arXiv:2302.00964v1 [math.NT] 2 Feb 2023

形数、混合型形式及其表示数

B. RAMAKRISHNAN 和 LALIT VAISHYA

Abstract. 本文研究了确定自然数 n 表示为具有某些正整数系数的形数之和时其表示数公式的问题。为此，当考虑偶数个高阶形数时，我们证明了在系数满足某些条件下，相应的生成函数给出一个整数权模形式。特别地，我们得到了带系数的偶数个三角数之和所对应生成函数的模性质。我们还得到了涉及带系数的形数（包括平方数和三角数）以及带系数的 m^2+mn+n^2型形式的混合形式之生成函数的模性。特别地，我们证明了奇数个平方数和奇数个三角数（带系数）的生成函数的模性。因此，利用相应整数权模形式空间的一组基，得到了这些混合形式的表示数的显式公式。我们还得到了若干关于带系数三角数的应用，类似于 [13]中所得的结果。在 [21], 中，Xia-Ma-Tian 考虑了一些混合形式的特殊情形，并利用（p,k）参数化方法得到了这21个混合形式的表示数。我们也利用我们的方法导出了这21个公式，并进一步作为推论得到了艾森斯坦级数 $E_4(\tau)$ 及其倍化的（p,k）参数化。需要指出的是， E_4 及其倍化的（p,k）参数化已在 [7, 3]中通过不同的方法导出。我们通过若干例子说明了我们的方法。

1. Introduction and Statement of results

求某类二次型表示正整数的表示数公式，是数论中的经典问题之一，尤其是求自然数 n 被表示为 k 个整数平方之和的表示数公式，记作 $r_k(n)$。在这方面，三角数在求$r_k(n)$、 $8|k$ 的公式时发挥了重要作用（见 [10]）。对于固定的 $a \geq 1$，我们按照 Ono-Robins-Wahl [13] 的定义，将 n^{th}形数定义为 $f_a(n) := {}^{an^2+}{}_{(a-2)_2}{}^{\ \ n}$。注意，当 $a = 1$ （分别为 2 和 3）时，函数 $f_a(n)$ 表示 n^{th}三角数（分别为平方数和五边形数）。文献中，n^{th} 三角数记作 T_n；对于固定的 $a \geq 3$，整数 $f_a(n)$ 称为n^{th} 高阶多边形数。这些函数与某些几何对象顶点数的计数有关。我们将这些形数的生成函数分别记为 $\Psi(\tau)$（三角数）、 $\theta(\tau)$（平方数）和 $\Phi_a(\tau)$（ $a \geq 3$），它们分别由下式给出

$$\Psi(\tau) := \sum_{n=0}^{\infty} q^{\frac{n(n+1)}{2}}, \qquad \theta(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2}, \qquad \text{and} \qquad \text{for } a \geq 3, \quad \Phi_a(\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{f_a(n)}. \tag{1}$$

其中 $q = e^{2i\pi\tau}$， $\tau \in \mathbb{H}$. 在 1995年，Ono-Robins-Wahl [13] 研究了一个问题：确定自然数 n 可表示为 k 个三角数之和的表示数公式，记作 $\delta_k(n)$。当 $2|k$时，他们运用整权模形式理论，得到了

Date: 2023年2月3日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号 11E25、11F11、11F30；次要分类号 11E20。*Key words and phrases.* 高阶形数、三角数、二次型、模形式、theta级数、广义 eta 商。

$\delta_k(n)$。在他们的研究中，他们给出了函数 $\delta_k(n)$ 的若干应用。其中之一是涉及拉马努金 τ 函数 $\tau(n)$ 的公式，用于计算 $\delta_{24}(n)$。对于一般的 k，他们将 $\delta_k(n)$ 与 n 表示为 k 个奇平方数之和的表示数联系起来。此外，他们还将其应用于计算 Leech 格点在 k 维球体内的点数。对于高阶形数，他们利用雅可比三重乘积恒等式，证明了高阶形数的生成函数可用广义 eta 商表示。过去几年中，文献中有许多研究探讨了如何为具有特定系数的二次型表示自然数的表示数求公式。这里列出一些相关参考文献 [16, 1, 2, 20, 6, 21, 15]。

类似地，本文考虑这些形数与 $a \neq 2$ 的正系数线性组合。更确切地说，我们考虑与高阶形数相关的以下线性组合，其系数为 c_i，由 $(a \geq 3)$ 给出；

$$F_{a,\mathcal{C}}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{k} c_i f_a(x_i), \qquad \text{where} \qquad f_a(n) = \frac{an^2 + (a-2)n}{2}, \tag{2}$$

以及由以下形式给出的三角数；

$$T_{\mathcal{C}}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{k} c_i \frac{x_1(x_i+1)}{2}, \qquad \text{where} \qquad \mathbf{x} := (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{Z}^k, \tag{3}$$

以及 $\mathcal{C} = (c_1, \cdots, c_k)$ $c_i \leq c_{i+1}$。我们首先在某些条件下证明与高阶形数 $(a \geq 3)$ 和三角数 $(a = 1)$ 对应的生成函数具有模性。此外，正如 Ono-Robins-Wahl 的研究所示，我们还推导出一些与带系数的三角数相关的应用。

接下来，我们沿着 Xia-Ma-Tian 的研究思路 [21], ，考虑三种混合形式的线性组合，并求出其相应的表示公式。更具体地说，在 [21], 中，他们考虑了 $2m$ 个变量下的以下形式类型，其定义如下。

$$\mathcal{M}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) := \sum_{i=1}^{u} a_i(x_{2i-1}^2 + x_{2i-1}x_{2i} + x_{2i}^2) + \sum_{i=1}^{v} b_i y_i^2 + \sum_{i=1}^{k} c_i T_{z_i}, \tag{4}$$

其中 $\mathbf{x} := (x_1, x_2, \ldots, x_{2u}) \in \mathbb{Z}^{2u}$，$\mathbf{y} := (y_1, y_2, \ldots, y_v) \in \mathbb{Z}^v$，$\mathbf{z} := (z_1, z_2, \ldots, z_k) \in \mathbb{N}_0^k$，$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$。此外，$2m = 2u + v + k$；$u, v, k$ 是非负整数，且 $v + k$ 为偶数，系数 $a_i \in \{1, 2, 4, 8\}$、$b_i \in \{1, 2, 3, 6\}$ 和 $c_i \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$。上述是由 $m^2 + mn + n^2$型二次型、平方数和带系数的三角数组成的混合形式。不过，他们在研究中定义了更一般类型的混合形式 $\mathcal{M}$(x, y, z)，其系数 a_i、b_i 和 c_i 如上；实际上，他们研究了21种混合形式（并得到了相应的表示公式），其中 $m = 4$（8变量形式）。

在本文的第二部分，我们考察类型（4）的形式（所有可能的混合形式），并证明相应的生成函数是一个权为 $m/2$ 、层和特征均已精确确定的模形式（取决于系数 a_i、b_i 和 c_i）。作为示例，我们运用模形式理论，得到与 4、6、8 和 10 个变量中的混合形式相对应的所需公式。通过为模形式空间选取合适的基，我们明确地得到了若干特殊情形下的这些公式。此外，我们还通过显式构造 Γ_0(12) 上权为 4 的模形式空间的一组基，得到了 Xia-Ma-Tian [21], 的工作中所考察的 21 个混合形式的表示公式。

在 [21], 中，他们利用权为 4 的归一化艾森斯坦级数 $E_4(\tau)$ 的（p, k）参数化、Dedekind η 函数 $\eta(\tau)$（及其倍化形式），并运用某些 θ函数恒等式，得到了 21 种混合形式的表示公式。在本文第三部分，我们注意到，我们通过模形式理论得到的 21 种混合形式的公式，结合 $\mathcal{M}$(x, y, z) 中出现的形式的三个生成函数的（p, k）参数化，可以导出 $E_4(\tau)$ 的（p, k）参数化（及

其倍化形式）。上述内容将在 §3 中详细阐述。值得注意的是， $E_4(d\tau)$、 $d|12$ 的（p,k）参数化是通过不同方法在 [7, 3] 中得到的。我们还指出， [11], 中研究了少数几种带系数的三角形型，以及由平方数和带有某些系数的三角数组成的混合形式，并通过不同方法得到了相应公式。

在陈述主要结果之前，我们先固定一些记号。

令 $\eta(\tau) := q^{\frac{1}{24}}\prod(1-q^n)$ 表示 Dedekind η 函数。依照 [13], 的概念，令 $\eta_{\delta,\ g}(\tau)$ 表示如下定义的广义 Dedekind η 函数:

$$\eta_{\delta,g}(\tau) = q^{\frac{P_2(g/\delta)\delta}{2}} \prod_{\substack{n\geq 0\\ n\equiv g \pmod{\delta}}} (1-q^n) \prod_{\substack{n\geq 0\\ n\equiv -g \pmod{\delta}}} (1-q^n), \tag{5}$$

其中， $P_2(x)$ 是如下定义的广义伯努利多项式； $P_2(x) = \{x\}^2 - \{x\} + \frac{1}{6}$，且 $\{x\}$表示 x的小数部分。

注 1.1. 对于 $\delta = 1$ 和 $g = 0$，有

$$\eta_{1,0}(\tau) = \eta^2(z). \tag{6}$$

简单计算可知，对于任意 $c \geq 1$，有

$$\eta_{\delta,g}(c\tau) = \eta_{c\delta,cg}(\tau). \tag{7}$$

令 $a \geq 3$ 为一个固定整数。令 $\delta_k(n)$ 和 $\mathcal{N}_a(k;n)$（对于固定的 $a \geq 3$）分别表示将 n 表示为 k 个三角数之和以及 k 个高阶形数之和的表示数（对于固定的 $a \geq 3$）。令 $\mathcal{C}$ 表示 k 元组 $(c_1,\cdots,c_k)$ $c_i \leq c_{i+1}$。我们分别用 $\delta_k(\mathcal{C};\ n)$ 和 $\mathcal{N}_a^{\mathcal{C}}(k;\ n)$（对于固定的 $a \geq 3$）表示将 n 表示为 k 个三角数之和以及 k 个高阶形数之和的表示数（对于固定的 $a \geq 3$），其中带有系数 c_i，即，

$$\text{对于固定整数 a } \geq 3, \quad \begin{aligned} \delta_k(\mathcal{C};n) &= \#\left\{(x_1,\cdots,x_k)\in\mathbb{Z}^k \middle|_k\ n = \sum_{i=1}^{k} c_i \frac{x_i(x_i+1)}{2}\right\} \\ \mathcal{N}_a^{\mathcal{C}}(k;\ n) &= \#\left\{(x_1,\cdots,x_k)\in\mathbb{Z}^k \middle|\ n = \sum_{i=1}^{k} c_i f_a^{i-1}(x_i)\right\}. \end{aligned}$$

特别地，如果所有 $c_i = 1$，那么 $\delta_k(\mathcal{C};\ n) = \delta_k(n)$ 且 $\mathcal{N}_a^{\mathcal{C}}(k;\ n) = \mathcal{N}_a(k;\ n)$。我们分别用 $\Psi_{\mathcal{C}}(\tau)$ 和 $\Phi_a^{\mathcal{C}}(\tau)$ 表示 $\delta_k(\mathcal{C};\ n)$ 和 $\mathcal{N}_a^{\mathcal{C}}(k;\ n)$ 的生成函数。这些函数如下:

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathcal{C}}(\tau) &= \prod_{i=1}^{k}\Psi(c_i\tau) = \sum_{n=0}^{\infty}\delta_k(\mathcal{C};n)q^n \\ \text{and}\quad \Phi_a^{\mathcal{C}}(\tau) &= \prod_{i=1}^{k}\Phi_a(c_i\tau) = \sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{N}_a^{\mathcal{C}}(k;n)q^n. \end{aligned} \tag{8}$$

根据 [13, 命题 1、定理 10] 可知，式 (1) 中定义的形数的生成函数可明确地用 η 商和广义 eta 商表示，即:

$$\Psi(\tau) = q^{-1/8}\frac{\eta^2(2\tau)}{\eta(\tau)},\quad \theta(\tau) = \frac{\eta^5(2\tau)}{\eta^2(\tau)\eta^2(4\tau)},\ \text{and for a} \geq 3,\ \Phi_a(\tau) = q^{-\frac{(a-2)^2}{8a}}\eta(a\tau)\frac{\eta_{a,1}(2\tau)}{\eta_{a,1}(\tau)}, \tag{9}$$

其中， $\eta(\tau)$ 是戴德金 eta 函数，而 $\eta_{\delta,\ g}(\tau)$ 是由 (5) 定义的广义戴德金 eta 函数。因此，生成函数 $\Psi_{\mathcal{C}}(\tau)$ 和 $\Phi_a^{\mathcal{C}}(\tau)$ 分别用 Dedekind eta 商

和广义 Dedekind eta 商表示，即，

$$\Psi_{\mathcal{C}}(\tau)=\prod_{i=1}^{k}\Psi(c_i\tau)\ =q^{-\mathbf{h}/8}\prod_{i=1}^{k}\frac{\eta^2(2c_i\tau)}{\eta(c_i\tau)} \tag{10}$$

且对于 $a\geq 3$,

$$\Phi_a^{\mathcal{C}}(\tau)=\prod_{i=1}^{k}\Phi_a(c_i\tau)=q^{-\frac{(a-2)^2}{8a}\mathbf{h}}\prod_{i=1}^{k}\eta(c_ia\tau)\prod_{i=1}^{k}\frac{\eta_{a,1}(2c_i\tau)}{\eta_{a,1}(c_i\tau)} \tag{11}$$

其中 $\mathbf{h}=c_1+c_2+\cdots+c_k$。令 $\mathbf{c}:=c_1c_2\cdots c_k$。我们的第一个结果表明，对于固定的正整数 $a\neq 2$，在某些条件下，$\Phi_a^{\mathcal{C}}(\tau)$ 是一个模形式。更确切地说，我们有以下定理。

定理 1.1。设 $a\neq 2$ 为固定的正整数，且 $k\in 2\mathbb{Z}^+$。令 $\Phi_a^{\mathcal{C}}(\tau)$ 为 $\mathcal{N}_a^{\mathcal{C}}(k;\,n)$ 的生成函数（当 $a\geq 3$ 时），并令 $\Psi_{\mathcal{C}}(\tau)$ 为 $\delta_k(\mathcal{C};\,n)$ 的生成函数（当 $a=1$ 时）。
令 $F(\tau)$ 为这些生成函数之一（取决于 $a\geq 3$ 或 $a=1$）。那么，$q^{\frac{(a-2)^2}{8a}\mathbf{h}}F(\tau)$ 是同余子群 $\Gamma_0(N)$ 上权为 $\frac{k}{2}$ 的模形式（可用 a 和 c_i 显式表示），当且仅当 $\mathbf{h}\equiv 0 \pmod{\frac{8a}{d}}$，其中 $d=$最大公约数$((a-2)^2,4a)$，$N=2a$最小公倍数$[c_1,\ldots,c_k]$（当 a 为奇数时），而 $N=a$最小公倍数$[c_1,\ldots,c_k]$（当 a 为偶数时）；特征 χ 由 $\chi=\left(\frac{(-1)^{k/2}4\mathbf{c}}{\cdot}\right)$给出。

注 1.2. 当 $a=1$ 时，上述定理给出了生成函数$\Psi_{\mathcal{C}}(\tau)$的模性质。更确切地说，它指出：$q^{\mathbf{h}/8}\Psi_{\mathcal{C}}(\tau)$ 是定义在 $\Gamma_0(N)$ 上、权为 $k/2$、特征为 $\chi_1=\left(\frac{(-1)^{k/2}4\mathbf{c}}{\cdot}\right)$ 的模形式，当且仅当 $\mathbf{h}\equiv 0 \pmod 8$，其中 $N=\overline{2\cdot\mathrm{lcm}}[c_1,c_2,\ldots,c_k]$（h 和 c 如上所定义）。

由 (4) 给出的混合形式有三个分量，它们是 m^2+mn+n^2 型二次型、平方数和三角数的线性组合。对于论文的第二部分，我们选取上述混合形式的两个子类，它们是三角数与平方数，或 m^2+mn+n^2 型形式的组合。下面我们为这些组合给出一种记号。

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{l,t}(\mathbf{x},\mathbf{z})&=\sum_{i=1}^{u}a_i(x_{2i-1}^2+x_{2i-1}x_{2i}+x_{2i}^2)+\sum_{i=1}^{k}c_iT_{z_i},\quad k\text{ is even},\\ \mathcal{M}_{s,t}(\mathbf{y},\mathbf{z})&=\sum_{i=1}^{v}b_iy_i^2+\sum_{i=1}^{k}c_iT_{z_i},\quad v+k\text{ is even},\end{aligned} \tag{12}$$

其中 x、y、z a_i,b_i,c_i 如（4）所示。混合形式 $\mathcal{M}_{l,\,t}$(x, z) 的生成函数为

$$\psi_{l,t}(\tau)=\prod_{i=1}^{u}\mathcal{F}(a_i\tau)\prod_{j=1}^{k}\Psi(c_j\tau),$$

其中 $\mathcal{F}(\tau)=\sum q^{m^2+mn+n^2}$。由于 k 为偶数，由注 1.2 可知，$q^{\mathbf{h}/8}\prod_{j=1}^{k}\Psi(c_j\tau)=_{m,\,n\in\mathbb{Z}}$

当 $\mathbf{h}=\sum_i c_i$ 是 8 的倍数时，$q^{\mathbf{h}/8}\Psi_{\mathcal{C}}(\tau)$ 是一个模形式。此外，$\mathcal{F}(\tau)$ 是 $M_1(\Gamma_0(3),\left(\frac{\cdot}{3}\right))$ 中的一个模形式，这由 $[18,$定理 $4]$得出。结合这两个模性质，我们得到以下定理，它给出了 $\psi_{l,\,t}(\tau)$ 的模性质。
定理 1.2. 对于偶整数 $k\geq 2$，令 $\psi_{l,\,t}(\tau)$ 为式 (12) 中定义的 $2u+k$ 个变量混合形式 $\mathcal{M}_{l,\,t}$(x, z) 的生成函数。则当 h 是 8 的倍数时，$q^{\mathbf{h}/8}\psi_{l,\,t}(\tau)$ 是 $M_{u+k/2}(\Gamma_0(L),\,\chi')$ 上的模形式，其中 $L=\mathrm{lcm}[3\,\mathrm{lcm}[a_1,\ldots,a_u],\ 2\,\mathrm{lcm}[c_1,\ldots,c_k]]$ and $\chi'=\chi$（若 u 为偶数），以及 $\chi'=\left(\frac{\cdot}{3}\right)\chi$（若 u 为奇数）。这里，χ 是定理 1.1 中定义的特征。

