu) \in C^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$，然后证明由后者驱动的连续性方程至少存在一个解。

尽管这一方案在实践中可能行得通，但由于以下原因，实施起来似乎很困难——而且或许并非最优。首先，对于取值于无限维空间的多值函数，不存在保证 *Carathéodory*集值映射存在 *Carathéodory*选择的结果，例如 *[9, 定理 9.5。2]* 即便能在我们的背景下找到恰当的对应结果，仍需证明相应的非局部连续性方程存在解，而这很可能需要借助欧拉格式。其次，尽管针对上半连续集值映射（例如 *[9, 定理 9.2。1]* ）给出正则近似选择族的结果，或许对 *Fréchet* 空间而非巴拿赫空间仍然成立，但由于这些选择的正则性缺乏一致性，证明相关序列的紧性可能颇具挑战。

4 柯西–利普希茨框架下的先验估计、紧性与松弛

本节将推导定量的适定性结果，并讨论集值柯西问题可达集的一些精细拓扑性质

$$\begin{cases} \partial_t \mu(t) \in -\mathrm{div}_x\Big(V(t,\mu(t))\mu(t)\Big), \\ \mu(0) = \mu^0. \end{cases} \tag{4.1}$$

为此，我们不再采用第 3 节研究的 Carathéodory 框架，而是在以下更强的 Cauchy–Lipschitz 假设下开展工作。

假设（CI）。

(i) 集值映射 $(t,\mu) \in [0,T] \times \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d) \rightrightarrows V(t,\mu) \subset C^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$ 是 *Carathéodory* 映射，且具有非空闭像。

(ii) 存在一个映射 $m(\cdot) \in L^1([0,T],\mathbb{R}_+)$，使得对 $\mathscr{L}^1$-几乎处处的 $t \in [0,T]$，任意 $\mu \in \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$、每个 $v \in V(t,\mu)$ 以及所有 $x \in \mathbb{R}^d$，均有

$$|v(x)| \le m(t)\Big(1 + |x| + \mathcal{M}_p(\mu)\Big)$$

对所有 $x \in \mathbb{R}^d$ 均成立。

(iii) 存在一个映射 $l(\cdot) \in L^1([0,T], \mathbb{R}_+)$，使得对于 $\mathscr{L}^1$-几乎处处的 $t \in [0,T]$、任意 $\mu \in \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$ 以及每个 $v \in V(t, \mu)$，都有

$$\mathrm{Lip}(v\,;\mathbb{R}^d) \le l(t).$$

(iv) 存在一个映射 $L(\cdot) \in L^1([0,T], \mathbb{R}_+)$，使得对于 $\mathscr{L}^1$-几乎处处的 $t \in [0,T]$、任意 μ、$\nu \in \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$ 以及每个 $v \in V(t, \mu)$，存在一个元素 $w \in V(t, \nu)$，使得

$$\mathsf{d}_{\sup}(v,w) \le L(t) W_p(\mu,\nu).$$

注4.1 （与 [14] 的主要假设比较）。 由局部利普希茨集值映射生成的紧支撑测度曲线的研究始于 *[14]*，除了一些细微的技术调整外，已完全包含在我们后续的研究中。同样地，在本文中，我们也可以选择这样的假设：动力学的利普希茨常数局部化于 $\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$ 的紧子集上。

4.1 解的存在性与 Filippov 估计

本节将证明柯西问题 (4.1) 的解的 Filippov 估计的一种新形式。对于任意给定的测度曲线，这些估计涉及该曲线的速度与微分包含的解的速度在任意球上的局部偏差项之和，此外还加上一个由该辅助曲线的初始数据尾部控制的余项。

定理 4.2 (Filippov 估计)。 设 $V\colon [0,T] \times \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d) \rightrightarrows C^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$ 是满足假设 **(CI)** 的集值映射，且 $\nu(\cdot) \in \mathrm{AC}([0,T],\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d))$ 是连续性方程的一个解

$$\partial_t \nu(t) + \mathrm{div}_y(w(t)\nu(t)) = 0$$

其驱动速度场为勒贝格-博雷尔速度场 $w\colon [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$，并满足次线性估计

$$|w(t,y)| \le m(t)(1 + |y|), \tag{4.2}$$

对几乎所有的 $\mathscr{L}^1$，$t \in [0,T]$ 和几乎所有的 $\nu(t)$，$y \in \mathbb{R}^d$。对于每个 $R > 0$，定义局部失配函数 $\eta_R(\cdot) \in L^1([0,T],\mathbb{R}_+)$ 如下：

$$\eta_R(t) := \mathrm{dist}_{L^\infty(B(0,R),\mathbb{R}^d;\nu(t))}\Big(w(t)\,;V(t,\nu(t))\Big) \tag{4.3}$$

对几乎所有的 $\mathscr{L}^1$， $t \in [0,T]$。

那么，对每个 $\mu^0 \in \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$ 以及每个 $R>0$，都存在一个轨迹-选择对 $(\mu(\cdot)\ v(\cdot)) \in$绝对连续$([0,T],\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)) \times \mathscr{L}([0,T],C^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d))$ 柯西问题 (4.1) 的解，并满足距离估计

$$W_p(\mu(t),\nu(t)) \leq \mathcal{D}_p(t,R) \tag{4.4}$$

对所有时间 $t \in [0,T]$，其中

$$\mathcal{D}_p(t,R) := C_p\Big(W_p(\mu^0,\nu(0)) + \int_0^t \eta_R(s)\mathrm{d}s + \mathcal{E}_\nu(t,R)\Big)\exp\Big(C_p' \left\|l(\cdot)\right\|^p_{L^1([0,t])} + \chi_p(t)\Big). \tag{4.5}$$

其中，t 常数 $C_p, C_p' > 0$ 与 (2.16)中的相同，误差项 $\mathcal{E}_\nu(t,R)$ 有明确表达式 by

$$\mathcal{E}_\nu(t,R) := 2\left\|m(\cdot)\right\|_{L^1([0,t])}(1+\mathcal{C}_T)\Big(\int_{\{y \text{ s.t. } |y|\geq R/\mathcal{C}_T - 1\}}(1+|y|)^p \mathrm{d}\nu(0)(y)\Big)^{1/p}$$

对于某个常数 $\mathcal{C}_T > 0$，该常数仅取决于 $p, \mathcal{M}_p(\mu^0)$ 的大小，以及 $\left\|m(\cdot)\right\|_1$,和映射 $\chi_p(\cdot) \in L^\infty([0,T],\mathbb{R}_+)$ 对所有 $t \in [0,T]$ 均可写为

$$\chi_p(t) := C_p\left\|L(\cdot)\right\|_{L^1([0,t])}\exp\Big(C_p'\left\|l(\cdot)\right\|^p_{L^1([0,t])}\Big). \tag{4.6}$$

此外，速度选择 $t \in [0,T] \mapsto v(t) \in V(t,\mu(t))$ 满足逐点估计

$$\left\|v(t) - w(t)\right\|_{L^\infty(B(0,R),\mathbb{R}^d;\nu(t))} \leq \eta_R(t) + L(t)\mathcal{D}_p(t,R) \tag{4.7}$$

对于几乎处处的 $\mathscr{L}^1$， $t \in [0,T]$。

在转向定理 4.2 的证明之前，我们先陈述一个关于链式积分估计的技术引理，其证明只需一个直接的归纳论证。

引理 4.3 (满足递归积分估计的函数族的一致有界性)。 设 $m(\cdot) \in L^1([0,T],\mathbb{R}_+)$ 和 f^0、 $\alpha > 0$ 是两个给定常数。那么，任何至多可数的函数族 $(f_n(\cdot)) \subset C^0([0,T],\mathbb{R}_+)$，若满足 $\left\|f_0(\cdot)\right\|_{C^0([0,T],\mathbb{R}_+)} \leq f^0$ 以及递归估计

$$f_{n+1}(t) \leq \alpha\Big(1 + \int_0^t m(s)f_n(s)\mathrm{d}s\Big)$$

对所有时间 $t \in [0,T]$ 和每个 $n \geq 0$ 都一致有界，其中

$$\sup_{n\geq 0}\left\|f_n(\cdot)\right\|_{C^0([0,T],\mathbb{R}_+)} \leq (\alpha + f^0)\exp\left(\alpha\left\|m(\cdot)\right\|_1\right).$$

定理 4.2 的证明基于一种构造性方案，与定理 3.2 的证明颇为相似，并分为四个步骤。步骤 1 通过沿着 $\nu(\cdot)$ 运用选择原理，详细说明如何初始化相应的归纳论证；步骤 2 则构造出完整的轨迹-选择对序列。随后，步骤 3 证明该序列在适当的扩展度量下是柯西序列；最后，步骤 4 证明相应的极限对是方程 (4.1) 的一个解，并满足稳定性估计 (4.4) 和 (4.7)。

定理 *4.2* 的证明。接下来，我们的目标是构造一列轨迹-选择对 $(\mu_n(\cdot)\ v_n(\cdot))$， $\subset$绝对连续$([0,T],\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)) \times \mathscr{L}([0,T],C^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d))$，其元素满足柯西问题

$$\begin{cases}\partial_t\mu_n(t) + \mathrm{div}_x(v_n(t)\mu_n(t)) = 0,\\ \mu_n(0) = \mu^0,\end{cases} \tag{4.8}$$

同时还满足条件

$$v_{n+1}(t) \in V(t,\mu_n(t)) \qquad \text{and} \qquad \mathsf{d}_{\sup}(v_n(t),v_{n+1}(t)) \leq L(t)W_p(\mu_{n-1}(t),\mu_n(t)) \tag{4.9}$$

对 $\mathscr{L}^1$-几乎处处的 $t \in [0,T]$，并满足一致的矩界和正则性界

$$\mathcal{M}_p(\mu_n(t)) \leq \mathcal{C} \qquad \text{and} \qquad W_p(\mu_n(\tau),\mu_n(t)) \leq c_p\int_\tau^t m(s)\mathrm{d}s \tag{4.10}$$

对于所有时间 $0 \leq \tau \leq t \leq T$ 以及每个 $n \geq 1$。其中，常数 $\mathcal{C}$， $c_p > 0$ 仅取决于 p， $\mathcal{M}_p(\mu^0)$ 的大小以及 $\mathbf{k}m(\cdot)\mathbf{k}_1$。

步骤 1 – 序列的初始化。首先注意，结合假设（CI）-(*ii*) 和 (*iii*) 以及定理 2.14 可知，对于 $\mathscr{L}^1$-几乎处处的 $t \in [0,T]$，可容许速度集 $V(t,\nu(t)) \subset C^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$ 在紧集上一致收敛拓扑下是紧的。此外，在假设（CI）-(*i*) 和 (*iv*) 下，由引理 2.10-(*c*) 可知，集值映射 $t \in [0,T] \rightrightarrows V(t,\nu(t)) \subset C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}^d)$ 是 $\mathscr{L}^1$-可测的。此外，可以验证

$$(t,v) \in [0,T] \times C^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d) \mapsto \|v - w(t)\|_{L^\infty(B(0,R),\mathbb{R}^d;\nu(t))} \in \mathbb{R}_+$$

对于每个 $R>0$，它都是一个 Carathéodory 映射，具体而言，它关于 $\mathscr{L}^1$是可测的，关于 $t \in [0,T]$是连续的 $v \in C^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$，其中拓扑由 $\mathrm{d_{cc}}(\cdot,\cdot)$ 诱导。因此，回顾失配函数 $\eta_R(\cdot)$ 的定义（4.3），并将引理 2.10-*b*应用于多值函数

$$t \in [0,T] \rightrightarrows V(t,\nu(t)) \cap \Big\{ v \in C^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d) \text{ s.t. } \|v - w(t)\|_{L^\infty(B(0,R),\mathbb{R}^d,\,\nu(t))} = \eta_R(t) \Big\},$$

我们得 到一个 $\mathscr{L}^1$-可测映射 $t \in [0,T] \mapsto v_1(t) \in V(t,\nu(t))$，使得

$$\|v_1(t) - w(t)\|_{L^\infty(B(0,R),\mathbb{R}^d;\nu(t))} = \eta_R(t) \tag{4.11}$$

对于 $\mathscr{L}^1$-几乎处处的 $t \in [0,T]$。

注意，由假设 **(CI)**-*ii*) 和 (*iii*)，以及引理 2.13，可得速度场 $v_1 \colon [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 是 Carathéodory 映射，并且满足

$$|v_1(t,x)| \le m(t)\Big(1 + |x| + \mathcal{M}_p(\nu(t))\Big) \qquad \text{and} \qquad \mathrm{Lip}(v_1(t);\mathbb{R}^d) \le l(t)$$

对于 $\mathscr{L}^1$几乎处处 $t \in [0,T]$ 以及所有 $x \in \mathbb{R}^d$。特别地，它满足假设 **(CE)**，由定理 2.17 可知，柯西问题存在唯一的曲线 $\mu_1(\cdot) \in \mathrm{AC}([0,T],\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d))$ 解

$$\begin{cases} \partial_t \mu_1(t) + \mathrm{div}_x(v_1(t)\mu_1(t)) = 0, \\ \mu_1(0) = \mu^0. \end{cases}$$

由于 th　　备注 2.22中的矩估计，曲线 $\mu_1(\cdot)$ 还满足如下估计

$$\mathcal{M}_p(\mu_1(t)) \le C_p\Big(\mathcal{M}_p(\mu^0) + \int_0^t m(s)\Big(1 + \mathcal{M}_p(\nu(s))\Big)\mathrm{d}s\Big) \exp\Big(C_p' \, \|m(\cdot)\|^p_{L^1([0,t])}\Big), \tag{4.12}$$

对所有时间 $t \in [0,T]$ 均成立。因此，由引理 4.3 以及将命题 2.21 的 (2.15) 应用于曲线 $\nu(\cdot) \in \mathrm{AC}([0,T],\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d))$，可知存在常数 $\mathcal{C}>0$，该常数仅取决于 p、$\mathcal{M}_p(\mu^0)$ $\mathcal{M}_p(\nu(0))$ 的大小以及 $\mathrm{k}m(\cdot)\mathrm{k}_{1,}$，使得

$$\max\Big\{\mathcal{M}_p(\nu(t)),\, \mathcal{M}_p(\mu_1(t))\Big\} \le \mathcal{C} \tag{4.13}$$

对所有时间 $t \in [0,T]$ 均成立。特别地，速度场 $v_1 \colon [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 满足

$$|v_1(t,x)| \le (1+\mathcal{C})m(t)(1+|x|), \tag{4.14}$$

对于 $\mathscr{L}^1$几乎处处 $t \in [0,T]$ 以及所有 $x \in \mathbb{R}^d$，结合定理2.10的（2.17）可知，存在常数 $c_p>0$，其仅取决于 p、$\mathcal{M}_p(\mu^0)$ $\mathcal{M}_p(\nu(0))$ 以及$\|m(\cdot)\|_1$，使得

$$W_p(\mu_1(\tau),\mu_1(t)) \le c_p \int_\tau^t m(s)\mathrm{d}s$$

对于所有时间 $0 \le \tau \le t \le T$。此外，应用命题2.20的近似稳定性不等式（2.23 ），并考虑次线性估计（4.14），可进一步得到

$$W_p(\mu_1(t),\nu(t)) \le C_p\Big(W_p(\mu^0,\nu(0)) + \int_0^t \eta_R(s)\mathrm{d}s + \mathcal{E}_\nu(t,R)\Big) \exp\Big(C_p' \, \|l(\cdot)\|^p_{L^1([0,t])}\Big) \tag{4.15}$$

对于所有时间 $t \in [0,T]$，其中

$$\mathcal{E}_\nu(t,R) := 2\,\|m(\cdot)\|_{L^1([0,t])}\,(1+\mathcal{C}_T)\Big(\int_{\{\text{ s.t. } |y| \ge R/\mathcal{C}_T - 1\}} (1+|y|)^p \mathrm{d}\nu(0)(y)\Big)^{1/p}$$

满足 $\mathcal{C}_T \colon =$最大值 $\{1,(1+\mathcal{C})\|m(\cdot)\|_1\}\exp\left((1+\mathcal{C})\|m(\cdot)\|_1\right)$。结合（4.12）的矩估计，便完成了归纳论证的初始化步骤。

步骤 2 – 轨迹-选择对序列的构造。在此阶段，请注意

$$\mathsf{d}_{\sup}(v_1(t),w)=\sup_{m\geq 1}\|v_1(t)-w\|_{C^0(B(0,m),\mathbb{R}^d)}$$

对于几乎所有的 $\mathscr{L}^1$ $t\in[0,T]$，以及所有的 $w\in C^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$，并且根据构造，映射 $(t,w)\in[0,T]\times C^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)\mapsto \mathsf{k}v_1(t)-w\mathsf{k}_{C^0(B(0,m)\,\mathbb{R}^d)}\in\mathbb{R}_+$ 对每个 $m\geq 1$ 都是 Carathéodory 的。因此，根据引理 2.10-(a) 与假设 (CI)-(iv)，存在一个 $\mathscr{L}^1$-可测映射 $t\in[0,T]\mapsto v_2(t)\in V(t,\mu_1(t))$，满足

$$\mathsf{d}_{\sup}(v_1(t),v_2(t))\leq L(t)W_p(\mu_1(t),\nu(t))$$

对于 $\mathscr{L}^1$几乎所有的 $t\in[0,T]$。根据假设 **(CI)**-(ii) 和 (iii)，结合引理 2.13，我们可以推知速度场 $v_2:[0,T]\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$是 Carathéodory 的，并且满足

$$|v_2(t,x)|\leq m(t)\Big(1+|x|+\mathcal{M}_p(\mu_1(t))\Big)\qquad\text{and}\qquad \mathrm{Lip}(v_2(t);\mathbb{R}^d)\leq l(t),$$

对于 $\mathscr{L}^1$-几乎处处的 $t\in[0,T]$ 以及所有 $x\in\mathbb{R}^d$。特别地，它满足假设**(CE)**，因此生成相应柯西问题的唯一解 $\mu_2(\cdot)\in\mathrm{AC}([0,T],\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d))$

$$\begin{cases}\partial_t\mu_2(t)+\mathrm{div}_x(v_2(t)\mu_2(t))=0,\\ \mu_2(0)=\mu^0.\end{cases}$$

根据备注2.22 中的精细矩估计以及命题2.19的估计（2.23），可以再次验证

$$\begin{cases}\mathcal{M}_p(\mu_2(t))\leq C_p\Big(\mathcal{M}_p(\mu^0)+\displaystyle\int_0^t m(s)\Big(1+\mathcal{M}_p(\mu_1(s))\Big)\mathrm{d}s\Big)\exp\Big(C_p'\,\|m(\cdot)\|^p_{L^1([0,t])}\Big),\\ W_p(\mu_1(t),\mu_2(t))\leq C_p\Big(\displaystyle\int_0^t \mathsf{d}_{\sup}(v_1(s),v_2(s))\mathrm{d}s\Big)\exp\Big(C_p'\,\|l(\cdot)\|^p_{L^1([0,t])}\Big).\end{cases}$$

由引理4.3可知，特别有

$$\max\Big\{\mathcal{M}_p(\nu(t))\,,\,\mathcal{M}_p(\mu_1(t))\,,\,\mathcal{M}_p(\mu_2(t))\Big\}\leq\mathcal{C}$$

对于所有时间 $t\in[0,T]$，其中 $\mathcal{C}>0$ 是与步骤 1 中相同的常数，它仅取决于 $p,\mathcal{M}_p(\mu^0)$ $\mathcal{M}_p(\nu(0))$ 和 $\mathsf{k}m(\cdot)\mathsf{k}_1$ 的大小。

重复这一过程，我们可以归纳地构造一个序列 $(\mu_n(\cdot)\ v_n(\cdot))\subset\mathrm{AC}([0,T],\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d))\times\mathscr{L}([0,T],C^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d))$，它由满足柯西问题（4.8）的轨迹-选择对解组成，其元素满足条件（4.9）以及（4.10）中的界。此外，对于每个 $n\geq 1$，这些解还满足一致次线性估计

$$|v_n(t,x)|\leq(1+\mathcal{C})m(t)(1+|x|),\tag{4.16}$$

对于几乎所有的 $t\in[0,T]$（相对于 $\mathscr{L}^1$）以及所有的 $x\in\mathbb{R}^d$，距离估计也成立。

$$W_p(\mu_n(t),\mu_{n+1}(t))\leq C_p\Big(\int_0^t\mathsf{d}_{\sup}(v_n(s),v_{n+1}(s))\mathrm{d}s\Big)\exp\Big(C_p'\,\|l(\cdot)\|^p_{L^1([0,t])}\Big),\tag{4.17}$$

对于所有时间 $t\in[0,T]$。

步骤 3 – 轨迹-选择对序列的收敛。下文将证明，在**步骤 1 和步骤 2**中构造的对序列 $(\mu_n(\cdot)\ v_n(\cdot))\subset$绝对连续$([0,T],\ \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d))\times\mathscr{L}([0,T],\ C^0(\mathbb{R}^d,\ \mathbb{R}^d))$

步骤 1 和步骤 2 在适当意义下是柯西序列。首先注意到，将（4.9）、（4.15）和（4.17）中的距离估计合并，可得

$$
\begin{aligned}
&W_p(\mu_n(t),\mu_{n+1}(t))\\
&\le C_p\Big(\int_0^t \mathsf{d}_{\sup}(v_n(s_n),v_{n+1}(s_n))\mathrm{d}s_n\Big)\exp\Big(C_p'\,\|l(\cdot)\|^p_{L^1([0,t])}\Big)\\
&\le C_p\Big(\int_0^t L(s_n)W_p(\mu_{n-1}(s_n),\mu_n(s_n))\mathrm{d}s_n\Big)\exp\Big(C_p'\,\|l(\cdot)\|^p_{L^1([0,t])}\Big)\\
&\le C_p^2\Big(\int_0^t L(s_n)\int_0^{s_n}\mathsf{d}_{\sup}(v_{n-1}(s_{n-1}),v_n(s_{n-1}))\mathrm{d}s_{n-1}\mathrm{d}s_n\Big)\exp\Big(2C_p'\,\|l(\cdot)\|^p_{L^1([0,t])}\Big)\\
&\vdots\\
&\le C_p^n\Big(\int_0^t L(s_n)\int_0^{s_n}L(s_{n-1})\ldots\int_0^{s_2}L(s_1)W_p(\mu_1(s_1),\nu(s_1))\mathrm{d}s_1\ldots\mathrm{d}s_{n-1}\mathrm{d}s_n\Big)\exp\Big(n\,C_p'\,\|l(\cdot)\|^p_{L^1([0,t])}\Big)\\
&\le \frac{C_p^{n+1}}{n!}\Big(\int_0^t L(s)\mathrm{d}s\Big)^n\Big(W_p(\mu^0,\nu(0))+\int_0^t\eta_R(s)\mathrm{d}s+\mathcal{E}_\nu(t,R)\Big)\exp\Big((n+1)\,C_p'\,\|l(\cdot)\|^p_{L^1([0,t])}\Big),\\
&= \frac{\chi_p(t)^n}{n!}\,C_p\Big(W_p(\mu^0,\nu(0))+\int_0^t\eta_R(s)\mathrm{d}s+\mathcal{E}_\nu(t,R)\Big)\exp\Big(C_p'\,\|l(\cdot)\|^p_{L^1([0,t])}\Big)
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

对所有时间 $t\in[0,T]$ 及每个 $n\ge 1$，其中我们回顾 $\chi_p(\cdot)\in L^\infty([0,T],\mathbb{R}_+)$ 按照式(4.6)定义。因此，对于任意一对整数 $m,n\ge 1$，可由式(4.18)推出

$$
\begin{aligned}
&\sup_{t\in[0,T]} W_p(\mu_n(t),\mu_{n+m}(t))\\
&\le \sup_{t\in[0,T]}\sum_{k=n}^{n+m-1} W_p(\mu_k(t),\mu_{k+1}(t))\\
&\le \Big(\sum_{k=n}^{n+m-1}\frac{\|\chi_p(\cdot)\|^k_\infty}{k!}\Big)C_p\Big(W_p(\mu^0,\nu(0))+\int_0^T\eta_R(s)\mathrm{d}s+\mathcal{E}_\nu(T,R)\Big)\exp\Big(C_p'\,\|l(\cdot)\|^p_{L^1([0,t])}\Big)\underset{m,n\to+\infty}{\longrightarrow}0,
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