接下来，我们考虑具有 $2 \mid (v+k)$ 的 $v+k$ 个变量混合形式 $\mathcal{M}_{s,\,t}(\mathrm{y},\mathrm{z})$，并将其生成函数记为 $\psi_{s,\,t}(\tau)$。于是有

$$\psi_{s,t}(\tau)=\prod_{i=1}^{v}\theta(b_i\tau)\prod_{j=1}^{k}\Psi(c_j\tau), \tag{13}$$

其中 $\theta(\tau)$ 是由 $\theta(\tau)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}q^{n^2}$ 给出的经典 θ函数。在下一个结果中，我们将证明函数 $\psi_{s,\,t}(\tau)$ 的模性。为此，我们利用右端 (13) 中出现的两个生成函数都可表示为 η商这一事实。

定理 1.3. 设 v 和 k 为正整数，使得 $v+k$ 为偶数，且 h 是系数 c_i 之和。令 $M=\operatorname{lcm}[4\operatorname{lcm}[b_1,\dots,b_v],\,2\operatorname{lcm}[c_1,\dots,c_k]]$。那么，函数 $q^{\mathbf{h}/8}\psi_{s,\,t}(\tau)$ 是 $M_{(v+k)/2}(\Gamma_0(M),\,\chi'')$ 中的模形式，当且仅当 $\mathrm{h}\equiv 0\pmod 8$，其中

$$\chi''=\begin{cases}\left(\dfrac{(-1)^{(v+k)/2}4\prod_{i=1}^{v}b_i\prod_{j=1}^{k}c_j}{\cdot}\right), & \text{if } v \text{ and } k \text{ are even},\\[2ex] \left(\dfrac{(-1)^{(v+k)/2}8\prod_{i=1}^{v}b_i\prod_{j=1}^{k}c_j}{\cdot}\right), & \text{if } v \text{ and } k \text{ are odd}.\end{cases}$$

注1.3. 值得注意的是，奇数个平方数和奇数个三角数的生成函数具有奇数权。因此，这些生成函数的乘积是整数权模形式（权、层和特征的明确描述见上述定理）。利用这一事实，我们得到了一个新的关系，涉及一个整数表示为奇数个三角数之和以及表示为奇数个平方数之和的情形。详情见推论1.5、注1.4。

注意， $\Phi(\tau)$中的混合形式 $\mathcal{M}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})$在 $2u+v+k$ 个变量（其中 $2\mid(v+k)$）的生成函数可表示为

$$\Phi(\tau)=\prod_{i=1}^{u}\mathcal{F}(a_i\tau)\psi_{s,t}(\tau)=\prod_{i=1}^{u}\mathcal{F}(a_i\tau)\prod_{i=1}^{v}\theta(b_i\tau)\prod_{j=1}^{k}\Psi(c_j\tau). \tag{14}$$

因此， $\mathcal{F}$ 的模性质结合定理 1.3 可得以下结果。

推论 1.4. 设 u、v、k为正整数，且 $v+k$为偶数。那么，与 $2u+v+k$个变量中的混合形式 $\mathcal{M}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})$相关联的生成函数 $\Phi(\tau)$是一个模形式，至多相差 q的有理数次幂。更确切地说，当 h 被 8 整除时，函数 $q^{\mathbf{h}/8}\Phi(\tau)$是$M_{u+\frac{v+k}{2}}(\Gamma_0(N_1),\,\omega)$中的模形式，其中 $N_1=\operatorname{lcm}[3\operatorname{lcm}[a_1,\dots,a_u],\,M]$和 $\omega=\chi''$（若 u为偶数），以及 $\omega=\left(\frac{\cdot}{3}\right)\chi''$（若 u为奇数）。这里的 M 和 χ'' 同定理 1.3 中的定义。

令 $r_v(\mathcal{B};n)$ 表示正整数 n 被系数为 b_i 的 v 个平方数之和表示的次数，即 $\sum_{i=1}^{v}b_iy_i^2$，其中 $\mathcal{B}$ 表示 v 元组 $(b_1,\dots,b_v)$。当所有 $b_i=1$ 时， $r_v(\mathcal{B};n)$ 就是 $r_v(n)$，即将 n 表示为 v 个平方数之和的表示数。如前所述， $\delta_k(\mathcal{C};n)$ 表示正整数 n 被 k 个三角数 $\sum_{i=1}^{k}c_iT_{z_i}$ 的线性组合表示的次数；当所有 c_i 都等于 1 时， $\delta_k(\mathcal{C};n)=\delta_k(n)$。为简化记号，在具体例子中，我们将按如下方式书写 v 元组和 k 元组：$(b_1^{\alpha_1},\dots,b_v^{\alpha_v})$，$(c_1^{e_1},\dots,c_k^{e_k})$ $\alpha_i,e_i\ge 0$, $\alpha_1+\cdots+\alpha_v=v$ 和 $e_1+\cdots+e_k=k$。如果某些指数为零，则相应的系数取为零。对于自然数 n， $\delta_k(c_1^{e_1},\dots,c_k^{e_k};n)$（分别地， $\mathcal{N}_{s,\,t}(b_1^{\alpha_1},\dots,b_v^{\alpha_v};\,c_1^{e_1},\dots,c_k^{e_k};\,n)$）表示 n 被 k 个三角数 $\sum_{i=1}^{k}c_iT_{z_i}$ 的线性组合（分别地，混合形式 $\mathcal{M}_{s,\,t}(\mathrm{y},\mathrm{z})$）表示的次数。当所有 b_i 和 c_i 都等于 1 时，分别记作 $\delta_k(n)$ 和 $\mathcal{N}_{s,\,t}(n)$。

以下推论　　推论（定理 1.3）给出了上述表示公式之间的关系　　.

推论1.5。设 v、$k \geq 1$ 为整数，且 $v+k$ 为偶数。假设 $\mathbf{h} = e_1c_1 + e_2c_2 + \cdots + e_kc_k \equiv 0$（模 8），使得 $p = \mathbf{h}/8 \geq 0$ 是一个整数。于是，我们有

$$\delta_k(\mathcal{C};n) = \mathcal{N}_{s,t}(b_1^{\alpha_1},\ldots,b_v^{\alpha_v};c_1^{e_1},\ldots,c_k^{e_k};n-p) - r_v(\mathcal{B};n) - \sum_{m=1}^{n-1} r_v(\mathcal{B};m)\delta_k(\mathcal{C};n-m), \tag{15}$$

其中 α_i、e_i 是非负整数。特别地，若所有 b_i 和 c_i 都等于 1，那么在 $8|k$ 的条件下，我们得到

$$\delta_k(n) = \mathcal{N}_{s,t}\left(n - \frac{k}{8}\right) - r_v(n) - \sum_{m=1}^{n-1} r_v(m)\delta_k(n-m). \tag{16}$$

注意，在最后一个恒等式中，$p = \mathbf{h}/8 = k/8$。

注1.4. 上述推论给出了一个关于 $\delta_k(n)$ 的递推公式，它用 $\mathcal{N}_{s,t}(n)$ 和 $r_v(n)$ 表示，其中 $8|k$。当 v 和 k 是奇正整数时，方程 (15) 给出了 $\delta_k(\mathcal{C};n)$ 与 $r_v(\mathcal{B};n)$ 之间的新关系，特别是 $\delta_k(n)$ 与 $r_v(n)$ 之间的新关系。

当 $v = k$ 是正整数时，我们得到一个关系：自然数 n 的表示数（作为由系数 c_i 构成的 k 个三角数的线性组合）与 n 的表示数（作为由系数 c_i 构成的 k 个奇整数平方的线性组合）之间的关系。令 $v = k$，记

$$q_k(\mathcal{C};n) := \#\{(y_1,y_2,\ldots,y_k) \in \mathbb{Z}^k | n = \sum_{i=1}^{k} c_i y_i^2, y_i \geq 0,\ 2 \nmid y_i\}. \tag{17}$$

注意，当所有 c_i 都等于 1 时，$q_k(\mathcal{C};n) = q_k(n)$。因此，对于 $\delta_k(\mathcal{C};n)$，我们有以下结果；这与 [13] 中所有 c_i 都等于 1 时得到的相应结果类似。

命题 1.6. 对于正整数 n，有

$$\delta_k(\mathcal{C};n) = q_k(\mathcal{C};8n+\mathbf{h}), \tag{18}$$

其中 $\mathbf{h} = c_1 + \cdots + c_k$。换言之，$n$ 可表示为 $T_{\mathcal{C}}(\mathbf{z})$ 的表示数，与 $8n+\mathbf{h}$ 表示为带有系数 $c_i, 1 \leq i \leq k$ 的 k 个奇整数平方之和的表示数相同。特别地，当所有 $c_i = 1$ 时，我们有 $\mathbf{h} = k$。因此，上述结果给出

$$\delta_k(n) = q_k(8n+k), \tag{19}$$

这与 [13,命题 2] 中的结果相同。

证明。设 $n \geq 1$ 是由 $T_{\mathcal{C}}(\mathbf{z})$ 表示的一个整数。那么我们有

$$n = \sum_{i=1}^{k} c_i \frac{z_i(z_i+1)}{2} \iff 8n = 4\sum_{i=1}^{k} c_i z_i(z_i+1).$$

由于 $\mathbf{h} = c_1 + \ldots + c_k$，我们得到

$$8n + \mathbf{h} = \sum_{i=1}^{k} c_i(4z_i^2+4z_i+1) = \sum_{i=1}^{k} c_i(2z_i+1)^2.$$

由于可以追溯这些恒等式，因此可得 $\delta_k(\mathcal{C};n) = q_k(\mathcal{C};8n+\mathbf{h})$. □

现在，我们利用下列恒等式给出 $r_k(n)$、$\delta_k(n)$、$\delta_{2k}(n)$ 之间的关系（关于该恒等式的证明，参见 [8, 第 40] 页）：

$$\psi^2(\tau) = \theta(\tau)\psi(2\tau). \tag{20}$$

取 对上述恒等式取 k^{th} 次幂，并利用 (19)，可得以下推论 .

推论 1.7. 对于自然数 n，有

$$q_{2k}(8n+2k) = \delta_{2k}(n) = \sum_{\substack{a,b\in\mathbb{N}_0\\ a+2b=n}} r_k(a)\delta_k(b) = \sum_{\substack{a,b\in\mathbb{N}_0\\ a+2b=n}} r_k(a)q_k(8b+k). \tag{21}$$

注 1.5. 若我们将推论 1.7 应用于带系数的形式，则对于带系数的形式 $\mathcal{C}=(c_1,\ldots,c_k)$，恒等式 (20) 具有如下形式：

$$\Psi_{\mathcal{C}}^2(\tau)=\prod_{i=1}^{k}\theta(c_i\tau)\Psi(2c_i\tau)=\prod_{i=1}^{k}\theta(c_i\tau)\Psi_{\mathcal{C}}(2\tau). \tag{22}$$

左端可视为系数为 $(c_1,c_1,c_2,c_2\ldots,c_k,c_k)$ 的 $2k$ 三角数的生成函数：$\mathcal{C}^2$ 相应的傅里叶系数记作 $\delta_{2k}(\mathcal{C}^2;n)$。在我们的记号中，将 n 表示为系数为 $(c_1,\ldots,c_k)$ 的 k 平方数之和的表示数写作 $r_k(\mathcal{C};n)$。因此，比较 (22) 的傅里叶系数，我们得到以下恒等式：

$$\delta_{2k}(\mathcal{C}^2;n)=\sum_{\substack{a,b\in\mathbb{N}_0\\ a+2b=n}} r_k(\mathcal{C};a)\delta_k(\mathcal{C};b). \tag{23}$$

当我们考虑系数为 $(c_1,\ldots,c_k,c_1,\ldots,c_k)$ 的 $2k$ 三角数时，命题 1.6 的相应结果如下：

$$\delta_{2k}(\mathcal{C}^2;n)=q_{2k}(\mathcal{C}^2;8n+2\mathbf{h}), \tag{24}$$

其中 $\mathbf{h}=c_1+\ldots+c_k$。将 (24) 和 (18) 代入 (23)，即可得到推论 1.7 在带系数的形式情形下的类似结果；

$$q_{2k}(\mathcal{C}^2;8n+2\mathbf{h})=\delta_{2k}(\mathcal{C}^2;n)=\sum_{\substack{a,b\in\mathbb{N}_0\\ a+2b=n}} r_k(\mathcal{C};a)\delta_k(\mathcal{C};b)=\sum_{\substack{a,b\in\mathbb{N}_0\\ a+2b=n}} r_k(\mathcal{C};a)q_k(\mathcal{C};8b+\mathbf{h}). \tag{25}$$

这些公式给出了涉及算术函数 $r_k(\mathcal{C};n)$、$\delta_k(\mathcal{C};n)$ 和 $q_k(\mathcal{C};n)$ 的卷积和之间的有趣关系。

我们通过一些例子来说明推论 1.7。当 $k=4$、6、8、12 和 16 时，我们使用 Ono-Robins-Wahl [13, pp. 77–81] 给出的 $\delta_k(n)$ 公式，得到以下关于 $\delta_k(n)$、$r_k(n)$ 的关系。

推论 1.8. 对于自然数 n，我们有

$$\begin{aligned}
\delta_4(n) &= \frac{1}{4}\sum_{\substack{a,b\in\mathbb{N}_0\\ a+2b=n}} r_2(a)r_2(8b+2),\\
\delta_6(n) &= \frac{1}{8}\sum_{\substack{a,b\in\mathbb{N}_0\\ a+2b=n}} r_3(a)r_3(8b+3),\\
\delta_8(n) &= \sum_{\substack{a,b\in\mathbb{N}_0\\ a+2b=n}} r_4(a)\sigma(2b+1),\\
\delta_{12}(n) &= -\frac{1}{8}\sum_{\substack{a,b\in\mathbb{N}_0\\ a+2b=n}} r_6(a)\sigma_{2;\mathbf{1},\chi_{-4}}(4b+3),\\
\delta_{16}(n) &= \sum_{\substack{a,b\in\mathbb{N}_0\\ a+2b=n}} r_8(a)\sigma_3^{\#}(b+1),
\end{aligned}$$

其中 $\sigma_3^{\#}(n) := \sum_{d|n,\ \frac{n}{d}-odd} d^3$ 且 $\sigma_{k;\chi,\ \psi}(n)$ 是广义因子函数，其定义为

$$\sigma_{k;\chi,\psi}(n) := \sum_{d|n} \psi(d)\cdot\chi(n/d)d^k, \tag{26}$$

其中 χ, ψ 为本原狄利克雷特征。在上述公式中，$\mathbf{1}$ 表示平凡特征 $\mathbf{1}(n) = 1$ 对所有 $n \geq 1$ 均成立，而 χ_{-4} 是模 4 的奇狄利克雷特征。

证明. 以下公式见 [13，第 77–81] 页。

$$\begin{aligned}\delta_2(n) &= \frac{1}{4}r_2(8n+2); \quad \delta_3(n) = \frac{1}{8}r_3(8n+3); \quad \delta_4(n) = \sigma(2b+1),\\ \delta_6(n) &= -\frac{1}{8}\sigma_{2;\mathbf{1},\chi_{-4}}(4n+3); \quad \delta_8(n) = \sigma_3^{\#}(n+1).\end{aligned}$$

在推论 1.7 中使用这些公式，即可得到所需公式。 □

注 1.6. 当 $k = 4$、6、8 时，关于 $r_k(n)$ 有以下已知公式，列举如下。

$$\begin{aligned}r_4(n) &= 8\sigma(n) - 32\sigma(n/4),\\ r_6(n) &= -4\sigma_{2;\mathbf{1},\chi_{-4}}(n) + 16\sigma_{2;\chi_{-4},\mathbf{1}}(n),\\ r_8(n) &= 16\sigma_3(n) - 32\sigma_3(n/2) + 256\sigma_3(n/4).\end{aligned}$$

其中，$r_2(n)$ 和 $r_4(n)$ 是众所周知的。为了得到上述关于 $r_6(n)$ 的表达式，我们将 $\theta^6(\tau)$ 用两个艾森斯坦级数 $E_{3;\mathbf{1},\chi_{-4}}(\tau)$ 和 $E_{3;\chi_{-4},\mathbf{1}}(\tau)$ 表示（定义见附录），通过比较 n^{th} 傅里叶系数即可轻松得到上述公式。现在，将上述公式用于推论 1.8，可得到以下仅涉及因子函数的公式。对于自然数 n，有

$$\begin{aligned}\delta_8(n) &= 8\sum_{\substack{a,b\in\mathbb{N}_0\\ a+2b=n}} \sigma(a)\sigma(2b+1) - 32\sum_{\substack{a,b\in\mathbb{N}_0\\ a+2b=n}} \sigma(a/4)\sigma(2b+1).\\ \delta_{12}(n) &= \frac{1}{2}\sum_{\substack{a,b\in\mathbb{N}_0\\ a+2b=n}} \sigma_{2;\mathbf{1},\chi_{-4}}(a)\sigma_{2;\mathbf{1},\chi_{-4}}(4b+3) - 2\sum_{\substack{a,b\in\mathbb{N}_0\\ a+2b=n}} \sigma_{2;\chi_{-4},\mathbf{1}}(a)\sigma_{2;\mathbf{1},\chi_{-4}}(4b+3).\\ \delta_{16}(n) &= 16\sum_{\substack{a,b\in\mathbb{N}_0\\ a+2b=n}} \sigma_3(a)\sigma_3^{\#}(b+1) - 32\sum_{\substack{a,b\in\mathbb{N}_0\\ a+2b=n}} \sigma_3(a/2)\sigma_3^{\#}(b+1) + 256\sum_{\substack{a,b\in\mathbb{N}_0\\ a+2b=n}} \sigma_3(a/4)\sigma_3^{\#}(b+1).\end{aligned}$$

命题 1.9. 设 R为一个正实数。那么，以 $(1/2, 1/2, \ldots, 1/2)$ 为中心、轴长为 $R/\sqrt{c_i}$, $1 \leq i \leq k$ 的 k 维椭球在 $\mathbb{Z}^k$ 中包含 $2^k\sum_{n=1}^{[\frac{R^2}{2}-\frac{\mathbf{h}}{8}]}\delta_k(\mathcal{C};\ n)$ 个格点。

证明. 证明与 [13] 中给出的证明类似。设 r 为一个正整数，并假设以 $(1/2, \ldots, 1/2)$ 为中心、轴长为 $r/\sqrt{c_i}$, $1 \leq i \leq k$ 的 k 维椭球包含一个格点 $(z_1, z_2, \ldots, z_k) \in \mathbb{Z}^k$。那么，我们有

$$r^2 = \sum_{i=1}^{k} c_i\left(z_i - \frac{1}{2}\right)^2 = \sum_{i=1}^{k} c_i[(z_i^2 - z_i) + 1/4] = \sum_{i=1}^{k} c_i z_i(z_i-1) + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{k} c_i = \sum_{i=1}^{k} c_i z_i(z_i-1) + \frac{\mathbf{h}}{4}.$$

因此，$\frac{r^2}{2} - \frac{\mathbf{h}}{8} = \sum_{i=1}^{k} c_i\frac{z_i(z_i-1)}{2}$。这表明，我们有一个将 $\frac{r^2}{2} - \mathbf{h}\,8$ 表示为系数为 c_i、$1 \leq i \leq k$ 的 k 三角数之和的表示。由于 z_i 和 $(-z_i - 1)$ 表示同一个三角数，因此，该椭球内部格点的总数等于 $2^k\delta_k(\mathcal{C};\ [\frac{r^2}{2} - \frac{\mathbf{h}}{8}])$。证明完毕。□

本文其余部分的组织如下。第 §2 节回顾有关 η 商和广义 eta 商的一些结果，并给出第 §1 节中所考虑结果的证明。第 §3 节利用相应模形式向量空间的一组基，得到 Xia-Ma-Tian [21] 工作中所考虑的混合形式的公式。我们还推导艾森斯坦级数 E_4 及其倍化的 (p、 k) 参数化。第 §4 节利用第 §1 节中得到的模性质给出一般公式，同时还给出与形数和混合形式相关形式的一些显式公式（为简洁起见，我们对每种情形仅提供少数几个示例）。在附录部分，我们为模形式空间提供显式的基，这些基用于得到第 §4 节中给出的示例公式。

2. Proofs of theorems

我们需要以下由 S. Robins 提出的关于广义 eta 商模性的结果，它将有助于证明高阶形数生成函数的模性结果。因此，我们首先陈述 Robins 定理。

定理 A（S. Robins [17]）：对于 $N \in \mathbb{N}$，令

$$r_{\delta,g} \in \begin{cases} \frac{1}{2}\mathbb{Z} & \text{if } g = 0, \frac{\delta}{2}, \\ \mathbb{Z} & otherwise. \end{cases}$$

令 $f(\tau) = \prod \eta^{r_{\delta,g}}(\delta\tau)$ 为一个广义 eta 商，满足 $k = \frac{1}{2}\sum r_{\delta,0}$ 为非负整数。如果 $f(\tau)$ 满足以下条件

(i) $\sum_{\substack{\delta|N \\ g \pmod{\delta}}} \delta\, P_2\left(\frac{g}{\delta}\right) r_{\delta,g} \equiv 0 \pmod 2$ and $\sum_{\substack{\delta|N \\ g \pmod{\delta}}} \frac{N}{\delta} P_2(0) r_{\delta,g} \equiv 0 \pmod 2$.

(ii) 在尖点 $\frac{\lambda}{\mu\epsilon}$, $\gcd(\lambda, N) = 1 = \gcd(\mu, N)$ $\epsilon | N$) 处的消失阶等于

$$\sum_{\substack{\delta|N \\ g \pmod{\delta}}} \frac{\gcd(\delta,\epsilon)^2}{\delta\epsilon} P_2\left(\frac{\lambda g}{\gcd(\delta,\epsilon)}\right) r_{\delta,g},$$

其中 $P_2(x) := \{x\}^2 - \{x\} + \frac{1}{6}$ 是广义伯努利多项式，$\{x\}$ 是 x 的小数部分。

若每个尖点处的消失阶均非负，则 $f(\tau)$ 是 $M_k(\Gamma_1(N))$ 中的模形式。若每个尖点处的消失阶均为正，则 $f(\tau) \in S_k(\Gamma_1(N))$。

证明中我们还需要以下引理。

引理 2.1. 设 $f(x) = \frac{1}{12} + \frac{1}{2}P_2(2x) - P_2(x)$。那么对于 $0 \le x \le 1$，有 $f(x) \ge 0$. 此外，它是周期为 1 的周期函数。

证明。设 $f(x) := \frac{1}{12} + \frac{1}{2}P_2(2x) - P_2(x)$。由于 $\{2x\} = 2x$ for $0 \le x < \frac{1}{2}$，且 $\{2x\} = 2x - 1$ for $\frac{1}{2} < x \le 1$。因此，我们有

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{if } 0 \le x < \frac{1}{2}, \\ (x-1)^2 & \text{if } \frac{1}{2} < x \le 1, \\ \frac{1}{4} & \text{if } x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

这表明，对于 $0 \le x \le 1$，$f(x) \ge 0$。此外，$f(x)$ 是周期为 1 的周期函数。因此，对于所有 $x \ge 0$，我们有 $f(x) \ge 0$。

□

2.1. 定理 1.1 的证明。首先考虑 $a \geq 3$ 的情形。我们利用式 (11) 中给出的广义 eta 商表达式和定理 A，证明函数 $q^{\frac{(a-2)^2}{8a}-\mathfrak{h}}\Phi_a^{\mathcal{C}}(\tau)$ 在 $\mathfrak{h} = \sum_{i=1}^{k} c_i$ 时的模性质。由式 (11)，我们有

$$q^{\frac{(a-2)^2}{8a}\mathfrak{h}}\Phi_a^{\mathcal{C}}(\tau) = \prod_{i=1}^{k} \eta_{ac_i,0}^{1/2}(\tau) \prod_{i=1}^{k} \frac{\eta_{2ac_i,2c_i}(\tau)}{\eta_{ac_i,c_i}(\tau)}.$$

现在，我们检查式 (11) 右侧（即广义 Dedekind eta 商）满足模性质的第一个条件：

$$\sum_{\substack{\delta|N \\ g \pmod{\delta}}} \delta P_2(g/\delta) r_{\delta,g} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} ac_i P_2(0) + \sum_{i=1}^{k} 2ac_i P_2\left(\frac{2c_i}{2ac_i}\right) - \sum_{i=1}^{k} ac_i P_2\left(\frac{c_i}{ac_i}\right)$$

$$= \left(\frac{a}{12} + aP_2\left(\frac{1}{a}\right)\right)\sum_{i=1}^{k} c_i = \quad = \frac{(a-2)^2}{4a}\sum_{i=1}^{k} c_i \equiv 0 \pmod{2}$$

这表明 $\mathfrak{h} \equiv 0$（模 $\frac{8a}{d}$），其中 $\mathfrak{h} = \sum_{i=1}^{k} c_i$ 且 $d =$ 是 $\gcd((a-2)^2, 4a)$，第二个条件显然为零，即

$$\sum_{\substack{\delta|N \\ g \pmod{\delta}}} \frac{N}{\delta} P_2(0) r_{\delta,g} = \sum_{i=1}^{k} \frac{N}{ac_i}\frac{1}{6}\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{k} \frac{N}{2ac_i}\frac{1}{6} - \sum_{i=1}^{k} \frac{N}{ac_i}\frac{1}{6} = 0.$$

根据定理 A，函数 $q^{\frac{(a-2)}{8a}\ \mathfrak{h}}\Phi_a^{\mathcal{C}}(\tau)$ $\left(= \prod_{i=1}^{k} \eta_{ac_i,0}^{1/2}(\tau) \prod_{i=1}^{k} {}^{\eta_{2ac_i},\ 2c_i(\tau)\eta_{ac_i},\ c_i(\tau)}\right)$ 在尖点 $s\,(s = \frac{\lambda}{\mu\epsilon},$ $\gcd(\lambda, N) = 1 = \gcd(\mu, N)$ $\epsilon | N$ 处的消失阶等于（记为 ν_s）

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\gcd(ac_i,\epsilon)^2}{ac_i\epsilon} P_2(0)\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\gcd(2ac_i,\epsilon)^2}{2ac_i\epsilon} P_2\left(\frac{\lambda.2c_i}{\gcd(2ac_i,\epsilon)}\right).1 - \sum_{i=1}^{k} \frac{\gcd(ac_i,\epsilon)^2}{ac_i\epsilon} P_2\left(\frac{\lambda c_i}{\gcd(ac_i,\epsilon)}\right).1$$

$$= \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\gcd(ac_i,\epsilon)^2}{ac_i\epsilon}\frac{1}{12} + \frac{\gcd(2ac_i,\epsilon)^2}{2ac_i\epsilon} P_2\left(\frac{\lambda.2c_i}{\gcd(2ac_i,\epsilon)}\right) - \frac{\gcd(ac_i,\epsilon)^2}{ac_i\epsilon} P_2\left(\frac{\lambda c_i}{\gcd(ac_i,\epsilon)}\right)\right).$$

我们将求和式中的项记为 ν_s^i，即

$$\nu_s^i = \left(\frac{\gcd(ac_i,\epsilon)^2}{ac_i\epsilon}\frac{1}{12} + \frac{\gcd(2ac_i,\epsilon)^2}{2ac_i\epsilon} P_2\left(\frac{\lambda.2c_i}{\gcd(2ac_i,\epsilon)}\right) - \frac{\gcd(ac_i,\epsilon)^2}{ac_i\epsilon} P_2\left(\frac{\lambda c_i}{\gcd(ac_i,\epsilon)}\right)\right).$$

只需证明对于每个 i， ν_s^i 均为非负。为证明对于每个 i， ν_s^i 均为非负，我们考虑以下情形。

情形 1：如果 $\gcd(2ac_i, \epsilon) = 2\gcd(ac_i, \epsilon)$，则

$$\nu_s^i = \frac{\gcd(ac_i,\epsilon)^2}{ac_i\epsilon}\left(\frac{1}{12} + P_2\left(\frac{\lambda c_i}{\gcd(ac_i,\epsilon)}\right)\right).$$

我们知道，对于 $0 \leq x \leq 1$，有 $P_2(x) \geq \frac{-1}{12}$，且 $P_2(x)$ 是周期为 1 的周期函数。这表明 $\nu_s^i \geq 0$。

情形 2：如果 $\gcd(2ac_i, \epsilon) = \gcd(ac_i, \epsilon)$，则有

$$\nu_s^i = \frac{\gcd(ac_i,\epsilon)^2}{ac_i\epsilon}\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{2}P_2\left(\frac{2\lambda c_i}{\gcd(ac_i,\epsilon)}\right) - P_2\left(\frac{\lambda c_i}{\gcd(ac_i,\epsilon)}\right)\right).$$

注意到， ν_s^i 的非负性由引理 2.1 得出。当 $a \geq 3$ 时，本情形下的证明即告完成。

接下来考虑 $a = 1$ 的情形，其对应的生成函数为 $\Psi_{\mathcal{C}}(\tau)$，这对应于三角数。我们使用以 η商表示的生成函数 $\Psi_{\mathcal{C}}(\tau)$ 的表达式，见

式（9），并借助 Dummit、Kisilevsky 和 McKay 得出的关于 η 商模性的结果来证明该结论 [9]（另参见 [14, 定理 1.64]）。由（10）可得

$$\Psi_{\mathcal{C}}(\tau)=\prod_{i=1}^{k}\Psi(c_i\tau) \ =q^{-\mathbf{h}/8}\prod_{i=1}^{k}\frac{\eta^2(2c_i\tau)}{\eta(c_i\tau)}. \tag{27}$$

因此， $q^{\mathbf{h}/8}\Psi_{\mathcal{C}}(\tau)$ 是 η商 $\prod_{i=1}^{k}\frac{\eta^2}{\eta}(2c_i\tau)\,(c_i\tau)$。现在我们运用 [14, 定理 1.64]，得到所需的模性质。

为完成定理的证明，需用到以下性质：(i) $\mathbf{h}=c_1+\cdots+c_k\equiv 0$ (模 8)，这是由假设得出的；

$$\sum_{\delta|N}\frac{\gcd(d,\delta)^2 r_\delta}{d\delta}=\sum_{i=1}^{k}\left(2\frac{\gcd(d,2c_i)^2}{2dc_i}-\frac{\gcd(d,c_i)^2}{dc_i}\right)\geq 0, \tag{ii}$$

这由以下事实得出：对于每个 $d\geq 1$，$\gcd(d,2c_i)\geq\gcd(d,c_i)$。模形式的权和特征很容易确定。定理 1.1 的证明至此完成。

2.2. 定理 1.3 的证明。由于 $\theta(\tau)=\eta^5(2\tau)/(\eta^2(\tau)\eta^2(4\tau))$，利用 (13) 和 (10)，我们有

$$\psi_{s,t}(\tau)=\prod_{i=1}^{v}\theta(b_i\tau).\prod_{j=1}^{k}\Psi(c_j\tau)=\prod_{i=1}^{v}\frac{\eta^5(2b_i\tau)}{\eta^2(b_i\tau)\eta^2(4b_i\tau)}\times q^{-\mathbf{h}/8}\prod_{j=1}^{k}\frac{\eta^2(2c_j\tau)}{\eta(c_j\tau)}.$$

因此，我们有

$$q^{\mathbf{h}/8}\psi_{s,t}(\tau)=\prod_{i=1}^{v}\frac{\eta^5(2b_i\tau)}{\eta^2(b_i\tau)\eta^2(4b_i\tau)}\prod_{i=1}^{k}\frac{\eta^2(2c_i\tau)}{\eta(c_i\tau)}. \tag{28}$$

上述 η商的模性由 [14, 定理 1.64] 以及不等式推出

$$10\gcd(d,2b)^2-8\gcd(d,b)^2-2\gcd(d,4b)^2\geq 0 \text{ for each positive integers } d \text{ and } b.$$

证明完毕。

3. Mixed forms considered by Xia-Ma-Tian

本节中，我们首先使用我们的方法，推导 Xia-Ma-Tian [21] 工作中所研究的 21 个混合形式的公式。由推论 1.4 可知，与混合形式 $\mathcal{M}(x,y,z)$ 相对应的生成函数 $q^{\mathbf{h}/8}\Phi(\tau)$ 是权为 $u+(v+k)/2$、定义在某个子群 $\Gamma_0(N)$ 上且具有特征 ω的模形式，这取决于混合形式中所涉及的系数。上文中，h 是混合形式的三角数部分中出现的系数之和。对于这 21 种情形，可以证明所有生成函数都属于空间 $M_4(\Gamma_0(12))$。我们使用空间 $M_4(\Gamma_0(12))$ 的以下基（如 [15]中所述）：

$$E_4(d\tau),d|12;f_{4,6}(\tau),f_{4,6}(2\tau),f_{4,12}(\tau),$$

其中， $E_4(\tau)$ 是 $SL_2(\mathbb{Z})$ 上权为 4 的归一化艾森斯坦级数，而 $f_{4,\ 6}(\tau)$、$f_{4,\ 12}(\tau)$ 分别是 $\Gamma_0(6)$ 和 $\Gamma_0(12)$ 上权为 4 的新形式，它们用 η函数显式表示如下。

$$\begin{aligned}f_{4,6}(\tau)&=\eta^2(\tau)\eta^2(2\tau)\eta^2(3\tau)\eta^2(6\tau),\\ f_{4,12}(\tau)&=\frac{\eta^2(2\tau)\eta^3(3\tau)\eta^3(4\tau)\eta^2(6\tau)}{\eta(\tau)\eta(12\tau)}-\frac{\eta^3(\tau)\eta^2(2\tau)\eta^2(6\tau)\eta^3(12\tau)}{\eta(3\tau)\eta(4\tau)}.\end{aligned}$$

因此，我们将生成函数 $q^{\mathbf{h}/8}\Phi(\tau)$ 表示为上述基元素的线性组合：

$$q^{\mathbf{h}/8}\Phi(\tau) = \sum_{d|12} \alpha_d E_4(d\tau) + c_1 f_{4,6}(\tau) + c_2 f_{4,6}(2\tau) + c_3 f_{4,12}(\tau). \tag{29}$$