这意味着$(\mu_n(\cdot))\subset \mathrm{AC}([0,T],\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d))$是在 $C^0([0,T],\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d))$ 中的一个柯西序列。注意到后者是一个完备度量空间，例如由 [61, 第7章 – 定理 12], 可知，存在某个 $\mu(\cdot)\in C^0([0,T],\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d))$，使得

$$
\sup_{t\in[0,T]} W_p(\mu_n(t),\mu(t))\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0. \tag{4.20}
$$

此外，由于对序列$(\mu_n(\cdot))\subset \mathrm{AC}([0,T],\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d))$ 在式(4.10)中建立的等度绝对连续性估计，极限曲线同样绝对连续，并且

$$
W_p(\mu(\tau),\mu(t))\le c_p\int_\tau^t m(s)\mathrm{d}s
$$

对所有时间 $0\le\tau\le t\le T$。

关于 Carathéodory 向量场序列 $(v_n(\cdot))\subset\mathscr{L}([0,T],C^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d))$, 由 (4.9) 以及 (4.19) 中的估计可直接得出，对每个 $m,n\ge 1$，均有

$$
\begin{aligned}
\int_0^T\mathsf{d}_{\sup}(v_n(t),v_{n+m}(t))\mathrm{d}t &\le \sum_{k=n}^{m+n-1}\int_0^T\mathsf{d}_{\sup}(v_k(t),v_{k+1}(t))\mathrm{d}t\\
&\le \|L(\cdot)\|_1\sup_{t\in[0,T]}\sum_{k=n}^{m+n-1}W_p(\mu_{k-1}(t),\mu_k(t))\underset{m,n\to+\infty}{\longrightarrow}0.
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

因此，由引理 2.15，存在一个映射 $v(\cdot)\in\mathscr{L}([0,T],C^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d))$，使得

$$
\int_0^T\mathsf{d}_{\sup}(v_n(t),v(t))\mathrm{d}t\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0. \tag{4.22}
$$

这尤其表明存在一个子序列 $(v_{n_k}(\cdot)) \subset \mathscr{L}([0,T],\ C^0(\mathbb{R}^d,\ \mathbb{R}^d))$，满足

$$\mathsf{d}_{\sup}(v_{n_k}(t), v(t)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

对于 $\mathscr{L}^1$-几乎处处的 $t \in [0,T]$，结合（4.16）可直接推出，极限速度场 $v\colon\ [0,T]\times\mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$ 满足次线性性和正则性估计

$$|v(t,x)| \le (1+\mathcal{C})m(t)(1+|x|) \qquad \text{and} \qquad \mathrm{Lip}(v(t);\mathbb{R}^d) \le l(t), \tag{4.23}$$

对于 $\mathscr{L}^1$-几乎处处的 $t \in [0,T]$ 以及所有 $x \in \mathbb{R}^d$。

步骤 4——极限轨迹-选择对的性质。结合命题 2.4 中的估计（2.4）、命题 2.23 中的稳定性不等式（2.20）以及（4.23），根据（4.20）和（4.22）的收敛结果，可以直接推出，轨迹-选择对（$\mu(\cdot)$ $v(\cdot)$）$\in$绝对连续$([0,T],\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d))$ $\times$ $\mathscr{L}([0,T],C^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d))$满足柯西问题

$$\begin{cases} \partial_t \mu(t) + \mathrm{div}_x(v(t)\mu(t)) = 0, \\ \mu(0) = \mu^0. \end{cases} \tag{4.24}$$

论证的下一步是证明后者实际上满足连续性包含（4.1）。根据（4.9），轨迹-选择对序列满足

$$v_{n+1}(t) \in V(t, \mu_n(t)) \tag{4.25}$$

for $\mathscr{L}^1$几乎处处 $t \in [0,T]$ 且每个 $n \ge 1$。由（4.20）和（4.22），还可进一步得到 t

$$W_p(\mu_n(t), \mu(t)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{4.26}$$

对所有时间 $t \in [0,T]$，以及

$$\mathsf{d}_{\sup}(v_n(t), v(t)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{4.27}$$

对 $\mathscr{L}^1$几乎处处 $t \in [0,T]$，沿着一个不再重新标记的子序列。于是，结合（4.25）与逐点收敛结果（4.26）和（4.27）以及假设**(CI)**-（iv），可得

$$v(t) \in V(t, \mu(t))$$

对 $\mathscr{L}^1$几乎处处 $t \in [0,T]$，根据定义2.25，结合（4.24）可知μ（·）$\in$绝对连续（$[0,T]$，$\mathscr{P}_p$（$\mathbb{R}^d$）是一个解（4.1），由选择 $t \in [0,T] \mapsto v$（t）$\in V$（t，μ（t）驱动。

现在，只剩下推导（4.4）和（4.7）中给出的距离估计和速度估计。为此，注意到（4.18）中的逐点不等式链蕴含

$$\begin{aligned} W_p(\mu_n(t),\nu(t)) &\le W_p(\mu_1(t),\nu(t)) + \sum_{k=1}^{n-1} W_p(\mu_k(t),\mu_{k+1}(t)) \\ &\le \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\chi_p(t)^k}{k!}\right) C_p\left(W_p(\mu^0,\nu(0)) + \int_0^t \eta_R(s)\mathrm{d}s + \mathcal{E}_\nu(t,R)\right) \exp\left(C_p' \left\|l(\cdot)\right\|_1^p\right) \\ &\le C_p\left(W_p(\mu^0,\nu(0)) + \int_0^t \eta_R(s)\mathrm{d}s + \mathcal{E}_\nu(t,R)\right) \exp\left(C_p' \left\|l(\cdot)\right\|_1^p + \chi_p(t)\right) \\ &= \mathcal{D}_p(t,R), \end{aligned}$$

对于所有时间 $t \in [0,T]$ 以及每个 $n \ge 1$，其中 $\mathcal{D}_p(\cdot)$ 的定义如 (4.5所示。令前一表达式中的 $n \to +\infty$取相应值，即可直接得到 (4.4。关于速度估计，由 (4.9)、(4.11) 和 (4.15) 可得

$$\begin{aligned} \|v_n(t) - w(t)\|_{L^\infty(B(0,R),\mathbb{R}^d;\nu(t))} &\le \|v_1(t) - w(t)\|_{L^\infty(B(0,R),\mathbb{R}^d;\nu(t))} + \sum_{k=1}^{n-1} \mathsf{d}_{\sup}(v_{k+1}(t), v_k(t)) \\ &\le \eta_R(t) + L(t) \sum_{k=1}^{n-1} W_p(\mu_{k-1}(t),\mu_k(t)) \\ &\le \eta_R(t) + L(t)\mathcal{D}_p(t,R), \end{aligned}$$

对于 $\mathscr{L}^1$-几乎处处的 $t \in [0,T]$ 以及每个 $n \geq 1$，令前一表达式中的 4.7当 $n \to +\infty$ 沿着一个适当的子序列取极限，即可得到 (4.2 的证明。 □

在下面的推论中，我们给出 Filippov 估计的一个全局版本，它可通过对定理 4.2 的证明作简单调整得到。

推论 4.4（Filippov 估计的全局版本）。 假设定理 *4.2* 的条件成立，并且由下式定义的全局失配函数是

$$\eta(t) := \mathrm{dist}_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d;\,\nu(t))}\Big(w(t)\,;V(t,\nu(t))\Big)$$

对 $\mathscr{L}^1$-几乎处处的 $t \in [0,T]$，均为勒贝格可积。则对每个 $\mu^0 \in \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$，存在一个轨迹-选择对 $(\mu(\cdot)\ v(\cdot)) \in AC([0,T],\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)) \times \mathscr{L}([0,T],C^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d))$，它是柯西问题 *(4.1)* 的解，并满足距离估计

$$W_p(\mu(t),\nu(t)) \leq C_p\Big(W_p(\mu^0,\nu(0)) + \int_0^t \eta(s)\mathrm{d}s\Big)\exp\Big(C_p'\,\|l(\cdot)\|^p_{L^1([0,t])} + \chi_p(t)\Big),$$

对所有时间 $t \in [0,T]$ 均成立，同时还满足速度估计

$$\begin{aligned}\|v(t) - w(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d;\,\nu(t))}&\\ \leq \eta(t) + L(t)C_p\Big(W_p(\mu^0,\nu(0)) + \int_0^t \eta(s)\mathrm{d}s\Big)&\exp\Big(C_p'\,\|l(\cdot)\|^p_{L^1([0,t])} + \chi_p(t)\Big),\end{aligned}$$

对 $\mathscr{L}^1$-几乎处处的 $t \in [0,T]$ 成立。

证明。我们可以 只需重复定理 4.2 的证明策略，取 $R = +\infty$ 和 $\mathcal{E}_\nu(t,R) = 0$. □

4.2 解集的紧性与松弛性质

本节研究与集值柯西问题（4.1）相关的解集的拓扑性质，该解集定义为

$$\mathcal{S}_{[0,T]}(\mu^0) := \Big\{\mu(\cdot) \in \mathrm{AC}([0,T],\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)) \ \text{ s.t. } \ \mu(\cdot) \text{ is a solution of (4.1) with } \mu(0) = \mu^0\Big\} \tag{4.28}$$

对每个 $\mu^0 \in \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$。我们的第一个结果证明，当 $\mathcal{S}_{[0,T]}(\mu^0$满足以下条件时， $V\colon\ [0,T] \times \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d) \rightrightarrows C^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$ 的像为凸集时， $\mathcal{S}_{[0,T]}(\mu^0)$ 在一致收敛拓扑下是紧的。证明不作完整详述，因为它基于定理 3.2证明中所用论证的较简单变体。

定理 *4.5*（解集的紧性）。设 $\mu^0 \in \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$ 和 $V\colon\ [0,T] \times \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d) \rightrightarrows C^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$ 是满足假设（*CI*）且其像为凸集的集值映射。那么，与柯西问题（*4.1*）相关的解集 $\mathcal{S}_{[0,T]}(\mu^0) \subset C^0([0,T],\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d))$ 在一致收敛拓扑下是紧的。

证明。给定柯西问题 (4.1) 的一列轨迹—选择对 $(\mu_n(\cdot)\ v_n(\cdot)) \subset$ 绝对连续$([0,T],\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)) \times \mathscr{L}([0,T],C^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d))$，可以重复定理 3.2 证明中的步骤 3，同时使用 (CI)-(i) 以及注 2.22，从而证明存在一个紧集$\mathscr{K} \subset \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$和一个常数 $c_p > 0$，二者仅取决于 μ^0、p 以及 $\mathrm{k}m(\cdot)\mathrm{k}_1$, , 使得

$$\mu_n(t) \in \mathscr{K} \qquad \text{and} \qquad W_p(\mu_n(\tau),\mu_n(t)) \leq c_p\int_\tau^t m(s)\mathrm{d}s$$

对于所有时间 $0 \leq \tau \leq t \leq T$ 以及每个 $n \geq 1$。因此，根据阿尔泽拉-阿斯科利定理，存在一条曲线$\mu(\cdot) \in \mathrm{AC}([0,T],\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d))$，使得

$$\sup_{t\in[0,T]} W_p(\mu_n(t),\mu(t)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{4.29}$$

沿着一个不再重新标记的子序列。再次采用定理证明中步骤 3 的紧性与对角线论证3.2，可以证明存在一个 Carathéodory 向量场$v(\cdot) \in \mathscr{L}([0,T], C^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d))$，使得

$$v_n(\cdot) \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} v(\cdot) \tag{4.30}$$

在每个 $R>0$ 下，沿可能不同的子序列，在 $L^1([0,T], C^0(B(0, R) \mathbb{R}^d))$ 中弱收敛。特别地，直接应用 Mazur 引理可得

$$|v(t,x)| \le m(t)\Big(1+|x|+\mathcal{M}_p(\mu(t))\Big) \qquad \text{and} \qquad \mathrm{Lip}(v(t);\mathbb{R}^d) \le l(t), \tag{4.31}$$

对于 $\mathscr{L}^1$-几乎处处的 $t \in [0,T]$ 以及所有 $x \in \mathbb{R}^d$。现在证明 $(\mu(\cdot)\ v(\cdot)) \in$ 在 $\mathsf{AC}([0,T], \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d))$ 中，且 $\times \mathscr{L}([0,T], C^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d))$ 是 (4.1) 的一个解。结合 (4.29) 的收敛结果、(4.31) 以及命题 2.4，显然有

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t \phi(t,x) \mathrm{d}\mu_n(t)(x)\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t \phi(t,x) \mathrm{d}\mu(t)(x)\mathrm{d}t \tag{4.32}$$

and

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \langle \nabla_x \phi(t,x), v_n(t,x)\rangle \mathrm{d}(\mu(t)-\mu_n(t))(x)\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{4.33}$$

对于每个 $\phi \in C_c^\infty((0, T) \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R})$。此外，选取如下形式的测试函数

$$\phi(t,x) := \zeta(t)\psi(x), \tag{4.34}$$

对于所有 $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$，其中 $(\zeta, \psi) \in C_c^\infty((0,T) \mathbb{R}) \times \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$，然后对所有时间 $t \in [0,T]$ 令 $\nu(t) := \zeta(t)\nabla\psi \cdot \mu(t) \in \mathscr{M}(\mathrm{supp}(\psi) \mathbb{R}^d)$，由 (4.30) 可得

$$\int_0^T \zeta(t) \int_{\mathbb{R}^d} \langle \nabla\psi(x), v(t,x) - v_n(t,x)\rangle \mathrm{d}\mu(t)(x)\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{4.35}$$

沿着一个依赖于 $\mathrm{supp}(\psi)$ 的子序列 $\subset \mathbb{R}^d$。因此，结合 (4.32)、(4.33) 和 (4.35) 的收敛结果，并注意到形如 (4.34) 的测试函数的线性张成在 $C_c^\infty((0,T) \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ 中稠密，最终得到

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\partial_t \phi(t,x) + \langle \nabla_x \phi(t,x), v(t,x)\rangle\Big) \mathrm{d}\mu(t)(x)\mathrm{d}t = 0$$

对于所有 $\phi \in C_c^\infty((0,T) \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$，结合由 (4.29) 可得 $\mu(0) = \mu^0$ 这一事实，等价地意味着，函数对 $(\mu(\cdot)\ v(\cdot)) \in$ 绝对连续$([0,T], \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)) \times \mathscr{L}([0,T], C^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d))$ 是下列方程的解

$$\begin{cases} \partial_t \mu(t) + \mathrm{div}_x(v(t)\mu(t)) = 0, \\ \mu(0) = \mu^0. \end{cases} \tag{4.36}$$

最后，只需证明 $v(t) \in V(t, \mu(t))$ 对于 $\mathscr{L}^1$-几乎处处的 $t \in [0,T]$成立。为此，注意到由假设 **(CI)**-(iv) 结合引理 2.10-(a) 和 (c)，对每个 $n \ge 1$ 都存在一个可测选择

$$t \in [0,T] \mapsto \tilde{v}_n(t) \in V(t, \mu(t)), \tag{4.37}$$

其满足

$$\mathsf{d}_{\sup}(\tilde{v}_n(t), v_n(t)) \le L(t) W_p(\mu_n(t), \mu(t)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

对于 $\mathscr{L}^1$-几乎处处 $t \in [0,T]$，其中我们还用到了（4.29）。因此，直接应用勒贝格控制收敛定理，必然可得

$$\int_0^T \|\tilde{v}_n(t) - v_n(t)\|_{C^0(B(0,R),\mathbb{R}^d)} \mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

对于每个 $R>0$，结合（4.30）特别可知

$$\tilde{v}_n(\cdot) \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} v(\cdot) \tag{4.38}$$

在 $L^1([0,T],\ C^0(B(0,\ R)\ \mathbb{R}^d))$ 中弱收敛，沿着依赖于 $R>0$ 的适当子序列。重复定理 3.2 证明中步骤 5 末尾的推理，最终可证明 $v(t)\in V(t,\ \mu(t))$ 对 $\mathscr{L}^1$-几乎处处的 $t\in[0,T]$ 成立。结合 (4.36，即可完成定理 4.5 的证明。 □

定理 4.5 中建立的紧性结果关键依赖于可容许速度的凸性；若不满足这一假设，该结果便不再成立。在下述定理中，我们将表明，即使缺少凸性，也仍然能够精确刻画解集的闭包，而且该闭包与凸化动力学的解集闭包一致。

定理 4.6 (连续性包含的松弛性质)。设 $\mu^0\in\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$ 和 $V\colon\ [0,T]\times\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)\ \rightrightarrows\ C^0(\mathbb{R}^d,\ \mathbb{R}^d)$ 是满足假设 **(CI)** 的集值映射。那么，对于松弛柯西问题的任意解$\mu(\cdot)\in$绝对连续$([0,T],\ \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d))$，

$$\begin{cases}\partial_t\mu(t)\in-\mathrm{div}_x\Big(\overline{\mathrm{co}}\,V(t,\mu(t))\mu(t)\Big),\\ \mu(0)=\mu^0,\end{cases} \tag{4.39}$$

并且对于任意 $\delta>0$，都存在柯西问题的一个解 $\mu_\delta(\cdot)\in$绝对连续$([0,T],\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d))$

$$\begin{cases}\partial_t\mu_\delta(t)\in-\mathrm{div}_x\Big(V(t,\mu_\delta(t))\mu_\delta(t)\Big),\\ \mu_\delta(0)=\mu^0,\end{cases} \tag{4.40}$$

该解满足

$$\sup_{t\in[0,T]} W_p(\mu(t),\mu_\delta(t))\le\delta.$$

特别地，(4.40)的解集在 (4.39) 的解集中稠密，其中拓扑为在 $C^0([0,T],\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d))$ 上的一致收敛拓扑。

定理 4.6 的证明分为三个步骤。步骤 1 中，我们先选取方程（4.39）的一个解，以及区间 $[0,T]$ 的一个合适划分，并结合奥曼定理定义一条中间曲线。步骤 2 将证明该曲线在 $C^0([0,T],\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d))$ 中与原曲线足够接近。最后，在步骤 3 中，我们应用定理 4.2的广义 Filippov 估计，得到柯西问题（4.40）的一个解，该解与中间曲线足够接近，因而也与原曲线足够接近。

定理 4.6 的证明。首先注意，若 $V\colon\ [0,T]\times\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)\ \rightrightarrows C^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$ 是满足假设（CI）的集值映射，且 $\mu(\cdot)\in$AC$([0,T],\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d))$ 是方程 (4.39) 或 (4.40) 的一个解，那么根据命题 2.21，对于 co$\underline{V}(\cdot\ \mu(\cdot))$ 或 $V(\cdot\ \mu(\cdot))$ 的任意可测选择 $v(\cdot)\in\mathscr{L}([0,T],C^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d))$，必然有

$$|v(t,x)|\le(1+\mathcal{C})m(t)(1+|x|), \tag{4.41}$$

对于 $\mathscr{L}^1$-几乎处处的 $t\in[0,T]$ 以及所有 $x\in\mathbb{R}^d$，其中 $\mathcal{C}>0$ 是一个常数，仅取决于 p、$\mathcal{M}_p(\mu^0)$ 和 $\|m(\cdot)\|_1$。因此，记 $\boldsymbol{\eta}\in\mathscr{P}(\mathbb{R}^d\times\Sigma_T$为通过定义 2.18与该速度场相对应的叠加测度，由格朗沃尔引理可直接推出

$$\|\sigma(\cdot)\|_{C^0([0,T],\mathbb{R}^d)}\le\mathcal{C}_T(1+|x|), \tag{4.42}$$

对于 $\boldsymbol{\eta}$-几乎处处 每个 $(x,\sigma)\in\mathbb{R}^d\times\Sigma_T$，其中 $\mathcal{C}_T:=\max\{1,(1+\mathcal{C})\mathrm{k}m(\cdot)\mathrm{k}_1\}\exp((1+\mathcal{C})\mathrm{k}m(\cdot)\mathrm{k}_1)$。

步骤 1 – 通过奥曼定理构造一条中间曲线。 给定任意实数 $\delta > 0$，由 $\mu^0 \in \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$可知，根据测度论中的标准结果，存在一个正半径 $R_\delta > 0$，使得

$$\left(\int_{\{x \text{ s.t. } |x| \geq R_\delta/\mathcal{C}_T - 1\}} (1+|x|)^p \mathrm{d}\mu^0(x) \right)^{1/p} \leq \frac{\delta}{2(1+\mathcal{C})(1+\mathcal{C}_T)(1+\|m(\cdot)\|_1)}. \tag{4.43}$$

此外，注意到 $m(\cdot) \in L^1([0,T], \mathbb{R}_+)$，存在区间 $[0,T]$ 的一个分划 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$，使得

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} m(s)\mathrm{d}s \leq \frac{\delta}{2(1+\mathcal{C})(1+R_\delta)} \tag{4.44}$$

对于每个 $i \in \{0, \ldots\ldots, N-1\}$。由假设 **(CI)** 和引理 2.10可知，受限集值映射 $t \in [0,T] \rightrightarrows V(t, \mu(t))_{|B(0,R_\delta)}$ 和 $t \in [0,T] \rightrightarrows \mathrm{co}\, V(t, \mu(t))_{|B(0,R_\delta)}$ 是 $\mathscr{L}^1$-可测的。此外，它们具有紧像且可积有界。利用由 $\mathsf{d}_{cc}(\cdot, \cdot)$ 在 $C^0(B(0, R_\delta)\ \mathbb{R}^d)$ 上诱导的拓扑与通常的范数拓扑一致这一事实，可得

$$\left(\overline{\mathrm{co}}\, V(t, \mu(t)) \right)_{|B(0,R_\delta)} = \overline{\mathrm{co}} \left(V(t, \mu(t))_{|B(0,R_\delta)} \right), \tag{4.45}$$

其中，第二个凸包是在巴拿赫空间 $(C^0(B(0, R_\delta)\ \mathbb{R}^d), \mathsf{k}\cdot\mathsf{k}_{C^0(B(0,R_\delta)\ \mathbb{R}^d)})$ 中取的。因此，将与给定解 $\mu(\cdot) \in \mathrm{AC}([0,T], \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d))$（属于 (4.39)）相关联的速度选择记为 $t \in [0,T] \mapsto v(t) \in \mathrm{co}\, V(t, \mu(t))$，由定理 2.11 可知，存在可测选择 $t \in [t_i, t_{i+1}] \mapsto v_i^\delta(t) \in V(t, \mu(t))_{|B(0,R_\delta)}$ 使得

$$\left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} v_{|B(0,R_\delta)}(s)\mathrm{d}s - \int_{t_i}^{t_{i+1}} v_i^\delta(s)\mathrm{d}s \right\|_{C^0(B(0,R_\delta), \mathbb{R}^d)} \leq \frac{\delta}{N} \tag{4.46}$$

对每个 $i \in \{0, \ldots, N-1\}$ 都成立，其中映射 $v_i^\delta(\cdot) v_{|B(0,R_\delta)}(\cdot)$ 是可分巴拿赫空间 $L^1([0,T], C^0(B(0, R_\delta)\ \mathbb{R}^d))$ 的元素，积分按 Bochner 意义理解。注意，$(t,w) \in [t_i, t_{i+1}] \times C^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \mapsto \mathsf{k}w - v_i^\delta(t)\mathsf{k}_{C^0(B(0,R_\delta)\ \mathbb{R}^d)}$ 是 Carathéodory 函数，并且

$$t \in [t_i, t_{i+1}] \rightrightarrows V(t, \mu(t)) \cap \left\{ w \in C^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \text{ s.t. } \|w - v_i^\delta(t)\|_{C^0(B(0,R_\delta), \mathbb{R}^d)} = 0 \right\}$$

根据构造，对每个 $i \in \{0, \ldots, N-1\}$，其像集均非空。因此，由引理 2.10-(a)，存在可测选择 $t \in [t_i, t_{i+1}] \mapsto v_i(t) \in V(t, \mu(t))$，使得对$\mathscr{L}^1$-几乎处处的 $t \in [0,T]$，$v_i(t)_{|B(0,R_\delta)} = v_i^\delta(t)$。因此，速度场 $w\colon [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$定义为

$$w(t,x) := \sum_{i=0}^{N-1} \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1})}(t) v_i(t,x)$$