下表列出了混合形式及其对应的系数 $\alpha_d,\ d|12,\ c_i, i = 1,2,3$（我们使用式（14）中的表达式来表示生成函数）。

表1. 21种混合形式的系数表

形式	系数								
	α_1	α_2	α_3	α_4	α_6	α_{12}	c_1	c_2	c_3
$\mathcal{F}(2\tau)\theta^3(\tau)\theta^3(3\tau)$	$\frac{1}{120}$	0	$\frac{-3}{40}$	$\frac{-2}{15}$	0	$\frac{6}{5}$	0	0	4
$q\mathcal{F}(2\tau)\theta^2(\tau)\theta^2(3\tau)\Psi(2\tau)\Psi(6\tau)$	$\frac{1}{480}$	$\frac{-1}{480}$	$\frac{-3}{160}$	0	$\frac{3}{160}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$
$q^2\mathcal{F}(2\tau)\theta(\tau)\theta(3\tau)\Psi^2(2\tau)\Psi^2(6\tau)$	$\frac{1}{1920}$	$\frac{-1}{1920}$	$\frac{-3}{640}$	0	$\frac{3}{640}$	0	0	0	$\frac{-1}{8}$
$q^2\mathcal{F}(4\tau)\theta^2(\tau)\Psi(\tau)\Psi(3\tau)\Psi^2(6\tau)$	$\frac{1}{1920}$	$\frac{-1}{1920}$	$\frac{-3}{640}$	0	$\frac{3}{640}$	0	$\frac{-1}{2}$	-1	$\frac{3}{8}$
$q^2\mathcal{F}(4\tau)\theta^2(3\tau)\Psi(\tau)\Psi^2(2\tau)\Psi(3\tau)$	$\frac{1}{1920}$	$\frac{-1}{1920}$	$\frac{-3}{640}$	0	$\frac{3}{640}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{8}$
$\mathcal{F}(\tau)\mathcal{F}(2\tau)\theta^4(3\tau)$	$\frac{1}{300}$	$\frac{-1}{200}$	$\frac{13}{100}$	$\frac{2}{75}$	$\frac{-39}{200}$	$\frac{26}{25}$	$\frac{16}{5}$	$\frac{32}{5}$	2
$\mathcal{F}(\tau)\mathcal{F}(2\tau)\theta^2(\tau)\theta^2(3\tau)$	$\frac{1}{60}$	$\frac{-1}{120}$	$\frac{-3}{20}$	$\frac{-2}{15}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{6}{5}$	0	0	6
$\mathcal{F}(\tau)\mathcal{F}(2\tau)\theta^4(\tau)$	$\frac{13}{300}$	$\frac{-13}{200}$	$\frac{9}{100}$	$\frac{26}{75}$	$\frac{-27}{200}$	$\frac{18}{25}$	$\frac{48}{5}$	$\frac{96}{5}$	-6
$q\mathcal{F}(\tau)\mathcal{F}(2\tau)\Psi^2(\tau)\Psi^2(3\tau)$	$\frac{1}{240}$	$\frac{-1}{240}$	$\frac{-3}{80}$	0	$\frac{3}{80}$	0	0	0	0
$q^2\mathcal{F}(\tau)\mathcal{F}(2\tau)\Psi^2(2\tau)\Psi^2(6\tau)$	$\frac{1}{640}$	$\frac{-19}{1920}$	$\frac{-9}{640}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{57}{640}$	$\frac{-3}{40}$	0	0	$\frac{-3}{8}$
$\mathcal{F}(2\tau)\mathcal{F}(4\tau)\theta^2(\tau)\theta^2(3\tau)$	$\frac{1}{240}$	$\frac{1}{240}$	$\frac{-3}{80}$	$\frac{-2}{15}$	$\frac{-3}{80}$	$\frac{6}{5}$	0	0	3
$q\mathcal{F}(2\tau)\mathcal{F}(4\tau)\Psi^2(\tau)\Psi^2(3\tau)$	$\frac{1}{960}$	$\frac{-1}{960}$	$\frac{-3}{320}$	0	$\frac{3}{320}$	0	0	0	$\frac{3}{4}$
$\mathcal{F}^3(2\tau)\theta(\tau)\theta(3\tau)$	$\frac{1}{120}$	0	$\frac{-3}{40}$	$\frac{-2}{15}$	0	$\frac{6}{5}$	0	0	0
$q\mathcal{F}^3(2\tau)\Psi(2\tau)\Psi(6\tau)$	$\frac{1}{240}$	$\frac{-3}{80}$	$\frac{-3}{80}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{27}{80}$	$\frac{-3}{10}$	0	0	0
$\mathcal{F}^3(4\tau)\theta(\tau)\theta(3\tau)$	$\frac{1}{1200}$	$\frac{-3}{400}$	$\frac{3}{400}$	$\frac{8}{75}$	$\frac{-27}{400}$	$\frac{24}{25}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{18}{5}$	0
$\mathcal{F}^2(\tau)\mathcal{F}(2\tau)\theta(\tau)\theta(3\tau)$	$\frac{1}{30}$	$\frac{-1}{40}$	$\frac{-3}{10}$	$\frac{-2}{15}$	$\frac{9}{40}$	$\frac{6}{5}$	0	0	6
$q\mathcal{F}^2(\tau)\mathcal{F}(2\tau)\Psi(2\tau)\Psi(6\tau)$	$\frac{1}{96}$	$\frac{-7}{160}$	$\frac{-3}{32}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{63}{160}$	$\frac{-3}{10}$	0	0	$\frac{-3}{2}$
$\mathcal{F}(\tau)\mathcal{F}^2(2\tau)\theta(\tau)\theta(3\tau)$	$\frac{1}{75}$	$\frac{-1}{50}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{8}{75}$	$\frac{-9}{50}$	$\frac{24}{25}$	$\frac{24}{5}$	$\frac{48}{5}$	0
$\mathcal{F}(2\tau)\mathcal{F}^2(4\tau)\theta(\tau)\theta(3\tau)$	$\frac{1}{480}$	$\frac{1}{160}$	$\frac{-3}{160}$	$\frac{-2}{15}$	$\frac{-9}{160}$	$\frac{6}{5}$	0	0	$\frac{3}{2}$
$\mathcal{F}(\tau)\mathcal{F}(2\tau)\mathcal{F}(4\tau)\theta(\tau)\theta(3\tau)$	$\frac{1}{120}$	0	$\frac{-3}{40}$	$\frac{-2}{15}$	0	$\frac{6}{5}$	0	0	6
$q\mathcal{F}(\tau)\mathcal{F}(2\tau)\mathcal{F}(4\tau)\Psi(2\tau)\Psi(6\tau)$	$\frac{1}{960}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{-3}{320}$	$\frac{-1}{60}$	$\frac{-9}{64}$	$\frac{3}{20}$	0	0	$\frac{3}{4}$

注 3.1. 比较 (29) 中各表达式的 n^{th} 傅里叶系数，可得 [21] 中定理 1.1 得到的显式公式。我们的方法所得公式与 [21]，中的完全相同，唯独由尖点形式傅里叶系数产生的表达式除外。下面说明其中的差异。

尖点形式空间 $S_4(\Gamma_0(12))$ 是三维的，由 $f_{4,6}(\tau)$ $f_{4,6}(2\tau)$ 和 $f_{4,12}(\tau)$ 张成。然而，在 [21, 定理 3.1], 中，他们只使用了两个尖点形式来获得所需的表达式。我们注意到， [21, 定理 3.1], 中出现的两个尖点形式，记作 $G(\tau)$ 和 $H(\tau)$，可以用我们的基元素表示如下。

$$\begin{aligned} G(\tau) &= -\frac{1}{6} f_{4,6}(\tau) - \frac{1}{3} f_{4,6}(2\tau) + \frac{1}{6} f_{4,12}(\tau), \\ H(\tau) &= \frac{1}{2} f_{4,6}(\tau) + f_{4,6}(2\tau) + \frac{1}{2} f_{4,12}(\tau). \end{aligned} \tag{30}$$

如果将 $f_{4,N}(z)$ 的 n^{th} 傅里叶系数记作 $a_{4,N}(n)$，$N=6,12$，那么我们就能用 $a_{4,6}(n)$、$a_{4,6}(n/2)$ 和 $a_{4,12}(n)$ 表示 G 和 H 的 n^{th}傅里叶系数。因此，我们注意到，对于全部 21 个混合形式，这两种表达式（由 Xia-Ma-Tian 得出以及由我们的方法得出）是相同的。

$p(k)$的参数化：
现在，我们根据恒等式 (29)，对如何用 p,k 表示 $E_4(\tau)$及其倍数作如下观察。为了得到 (29) 给出的恒等式（以 $G(\tau)$ $H(\tau)$ 代替 $f_{4,\ 6}(\tau)\, f_{4,\ 6}(2\tau)\, f_{4,\ 12}(\tau)$），Xia-Ma-Tian 使用了 (p,k) 参数化方法。令

$$p=p(\tau):=\frac{\theta^2(\tau)-\theta^2(3\tau)}{2\theta^2(3\tau)} \qquad \text{and} \qquad k=k(\tau):=\frac{\theta^3(3\tau)}{\theta(\tau)}.$$

在 $[4,$定理中，给出了 $alF(d\tau)$，$d=1,2,4$ 的 (p,k) 参数化；在 $[2,$(2.3)] 中，给出了 theta 级数 $\theta(\tau)$ 和 $\theta(3\tau)$ 的参数化。此外，$[5],$ 中已建立了用 p 和 k 表示 $q^{j/24}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{nj})$，$j=1,2,3,4,6,12$ 的公式。在 $[7],$中，Alaca 和 Williams 推导出了用 p 和 k 表示 $E_4(d\tau)$，$d=1,2,3,4,6,12$ 的公式。在[21], 中，以上所有 (p,k) 参数化都用于得到适用于全部 21 个混合形式的恒等式 (29)。由于我们利用模形式理论建立了 (29)，因此我们使用这些恒等式以及 $[4,$ 定理 1,2,4], [2, (2.3)] 和 [5] 中得到的 (p,k) 参数化（针对生成函数 $\mathcal{F}(\tau)$，$\theta(\tau)$ 和 $\Psi(\tau)$），推导出用 p 和 k 表示 $E_4(\tau)$ 及其倍数的公式。对 (29) 中左侧的生成函数使用 (p,k) 参数化后，我们得到一个涉及 $E_4(d\tau)$，$d|12$, f_4,6$(\ell\tau)$，$\ell=1,2$ 和 f_4,12(τ) 以及函数p和 k的方程组，由此推导出用 p,k 表示 $E_4(d\tau)$，$d|12$, f_4,6$(\ell\tau)$，$\ell=1,2$ 和 f_4,12(τ) 的所需公式，列于下文。（这些计算使用了 Mathematica 软件。）

$$\begin{aligned}
E_4(\tau)&=(1+4p+64p^2+178p^3+235p^4+178p^5+64p^6+4p^7+p^8)k^4,\\
E_4(2\tau)&=(1+4p+4p^2+28p^3+70p^4+28p^5+4p^6+4p^7+p^8)k^4,\\
E_4(3\tau)&=(1+4p+4p^2-2p^3+10p^4+28p^5+\frac{31}{4}p^6-\frac{29}{4}p^7+\frac{1}{16}p^8)k^4,\\
E_4(4\tau)&=(1+4p+4p^2-2p^3-5p^4-2p^5+4p^6+4p^7+p^8)k^4,\\
E_4(14\tau)&=(1+4p+4p^2-2p^3-5p^4-2p^5+\frac{1}{4}p^6+\frac{1}{4}p^7+\frac{1}{16}p^8)k^4,\\
f_{4,6}(\tau)&=(-1-4p-\frac{119}{32}p^2+\frac{115}{32}p^3-\frac{913}{128}p^4-\frac{1695}{64}p^5-\frac{2049}{256}p^6+\frac{1801}{256}p^7-\frac{1}{16}p^8)k^4,\\
f_{4,6}(2\tau)&=(\frac{1}{2}+\frac{9}{4}p+\frac{175}{64}p^2-\frac{83}{64}p^3+\frac{673}{256}p^4+\frac{1583}{128}p^5+\frac{2081}{512}p^6-\frac{1737}{512}p^7+\frac{1}{32}p^8)k^4,\\
f_{4,12}(\tau)&=(\frac{1}{2}p+\frac{7}{4}p^2+\frac{7}{4}p^3-\frac{7}{4}p^5-\frac{7}{4}p^6-\frac{1}{2}p^7)k^4.
\end{aligned}$$

现在利用（30），我们得到 $G(\tau)$ 和 $H(\tau)$ 关于 p、k 的表示如下。

$$\begin{aligned}
G(\tau)&=\frac{2p^3+5p^4-5p^6-2p^7}{16}k^4 \;=\; \frac{p^3(1-p)(1+p)(1+2p)(2+p)}{16}k^4,\\
H(\tau)&=\frac{8p+28p^2+22p^3-15p^4-28p^5-13p^6-2p^7}{16}k^4 \;=\; \frac{p(1-p)(1+p)(1+2p)(2+p)^3}{16}k^4.
\end{aligned}$$

4. General formulas and examples

4.1. 一般公式。第 1 节的主要结果给出了高阶形数、带系数的三角数以及混合形式的生成函数的模性质。特别是，由定理 1.1 可知，带系数的高阶形数的生成函数（乘以 q 的某个整数次幂）是 $M_t(\Gamma_0(N),\ \chi)$ 中的模形式，其整数权为 t，层为 N，Nebentypus 特征为 χ（均有明确给出）。此外，由定理 1.1、1.2、1.3 和推论 1.4 可知，$T_{\mathcal{C}}(z)$、$\mathcal{M}_{l,\ t}(x, z)$、$\mathcal{M}_{s,\ t}(y, z)$ 和 $\mathcal{M}(x, y, z)$ 的生成函数都是 $\Gamma_0(N)$ 上带特征 χ 的整权模形式（乘以 q 的某个幂）。层 N 和特征 χ 均取决于相应形式所选的系数。因此，为某个层和特征确定模形式空间的显式基，等价于得到相应表示数的显式公式。下面稍作阐述。回顾一下，与 $T_{\mathcal{C}}(z)$ 和 $\mathcal{M}_{s,\ t}(y, z)$ 相对应的表示数分别记作 $\delta_k(c_1^{e_1}, \ldots, c_k^{e_k};\ n)$（$=\delta_k(\mathcal{C};\ n)$）以及 $\mathcal{N}_{s,\ t}(b_1^{\alpha_1}, \ldots, b_v^{\alpha_v}; c_1^{e_1}, \ldots, c_k^{e_k}; n)$。现在我们为其余两个形式引入记号。令 $\mathcal{N}_{l,\ t}(a_1^{\beta_1}, \ldots, a_u^{\beta_u}; c_1^{e_1}, \ldots, c_k^{e_k}; n)$ 表示形式 $\mathcal{M}_{l,\ t}(x, z)$ 的表示数，并令 $\mathcal{N}(a_1^{\beta_1}, \ldots, a_u^{\beta_u}; b_1^{\alpha_1}, \ldots, b_v^{\alpha_v}; c_1^{e_1}, \ldots, c_k^{e_k};\ n)$ 表示形式 $\mathcal{M}(x, y, z)$ 的表示数（其中 $v+k$ 为偶数）。现在，设 $\mathcal{G}(\tau)$ 是以下生成函数之一：$\Phi_a^{\mathcal{C}}(\tau)$（固定 $a \geq 3$ 时）、$\Psi_{\mathcal{C}}(\tau)$、$\psi_{l,\ t}(\tau)$、$\psi_{s,\ t}(\tau)$ 或 $\Phi(\tau)$（分别对应形式 F_a、$c(x)$、$T_{\mathcal{C}}(z)$、$\mathcal{M}_{l,\ t}(x, z)$、$\mathcal{M}_{s,\ t}(y, z)$ 或 $\mathcal{M}(x, y, z)$）。那么由定理 1.1、1.2、1.3 和推论 1.4 可知，$q^{\ell \mathbf{h}/8}\mathcal{G}(\tau)$（其中 $\ell = (a-2)_a^{\ 2}$、$a \geq 1$、$a \neq 2$）属于空间 $M_m(\Gamma_0(N),\ \tilde{\chi})$，其中 $2u + v + k = 2m\,(u, v \geq 0, k \geq 1)$，

$$N = \begin{cases} 2a \cdot \operatorname{lcm}[c_1, c_2, \ldots, c_k] & \text{当 } \Phi_a^{\mathcal{C}}(\tau) \text{ 时，若 } a \geq 3 \text{ 为奇数；当 } \Phi_a^{\mathcal{C}}(\tau) \text{ 时，若 } a \text{ 为偶数；当 } \Psi_{\mathcal{C}}(\tau) \text{ 时；当 } \psi_{l,\ t}(\tau) \text{ 时；当 } \psi_{s,\ t}(\tau) \text{ 时；当 } \Phi(\tau) \text{ 时} \\ a \cdot \operatorname{lcm}[c_1, c_2, \ldots, c_k] \\ 2 \cdot \operatorname{lcm}[c_1, c_2, \ldots, c_k] \\ \operatorname{lcm}[3\ \operatorname{lcm}[a_1, \ldots, a_u], 2\ \operatorname{lcm}[c_1, \ldots, c_k]] \\ \operatorname{lcm}[4\ \operatorname{lcm}[b_1, \ldots, b_v], 2\ \operatorname{lcm}[c_1, \ldots, c_k]] \\ \operatorname{lcm}[3 \operatorname{lcm}[a_1, \ldots, a_u], \operatorname{lcm}[4\ \operatorname{lcm}[b_1, \ldots, b_v], 2\ \operatorname{lcm}[c_1, \ldots, c_k]]] \end{cases}$$

and

$$\tilde{\chi} = \begin{cases} \chi & \text{for } \Phi_a^{\mathcal{C}}(\tau),\ a \geq 3 \\ \chi & \text{for } \Psi_{\mathcal{C}}(\tau), \\ \chi' & \text{for } \psi_{l,t}(\tau), \\ \chi'' & \text{for } \psi_{s,t}(\tau), \\ \omega & \text{for } \Phi(\tau), \end{cases}$$

其中 χ、χ'、χ'' 和 ω 分别如定理 1.1、1.2、1.3 和推论 1.4 所述，且 $\mathbf{h} = (e_1c_1 + \ldots + e_kc_k)$；若某个 $e_i = 0$，则相应的系数 c_i 不会出现。若 $\{f_1, \ldots, f_{\nu_{m,N,\tilde{\chi}}}\}$ 是空间 $M_m(\Gamma_0(N),\ \tilde{\chi})$ 的一个基，则我们可以用此基将 $q^{\mathbf{h}/8}\mathcal{G}(\tau)$ 表示如下。

$$q^{\mathbf{h}/8}\mathcal{G}(\tau) = \sum_{i=1}^{\nu_{m,N,\tilde{\chi}}} t_i f_i(\tau),\ t_i \in \mathbb{C}. \tag{31}$$

令 $p = \ell \mathbf{h}/8$（其中 $\ell = \underline{(a-2)_a}^{\ 2}, a \geq 1, a \neq 2$），并用 $a_{f_i}(n)$ 表示 i 个基元素 f_i 的第 n^{th} 个傅里叶系数。然后比较（31）两边的 n^{th} 个傅里叶系数，我们

get

$$\sum_{i=1}^{\nu_{m,N,\tilde{\chi}}} t_i a_{f_i}(n) = \begin{cases} \mathcal{N}_a(c_1^{e_1},\dots,c_k^{e_k};n-p) & \text{for } \Phi_a(\tau),\ a\geq 3,\\ \delta_k(c_1^{e_1},\dots,c_k^{e_k};n-p) & \text{for } \Psi_{\mathcal{C}}(\tau),\\ \mathcal{N}_{l,t}(a_1^{\beta_1},\dots,a_u^{\beta_u};c_1^{e_1},\dots,c_k^{e_k};n-p) & \text{for } \psi_{l,t}(\tau),\\ \mathcal{N}_{s,t}(b_1^{\alpha_1},\dots,b_v^{\alpha_v};c_1^{e_1},\dots,c_k^{e_k};n-p) & \text{for } \psi_{s,t}(\tau),\\ \mathcal{N}(a_1^{\beta_1},\dots,a_u^{\beta_u};b_1^{\alpha_1},\dots,b_v^{\alpha_v};c_1^{e_1},\dots,c_k^{e_k};n-p) & \text{for } \Phi(\tau). \end{cases} \tag{32}$$

4.2. 示例。 本节给出本文所讨论的所有情形的一些示例公式。对于高阶形数，我们给出了对应于 $a=3$ 的示例。用于得到这些公式的模形式空间的基见附录。对于 4 个和 6个变量的情形，我们指出了用于得到这些公式的模形式空间。

4.2.1. 示例公式：4个变量。

$M_2(\Gamma_0(4),\chi_0)$:

$$\delta_4(2^4;n-1) = -\sigma(n)+3\sigma(n/2)-2\sigma(n/4),$$

$M_2(\Gamma_0(6),\chi_0)$:

$$\delta_4(1^2 3^2;n-1) = -\sigma(n)+\sigma(n/2)+3\sigma(n/3)-3\sigma(n/6),$$

$M_2(\Gamma_0(8),\chi_0)$:

$$\mathcal{N}_{s,t}(1^2;4^2;n-1) = -\sigma(n)-\sigma(n/2)+10\sigma(n/4)-8\sigma(n/8),$$
$$\mathcal{N}_{s,t}(2^2;4^2;n-1) = -\sigma(n)+3\sigma(n/2)-2\sigma(n/4),$$
$$\mathcal{N}_{s,t}(2^1;2^2 4^1;n-1) = -\sigma(n)+3\sigma(n/2)-2\sigma(n/4),$$

$M_2(\Gamma_0(8),\chi_8)$:

$$\delta_4(1^2 2^1 4^1;n-1) = \sigma_{1;\chi_8,\mathbf{1}}(n),$$
$$\mathcal{N}_{s,t}(1^1 2^1;4^2;n-1) = \sigma_{1;\chi_8,\mathbf{1}}(n),$$
$$\mathcal{N}_{s,t}(1^1;2^2 4^1;n-1) = \sigma_{1;\chi_8,\mathbf{1}}(n),$$

$M_2(\Gamma_0(12),\chi_0)$:

$$\mathcal{N}_{l,t}(1^1;2^1 6^1;n-1) = -\sigma(n)-3\sigma(n/2)+3\sigma(n/3)+4\sigma(n/4)+9\sigma(n/6)-12\sigma(n/12),$$
$$\mathcal{N}_{l,t}(2^1;2^1 6^1;n-1) = -\sigma(n)+3\sigma(n/2)-3\sigma(n/3)-2\sigma(n/4)+9\sigma(n/6)-6\sigma(n/12).$$

4.2.2. 示例公式：6个变量。

$M_3(\Gamma_0(4),\ \chi_{-4})$:

$$\delta_6(1^4 2^2;n-1) = \sigma_{2;\chi_{-4},1}(n),$$
$$\mathcal{N}_{s,t}(1^2;2^4;n-1) = \sigma_{2;\chi_{-4},1}(n),$$

$M_3(\Gamma_0(6),\ \chi_{-3})$:

$$\delta_6(1^5 3^1;n-1) = -\frac{1}{8}\sigma_{2;\mathbf{1},\chi_{-3}}(n)+\frac{1}{8}\sigma_{2;\mathbf{1},\chi_{-3}}(n/2)+\frac{9}{8}\sigma_{2;\chi_{-3},\mathbf{1}}(n)+\frac{9}{8}\sigma_{2;\chi_{-3},\mathbf{1}}(n/2),$$
$$\delta_6(1^1 3^5;n-1) = -\frac{1}{8}\sigma_{2;\mathbf{1},\chi_{-3}}(n)+\frac{1}{8}\sigma_{2;\mathbf{1},\chi_{-3}}(n/2)+\frac{1}{8}\sigma_{2;\chi_{-3},\mathbf{1}}(n)+\frac{1}{8}\sigma_{2;\chi_{-3},\mathbf{1}}(n/2),$$
$$\mathcal{N}_{l,t}(1^1;1^2 3^2;n-1) = -\frac{1}{2}\sigma_{2;\mathbf{1},\chi_{-3}}(n)+\frac{1}{2}\sigma_{2;\mathbf{1},\chi_{-3}}(n/2)+\frac{3}{2}\sigma_{2;\chi_{-3},\mathbf{1}}(n)+\frac{3}{2}\sigma_{2;\chi_{-3},\mathbf{1}}(n/2),$$
$$\mathcal{N}_{l,t}(2^1;1^2 3^2;n-1) = \frac{1}{4}\sigma_{2;\mathbf{1},\chi_{-3}}(n)-\frac{1}{4}\sigma_{2;\mathbf{1},\chi_{-3}}(n/2)+\frac{3}{4}\sigma_{2;\chi_{-3},\mathbf{1}}(n)+\frac{3}{4}\sigma_{2;\chi_{-3},\mathbf{1}}(n/2),$$

$M_3(\Gamma_0(8),\ \chi_{-4})$:

$$\delta_6(2^4 4^2; n-2) = \sigma_{2;\chi_{-4},\mathbf{1}}(n/2),$$
$$\delta_6(4^6; n-3) = -\frac{1}{16}\sigma_{2;\mathbf{1},\chi_{-4}}(n) + \frac{1}{16}\sigma_{2;\mathbf{1},\chi_{-4}}(n/2) + \frac{1}{16}\sigma_{2;\chi_{-4},\mathbf{1}}(n) - \frac{1}{4}\sigma_{2;\chi_{-4},\mathbf{1}}(n/2),$$
$$\mathcal{N}_{s,t}(1^2 2^2; 4^2; n-1) = \sigma_{2;\chi_{-4},\mathbf{1}}(n),$$
$$\mathcal{N}_{s,t}(1^2; 4^4; n-2) = -\frac{1}{4}\sigma_{2;\mathbf{1},\chi_{-4}}(n) + \frac{1}{4}\sigma_{2;\mathbf{1},\chi_{-4}}(n/2) + \frac{1}{4}\sigma_{2;\chi_{-4},\mathbf{1}}(n),$$
$$\mathcal{N}_{s,t}(2^2; 4^4; n-2) = \sigma_{2;\chi_{-4},\mathbf{1}}(n/2),$$
$$\mathcal{N}_{s,t}(2^2; 2^4; n-1) = \sigma_{2;\chi_{-4},\mathbf{1}}(n) - 4\sigma_{2;\chi_{-4},\mathbf{1}}(n/2),$$
$$\mathcal{N}_{s,t}(1^1 2^1; 1^2 2^1 4^1; n-1) = \sigma_{2;\chi_{-4},\mathbf{1}}(n),$$
$$\mathcal{N}_{s,t}(1^4; 4^2; n-1) = -\sigma_{2;\mathbf{1},\chi_{-4}}(n) + \sigma_{2;\mathbf{1},\chi_{-4}}(n/2) + 2\sigma_{2;\chi_{-4},\mathbf{1}}(n),$$
$$\mathcal{N}_{s,t}(2^4; 4^2; n-1) = \sigma_{2;\mathbf{1},\chi_{-4}}(n)\sigma_{2;\mathbf{1},\chi_{-4}}(n/2) + \sigma_{2;\chi_{-4},\mathbf{1}}(n) - 4\sigma_{2;\chi_{-4},\mathbf{1}}(n/2),$$

$M_3(\Gamma_0(8),\ \chi_{-8})$:

$$\delta_6(1^2 2^1 4^3; n-2) = \frac{1}{6}\sigma_{2;\chi_{-8},\mathbf{1}}(n) - \frac{1}{6}\tau_{3,8,\chi_{-8}}(n),$$
$$\mathcal{N}_{s,t}(1^1 2^3; 4^2; n-1) = \frac{2}{3}\sigma_{2;\chi_{-8},\mathbf{1}}(n) + \frac{1}{3}\tau_{3,8,\chi_{-8}}(n),$$
$$\mathcal{N}_{s,t}(1^3 2^1; 4^2; n-1) = \frac{4}{3}\sigma_{2;\chi_{-8},\mathbf{1}}(n) - \frac{1}{3}\tau_{3,8,\chi_{-8}}(n),$$
$$\mathcal{N}_{s,t}(1^2; 1^2 2^1 4^1; n-1) = \frac{4}{3}\sigma_{2;\chi_{-8},\mathbf{1}}(n) - \frac{1}{3}\tau_{3,8,\chi_{-8}}(n),$$
$$\mathcal{N}_{s,t}(2^2; 1^2 2^1 4^1; n-1) = \frac{2}{3}\sigma_{2;\chi_{-8},\mathbf{1}}(n) + \frac{1}{3}\tau_{3,8,\chi_{-8}}(n),$$
$$\mathcal{N}_{s,t}(1^1 2^1; 2^4; n-1) = \frac{2}{3}\sigma_{2;\chi_{-8},\mathbf{1}}(n) + \frac{1}{3}\tau_{3,8,\chi_{-8}}(n),$$
$$\mathcal{N}_{s,t}(1^1 2^1; 4^4; n-2) = \frac{1}{6}\sigma_{2;\chi_{-8},\mathbf{1}}(n) - \frac{1}{6}\tau_{3,8,\chi_{-8}}(n),$$
$$\mathcal{N}_{s,t}(1^3; 2^2 4^1; n-1) = \frac{4}{3}\sigma_{2;\chi_{-8},\mathbf{1}}(n) - \frac{1}{3}\tau_{3,8,\chi_{-8}}(n),$$
$$\mathcal{N}_{s,t}(1^1 2^2; 2^2 4^1; n-1) = \frac{2}{3}\sigma_{2;\chi_{-8},\mathbf{1}}(n) + \frac{1}{3}\tau_{3,8,\chi_{-8}}(n),$$

$M_3(\Gamma_0(12),\ \chi_{-3})$:

$$\mathcal{N}_{l,s,t}(1^1;\ 1^1 3^1;\ 2^1 6^1; n-1) = -\frac{1}{2}\sigma_{2;\mathbf{1}\ \chi^{-3}}(n) + \frac{1}{2}\sigma_{2;\mathbf{1}\ \chi^{-3}}(n/2) + \frac{3}{2}\sigma_{2;\chi^{-3},\ \mathbf{1}}(n) + \frac{3}{2}\sigma_{2;\chi_{-3},\mathbf{1}}(n/2),$$

$M_3(\Gamma_0(12),\ \chi_{-4})$:

$$\mathcal{N}_{l,s,t}(1^1; 1^2; 2^1 6^1; n-1) = \frac{16}{7}\sigma_{2;\chi_{-4},\mathbf{1}}(n) + \frac{72}{7}\sigma_{2;\chi_{-4},\mathbf{1}}(n/3) - \frac{9}{7}\tau_{3,12,\chi_{-4};1}(n) - \frac{30}{7}\tau_{3,12,\chi_{-4};2}(n).$$

4.2.3. Xia-Ma-Tian 工作中所考虑形式的示例公式 [21]: 我们使用 $M_4(\Gamma_0(12))$ 的一组基来得到这些公式。

$$\mathcal{N}_{l,s}(2^1; 1^3 3^3; n) = 2\sigma_3(n) - 18\sigma_3(n/3) - 32\sigma_3(n/4) + 288\sigma_3(n/12) + 4a_{4,12}(n),$$
$$\mathcal{N}_{l,s,t}(2^1; 1^2 3^2; 2^1 6^1; n-1) = \frac{1}{2}\sigma_3(n) - \frac{1}{2}\sigma_3(n/2) - \frac{9}{2}\sigma_3(n/3) + \frac{9}{2}\sigma_3(n/6) + \frac{1}{2}a_{4,12}(n),$$
$$\mathcal{N}_{l,s,t}(2^1; 1^1 3^1; 2^2 6^2; n-2) = \frac{1}{8}\sigma_3(n) - \frac{1}{8}\sigma_3(n/2) - \frac{9}{8}\sigma_3(n/3) + \frac{9}{8}\sigma_3(n/6) - \frac{1}{8}a_{4,12}(n),$$

$$\mathcal{N}_{l,s,t}(4^1;1^2;1^1 3^1 6^2;n-2) = \frac{1}{8}\sigma_3(n) - \frac{1}{8}\sigma_3(n/2) - \frac{9}{8}\sigma_3(n/3) + \frac{9}{8}\sigma_3(n/6) - \frac{1}{2}a_{4,6}(n) - a_{4,6}(n/2) + \frac{3}{8}a_{4,12}(n),$$

$$\mathcal{N}_{l,s,t}(4^1;3^2;1^1 2^2 3^1;n-1) = \frac{1}{8}\sigma_3(n) - \frac{1}{8}\sigma_3(n/2) - \frac{9}{8}\sigma_3(n/3) + \frac{9}{8}\sigma_3(n/6) + \frac{1}{2}a_{4,6}(n) + a_{4,6}(n/2) + \frac{3}{8}a_{4,12}(n),$$

$$\mathcal{N}_{l,s}(1^1 2^1;3^4;n) = \frac{4}{5}\sigma_3(n) - \frac{6}{5}\sigma_3(n/2) + \frac{156}{5}\sigma_3(n/3) + \frac{32}{5}\sigma_3(n/4) - \frac{234}{5}\sigma_3(n/6) + \frac{1248}{5}\sigma_3(n/12) + \frac{16}{5}a_{4,6}(n) + \frac{32}{5}a_{4,6}(n/2) + 2a_{4,12}(n),$$

$$\mathcal{N}_{l,s}(1^1 2^1;1^2 3^2;n) = 4\sigma_3(n) - 2\sigma_3(n/2) - 36\sigma_3(n/3) - 32\sigma_3(n/4) + 18\sigma_3(n/6) + 288\sigma_3(n/12) + 6a_{4,12}(n),$$

$$\mathcal{N}_{l,s}(1^1 2^1;1^4;n) = \frac{52}{5}\sigma_3(n) - \frac{78}{5}\sigma_3(n/2) + \frac{108}{5}\sigma_3(n/3) + \frac{416}{5}\sigma_3(n/4) - \frac{162}{5}\sigma_3(n/6) + \frac{864}{5}\sigma_3(n/12) + \frac{48}{5}a_{4,6}(n) + \frac{96}{5}a_{4,6}(n/2) - 6a_{4,12}(n),$$

$$\mathcal{N}_{l,t}(1^1 2^1;1^2 3^2;n-1) = \sigma_3(n) - \sigma_3(n/2) - 9\sigma_3(n/3) + 9\sigma_3(n/6),$$

$$\mathcal{N}_{l,t}(1^1 2^1;2^2 6^2;n-2) = \frac{3}{8}\sigma_3(n) - \frac{19}{8}\sigma_3(n/2) - \frac{27}{8}\sigma_3(n/3) + 2\sigma_3(n/4) + \frac{171}{8}\sigma_3(n/6) - 18\sigma_3(n/12) - \frac{3}{8}a_{4,12}(n),$$

$$\mathcal{N}_{l,s}(2^1 4^1;1^2 3^2;n) = \sigma_3(n) + \sigma_3(n/2) - 9\sigma_3(n/3) - 32\sigma_3(n/4) - 9\sigma_3(n/6) + 288\sigma_3(n/12) + 3a_{4,12}(n),$$

$$\mathcal{N}_{l,t}(2^1 4^1;1^2.3^2;n-1) = \frac{1}{4}\sigma_3(n) - \frac{1}{4}\sigma_3(n/2) - \frac{9}{4}\sigma_3(n/3) + \frac{9}{4}\sigma_3(n/6) + \frac{3}{4}a_{4,12}(n),$$

$$\mathcal{N}_{l,s}(2^3;1^1 3^1;n) = 2\sigma_3(n) - 18\sigma_3(n/3) - 32\sigma_3(n/4) + 288\sigma_3(n/12),$$

$$\mathcal{N}_{l,t}(2^3;2^1 6^1;n-1) = \sigma_3(n) - 9\sigma_3(n/2) - 9\sigma_3(n/3) + 8\sigma_3(n/4) + 81\sigma_3(n/6) - 72\sigma_3(n/12),$$

$$\mathcal{N}_{l,s}(4^3;1^1 3^1;n) = \frac{1}{5}\sigma_3(n) - \frac{9}{5}\sigma_3(n/2) + \frac{9}{5}\sigma_3(n/3) + \frac{128}{5}\sigma_3(n/4) - \frac{81}{5}\sigma_3(n/6) + \frac{1152}{5}\sigma_3(n/12) + \frac{9}{5}a_{4,6}(n) + \frac{18}{5}a_{4,6}(n/2),$$

$$\mathcal{N}_{l,s}(1^2 2^1;1^1 3^1;n) = 8\sigma_3(n) - 6\sigma_3(n/2) - 72\sigma_3(n/3) - 32\sigma_3(n/4) + 54\sigma_3(n/6) + 288\sigma_3(n/12) + 6a_{4,12}(n),$$

$$\mathcal{N}_{l,t}(1^2 2^1;2^1 6^1;n-1) = \frac{5}{2}\sigma_3(n) - \frac{21}{2}\sigma_3(n/2) - \frac{45}{2}\sigma_3(n/3) + 8\sigma_3(n/4) + \frac{189}{2}\sigma_3(n/6) - 72\sigma_3(n/12) - \frac{3}{2}a_{4,12}(n),$$

$$\mathcal{N}_{l,s}(1^1 2^2;1^1 3^1;n) = \frac{16}{5}\sigma_3(n) - \frac{24}{5}\sigma_3(n/2) + \frac{144}{5}\sigma_3(n/3) + \frac{128}{5}\sigma_3(n/4) - \frac{216}{5}\sigma_3(n/6) + \frac{1152}{5}\sigma_3(n/12) + \frac{24}{5}a_{4,6}(n) + \frac{48}{5}a_{4,6}(n/2),$$

$$\mathcal{N}_{l,s}(2^1 4^2;1^1 3^1;n) = \frac{1}{2}\sigma_3(n) + \frac{3}{2}\sigma_3(n/2) - \frac{9}{2}\sigma_3(n/3) - 32\sigma_3(n/4) - \frac{27}{2}\sigma_3(n/6) + 288\sigma_3(n/12) + \frac{3}{2}a_{4,12}(n),$$

$$\mathcal{N}_{l,s}(1^1 2^1 4^1;1^1 3^1;n) = 2\sigma_3(n) - 18\sigma_3(n/3) - 32\sigma_3(n/4) + 288\sigma_3(n/12) + 6a_{4,12}(n),$$

$$\mathcal{N}_{l,t}(1^1 2^1 .4^1; 2^1 6^1; n-1) = \frac{1}{4}\sigma_3(n) + \frac{15}{4}\sigma_3(n/2) - \frac{9}{4}\sigma_3(n/3) - 4\sigma_3(n/4) - \frac{135}{4}\sigma_3(n/6) + 36\sigma_3(n/12) + \frac{3}{4}a_{4,12}(n).$$