对 $\mathscr{L}^1$-几乎处处的 $t \in [0,T]$ 以及所有 $x \in \mathbb{R}^d$ 均为 Carathéodory，并满足假设 **(CE)**。因此，根据定理 2.17，它生成唯一的解 $\nu(\cdot) \in \mathrm{AC}([0,T], \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d))$，该解满足柯西问题

$$\begin{cases} \partial_t \nu(t) + \mathrm{div}_x(w(t)\nu(t)) = 0, \\ \nu(0) = \mu^0. \end{cases}$$

步骤 2——估计 $\mu(\cdot)$ 与 $\nu(\cdot)$之间的 Wasserstein 距离。 设 $\boldsymbol{\eta}_\mu, \boldsymbol{\eta}_\nu \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^d \times \Sigma_T)$ 是由定理 2.19 给出的两个叠加测度，它们满足

$$(\mathsf{e}_t)_\sharp \boldsymbol{\eta}_\mu = \mu(t) \qquad \text{and} \qquad (\mathsf{e}_t)_\sharp \boldsymbol{\eta}_\nu = \nu(t)$$

对于所有时间 $t \in [0,T]$，且 $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\mu,\ \nu} \in \Gamma(\boldsymbol{\eta}_\mu,\ \boldsymbol{\eta}_\nu)$ 是引理 2.20 给出的传输计划，满足

$$(\pi_{\mathbb{R}^d}, \pi_{\mathbb{R}^d})_\sharp \hat{\boldsymbol{\eta}}_{\mu,\nu} = (\mathrm{Id}, \mathrm{Id})_\sharp \mu^0 \qquad \text{and} \qquad \gamma(t) := (\mathsf{e}_t, \mathsf{e}_t)_\sharp \hat{\boldsymbol{\eta}}_{\mu,\nu} \in \Gamma_o(\mu(t), \nu(t)).$$

Then

$$
\begin{aligned}
W_p(\mu(t),\nu(t)) &= \Big(\int_{\mathbb{R}^{2d}} |x-y|^p \mathrm{d}\gamma(t)(x,y)\Big)^{1/p} \\
&= \Big(\int_{(\mathbb{R}^d\times\Sigma_T)^2} |\sigma_\mu(t)-\sigma_\nu(t)|^p \mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\mu,\nu}(x,\sigma_\mu,y,\sigma_\nu)\Big)^{1/p} \\
&\le \Big(\int_{(\mathbb{R}^d\times\Sigma_T)^2} \Big|\int_0^t \big(v(s,\sigma_\mu(s))-v(s,\sigma_\nu(s))\big)\mathrm{d}s\Big|^p \mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\mu,\nu}(x,\sigma_\mu,y,\sigma_\nu)\Big)^{1/p} \\
&\qquad + \Big(\int_{\mathbb{R}^d\times\Sigma_T} \Big|\int_0^t \big(v(s,\sigma_\nu(s))-w(s,\sigma_\nu(s))\big)\mathrm{d}s\Big|^p \mathrm{d}\boldsymbol{\eta}_\nu(y,\sigma_\nu)\Big)^{1/p},
\end{aligned}
\tag{4.47}
$$

对所有时间 $t\in[0,T]$，其中我们用到了 $\boldsymbol{\eta}_\mu$，$\boldsymbol{\eta}_\nu$是定义 2.18 意义下的叠加测度。重复附录C 和 D中详述的计算，可以证明

$$
\begin{aligned}
&\Big(\int_{(\mathbb{R}^d\times\Sigma_T)^2} \Big|\int_0^t \big(v(s,\sigma_\mu(s))-v(s,\sigma_\nu(s))\big)\mathrm{d}s\Big|^p \mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\mu,\nu}(x,\sigma_\mu,y,\sigma_\nu)\Big)^{1/p} \\
&\qquad\qquad \le \|l(\cdot)\|_{L^1([0,t])}^{(p-1)/p} \Big(\int_0^t l(s) W_p^p(\mu(s),\nu(s))\mathrm{d}s\Big)^{1/p},
\end{aligned}
\tag{4.48}
$$

对所有时间 $t\in[0,T]$。关于不等式右端最后一项中的第二项（4.47），可将其上界估计为两个积分之和，如下所示

$$
\begin{aligned}
&\Big(\int_{\mathbb{R}^d\times\Sigma_T} \Big|\int_0^t \big(v(s,\sigma_\nu(s))-w(s,\sigma_\nu(s))\big)\mathrm{d}s\Big|^p \mathrm{d}\boldsymbol{\eta}_\nu(y,\sigma_\nu)\Big)^{1/p} \\
&\le \Big(\int_{\{(y,\sigma_\nu)\text{ s.t. }\|\sigma_\nu(\cdot)\|_{C^0([0,T],\mathbb{R}^d)}\le R_\delta\}} \Big|\int_0^t \big(v(s,\sigma_\nu(s))-w(s,\sigma_\nu(s))\big)\mathrm{d}s\Big|^p \mathrm{d}\boldsymbol{\eta}_\nu(y,\sigma_\nu)\Big)^{1/p} \\
&\quad + \Big(\int_{\{(y,\sigma_\nu)\text{ s.t. }\|\sigma_\nu(\cdot)\|_{C^0([0,T],\mathbb{R}^d)}> R_\delta\}} \Big|\int_0^t \big(v(s,\sigma_\nu(s))-w(s,\sigma_\nu(s))\big)\mathrm{d}s\Big|^p \mathrm{d}\boldsymbol{\eta}_\nu(y,\sigma_\nu)\Big)^{1/p}.
\end{aligned}
\tag{4.49}
$$

回顾 $(\pi_{\mathbb{R}^d})_\sharp\boldsymbol{\eta}_\nu=\mu^0$ 并利用（4.41）和（4.42）的次线性估计，不等式右端（4.49）中的第二项可估计为

$$
\begin{aligned}
&\Big(\int_{\{(y,\sigma_\nu)\text{ s.t. }\|\sigma_\nu(\cdot)\|_{C^0([0,T],\mathbb{R}^d)}> R_\delta\}} \Big|\int_0^t \big(v(s,\sigma_\nu(s))-w(s,\sigma_\nu(s))\big)\mathrm{d}s\Big|^p \mathrm{d}\boldsymbol{\eta}_\nu(y,\sigma_\nu)\Big)^{1/p} \\
&\le 2(1+\mathcal{C})\,\|m(\cdot)\|_1 \Big(\int_{\{(y,\sigma_\nu)\text{ s.t. }\|\sigma_\nu(\cdot)\|_{C^0([0,T],\mathbb{R}^d)}> R_\delta\}} \Big(1+\|\sigma_\nu(\cdot)\|_{C^0([0,T],\mathbb{R}^d)}\Big)^p \mathrm{d}\boldsymbol{\eta}_\nu(y,\sigma_\nu)\Big)^{1/p} \\
&\le 2(1+\mathcal{C})(1+\mathcal{C}_T)\,\|m(\cdot)\|_1 \Big(\int_{\{x\text{ s.t. }|x|>R_\delta/\mathcal{C}_T-1\}} (1+|x|)^p \mathrm{d}\mu^0(x)\Big)^{1/p},
\end{aligned}
\tag{4.50}
$$

这与我们在 $R_\delta>0$ （4.43）中的选择结合起来，进一步得到

$$
\Big(\int_{\{(y,\sigma_\nu)\text{ s.t. }\|\sigma_\nu(\cdot)\|_{C^0([0,T],\mathbb{R}^d)}> R_\delta\}} \Big|\int_0^t \big(v(s,\sigma_\nu(s))-w(s,\sigma_\nu(s))\big)\mathrm{d}s\Big|^p \mathrm{d}\boldsymbol{\eta}_\nu(y,\sigma_\nu)\Big)^{1/p} \le \delta. \tag{4.51}
$$

现在我们将注意力集中在（4.49）右端的第一项。根据构造，存在一个整数 $j \in \{0, \ldots, N-1\}$ 使得 $t \in [t_j, t_{j+1}]$，这意味着

$$
\begin{aligned}
&\Big(\int_{\{(y,\sigma_\nu) \text{ s.t. } \|\sigma_\nu(\cdot)\|_{C^0([0,T],\mathbb{R}^d)} \le R_\delta\}} \Big| \int_0^t \big(v(s,\sigma_\nu(s)) - w(s,\sigma_\nu(s)) \big) \mathrm{d}s \Big|^p \mathrm{d}\boldsymbol{\eta}_\nu(y,\sigma_\nu) \Big)^{1/p} \\
&\le \sum_{i=0}^{j-1} \Big(\int_{\{(y,\sigma_\nu) \text{ s.t. } \|\sigma_\nu(\cdot)\|_{C^0([0,T],\mathbb{R}^d)} \le R_\delta\}} \Big| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \big(v(s,\sigma_\nu(s)) - v_i(s,\sigma_\nu(s)) \big) \mathrm{d}s \Big|^p \mathrm{d}\boldsymbol{\eta}_\nu(y,\sigma_\nu) \Big)^{1/p} \\
&\quad + \Big(\int_{\{(y,\sigma_\nu) \text{ s.t. } \|\sigma_\nu(\cdot)\|_{C^0([0,T],\mathbb{R}^d)} \le R_\delta\}} \Big| \int_{t_j}^{t} \big(v(s,\sigma_\nu(s)) - v_j(s,\sigma_\nu(s)) \big) \mathrm{d}s \Big|^p \mathrm{d}\boldsymbol{\eta}_\nu(y,\sigma_\nu) \Big)^{1/p} \\
&\le \sum_{i=0}^{j-1} \Big(\int_{\{(y,\sigma_\nu) \text{ s.t. } \|\sigma_\nu(\cdot)\|_{C^0([0,T],\mathbb{R}^d)} \le R_\delta\}} \Big| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \big(v(s,\sigma_\nu(s)) - v_i(s,\sigma_\nu(s)) \big) \mathrm{d}s \Big|^p \mathrm{d}\boldsymbol{\eta}_\nu(y,\sigma_\nu) \Big)^{1/p} + \delta,
\end{aligned}
\tag{4.52}
$$

其中第二个不等式用到了（4.41）和（4.44）的估计。现在，给定任意整数 $i \in \{0, \ldots, j-1\}$，由 $v(\cdot)\ v_i(\cdot) \in \mathscr{L}([0,T],\ C^0(\mathbb{R}^d,\ \mathbb{R}^d))$ 均满足次线性估计（4.41），且满足假设 **(CI)**-（*iii*）中的正则性条件，因此可以写成

$$
\begin{aligned}
&\Big(\int_{\{(y,\sigma_\nu) \text{ s.t. } \|\sigma_\nu(\cdot)\|_{C^0([0,T],\mathbb{R}^d)} \le R_\delta\}} \Big| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \big(v(s,\sigma_\nu(s)) - v_i(s,\sigma_\nu(s)) \big) \mathrm{d}s \Big|^p \mathrm{d}\boldsymbol{\eta}_\nu(y,\sigma_\nu) \Big)^{1/p} \\
&\le \Big(\int_{\{(y,\sigma_\nu) \text{ s.t. } \|\sigma_\nu(\cdot)\|_{C^0([0,T],\mathbb{R}^d)} \le R_\delta\}} \Big| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \big(v(s,\sigma_\nu(t_i)) - v_i(s,\sigma_\nu(t_i)) \big) \mathrm{d}s \Big|^p \mathrm{d}\boldsymbol{\eta}_\nu(y,\sigma_\nu) \Big)^{1/p} \\
&\quad + \Big(\int_{\{(y,\sigma_\nu) \text{ s.t. } \|\sigma_\nu(\cdot)\|_{C^0([0,T],\mathbb{R}^d)} \le R_\delta\}} \Big| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \big(v(s,\sigma_\nu(s)) - v(s,\sigma_\nu(t_i)) \big) \mathrm{d}s \Big|^p \mathrm{d}\boldsymbol{\eta}_\nu(y,\sigma_\nu) \Big)^{1/p} \\
&\quad + \Big(\int_{\{(y,\sigma_\nu) \text{ s.t. } \|\sigma_\nu(\cdot)\|_{C^0([0,T],\mathbb{R}^d)} \le R_\delta\}} \Big| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \big(v_i(s,\sigma_\nu(s)) - v_i(s,\sigma_\nu(t_i)) \big) \mathrm{d}s \Big|^p \mathrm{d}\boldsymbol{\eta}_\nu(y,\sigma_\nu) \Big)^{1/p} \\
&\le \Big\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} v(s)_{|B(0,R_\delta)} \mathrm{d}s - \int_{t_i}^{t_{i+1}} v_i^\delta(s) \mathrm{d}s \Big\|_{C^0(B(0,R_\delta),\mathbb{R}^d)} \\
&\quad + 2 \Big(\int_{\{(y,\sigma_\nu) \text{ s.t. } \|\sigma_\nu(\cdot)\|_{C^0([0,T],\mathbb{R}^d)} \le R_\delta\}} \Big| \int_{t_i}^{t_{i+1}} l(s) \int_{t_i}^{s} m(\zeta) \big(1 + |\sigma_\nu(\zeta)| + \mathcal{C} \big) \mathrm{d}\zeta \mathrm{d}s \Big|^p \mathrm{d}\boldsymbol{\eta}_\nu(y,\sigma_\nu) \Big)^{1/p} \\
&\le \Big\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} v(s)_{|B(0,R_\delta)} \mathrm{d}s - \int_{t_i}^{t_{i+1}} v_i^\delta(s) \mathrm{d}s \Big\|_{C^0(B(0,R_\delta,\mathbb{R}^d))} + 2(1 + R_\delta + \mathcal{C}) \int_{t_i}^{t_{i+1}} l(s) \int_{t_i}^{s} m(\zeta) \mathrm{d}\zeta \mathrm{d}s \\
&\le \frac{\delta}{N} + \delta \int_{t_i}^{t_{i+1}} l(s) \mathrm{d}s,
\end{aligned}
\tag{4.53}
$$