4.2.4. $a = 3$ 的高阶多边形数示例公式：我们分别使用 $M_4(\Gamma_0(24)\ \chi_0)$ 和 $M_4(\Gamma_0(24)\ \chi_8)$ 的基（如 [15, §4]，所示），得到以下两个公式。

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_3(2^4 4^4; n-1) = {} & \frac{1}{10}\sigma_3(n) - \frac{9}{10}\sigma_3(n/2) - \frac{1}{10}\sigma_3(n/3) + \frac{8}{10}\sigma_3(n/4) + \frac{9}{10}\sigma_3(n/6) \\ & - \frac{8}{10}\sigma_3(n/12) + \frac{7}{30}a_{4,6}(n) + \frac{7}{15}a_{4,6}(n/2) + 0a_{4,6}(n/4) \\ & + \frac{1}{4}a_{4,8}(n) + \frac{7}{4}a_{4,8}(n/3) + \frac{1}{6}a_{4,12}(n) - a_{4,12}(n/2) + \frac{1}{4}a_{4,24}(n),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_3(1^2 2^1 4^5; n-1) = {} & \frac{32}{451}\sigma_{3,\chi_8,\mathbf{1}}(n) + \frac{32}{451}\sigma_{3,\chi_8,\mathbf{1}}(n/2) + \frac{3401}{16236}a_{4,8,\chi_8;1}(n) + \frac{910}{451}a_{4,8,\chi_8;1}(n/3) \\ & + \frac{4}{451}a_{4,8,\chi_8;2}(n) + \frac{906}{451}a_{4,8,\chi_8;2}(n/3) - \frac{283}{1476}a_{4,24,\chi_8;1}(n) - \frac{173}{492}a_{4,24,\chi_8;2}(n) \\ & + \frac{427}{492}a_{4,24,\chi_8;3}(n) - \frac{28}{369}a_{4,24,\chi_8;4}(n) + \frac{142}{41}a_{4,24,\chi_8;5}(n) + \frac{17}{492}a_{4,24,\chi_8;6}(n).\end{aligned}$$

以下公式是使用权重 5、层 24 的模形式之基得到的（如附录中的表 C 所示）。

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_3(1^2 2^5 4^3; n-1) = {} & \frac{256}{6897}\sigma_{4,\chi_{-8},\mathbf{1}}(n) - \frac{256}{6897}\sigma_{4,\chi_{-8},\mathbf{1}}(n/3) - \frac{1}{110352}\tau_{5,8,\chi_{-8};1'}(n) - \frac{1}{1452}\tau_{5,8,\chi_{-8};1'}(n/3) \\ & + \frac{7}{27588}\tau_{5,8,\chi_{-8};2}(n) - \frac{32941}{27588}\tau_{5,8,\chi_{-8};2}(n/3) + \frac{173}{44}\tau_{5,8,\chi_{-8};3}(n) - \frac{14647}{4598}\tau_{5,8,\chi_{-8};3}(n/3) \\ & + \frac{116}{121}\tau_{5,24,\chi_{-8};1}(n) - \frac{251}{484}\tau_{5,24,\chi_{-8};2}(n) + \frac{3821}{1452}\tau_{5,24,\chi_{-8};3}(n) - \frac{6517}{1452}\tau_{5,24,\chi_{-8};4}(n) \\ & + \frac{1753}{484}\tau_{5,24,\chi_{-8};5}(n) + -\frac{1151}{132}\tau_{5,24,\chi_{-8};6}(n) + \frac{9}{1936}\tau_{5,24,\chi_{-8};7}(n) + \frac{16}{11}\tau_{5,24,\chi_{-8};8}(n),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_3(1^4 2^2 4^4; n-1) = {} & \frac{16}{305}\sigma_{4,\chi_{-4},\mathbf{1}}(n) + \frac{16}{305}\sigma_{4,\chi_{-4},\mathbf{1}}(n/3) + \frac{4}{305}\tau_{5,4,\chi_{-4}}(n) + 4\tau_{5,4,\chi_{-4}}(n/2) \\ & + \frac{5189}{305}\tau_{5,4,\chi_{-4}}(n/3) - 4\tau_{5,4,\chi_{-4}}(n/6) - \frac{326}{183}\tau_{5,12,\chi_{-4};1}(n) + \frac{57}{61}\tau_{5,12,\chi_{-4};1}(n/2) \\ & + \frac{2}{61}\tau_{5,12,\chi_{-4};2}(n) + \frac{347}{183}\tau_{5,12,\chi_{-4};2}(n/2) + \frac{88}{3}\tau_{5,12,\chi_{-4};3}(n) + 8\tau_{5,12,\chi_{-4};4}(n) \\ & - \frac{4}{3}\tau_{5,12,\chi_{-4};4}(n/2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_3(2^8 4^2; n-1) = {} & \frac{16}{305}\sigma_{4,\chi_{-4},\mathbf{1}}(n) - \frac{256}{305}\sigma_{4,\chi_{-4},\mathbf{1}}(n/2) + \frac{16}{305}\sigma_{4,\chi_{-4},\mathbf{1}}(n/3) - \frac{256}{305}\sigma_{4,\chi_{-4},\mathbf{1}}(n/6) \\ & + \frac{4}{305}\tau_{5,4,\chi_{-4}}(n) + \frac{1156}{305}\tau_{5,4,\chi_{-4}}(n/2) + \frac{2444}{305}\tau_{5,4,\chi_{-4}}(n/3) - \frac{64}{305}\tau_{5,4,\chi_{-4}}(n/6) \\ & + \frac{40}{183}\tau_{5,12,\chi_{-4};1}(n) + \frac{57}{61}\tau_{5,12,\chi_{-4};1}(n/2) + \frac{2}{61}\tau_{5,12,\chi_{-4};2}(n) + \frac{164}{183}\tau_{5,12,\chi_{-4};2}(n/2) \\ & + \frac{1312}{183}\tau_{5,12,\chi_{-4};3}(n) - \frac{241}{61}\tau_{5,12,\chi_{-4};3}(n/2) + \frac{456}{61}\tau_{5,12,\chi_{-4};4}(n) - \frac{1}{183}\tau_{5,12,\chi_{-4};4}(n/2).\end{aligned}$$

致谢：本研究始于两位作者都在普拉亚格拉吉的 Harish-Chandra 研究所（HRI）工作期间。部分研究工作是在两位作者访问布巴内斯瓦尔的 NISER 期间完成的。感谢这两家机构的支持。

Appendix-I

空间 $M_k(\Gamma_0(N)\ \chi)$ 的显式基， $k=2$，3，5； $N=6$，8，12，24

在给出表格之前，我们先列出下文所用的符号。向量空间 $M_k(\Gamma_0(N)\ \chi)$ 分解为 $\mathcal{E}_(\Gamma_0(N)\ \chi)$，即由艾森斯坦级数生成的空间，以及 $S_k(\Gamma_0(N)\ \chi)$，即尖点形式子空间。这些子空间的维数分别记作 $e_{k,N,\chi}$ 和 $s_{k,N,\chi}$，使得空间 $M_k(\Gamma_0(N)\ \chi)$ 的维数 $\nu_{k,N,\chi}$ 是 $e_{k,N,\chi}+s_{k,N,\chi}$ 之和。

尖点形式空间的基元素可用新形式及其重复形式表示。我们将权为 k、层为 N 且特征为 χ 的新形式记为 $\Delta_{k,\ N,\ \chi;j}(\tau)$；当给定权、层和特征下有多个新形式时，采用此记法。若其唯一，则省略下标 j，简记为 $\Delta_{k,\ N,\ \chi}(\tau)$。此外，若特征为主特征，则记号中也省略下标 χ。新形式 $\Delta_{k,\ N,\ \chi;j}(n)$ 的第 n 个傅里叶系数记为 $\tau_{k,\ N,\ \chi;j}(n)$。若新形式空间是一维的，则省略下标 j；若其特征为主特征，也省略下标 χ。

对于整数 $k\geq 2$，令 E_k 表示权为 k、模群 $SL_2(\mathbb{Z})$ 上的归一化艾森斯坦级数，其定义为 $E_k(\tau)=1-\dfrac{2k}{B_k}\sum_{n\geq 1}\sigma_{k-1}(n)q^n$，其中 $q=e^{2i\pi\tau}$,$\tau\in\mathbb{H}$, $\sigma_r(n)=\sum_{d|n}d^r$，且 B_k 是由以下恒等式定义的 k^{th} 伯努利数： $\dfrac{x}{e^x-1}=\sum_{m=0}^{\infty}\dfrac{B_m}{m!}x^m$。除了艾森斯坦级数 $E_k(\tau)$ 外，我们还使用以下广义艾森斯坦级数。设 χ 和 ψ是导子分别为 M 和 N的本原狄利克雷特征。对于正整数 k，令$E_{k,\chi,\psi}(\tau):=-\dfrac{B_{k,\psi}}{2k}\delta_M$, $_1+\sum_{n\geq 1}\left(\sum_{d|n}\psi(d)\cdot\chi(n/d)d^{k-1}\right)q^n$，其中 $\delta_{m,n}$是克罗内克δ函数，$B_{k,\psi}$ 是关于特征 ψ的广义伯努利数。那么，只要满足 $\chi(-1)\psi(-1)=(-1)^k$且 $MN\neq 1$，艾森斯坦级数 $E_{k,\chi,\psi}(\tau)$ 就属于空间 $M_k(\Gamma_0(MN)\ \chi\psi)$。艾森斯坦级数 $E_{k,\chi,\psi}(\tau)$ 的第n个傅里叶系数（$n\geq 1$）记作 $\sigma_{k-1;\chi,\psi}(n)$。

η商定义为 $\eta(\tau)$ 的整数次幂构成的有限乘积，其中，$\eta(\tau)=\ q^{1/24}\prod_{n\geq 1}(1-q^n)$ 是戴德金 eta 函数，记作如下形式。$\delta_1^{r_{\delta_1}}\delta_2^{r_{\delta_2}}\cdots\delta_s^{r_{\delta_s}}:=\prod_{i=1}\eta^{r_{\delta_i}}(\delta_i\tau)$，其中 δ_i 是正整数， r_{δ_i} 是非零整数。

为了得到 4 个和 6 个变量情形下的显式公式，我们使用向量空间$M_2(\Gamma_0(N)\ \chi)$ 和 $M_3(\Gamma_0(N)\ \chi)$ 的以下基。它们列于下方的两个独立表格中（表 A和表 B）。对于高阶多边形数的情形（当 $a=3$ 为 4 时），通过考察 8 个和 10 个变量，我们得到显式公式。向量空间 $M_5(\Gamma_0(N)\ \chi)$ 的显式基列于表 $C.$。特征 χ_0 表示相应层 N 上的主特征，而 χ_m 表示克罗内克符号 $\left(\frac{m}{\cdot}\right)$。

以下 η商用于给出模空间 $M_2(\Gamma_0(N),\chi)$ 的显式基。

$\Delta_{2,\ 24,\ \chi_0}(\tau) = 2^1 4^1 6^1 12^1$,$\Delta_{2,\ 24,\ \chi_8;1}(\tau) = 1^1 2^{-1} 3^{-1} 6^4 8^2 12^{-1}$, $\Delta_{2,\ 24,\ \chi_8;2}(\tau) = 1^2 4^{-1} 6^{-1} 8^1 12^4 24^{-1}$,$\Delta_{2,\ 24,\ \chi_{24};1}(\tau) = 1^1 2^{-1} 3^{-1} 4^1 6^4 12^{-2} 24^2$, $\Delta_{2,\ 24,\ \chi_{24};2}(\tau) = 1^2 2^{-2} 4^4 6^1 8^{-1} 12^{-1} 24^1$.

表 A. $M_2(\Gamma_0(N),\chi)$ 的基

空间	维数		$M_2(\Gamma_0(N),\chi)$ 的基	
(N,χ)	$e_{2,N,\chi}$	$s_{2,N,\chi}$	$\mathcal{E}_2(\Gamma_0(N),\chi)$的基	$S_2(\Gamma_0(N),\chi)$的基
$(6,\chi_0)$	3	0	$\{\phi_{1,b}, b\|6, b\neq 1\}$	$\{0\}$
$(8,\chi_0)$	3	0	$\{\phi_{1,b}, b\|8, b\neq 1\}$	$\{0\}$
$(8,\chi_8)$	2	0	$\{E_{2,\mathbf{1},\chi_8}(\tau),\ E_{2,\chi_8,\mathbf{1}}(\tau)\}$	$\{0\}$
$(12,\chi_0)$	5	0	$\{\phi_{1,b}, b\|12, b\neq 1\}$	$\{0\}$
$(12,\chi_{12})$	4	0	$\{E_{2,\mathbf{1},\chi_{12}}(\tau)\ E_{2,\chi_{12},\mathbf{1}}(\tau),$ $E_{2,\chi_4,\chi_3}(\tau)\ E_{2,\chi_3,\chi_4}(\tau)\}$	$\{0\}$
$(24,\chi_0)$	7	1	$\{\phi_{1,b}, b\|24, b\neq 1\}$	$\{\Delta_{2,24,\chi_0}(\tau)\}$
$(24,\chi_8)$	4	2	$\{E_{2,\mathbf{1},\chi_8}(az)\ a\|3;\ E_{2,\chi_8,\mathbf{1}}(bz)\ b\|3\}$	$\{\Delta_{2,24,\chi_8;1}(\tau)\ \Delta_{2,24,\chi_8;2}(\tau)\}$
$(24,\chi_{12})$	8	0	$\{E_{2,\mathbf{1},\chi_{12}}(az)\ a\|2;\ E_{2,\chi_{12},\mathbf{1}}(bz)\ b\|2;$ $E_{2,\chi_4,\chi_3}(cz)\ c\|2;\ E_{2,\chi_3,\chi_4}(dz)\ d\|2\}$	$\{0\}$
$(24,\chi_{24})$	4	2	$\{E_{2,\mathbf{1},\chi_{24}}(\tau)\ E_{2,\chi_{24},\mathbf{1}}(\tau),$ $E_{2,\chi_8,\chi_3}(\tau)\ E_{2,\chi_3,\chi_8}(\tau)\}$	$\{\Delta_{2,24,\chi_{24};1}(\tau)\ \Delta_{2,24,\chi_{24};2}(\tau)\}$

以下 eta-商用于给出相应模空间 $M_3(\Gamma_0(N),\chi$ 的显式基).

$\Delta_{3,8,\chi_{-8}}(\tau) = 1^2 2^1 4^1 8^2$, $\Delta_{3,12,\chi_{-3}}(\tau) = 2^3 6^3$,$\Delta_{3,12,\chi_{-4}};1(\tau) = 1^4 2^{-1} 4^1 6^1 12^1$, $\Delta_{3,12,\chi_{-4}};2(\tau) = 1^1 2^1 3^1 6^{-1} 12^4$,$\Delta_{3,24,\chi_{-3}};1(\tau) = 1^3 2^1 3^{-1} 4^4 6^1 8^{-3} 24^1$, $\Delta_{3,24,\chi_{-3}};2(\tau) = 1^{-3} 2^4 3^1 4^1 8^3 12^1 24^{-1}$,$\Delta_{3,24,\chi_{-8}};1(\tau) = 1^{-2} 2^4 4^4 6^1 8^{-2} 12^1$, $\Delta_{3,24,\chi_{-8}};2(\tau) = 1^2 4^3 6^3 8^{-1} 12^{-2} 24^1$,$\Delta_{3,24,\chi_{-8}};3(\tau) = 2^3 3^2 4^{-2} 8^1 12^3 24^{-1}$, $\Delta_{3,24,\chi_{-8}};4(\tau) = 1^1 2^1 3^{-1} 4^1 6^2 8^1 12^2 24^{-1}$,$\Delta_{3,24,\chi_{-24}};1(\tau) = 1^{-3} 2^9 3^{-1} 4^{-3} 6^4 12^{-2} 24^2$, $\Delta_{3,24,\chi_{-24}};2(\tau) = 1^{-2} 2^8 6^1 8^{-1} 12^{-1} 24^1$,$\Delta_{3,24,\chi_{-24}};3(\tau) = 1^1 2^{-5} 3^{-1} 4^{11} 6^4 8^{-4} 12^{-2} 24^2$, $\Delta_{3,24,\chi_{-24}};4(\tau) = 1^2 2^{-6} 4^{14} 6^1 8^{-5} 12^{-1} 24^1$,$\Delta_{3,24,\chi_{-24}};5(\tau) = 1^1 2^{-1} 3^{-5} 4^1 6^{14} 12^{-6} 24^2$, $\Delta_{3,24,\chi_{-24}};6(\tau) = 1^2 2^{-2} 3^{-4} 4^4 6^{11} 8^{-1} 12^{-5} 24^1$.

表B. $M_3(\Gamma_0(N)\ \chi)$的基

空间	维数		$M_3(\Gamma_0(N)\ \chi)$的基	
(N,χ)	$e_{3,N\ \chi}$	$s_{3,N\ \chi}$	$\mathcal{E}_3(\Gamma_0(N)\ \chi)$的基	$S_3(\Gamma_0(N)\ \chi)$的基
$(4,\chi_{-4})$	2	0	$\{E_{3,\mathbf{1}\ \chi^{-4}}(\tau)\ E_{3\ \chi^{-4},\ \mathbf{1}}(\tau)\}$	$\{0\}$
$(3,\chi_{-3})$	2	0	$\{E_{3,\mathbf{1}\ \chi_{-3}}(\tau)\ E_{3\ \chi_{-3},\mathbf{1}}(\tau)\}$	$\{0\}$
$(6,\chi_{-3})$	4	0	$\{E_{3,\mathbf{1}\ \chi_{-3}}(az)\ a\|2;\ E_{3\chi_{-3},\mathbf{1}}(bz)\ b\|2\}$	$\{0\}$
$(8,\chi_{-4})$	4	0	$\{E_{3,\mathbf{1}\ \chi^{-4}}(az)\ a\|2;\ \ E_{3\ \chi^{-4},\ \mathbf{1}}(bz)\ b\|2\}$	$\{0\}$
$(8,\chi_{-8})$	2	1	$\{E_{3,\mathbf{1}\ \chi_{-8}}(\tau)\ \ E_{3\ \chi_{-8},\mathbf{1}}(\tau)\}$	$\{\Delta_{3,8\ \chi_{-8}}(\tau)\}$
$(12,\chi_{-3})$	6	1	$\{E_{3,\mathbf{1}\ \chi_{-3}}(az)\ a\|4;\ \ E_{3\ \chi_{-3},\mathbf{1}}(bz)\ b\|4\}$	$\{\Delta_{3,12\ \chi_{-3}}(\tau)\}$
$(12,\chi_{-4})$	4	2	$\{E_{3,\mathbf{1}\ \chi^{-4}}(az)\ a\|3;\ \ E_{3\ \chi^{-4},\ \mathbf{1}}(bz)\ b\|3\}$	$\{\Delta_{3,12\ \chi^{-4};1}(\tau)\ \Delta_{3,12\ \ \chi^{-4};2}(\tau)\}$
$(24,\chi_{-3})$	8	4	$\{E_{3,\mathbf{1}\ \chi_{-3}}(az)\ a\|8;\ \ E_{3\ \chi_{-3},\mathbf{1}}(bz)\ b\|8\}$	$\{\Delta_{3,12\ \chi_{-3}}(az)\ a\|2;\Delta_{3,24\ \ \chi_{-3};s}(\tau),\ s=1,2\}$
$(24,\chi_{-4})$	8	4	$\{E_{3,\mathbf{1}\ \chi^{-4}}(az)\ a\|6;\ \ E_{3\ \chi^{-4},\ \mathbf{1}}(bz)\ b\|6\}$	$\{\Delta_{3,12\ \chi^{-4};1}(az)\ a\|2;\ \Delta_{3,12\ \chi^{-4};2}(bz)\ b\|2\}$
$(24,\chi_{-8})$	4	6	$\{E_{3,\mathbf{1}\ \chi_{-8}}(az);a\|3,\ E_{3\ \chi_{-8},\ ^{\mathbf{1}}(bz)\ ;\ b\|3\}}$	$\{\Delta_{3,8\ \chi_{-8}}(az)\ a\|3;\ \Delta_{3,24\ \chi_{-8};}{}^{s}(\tau);1\ \ \leq s\leq 4\}$
$(24,\chi_{-24})$	4	6	$\{E_{3,\mathbf{1}\ \chi^{-24}}(\tau)\ E_{3\ \chi^{-24},\mathbf{1}}(\tau),\ E_{3\ \chi_{-3},\chi_8}(\tau)\ E_{3\chi_8,\chi_{\ -3}}(\tau)\}$	$\{\Delta_{3,24\ \chi^{-24};r}(\tau);\ 1\leq r\leq 6\}$

下表列出了不同层和奇特征 χ对应的模形式空间 $M_5(\Gamma_0(24)\ \chi)$ 的基。

表 C. $M_5(\Gamma_0(N)\ \chi)$ 的基

模形式空间	维数		$M_5(\Gamma_0(N)\ \chi)$的基	
(N,χ)	$e_{5,N\ \chi}$	$s_{5,N\ \chi}$	$\mathcal{E}_5(\Gamma_0(N)\ \chi)$的基	$S_5(\Gamma_0(N)\ \chi)$的基
$(4,\chi_{-4})$	2	1	$\{E_{5,\mathbf{1}\ \chi^{-4}}(z)\ E_{5\ \ \chi_{-4},\ \mathbf{1}}(z)\}$	$\Delta_{5,4\ \chi_{-4}}(z)$
$(3,\chi_{-3})$	2	0	$\{E_{5,\mathbf{1}\ \chi_{-3}}(z)\ E_{5\ \chi_{-3},\mathbf{1}}(z)\}$	0
$(6,\chi_{-3})$	4	2	$\{E_{5,\mathbf{1}\ \chi_{-3}}(az);\ a\|2,\ E_{5\ \chi_{-3},^{\mathbf{1}}(bz)\ ;\ b\|2\}}$	$\{\Delta_{5,6\ \chi_{-3};1}(z)\ \ \Delta_{5\ ,6\ \chi_{-3};2}(z)\}$
$(8,\chi_{-4})$	4	2	$\{E_{5,\mathbf{1}\ \chi^{-4}\ (az)\ ;\ a\|2,}$ $E_{5\ \chi_{-4},\ \mathbf{1}}(bz);\ b\|2\}$	$\{\Delta_{5,4\ \chi^{-4}\ (az)\ ;\ a\|2\}}$

模形式空间	维数		$M_5(\Gamma_0(N),\ \chi)$ 的基	
(N,χ)	$e_{5,N\ \chi}$	$s_{5,N\ \chi}$	$\mathcal{E}_5(\Gamma_0(N),\ \chi)$的基	$S_5(\Gamma_0(N),\ \chi)$的基
$(8,\chi_{-8})$	2	3	$\{E_{5,\mathbf{1}\ \chi_{-8}}(z)\ \ E_{5\ \chi_{-8},\mathbf{1}}(z)\}$	$\{\Delta_{5,8\ \chi_{-8};1}(z)\ \ \Delta_{5\ ,8\ \chi_{-8};2}(z)\ \ \Delta_{5\ ,8\ \chi_{-8};3}(z)\}$
$(12,\chi_{-3})$	6	5	$\{E_{5,\mathbf{1}\ \chi_{-3}}(az);\ a\|4,$ $E_{5\ \chi_{-3},\mathbf{1}}(bz)\ ;\ b\|4\}$	$\{\Delta_{5,12\ \chi_{-3};1}(z)\ \Delta_{5,12\ \ \chi_{-3};2}(z),$ $\Delta_{5,12\ \chi_{-3};3}(z)\ \Delta_{5,12\ \ \chi_{-3};4}(z)\ F(z)\}$
$(12,\chi_{-4})$	4	6	$\{E_{5,\mathbf{1}\ \chi^{-4}}(az)\ ;\ a\|3,$ $E_{5\ \chi_{-4},\ \mathbf{1}}(bz);\ b\|3\}$	$\{\Delta_{5,4\ \chi^{-4}}(az)\ ;\ a\|3,$ $\Delta_{5,12\ \chi^{-4};1}(z)\ \Delta_{5,12\ \ \chi_{-4};2}(z),$ $\Delta_{5,12\ \chi^{-4};3}(z)\ \Delta_{5,12\ \ \chi_{-4};4}(z)\}$
$(24,\chi_{-3})$	8	12	$\{E_{5,\mathbf{1}\ \chi_{-3}}(az);\ a\|8,$ $E_{5\ \chi_{-3},\mathbf{1}}(bz)\ ;\ b\|8\}$	$\{\Delta_{5,12\ \chi^{-3};r}(z);1\ \leq\ r\ \leq\ 4,$ $\Delta_{5,24\ \chi_{-3};s}(z);1\leq s\leq 8\}$
$(24,\chi_{-4})$	8	12	$\{E_{5,\mathbf{1}\ \chi^{-4}}(az)\ ;\ a\|6,$ $E_{5\ \chi_{-4},\ \mathbf{1}}(bz);\ b\|6\}$	$\{\Delta_{5,4\ \chi^{-4}}(tz)\ ;\ t\|6,\ \Delta_{5,12\ \ \chi_{-4};1}(az);\ a\|2,$ $\Delta_{5,12\ \chi^{-4;2}}(bz)\ ;\ b\|2,\ \Delta_{5,12\ \ \chi_{-4};3}(cz);\ c\|2,$ $\Delta_{5,12\ \chi_{-4};4}(dz);\ d\|2\}$
$(24,\chi_{-8})$	4	14	$\{E_{5,\mathbf{1}\ \chi_{-8}}(az);\ a\|3,$ $E_{5\ \chi_{-8},\mathbf{1}}(bz)\ ;\ b\|3\}$	$\{\Delta_{5,8\ \chi_{-8};1'}(az);\ a\|3,\Delta_{5,8\ \chi_{-8};}{}^{2}(bz)\ ;\ b\|3,$ $\Delta_{5,8\ \chi_{-8};3}(cz);\ c\|3,\Delta_{5,24\ \ \chi_{-8};s}(z);1\ \leq\ s\ \leq\ 8\}$
$(24,\chi_{-24})$	4	14	$\{E_{5,\mathbf{1}\ \chi^{-24}}(z)\ E_{5\ \ \chi_{-24},\ \mathbf{1}}(z),$ $E_{5\ \chi_{-3},\chi_8}(z)\ E_{5\chi_8,\chi_{\ -3}}(z)\}$	$\{\Delta_{5,24\ \chi^{-24};r}(z);1\leq r\leq 14\}$

其中使用以下 η商来给出相应模空间 $M_5(\Gamma_0(N),\ \chi)$ 的显式基 .

$$\Delta_{5,4,\chi_{-4};1}(z)=1^4 2^2 4^4,\quad \Delta_{5,12,\chi_{-3};1}(z)=1^{-4}2^9 3^4 4^{-2}6^5 12^{-2}$$
$$\Delta_{5,6,\chi_{-3};1}(z)=1^{-1}2^8 3^3,\quad \Delta_{5,12,\chi_{-3};2}(z)=1^{-4}2^{10}3^4 4^{-1}6^{-2}12^3$$
$$\Delta_{5,6,\chi_{-3};2}(z)=1^3 3^{-1}6^8,\quad \Delta_{5,12,\chi_{-3};3}(z)=1^{-4}2^{12}3^4 4^{-5}6^{-4}12^7$$
$$\Delta_{5,8,\chi_{-8};1}(z)=1^2 2^9 4^{-3}8^2,\quad \Delta_{5,12,\chi_{-3};4}(z)=2^{10}4^{-5}6^{-2}12^7$$
$$\Delta_{5,8,\chi_{-8};2}(z)=1^{-2}2^7 4^7 8^{-2},\quad \Delta_{5,12,\chi_{-3};5}(z)=2^3 6^3 * \phi_{1,2}$$
$$\Delta_{5,8,\chi_{-8};3}(z)=1^2 2^{-3}4^9 8^2,$$

$$\Delta_{5,12,\chi_{-4};1}(z)=1^{-2}2^5 3^2 4^1 6^3 12^1,\quad \Delta_{5,12,\chi_{-4};3}(z)=1^2 2^3 3^{-2}4^1 6^5 12^1$$
$$\Delta_{5,12,\chi_{-4};2}(z)=1^1 2^3 3^1 4^2 6^5 12^{-2},\quad \Delta_{5,12,\chi_{-4};4}(z)=1^1 2^5 3^1 4^{-2}6^3 12^2$$
$$\Delta_{5,24,\chi_{-3};1}(z)=1^{-2}2^3 3^2 4^2 6^1 24^1,\quad \Delta_{5,24,\chi_{-3};6}(z)=1^{-2}2^3 3^2 4^6 6^5 8^{-2}12^{-4}24^2$$
$$\Delta_{5,24,\chi_{-3};2}(z)=1^{-2}2^3 3^2 4^5 6^{-3}8^{-3}12^3 24^5,\quad \Delta_{5,24,\chi_{-3};7}(z)=1^{-2}2^3 3^2 6^1 8^4 12^2$$
$$\Delta_{5,24,\chi_{-3};3}(z)=1^{-2}2^3 3^2 4^4 6^1 8^{-4}12^{-2}24^8,\quad \Delta_{5,24,\chi_{-3};8}(z)=1^{-3}2^1 3^9 4^1 6^1 12^1$$
$$\Delta_{5,24,\chi_{-3};4}(z)=1^{-1}2^3 3^{-1}4^3 6^1 8^{-4}12^1 24^8,\quad \Delta_{5,8,\chi_{-8};1'}(z)=1^{-6}2^{21}4^{-7}8^2$$
$$\Delta_{5,24,\chi_{-3};5}(z)=1^{-2}2^5 3^6 4^4 6^{-3}$$

$$\Delta_{5,24,\chi_{-8};1}(z)=1^{-2}2^{1}3^{4}6^{4}8^{3}12^{3}24^{-3},\quad \Delta_{5,24,\chi_{-8};5}(z)=1^{-2}2^{1}3^{8}4^{-1}6^{-2}8^{2}24^{4}$$
$$\Delta_{5,24,\chi_{-8};2}(z)=1^{-2}2^{1}3^{8}4^{7}6^{-6}8^{-2}12^{4},\quad \Delta_{5,24,\chi_{-8};6}(z)=1^{-2}2^{1}3^{8}4^{2}6^{-6}8^{-1}12^{3}24^{5}$$
$$\Delta_{5,24,\chi_{-8};3}(z)=1^{-2}2^{1}3^{8}4^{-3}6^{-2}8^{6}12^{2},\quad \Delta_{5,24,\chi_{-8};7}(z)=1^{-2}2^{3}3^{12}4^{1}6^{-6}8^{2}$$
$$\Delta_{5,24,\chi_{-8};4}(z)=1^{-2}2^{1}3^{8}6^{-6}8^{3}12^{5}24^{1},\quad \Delta_{5,24,\chi_{-8};8}(z)=1^{-1}2^{1}3^{5}6^{-2}8^{-2}12^{1}24^{8}$$
$$\Delta_{5,24,\chi_{-24};1}(z)=1^{-4}2^{10}3^{-2}4^{-4}6^{7}8^{3}12^{3}24^{-3},\quad \Delta_{5,24,\chi_{-24};8}(z)=1^{-3}2^{10}3^{-1}4^{-4}6^{1}8^{-2}12^{1}24^{8}$$
$$\Delta_{5,24,\chi_{-24};2}(z)=1^{-4}2^{10}3^{2}4^{3}6^{-3}8^{-2}12^{4},\quad \Delta_{5,24,\chi_{-24};9}(z)=1^{-4}2^{12}3^{6}4^{-3}6^{-3}8^{2}$$
$$\Delta_{5,24,\chi_{-24};3}(z)=1^{-4}2^{10}3^{2}4^{-7}6^{1}8^{6}12^{2},\quad \Delta_{5,24,\chi_{-24};10}(z)=1^{-4}2^{10}3^{2}4^{-1}6^{5}12^{-4}24^{2}$$
$$\Delta_{5,24,\chi_{-24};4}(z)=1^{-4}2^{10}3^{2}4^{-4}6^{-3}8^{3}12^{5}24^{1},\quad \Delta_{5,24,\chi_{-24};11}(z)=1^{1}2^{2}3^{-1}4^{3}6^{3}8^{-1}12^{2}24^{1}$$
$$\Delta_{5,24,\chi_{-24};5}(z)=1^{-4}2^{10}3^{2}4^{-5}6^{1}8^{2}24^{4},\quad \Delta_{5,24,\chi_{-24};12}(z)=1^{-2}2^{2}3^{4}4^{1}6^{1}12^{2}24^{2}$$
$$\Delta_{5,24,\chi_{-24};6}(z)=1^{-4}2^{10}3^{2}4^{-2}6^{-3}8^{-1}12^{3}24^{5},\quad \Delta_{5,24,\chi_{-24};13}(z)=2^{2}3^{6}4^{1}6^{-7}8^{2}12^{10}24^{-4}$$
$$\Delta_{5,24,\chi_{-24};7}(z)=1^{-4}2^{10}3^{2}4^{-3}6^{1}8^{-2}12^{-2}24^{8},\quad \Delta_{5,24,\chi_{-24};14}(z)=3^{2}4^{-3}6^{-3}8^{6}12^{12}24^{-4}$$

5. Appendix-II

纳入显式公式考察的形式列表

本节列出4个和6个变量的形式，以便为我们的主要结果提供具体示例。由于示例数量过多，我们在每种情形下只给出几个示例公式，其余公式则表示为相应模形式向量空间的基元素的线性组合，线性组合系数列于本文末尾的表格中。

表1. 含4个变量的形式

回顾一下， $T_{\mathcal{C}}$ 表示系数取自 $\mathcal{C}$的三角数之和，由(3)给出；而$\mathcal{M}_{s,t}$, $\mathcal{M}_{l,t}$是由方程(12)给出的混合形式。