其中第二个和第三个不等式用到了初步估计（4.41），最后一个不等式则用到了（4.44）和（4.46）。因此，将 $i \in \{0, \ldots, j-1\}$ 对应的（4.53）中的估计代入（4.52），将所得表达式与（4.51）结合，并将后者代入（4.49），即可得到

$$
\Big(\int_{\mathbb{R}^d \times \Sigma_T} \Big| \int_0^t \big(v(s,\sigma_\nu(s)) - w(s,\sigma_\nu(s)) \big) \mathrm{d}s \Big|^p \mathrm{d}\boldsymbol{\eta}_\nu(y,\sigma_\nu) \Big)^{1/p} \le \delta \big(3 + \|l(\cdot)\|_1 \big). \tag{4.54}
$$

将（4.48）和（4.54）合并到（4.47）中，将所得不等式提升至 p 次幂，应用格朗沃尔引理，再将相应表达式提升至 $1/p$ 次幂，最终得到

$$
W_p(\mu(t), \nu(t)) \le \delta\, C_p (3 + \|l(\cdot)\|_1) \exp\Big(C_p' \, \|l(\cdot)\|_1^p \Big), \tag{4.55}
$$

这对所有时间 $t \in [0,T]$ 都成立。

步骤 3 – 利用 Filippov 估计回到未松弛问题。 在此阶段，应注意 $\nu(\cdot) \in$绝对连续$([0,T],\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d))$ 不是 (4.40) 的一个解，因为 $w(t) \in V(t,\mu(t))$ 对$\mathscr{L}^1$几乎所有 $t\in[0,T]$都成立。不过，由下式定义的失配函数满足

$$\eta_\delta(t) := \mathrm{dist}_{C^0(B(0,R_\delta),\mathbb{R}^d)}\Big(w(t)\,;V(t,\nu(t))\Big)$$

对于几乎所有 $\mathscr{L}^1$， $t\in[0,T]$ 均勒贝格可积且满足

$$\begin{aligned}\eta_\delta(t) &\le L(t)W_p(\mu(t),\nu(t))\\ &\le \delta C_p L(t)(3+\|l(\cdot)\|_1)\exp\Big(C'_p\,\|l(\cdot)\|_1^p\Big),\end{aligned}$$

根据假设 (CI)-(iv)，结合定理4.2 的结果，并回顾（4.43）中的先验界，存在一个 $\mu_\delta(\cdot)\in\mathrm{AC}([0,T],\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d))$，它是未松弛柯西问题（4.40）的一个解，并满足

$$\begin{aligned}W_p(\mu_\delta(t),\nu(t)) &\le C_p\bigg(\delta C_p\,\|L(\cdot)\|_1\,(3+\|l(\cdot)\|_1)\exp\Big(C'_p\,\|l(\cdot)\|_1^p\Big)+\delta\bigg)\exp\Big(C'_p\,\|l(\cdot)\|^p_{L^1([0,t])}+\chi_p(t)\Big)\\ &\le \delta C_p\Big(1+(3+\|l(\cdot)\|_1)\,\|\chi_p(\cdot)\|_\infty\Big)\exp\Big(C'_p\,\|l(\cdot)\|_1^p+\|\chi_p(\cdot)\|_\infty\Big),\end{aligned} \tag{4.56}$$

对所有时间 $t\in[0,T]$，其中映射 $\chi_p(\cdot)$ 定义于（4.6）。因此，结合（4.55）和（4.56），应用三角不等式并将常数 $\delta>0$ 重新定义为

$$\delta := \frac{\delta}{C_p\Big((3+\|l(\cdot)\|_1)\Big(1+\|\chi_p(\cdot)\|_\infty\exp\big(\|\chi_p(\cdot)\|_\infty\big)\Big)+\exp\big(\|\chi_p(\cdot)\|_\infty\big)\Big)\exp\Big(C'_p\,\|l(\cdot)\|_1^p\Big)}$$

最终可得，未松弛柯西问题（ μ_δ（·）的解满足4.40）

$$\sup_{t\in[0,T]} W_p(\mu(t),\mu_\delta(t))\le\delta,$$

至此，定理 4.6 的证明完成。 □

附录

在本辅助　　节中，我们详细给出文稿中若干技术结果的证明　　t.

引理的证明 2.10

在本附录的第一部分，我们详细说明引理2.10中的可测选择原理的部分证明，因为后者依赖一些不太常见的假设。

引理 *2.10*的证明。 下文先证明第（a）项，再证明第（b）项。第（c）项的证明完全标准，例如可见 [9, 定理 8.2。8]引理 2.10-（a）中唯一需要仔细证明之处，是所考虑的集值映射可测这一事实。为此，我们考虑多值函数

$$t\in[0,T]\rightrightarrows\mathcal{A}_n(t):=\Big\{y\in Y\ \text{ s.t. }\varphi_n(t,y)\le L(t)\Big\}$$

对每个 $n\ge1$定义，它们是 $\mathscr{L}^1$-可测的，这是由 [9, 定理 8.2。9]对于每个闭集 $\mathcal{C}\subset Y$，由 [9, 定理 8.1。4] 可特别推出

$$\mathscr{D}_{\mathcal{C}}:=\bigcap_{n\ge1}\Big\{t\in[0,T]\ \text{ s.t. }\mathcal{F}(t)\cap\mathcal{A}_n(t)\cap\mathcal{C}\neq\emptyset\Big\}$$

是一个 $\mathscr{L}^1$-可测集。为了完成这一论断的证明，还需证明

$$\mathscr{D}_{\mathcal{C}} = \Big\{ t \in [0,T] \ \text{ s.t. } \mathcal{F}(t) \cap \mathcal{A}(t) \cap \mathcal{C} \neq \emptyset \Big\},$$

其中 $\mathcal{A}(t) := \{ y \in Y \text{使得 } \varphi(t,y) \leq L(t) \}$ 对 $\mathscr{L}^1$-几乎处处的 $t \in [0,T]$ 成立。根据构造，有

$$\Big\{ t \in [0,T] \ \text{ s.t. } \mathcal{F}(t) \cap \mathcal{A}(t) \cap \mathcal{C} \neq \emptyset \Big\} \subset \mathscr{D}_{\mathcal{C}},$$

由（2.5）可知。反过来，对于任意 $\tau \in \mathscr{D}_{\mathcal{C}}$，注意到对每个 $n \geq 1$ 定义的集合为

$$\mathcal{B}_n(\tau) := \mathcal{F}(\tau) \cap \mathcal{A}_n(\tau) \cap \mathcal{C}$$

构成一个非递增序列，因为映射（$\varphi_n(\cdot,\cdot)$）逐点非递减。此外，在我们的既定假设下，集合 $\mathcal{B}_n(\tau) \subset Y$ 对每个 $n \geq 1$都是紧且非空的。因此，根据康托尔交集定理（例如参见 [73,定理 2.6]），可得

$$\mathcal{B}(\tau) := \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{B}_n(\tau) \neq \emptyset,$$

结合 $\mathcal{B}(\tau) \subset \mathcal{F}(\tau) \cap \mathcal{A}(\tau) \cap \mathcal{C}$ 这一事实，最终得到

$$\tau \in \Big\{ t \in [0,T] \ \text{ s.t. } \mathcal{F}(t) \cap \mathcal{A}(t) \cap \mathcal{C} \neq \emptyset \Big\}$$

由此便完成了我们论断的证明。

现在我们转而讨论引理2.10-（b）中的结论，并首先注意到其中出现的集值映射可以改写为

$$t \in [0,T] \rightrightarrows \mathcal{F}(t) \cap \Big\{ y \in Y \ \text{ s.t. } \varphi(t,y) \leq \inf_{z \in \mathcal{F}(t)} \varphi(t,z) \Big\}.$$

因此，根据前文所述，为了达到我们的目的，只需证明映射

$$t \in [0,T] \mapsto \inf_{z \in \mathcal{F}(t)} \varphi(t,z) \in \mathbb{R}_+$$

是 $\mathscr{L}^1$-可测的。由经典可测性结果（例如参见 [9, 定理 8.2。11]）可知，对于每个 $n \geq 1$，映射

$$\varpi_n : t \in [0,T] \mapsto \inf_{z \in \mathcal{F}(t)} \varphi_n(t,z)$$

是 $\mathscr{L}^1$-可测的。由于序列 $(\varpi_n(\cdot))$ 逐点单调不减且有界，因此极限

$$\varpi(t) := \lim_{n \to +\infty} \varpi_n(t) = \inf_{z \in \mathcal{F}(t)} \varphi(t,z)$$

对 $\mathscr{L}^1$-几乎处处的 $t \in [0,T]$ 存在，并且根据 [9, 定理 8.2.5]，映射 $\varpi(\cdot)$ 是 $\mathscr{L}^1$-可测的。 □

B 引理 2.15 的证明

在本附录二中，为求完备起见，我们详细给出引理 2.15 的证明。该证明仿照了用于证明 L^p-空间完备的标准论证，参见 [73, 定理 3。11]

证明。 设 $(v_n(\cdot)) \subset \mathscr{L}(I, C^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d))$ 是按 (2.8意义下的柯西序列，并注意到不失一般性，可选取该序列使得

$$\int_0^T \mathsf{d}_{\sup}(v_n(t), v_{n+1}(t)) \mathrm{d}t \leq \frac{1}{2^n} \tag{B.1}$$

对所有 $n \geq 1$，经过提取一个子序列后。现在考虑实值映射序列

$$d_n(t) := \sum_{k=1}^{n} \mathsf{d}_{\sup}(v_k(t), v_{k+1}(t)), \tag{B.2}$$

定义于 $\mathscr{L}^1$-几乎处处 $t \in I$ 以及每个 $n \geq 1$，并注意到由（B.1）可得

$$\sup_{n\geq 1} \int_0^T d_n(t)\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^T \mathsf{d}_{\sup}(v_k(t), v_{k+1}(t))\mathrm{d}t \leq 1. \tag{B.3}$$

根据 [73, 定理 1。38], 式（B.2）中定义的级数的部分和对于 $\mathscr{L}^1$-几乎处处的 $t \in I$收敛于一个映射 d（·）$\in L^1(I, \mathbb{R}_+)$，该映射随后必满足

$$\int_0^T d(t)\mathrm{d}t \leq 1.$$

因此，必然有 $d(t) < +\infty$ 对于 $\mathscr{L}^1$-几乎处处的 $t \in I$，由式（B.2）以及扩展度量2.7的定义（$\mathsf{d}^{\sup}$（·，·）可知，由下式定义的函数级数

$$w(t,x) := \sum_{k=1}^{+\infty} (v_{k+1}(t,x) - v_k(t,x)) \qquad \text{for all } x \in \mathbb{R}^d$$

对于 $\mathscr{L}^1$-几乎处处的 $t \in I$正常收敛。因此，对于每个$(t, x) \in I \times \mathbb{R}^d$，我们可以将映射 v：$I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 定义为

$$v(t,x) := \begin{cases} v_1(t,x) + w(t,x) & \text{if } (d_n(t)) \text{ converges,} \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

并注意到，它关于 $t \in I$ 是 $\mathscr{L}^1$-可测的，且关于 $x \in \mathbb{R}^d$连续。此外，映射 $v(\cdot) \in \mathscr{L}(I, C^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d))$ 是序列 $(v_n(\cdot))$ 的逐点极限，因为

$$\begin{aligned} \mathsf{d}_{\sup}(v_n(t), v(t)) &= \mathsf{d}_{\sup}\left(\sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1}(t) - v_k(t)) \,,\, w(t) \right) \\ &= \mathsf{d}_{\sup}\left(\sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1}(t) - v_k(t)) \,,\, \sum_{k=1}^{+\infty} (v_{k+1}(t) - v_k(t)) \right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

这里我们用到了这样一个事实：在 $\mathbb{R}^d$ 上通常收敛的级数也一致收敛。通过简单应用法图引理（例如参见[73, 陈述 1。28]），最终可以证明

$$\int_0^T \mathsf{d}_{\sup}(v_n(t), v(t))\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

至此，我们的断言得证。 □

C 命题2.21的证明

在本附录的第三部分中，我们详细给出命题2.21中所示的矩估计和一致可积性界的证明；这两者都依赖于定理2.19中回顾的叠加原理。

命题*2.21*的证明。我们不详细证明（2.15），因为其证明与 [14,命题 2]的证明几乎完全相同。关于一致可积性估计（2.17），设 $\boldsymbol{\eta}_\mu \in \mathbb{R}^d \times \Sigma_T$是由定理2.19 给出的叠加测度，满足 $\mu(t) = (\mathsf{e}_t)_\sharp \boldsymbol{\eta}_\mu$ 对所有时间 $t \in [\tau, T]$ 均成立，并注意到

$$|v(t, \sigma_\mu(t))| \leq m(t)(1 + \sigma_\mu(t))$$

在我们的工作假设下，对于 $\mathscr{L}^1$-几乎处处的 $t \in [\tau, T]$ 以及 $\boldsymbol{\eta}_\mu$-几乎处处的 $(x, \sigma_\mu) \in \mathbb{R}^d \times \Sigma_T$均成立。因此，简单应用格朗沃尔引理可得

$$|\sigma_\mu(t)| \leq \left(|x| + \int_\tau^t m(s)\mathrm{d}s \right) \exp\left(\int_\tau^t m(s)\mathrm{d}s \right) \leq C_T(1 + |x|), \tag{C.1}$$

对于所有时间 $t \in [\tau, T]$ 以及 $\boldsymbol{\eta}_\mu$-几乎处处的 $(x,\ \sigma) \in \mathbb{R}^d \times \Sigma_T$均成立，其中我们引入了常数 $C_T = \max\{1,\ \|m(\cdot)\|_1\}\exp(\|m(\cdot)\|_1)$。特别地，对于每个 $R > 0$，由后一个不等式可得

$$\begin{aligned}\left(\int_{\{x \text{ s.t. } |x|\geq R\}} |x|^p \mathrm{d}\mu(t)(x)\right)^{1/p} &= \left(\int_{\{(x,\sigma_\mu) \text{ s.t. } |\mathsf{e}_t(x,\sigma_\mu)|\geq R\}} |\mathsf{e}_t(x,\sigma_\mu)|^p \mathrm{d}\boldsymbol{\eta}_\mu(x,\sigma_\mu)\right)^{1/p} \\ &\leq C_T\left(\int_{\{(x,\sigma_\mu) \text{ s.t. } C_T(1+|x|)\geq R\}} (1+|x|)^p \mathrm{d}\boldsymbol{\eta}_\mu(x,\sigma_\mu)\right)^{1/p} \\ &= C_T\left(\int_{\{x \text{ s.t. } |x|\geq R/C_T-1\}} (1+|x|)^p \mathrm{d}\mu^0(x)\right)^{1/p}\end{aligned}$$

对所有时间 $t \in [\tau, T]$ 均成立，由此完成了我们所述结论的证明。 □

D 命题 2.23 的证明

在这最后一个附录（也是第四个附录）中，我们详细给出命题 2.23 的稳定性估计证明。

命题 *2.23* 的证明。全局稳定性估计（2.19）的证明从略，因为它与 [14, 命题 2] 的证明几乎完全相同。至于局部稳定性估计，固定某个 $R > 0$，并注意到在我们的工作假设下，映射

$$t \in [\tau, T] \mapsto \|v(t) - w(t)\|_{L^\infty(B(0,R),\mathbb{R}^d;\nu(t))},$$

是勒贝格可积的。在这种情况下，重复进行与 [14, 附录 B] 中类似的一系列计算，可以证明

$$\begin{aligned}W_p(\mu(t),\nu(t)) \leq C_p\Bigg(W_p(\mu_\tau,\nu_\tau) + \left(\int_{\mathbb{R}^d\times\Sigma_T}\left(\int_\tau^t |v(s,\sigma_\nu(s)) - w(s,\sigma_\nu(s))|\mathrm{d}s\right)^p \mathrm{d}\boldsymbol{\eta}_\nu(y,\sigma_\nu)\right)^{1/p}\Bigg) \\ \times \exp\left(C_p' \|l(\cdot)\|_{L^1([\tau,t])}^p\right),\end{aligned} \tag{D.1}$$

对所有时间 $t \in [\tau, T]$，其中 $\boldsymbol{\eta}_\nu \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^d \times \Sigma_T)$ 是生成 $\nu(\cdot) \in$的叠加测度，该测度属于绝对连续类($[\tau, T]$, $\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$)，其存在性由定理 2.19 保证。我们着重考察（D.1）右端中的积分项，并注意到后者可以拆分为两部分

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^d\times\Sigma_T}\left(\int_\tau^t |v(s,\sigma_\nu(s)) - w(s,\sigma_\nu(s))|\mathrm{d}s\right)^p \mathrm{d}\boldsymbol{\eta}_\nu(y,\sigma_\nu) \\ &= \int_{\{(y,\sigma_\nu) \text{ s.t. } \|\sigma_\nu(\cdot)\|_{C^0([\tau,T],\mathbb{R}^d)}\leq R\}}\left(\int_\tau^t |v(s,\sigma_\nu(s)) - w(s,\sigma_\nu(s))|\mathrm{d}s\right)^p \mathrm{d}\boldsymbol{\eta}_\nu(y,\sigma_\nu) \\ &\quad + \int_{\{(y,\sigma_\nu) \text{ s.t. } \|\sigma_\nu(\cdot)\|_{C^0([\tau,T],\mathbb{R}^d)}>R\}}\left(\int_\tau^t |v(s,\sigma_\nu(s)) - w(s,\sigma_\nu(s))|\mathrm{d}s\right)^p \mathrm{d}\boldsymbol{\eta}_\nu(y,\sigma_\nu),\end{aligned} \tag{D.2}$$

对所有 $t \in [0, T]$。右端（D.2）中的第一项可以直接估计 as

$$\begin{aligned}&\int_{\{(y,\sigma_\nu) \text{ s.t. } \|\sigma_\nu(\cdot)\|_{C^0([\tau,T],\mathbb{R}^d)}\leq R\}}\left(\int_\tau^t |v(s,\sigma_\nu(s)) - w(s,\sigma_\nu(s))|\mathrm{d}s\right)^p \mathrm{d}\boldsymbol{\eta}_\nu(y,\sigma_\nu) \\ &\qquad\qquad \leq \left(\int_\tau^t \|v(s) - w(s)\|_{L^\infty(B(0,R),\mathbb{R}^d;\nu(s))}\,\mathrm{d}s\right)^p,\end{aligned} \tag{D.3}$$

对所有时间 $t \in [\tau, T]$。关于右端的第二项（D.2），由对 v, w 所作的次线性假设 $[0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 以及赫尔德不等式可得

$$\begin{aligned}&\int_{\{(y,\sigma_\nu) \text{ s.t. } \|\sigma_\nu(\cdot)\|_{C^0([\tau,T],\mathbb{R}^d)}>R\}}\left(\int_\tau^t |v(s,\sigma_\nu(s)) - w(s,\sigma_\nu(s))|\mathrm{d}s\right)^p \mathrm{d}\boldsymbol{\eta}_\nu(y,\sigma_\nu) \\ &\leq 2^p \int_{\{(y,\sigma_\nu) \text{ s.t. } \|\sigma_\nu(\cdot)\|_{C^0([\tau,T],\mathbb{R}^d)}>R\}}\left(\int_\tau^t m(s)(1+|\sigma_\nu(s)|)\mathrm{d}s\right)^p \mathrm{d}\boldsymbol{\eta}_\nu(y,\sigma_\nu) \\ &\leq 2^p \|m(\cdot)\|_{L^1([\tau,t])}^{p/q} \int_\tau^t m(s)\left(\int_{\{(y,\sigma_\nu) \text{ s.t. } \|\sigma_\nu(\cdot)\|_{C^0([\tau,T],\mathbb{R}^d)}>R\}} (1+|\sigma_\nu(s)|)^p \mathrm{d}\boldsymbol{\eta}_\nu(y,\sigma_\nu)\right)\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{D.4}$$

现在回顾一下，由上文的（C.1）可知，同样有

$$\|\sigma_\nu(\cdot)\|_{C^0([\tau,T],\mathbb{R}^d)} \le C_T(1+|y|),$$

对 $\boldsymbol{\eta}_\nu$-几乎所有的 $(y,\ \sigma_\nu)$，结合 (D.4) 可得

$$\begin{aligned}\int_{\{(y,\sigma_\nu)\text{ s.t. }\|\sigma_\nu(\cdot)\|_{C^0([\tau,T],\mathbb{R}^d)}>R\}} \left(\int_\tau^t |v(s,\sigma_\nu(s))-w(s,\sigma_\nu(s))|\mathrm{d}s\right)^p \mathrm{d}\boldsymbol{\eta}_\nu(y,\sigma_\nu)\\ \le 2^p \|m(\cdot)\|^p_{L^1([\tau,t])} \int_{\{y\text{ s.t. }|y|\ge R/C_T-1\}} \Big(1+C_T(1+|y|)\Big)^p \mathrm{d}\nu_\tau \quad (y),\end{aligned} \tag{D.5}$$

对所有时间 $t\in[\tau,T]$。因此，将 (D.3) 和 (D.5) 合并到 (D.1) 中，并应用赫尔德不等式，最终得到

$$\begin{aligned}W_p(\mu(t),\nu(t)) \le C_p\Bigg(W_p(\mu_\tau,\nu_\tau)+\int_\tau^t \|v(s)-w(s)\|_{L^\infty(B(0,R),\mathbb{R}^d;\nu(s))}\,\mathrm{d}s\\ +2(1+C_T)\,\|m(\cdot)\|_{L^1([\tau,t])}\left(\int_{\{y\text{ s.t. }|y|\ge R/C_T-1\}}(1+|y|)^p\mathrm{d}\nu_\tau(y)\right)^{1/p}\Bigg)\\ \times\exp\left(C_p'\,\|l(\cdot)\|^p_{L^1([\tau,t])}\right),\end{aligned}$$

对所有时间 $t\in[\tau,T]$，由此完成了我们所述结论的证明。 □

参考文献

[1] G. Albi、D Balagué、J.A. Carrillo 和 J. von Brecht。群集模型中二阶模型的集群环与环舞稳定性分析。*SIAM* 应用数学杂志，74(3)：794–818，2014。[2] G. Albi、L. Pareschi、G. Toscani 和 M. Zanella。观点建模的最新进展：控制与社会影响。活性粒子，第 *1* 卷，第 49–98 页，2017。[3] L. Ambrosio。BV 向量场的输运方程与柯西问题。《数学创刊》，158(2)：227–260，2004。[4] L. Ambrosio 和 G. Crippa。非光滑速度场的连续性方程与常微分方程流。爱丁堡皇家学会会刊，144(6)：1191–1244，2014。[5] L. Ambrosio、N. Fusco 和 D. Pallara。有界变差函数与自由间断问题。牛津数学专著，2000。[6] L. Ambrosio 和 W. Gangbo。概率测度 Wasserstein 空间中的哈密顿常微分方程。《纯粹与应用数学通讯》，61(1)：18–53，2008。[7] L. Ambrosio、N. Gigli 和 G. Savaré。度量空间及概率测度空间中的梯度流。苏黎世联邦理工学院数学讲义。Birkhäuser 出版社，2008。[8] J.-P. Aubin 和 A. Cellina。微分包含。Springer-Verlag，1984。[9] J.-P. Aubin 和 H. Frankowska。集值分析。Birkhäuser 现代经典。Birkhäuser 巴塞尔，1990。[10] J.-D. Benamou、G. Carlier 和 M. Laborde。Wasserstein 梯度流及其应用的增广拉格朗日方法。*ESAIM*：论文集与综述，54：1–17，2016。[11] P. Bernard。杨测度、叠加与输运。《印第安纳大学数学杂志》，57(1)：247–275，2008。[12] S. Bianchini 和 P. Bonicatto。 $\mathbb{R}^d$中向量场分解的唯一性结果。《数学创刊》，220：255–393，2020。[13] V.I. Bogachev。测度论，第 1 卷。柏林：Springer，2007。[14] B. Bonnet 和 H. Frankowska。Wasserstein 空间中的微分包含：Cauchy-Lipschitz 框架。《微分方程杂志》，271：594–637，2021。[15] B. Bonnet 和 H. Frankowska。Wasserstein 空间中最优控制问题的必要最优性条件。《应用数学与优化》，84：1281–1330，2021。[16] B. Bonnet 和 H. Frankowska。平均场最优控制中的半凹性、灵敏度分析及应用。《纯粹与应用数学杂志》，157：282–345，2022。[17] B. Bonnet 和 F. Rossi。Wasserstein 空间中的庞特里亚金最大值原理。《变分法与偏微分方程》，58：11，2019。

[18] H. Brézis。泛函分析、索伯列夫空间与偏微分方程。Universitext。Springer，2010。[19] F. Camilli、G. Cavagnari、R. De Maio 和 B. Piccoli。测度微分方程的叠加原理与方案。《动力学及相关模型》，14(1)：89–113，2021。[20] P. Cannarsa、R. Capuani 和 P. Cardaliaguet。带状态约束的均场博弈：从温和解到偏微分方程组的逐点解。《变分法与偏微分方程》，60：108，2021。[21] P. Cannarsa 和 H. Frankowska。控制理论中最优轨线的若干刻画。SIAM 控制与优化杂志，29(6)：1322–1347，1991。[22] P. Cannarsa 和 C. Sinestrari。半凹函数、哈密顿-雅可比方程与最优控制。《非线性微分方程及其应用进展》。Birkhaäuser 巴塞尔，2004。[23] P Cardaliaguet、F. Delarue、J-M. Lasry 和 P.-L. Lions。平均场博弈中的主方程与收敛问题。《数学年刊研究》。普林斯顿大学出版社，2019。[24] G. Carlier、V. Duval、G. Peyré 和 B. Schmitzer。最优传输与梯度流的熵方案收敛性。《SIAM数学分析杂志》，49(2)：1385–1418，2017。[25] J.A. Carrillo、M. Di Francesco、A. Figalli、T. Laurent 和 D. Slepčev。非局部相互作用方程的全时弱测度解与有限时聚集。《杜克数学杂志》，156(2)：229–271，2011。[26] J.A. Carrillo、M. Fornasier、J. Rosado 和 G. Toscani。动力学 Cucker-Smale 模型的渐近集群。《SIAM数学分析杂志》，42(1)：218–236，2010。[27] J.A. Carrillo、S. Lisini 和 E. Mainini。非光滑相互作用势的梯度流。《非线性分析：理论、方法与应用》，100：122–147，2014。[28] J.A. Carrillo、S. Martin 和 V. Panferov。群集模型中的一种新相互作用势。Physica D：非线性现象，260：112–126，2013。[29] G. Cavagnari、S. Lisini、C. Orrieri 和 G. Savaré。多智能体最优控制问题的拉格朗日、欧拉和康托罗维奇表述：等价性与伽马收敛。《微分方程杂志》，322：268–364，2022。[30] G. Cavagnari、A. Marigonda 和 M. Quincampoix。多智能体控制系统中状态约束与动力学的相容性。《演化方程杂志》，21(4)：4491–4537，2021。[31] G. Cavagnari、G. Savaré 和 G.E. Sodini。耗散概率向量场与 Wasserstein 空间中演化半群的生成。《概率论及相关领域》，第 1–96 页，2022。[32] L. Cesari。优化理论与应用。常微分方程问题，第 17 卷，科学与商业媒体。Springer，2012。[33] F Clarke。泛函分析、变分法与最优控制，第 264 卷。Springer，2013。[34] G. Crippa 和 M. Lécureux-Mercier。具有非局部流的连续性方程组的测度解的存在性与唯一性。《非线性微分方程与应用》，20：523–537，2013。[35] E. Cristiani、B. Piccoli 和 A. Tosin。行人动力学的多尺度建模，第 12 卷。Springer，2014。[36] R.L. Di Perna 和 Lions P.-L.。常微分方程、输运理论与索伯列夫空间。《数学创刊》，98(3)：511–548，1989。[37] J. Diestel。关于 $L^1(\mu, X)$ 中弱紧性的注记。《格拉斯哥数学杂志》，18(1)：87–91，1977。[38] J. Diestel、W.M. Ruess 和 W. Schachermayer。关于 $L^1(\mu, X)$ 中的弱紧性。《美国数学会会刊》，118：447–453，1993。[39] J. Diestel 和 J.J.Jr Uhl。向量测度。《数学调查》第 15 卷。美国数学会，1977。[40] J. Dolbeault、B. Nazareth 和 G. Savaré。测度之间的一类新传输距离。《变分法与偏微分方程》，34(2)：193–231，2009。[41] M. Erbar。流形上的热方程作为 Wasserstein 空间中的梯度流。《高等科学研究所亨利·庞加莱研究所年刊：概率与统计》，46(1)：1–23，2010。[42] A.F. Filippov。不连续右端的微分方程：控制系统，第 18 卷，科学与商业媒体。Springer，2013。[43] A.L. Filippov。最优控制理论中的某些问题。工业与应用数学学会杂志 A 辑：控制，1(1)：76–84，1962。[44] M. Fornasier、S. Lisini、C. Orrieri 和 G. Savaré。平均场最优控制作为有限智能体控制的伽马极限。《欧洲应用数学杂志》，30(6)：1153–1186，2019。[45] M. Fornasier、B. Piccoli 和 F. Rossi。平均场稀疏最优控制。《英国皇家学会哲学汇刊 A 辑》，372(20130400)，2014。[46] M. Fornasier 和 F. Solombrino。平均场最优控制。ESAIM COCV，20(4)：1123–1152，2014。[47] H. Frankowska。带端点约束的微分包含最优解的极大值原理。SIAM 控制与优化杂志，25(1)：145–157，1987。

[48] H. Frankowska. 与切向哈密顿-雅可比方程的解相关联的最优轨线。《应用数学与优化》, 19(1):291–311, 1989.[49] H. Frankowska. 运算微分包含的先验估计。《微分方程杂志》, 84:100–128, 1990.[50] H. Frankowska, E.M. Marchini, and M. Mazzola. 无限维状态约束控制问题的必要最优性条件。《微分方程杂志》, 264(12):7294–7327, 2018.[51] H. Frankowska and N.P. Osmolovski. 二阶充分条件，第二部分：具有一般控制约束的最优控制问题中的弱局部极小值。《系统与控制快报》, 182:105673, 2023.[52] H. Frankowska and N.P. Osmolovskii. 状态约束最优控制问题中的强局部极小解：二阶必要条件。《SIAM 控制与优化杂志》, 58(3):2353–2376, 2018.[53] H. Frankowska, S. Plaskacz, and T. Rzezuchowski. 可测可行性定理与哈密顿-雅可比-贝尔曼方程。《微分方程杂志》, 116(2):265–305, 1995.[54] H. Frankowska, H. Zhang, and X. Zhang. 带控制及初末状态约束的随机最优控制问题。《SIAM 控制与优化杂志》, 56(3):1823–1855, 2018.[55] Ugo Gianazza, Giuseppe Savaré, and Giuseppe Toscani. Fisher 信息的 Wasserstein 梯度流与量子漂移扩散方程。《理性力学与分析档案》, 1(194):133–220, 2009.[56] S.-Y. Ha, K. Lee, and D. Levy. 随机 Cucker-Smale 系统中时间渐近集群的出现。《数学科学通讯》, 7(2):453–469, 2009.[57] John Horváth. 拓扑向量空间与分布。Courier Corporation, 2012.[58] M.Y. Huang, R. Malhamé, and P.E. Caines. 大规模群体随机动态博弈：闭环 McKean-Vlasov 系统与纳什确定性等价原理。《信息与系统通讯》, 6(3):221–252, 2006.[59] C. Jimenez, A. Marigonda, and M. Quincampoix. Wasserstein 空间中多智能体系统的最优控制。《变分法与偏微分方程》, 59:58, 2020.[60] R. Jordan, D. Kinderlehrer, and F. Otto. 福克-普朗克方程的变分表述。《SIAM 数学分析杂志》, 29(1):1–17, 1998.[61] J.L. Kelley. 一般拓扑学，数学研究生教材第27卷。Springer, 1975.[62] J-M. Lasry and P.-L. Lions. 平均场博弈。《日本数学杂志》, 2(1):229–260, 2007.[63] B. Maury, A. Roudneff-Chupin, and F. Santambrogio. 梯度流型宏观人群运动模型。《应用科学中的数学模型与方法》, 20(10):1787–1821, 2010.[64] B. Maury, A. Roudneff-Chupin, F. Santambrogio, and J. Venel. 处理人群运动模型中的拥堵。《网络与异质介质》, 6(3):485 – 519, 2011.[65] F. Otto. 耗散方程的几何：多孔介质方程。《偏微分方程通讯》, 26:101–174, 2001.[66] N.S. Papageorgiou. 巴拿赫空间中可测多值函数的随机不动点定理。《美国数学会会刊》, 97(3):507–514, 1986.[67] G. Peyré. Wasserstein 梯度流的熵近似。《SIAM 成像科学杂志》, 8(4):2323–2351, 2015.[68] B. Piccoli. 测度微分包含。载于2018 IEEE 决策与控制会议（CDC），迈阿密海滩，佛罗里达州，第1323–1328页，2018.[69] B. Piccoli. 测度微分方程。《理性力学与分析档案》, 233:1289–1317, 2019.[70] B. Piccoli and F. Rossi. Wasserstein 空间中具有非局部速度的输运方程：数值格式的收敛性。《应用数学学报》, 124(1):73–105, 2013.[71] B. Piccoli and F. Rossi. 人群动力学的测度论模型。载于《人群动力学》第1卷——理论、模型与安全问题，第137–165页。Birkhauser, 2018.[72] B. Piccoli, F. Rossi, and E. Trélat. 动力学 Cucker-Smale 模型的集群控制。《SIAM数学分析杂志》, 47(6):4685–4719, 2015.[73] W. Rudin. 实分析与复分析。数学丛书。McGraw-Hill 国际版 , 1987.[74] F. Santambrogio. 面向应用数学家的最优传输，第87卷。Birkhauser Basel, 2015.[75] F. Santambrogio. {欧几里得、度量与Wasserstein}梯度流：综述。《数学科学通报》, 7:87–154, 2017.[76] A. Ülger. $L^1(\mu, X)$中的弱紧性。《美国数学会会刊》, 113:143–149, 1991.[77] C. Villani. 最优传输：新旧理论。Springer-Verlag, 柏林, 2009.[78] R.B. Vinter. 最优控制。系统与控制：基础与应用。Birkhauser Basel, 2000.[79] D.H. Wagner. 可测选择定理综述。SIAM 控制与优化杂志, 15(5):859– 903, 1977.[80] S. Warner. 连续函数空间上的紧收敛拓扑。《杜克数学杂志》, 25(2):265–282, 1958.