空间	Form		
	$T_{\mathcal{C}}$:$(1^{e_1}2^{e_2}3^{e_3}4^{e_4}6^{e_5})$	$\mathcal{M}_{s,\ t}$:$(1^{j_1}2^{j_2}3^{j_1}6^{j_4};\ \ 1^{e_1}2^{e_2}3^{e_1}4^{e_4}6^{e_5})$	$\mathcal{M}_{l,\ t}$:$(1^{i_1}2^{i_2}4^{i_1}8^{i_4};\ \ 1^{e_1}2^{e_2}3^{e_1}4^{e_4}6^{e_5})$
$M_2(4,\chi_0)$	(2^4)		
$M_2(6,\chi_0)$	$(1^2 3^2)$		
$M_2(8,\chi_0)$		$(1^2;4^2),(2^2;\ 4^2),(2^1;\ 2^2 4^1)$	
$M_2(8,\chi_8)$	$(1^2 2^1 4^1)$	$(1^1 2^1;\ 4^2),(1^1;2^2 4^1)$	
$M_2(12,\chi_0)$		$(1^1 3^1;\ 2^1 6^1),(1^1;\ 2^1 3^2),(3^1;1^2 6^1)$	$(1^1;\ 2^1 6^1),(2^1;2^1 6^1),(4^1;2^1 6^1)$
$M_2(12,\chi_{12})$	$(1^1 2^2 3^1),(1^1 3^1 6^2)$	$(1^2;\ 2^1 6^1),(3^2;2^1 6^1),(3^1;\ 2^1 3^2),(1^1;1^2 6^1)$	
$M_2(24,\chi_0)$		$(3^2;\ 4^2),(6^2;\ 4^2),(2^1 6^1;2^1 6^1),(2^1;4^1 6^2),(6^1;1^1 3^1 4^1)$	$(8^1;\ 2^1 6^1),$
$M_2(24,\chi_8)$		$(3^1 6^1;\ 4^2),(1^1 6^1;\ 2^1 6^1),(2^1 3^1;\ 2^1 6^1),(1^1;4^1 6^2),$ $(3^1;\ 1^1 3^1 4^1),(2;\ 2^1 3^2),(6^1;1^2 6^1)$	
$M_2(24,\chi_{12})$		$(1^1 3^1;\ 4^2),(2^1 6^1;\ 4^2),(2^2;\ 2^1 6^1),(6^2;2^1 6^1)$, $(2^1;\ 1^1 3^1 4^1),(6^1;\ 2^2 4^1)(6^1;4^1 6^2)$	$(1^1;\ 4^2),(2^1;\ 4^2),(4^1;4^2),(8^1;4^2)$
$M_2(24,\chi_{24})$	$(3^2 4^1 6^1)$	$(1^1 6^1;\ 4^2),(2^1 3^1;\ 4^2),(1^1 2^1;2^1 6^1),(3^1 6^1;2^1 6^1),$ $(1^1;\ 1^1 3^1 4^1),(2^1;\ 1^2 6^1),(3^1;4^1 6^2),(3^1;2^2 4^1),(6^1;2^1 3^2)$	

表 2(A). 含 6 个变量的形式

除了表 I 中的三种类型外，这里我们还考虑由 (4) 给出的混合形式 $\mathcal{M}$ ， 它包含全部三种类型的形式。

空间	Form	
	T_C:$(1^{e_1}2^{e_2}3^{e_3}4^{e_4}6^{e_5})$	$\mathcal{M}_{l,\ t}$:$(1^{i_1}2^{i_2}4^{i_3}8^{i_4};\ \ 1^{e_1}2^{e_2}3^{e_3}4^{e_4}6^{e_5})$
$M_3(4,\chi_{-4})$	$(1^4 2^2)$	
$M_3(8,\chi_{-4})$	$(2^4 4^2)$, (4^6)	
$M_3(8,\chi_{-8})$	$(1^2 2^1 4^3)$	
$M_3(6,\chi_{-3})$	$(1^5 3^1)$, $(1^1 3^5)$	$(1^1;\ 1^2 3^2)$, $(2^1;\ 1^2 3^2)$
$M_3(12,\chi_{-3})$	$(1^2 2^1 3^2 6^1)$, $(2^5 6^1)$, $(2^1 6^5)$, $(2^3 6^3)$	$(1^2;\ 2^1 6^1)$, $(1^1 2^1;\ 2^1 6^1)$, $(1^1 4^1;\ 2^1 6^1)$, $(2^2;\ 2^1 6^1)$, $(2^1 4^1;\ 2^1 6^1)$, $(4^2;\ 2^1 6^1)$, $(1^1;\ 2^4)$, $(2^1;\ 2^2 6^2)$, $(4^1;\ 6^4)$, $(4^1;\ 1^2 3^2)$
$M_3(12,\chi_{-4})$	$(1^4 6^2)$, $(1^1 2^3 3^1 6^1)$, $(1^1 2^1 3^1 6^3)$, $(2^2 3^4)$, $(3^4 6^2)$	$(1^1;\ 1^1 2^2 3^1)$, $(1^1;\ 1^1 3^1 6^2)$, $(2^1;\ 1^1 2^2 3^1)$, $(2^1;\ 1^1 3^1 6^2)$, $(4^1;\ 1^1 2^2 3^1)$, $(4^1;\ 1^1 3^1 6^2)$
$M_3(24,\chi_{-3})$	$(1^1 3^1 4^2 6^2)$, $(2^1 4^4 6^1)$, $(1^1 2^2 3^1 4^2)$	$(1^1 8^1;\ 2^1 6^1)$, $(2^1 8^1;\ 2^1 6^1)$, $(4^1 8^1;\ 2^1 6^1)$, $(8^2;\ 2^1 6^1)$, $(8^1;\ 1^2 3^2)$, $(8^1;\ 2^4)$, $(8^1;\ 2^2 6^2)$, $(8^1;\ 6^4)$, $(1^1;\ 4^4)$, $(2^1;\ 4^4)$, $(4^1;\ 4^4)$, $(8^1;\ 4^4)$
$M_3(24,\chi_{-4})$	$(1^2 3^2 4^2)$, $(2^2 4^2 6^2)$, $(4^2 6^4)$	$(1^2;\ 4^2)$, $(1^1 2^1;\ 4^2)$, $(1^1 4^1;\ 4^2)$, $(2^2;\ 4^2)$, $(2^1 4^1;\ 4^2)$, $(4^2;\ 4^2)$, $(1^1 8^1;\ 4^2)$, $(2^1 8^1;\ 4^2)$, $(4^1 8^1;\ 4^2)$, $(8^2;\ 4^2)$, $(8^1;\ 1^1 2^2 3^1)$, $(8^1;\ 1^1 3^1 6^2)$, $(1^1;\ 2^1 4^2 6^1)$, $(2^1;\ 2^1 4^2 6^1)$, $(4^1;\ 2^1 4^2 6^1)$, $(8^1;\ 2^1 4^2 6^1)$
$M_3(24,\chi_{-8})$	$(1^3 3^1 4^1 6^1)$, $(2^3 3^2 4^1)$, $(2^1 3^2 4^1 6^2)$	$(1^1;\ 3^2 4^1 6^1)$, $(2^1;\ 3^2 4^1 6^1)$, $(4^1;\ 3^2 4^1 6^1)$, $(8^1;\ 3^2 4^1 6^1)$
$M_3(24,\chi_{-24})$	$(1^2 4^1 6^3)$, $(1^1 2^1 3^3 4^1)$, $(1^2 2^2 4^1 6^1)$, $(3^2 4^3 6^1)$	$(1^1;\ 1^2 2^1 4^1)$, $(2^1;\ 1^2 2^1 4^1)$, $(4^1;\ 1^2 2^1 4^1)$, $(8^1;\ 1^2 2^1 4^1)$

表2(B)。含 6 个变量的形式

空间	Form	
	$\mathcal{M}_{s,\ t}$:$(1^{i_1}2^{i_2}3^{i_3}6^{i_4};\ \ 1^{e_1}2^{e_2}3^{e_3}4^{e_4}6^{e_5})$	$\mathcal{M}$: $(1^{i_1}2^{i_2}4^{i_3}8^{i_4};\ 1^{j_1}2^{j_2}3^{j_3}6^{j_4};\ 1^{e_1}2^{e_2}3^{e_3}4^{e_4}6^{e_5})$
$M_3(4,\chi_{-4})$	$(1^2;\ 2^4)$	
$M_3(8,\chi_{-4})$	$(1^4;\ 4^2)$, $(2^4;\ 4^2)$, $(1^2 2^2;\ 4^2)$, $(1^2;\ 4^4)$, $(2^2;4^4)$, $(2^2;2^4)$, $(1^1 2^1;\ 1^2 2^1 4^1)$, $(1^2 2^1;\ 2^2 4^1)$, $(2^3;\ 2^2 4^1)$	
$M_3(8,\chi_{-8})$,	$(1^1 2^3;\ 4^2)$, $(1^3 2^1;\ 4^2)$, $(1^2;\ 1^2 2^1 4^1)$, $(2^2;\ 1^2 2^1 4^1)$, $(1^2 2^1;\ 2^4)$, $(1^1 2^1;\ 4^4)$, $(1^3;\ 2^2 4^1)$, $(1^1 2^2;\ 2^2 4^1)$	
$M_3(12,\chi_{-3})$	$(1^4;\ 2^1 6^1)$, $(1^2 3^2;\ 2^1 6^1)$, $(3^4;\ 2^1 6^1)$, $(1^2;\ 1^1 2^2 3^1)$, $(1^2;\ 1^1 3^1 6^2)$, $(3^2;\ 1^1 2^2 3^1)$, $(3^2;\ 1^1 3^1 6^2)$, $(1^1 3^1;\ 2^4)$, $(1^1 3^1;\ 6^4)$, $(1^1 3^1;\ 1^2 3^2)$, $(1^1 3^1;\ 2^2 6^2)$, $(1^3;\ 1^2 6^1)$, $(1^1 3^2;\ 1^2 6^1)$, $(1^2 3^1;\ 2^1 3^2)$, $(3^3;\ 2^1 3^2)$	$(1^1;\ 1^1 3^1;\ 2^1 6^1)$, $(2^1;\ 1^1 3^1;\ 2^1 6^1)$, $(4^1;\ 1^1 3^1;\ 2^1 6^1)$ $(1^1;\ 1^1;\ 2^1 3^2)$, $(2^1;\ 1^1;\ 2^1 3^2)$, $(4^1;\ 1^1;\ 2^1 3^2)$ $(1^1;\ 3^1;\ 1^2 6^1)$, $(2^1;\ 3^1;\ 1^2 6^1)$, $(4^1;\ 3^1;\ 1^2 6^1)$
$M_3(12,\chi_{-4})$	$(1^1 3^3;\ 2^1 6^1)$, $(1^3 3^1;\ 2^1 6^1)$, $(1^1 3^1;\ 1^1 2^2 3^1)$, $(1^1 3^1;\ 1^1 3^1 6^2)$, $(1^2;\ 6^4)$, $(1^2;\ 1^2 3^2)$, $(1^2;\ 2^2 6^2)$, $(3^2;\ 2^4)$, $(3^2;\ 6^4)$, $(3^2;\ 1^2 3^2)$, $(3^2;\ 2^2 6^2)$ $(1^2 3^1;\ 1^2 6^1)$, $(3^3;\ 1^2 6^1)$, $(1^3;\ 2^1 3^2)$, $(1^1 3^2;\ 2^1 3^2)$	$(1^1;\ 1^2;\ 2^1 6^1)$, $(2^1;\ 1^2;\ 2^1 6^1)$, $(4^1;\ 1^2;\ 2^1 6^1)$, $(1^1;\ 3^2;\ 2^1 6^1)$, $(2^1;\ 3^2;\ 2^1 6^1)$, $(4^1;\ 3^2;\ 2^1 6^1)$ $(1^1;\ 1^1;\ 1^2 6^1)$, $(2^1;\ 1^1;\ 1^2 6^1)$, $(4^1;\ 1^1;\ 1^2 6^1)$ $(1^1;\ 3^1;\ 2^1 3^2)$, $(2^1;\ 3^1;\ 2^1 3^2)$, $(4^1;\ 3^1;\ 2^1 3^2)$
$M_3(24,\chi_{-3})$	$(2^3 6^1;\ 4^2)$, $(2^1 6^3;\ 4^2)$, $(1^1 2^2 3^1;\ 4^2)$, $(1^2 2^1 6^1;\ 4^2)$, $(1^1 3^1 6^2;\ 4^2)$, $(2^1 3^2 6^1;\ 4^2)$, $(6^4;\ 2^1 6^1)$, $(1^2 6^2;\ 2^1 6^1)$, $(2^2 3^2;\ 2^1 6^1)$, $(2^2 6^2;\ 2^1 6^1)$, $(3^2 6^2;\ 2^1 6^1)$, $(1^1 2^1 3^1 6^1;\ 2^1 6^1)$, $(1^1 3^1;\ 4^4)$, $(2^1 6^1;\ 4^4)$, $(1^2;\ 2^1 4^2 6^1)$, $(3^2;\ 2^1 4^2 6^1)$, $(2^2;\ 1^1 2^2 3^1)$, $(2^2;\ 2^1 4^2 6^1)$, $(6^2;\ 1^1 2^2 3^1)$, $(6^2;\ 1^1 3^1 6^2)$, $(6^2;\ 2^1 4^2 6^1)$, $(1^1 2^1;\ 3^2 4^1 6^1)$, $(3^1 6^1;\ 3^2 4^1 6^1)$, $(1^1 6^1;\ 1^2 2^1 4^1)$, $(2^1 3^1;\ 1^2 2^1 4^1)$, $(2^1 6^1;\ 2^4)$, $(2^1 6^1;\ 6^4)$, $(2^1 6^1;\ 1^2 3^2)$, $(2^1 6^1;\ 2^2 6^2)$ $(1^2 6^1;\ 2^2 4^1)$, $(2^2 6^1;\ 2^2 4^1)$, $(3^2 6^1;\ 2^2 4^1)$, $(6^3;\ 2^2 4^1)$, $(1^1 2^1 3^1;\ 2^2 4^1)$, $(1^1 2^2;\ 1^2 6^1)$, $(2^1 3^1 6^1;\ 1^2 6^1)$, $(1^1 6^2;\ 1^2 6^1)$, $(2^2 3^1;\ 2^1 3^2)$, $(1^1 2^1 6^1;\ 2^1 3^2)$, $(3^1 6^2;\ 2^1 3^2)$, $(1^2 6^1;\ 4^1 6^2)$, $(2^2 6^1;\ 4^1 6^2)$, $(3^2 6^1;\ 4^1 6^2)$, $(6^3;\ 4^1 6^2)$, $(1^1 2^1 3^1;\ 4^1 6^2)$, $(1^2 2^1;\ 1^1 3^1 4^1)$, $(2^3;\ 1^1 3^1 4^1)$, $(1^1 3^1 6^1;\ 1^1 3^1 4^1)$, $(2^1 3^2;\ 1^1 3^1 4^1)$, $(2^1 6^2;\ 1^1 3^1 4^1)$	$(8^1;\ 1^1 3^1;\ 2^1 6^1)$, $(1^1;\ 2^1 6^1;\ 2^1 6^1)$, $(2^1;\ 2^1 6^1;\ 2^1 6^1)$, $(4^1;\ 2^1 6^1;\ 2^1 6^1)$, $(8^1;\ 2^1 6^1;\ 2^1 6^1)$, $(1^1;\ 1^2;\ 4^2)$, $(2^1;\ 1^2;\ 4^2)$, $(4^1;\ 1^2;\ 4^2)$, $(8^1;\ 1^2;\ 4^2)$, $(1^1;\ 2^2;\ 4^2)$, $(2^1;\ 2^2;\ 4^2)$, $(4^1;\ 2^2;\ 4^2)$, $(8^1;\ 2^2;\ 4^2)$, $(1^1;\ 3^2;\ 4^2)$, $(2^1;\ 3^2;\ 4^2)$, $(4^1;\ 3^2;\ 4^2)$, $(8^1;\ 3^2;\ 4^2)$, $(1^1;\ 6^2;\ 4^2)$, $(2^1;\ 6^2;\ 4^2)$, $(4^1;\ 6^2;\ 4^2)$, $(8^1;\ 6^2;\ 4^2)$ $(1^1;\ 2^1;\ 2^2 4^1)$, $(2^1;\ 2^1;\ 2^2 4^1)$, $(4^1;\ 2^1;\ 2^2 4^1)$, $(8^1;\ 2^1;\ 2^2 4^1)$, $(1^1;\ 2^1;\ 4^1 6^2)$, $(2^1;\ 2^1;\ 4^1 6^2)$, $(4^1;\ 2^1;\ 4^1 6^2)$, $(8^1;\ 2^1;\ 4^1 6^2)$, $(1^1;\ 6^1;\ 1^1 3^1 4^1)$, $(2^1;\ 6^1;\ 1^1 3^1 4^1)$, $(4^1;\ 6^1;\ 1^1 3^1 4^1)$, $(8^1;\ 6^1;\ 1^1 3^1 4^1)$, $(8^1;\ 1^1;\ 2^1 3^2)$, $(8^1;\ 3^1;\ 1^2 6^1)$
$M_3(24,\chi_{-4})$	$(3^4;\ 4^2)$, $(1^2 3^2;\ 4^2)$, $(6^4;\ 4^2)$, $(1^2 6^2;\ 4^2)$, $(2^2 3^2;4^2)$, $(2^2 6^2;4^2)$, $(3^2 6^2;\ 4^2)$, $(1^1 2^1 3^1 6^1;\ 4^2)$, $(2^3 6^1;\ 2^1 6^1)$, $(2^1 6^3;2^1 6^1)$, $(1^1 2^2 3^1;\ 2^1 6^1)$, $(1^2 2^1 6^1;\ 2^1 6^1)$, $(1^1 3^1 6^2;\ 2^1 6^1)$, $(2^1 3^2 6^1;2^1 6^1)$, $(3^1 6^1;\ 1^2 2^1 4^1)$, $(3^2;\ 4^4)$, $(1^1 6^1;\ 3^2 4^1 6^1)$, $(2^1 3^1;\ 3^2 4^1 6^1)$, $(1^1 3^1;2^1 4^2 6^1)$, $(2^1 6^1;\ 1^1 2^2 3^1)$, $(2^1 6^1;\ 1^1 3^1 6^2)$, $(2^1 6^1;2^1 4^2 6^1)$, $(6^2;2^4)$, $(6^2;4^4)$, $(6^2;\ 6^4)$, $(6^2;\ 1^2 3^2)$, $(6^2;\ 2^2 6^2)$, $(2^2;\ 6^4)$, $(2^2;\ 1^2 3^2)$, $(2^2;2^2 6^2)$ $(1^1 3^1 6^1;\ 2^2 4^1)$, $(2^1 3^2;\ 2^2 4^1)$, $(2^1 6^2;2^2 4^1)$, $(2^2 3^1;\ 1^2 6^1)$, $(1^1 2^1 6^1;\ 1^2 6^1)$, $(3^1 6^2;\ 1^2 6^1)$, $(1^1 2^2;2^1 3^2)$, $(2^1 3^1 6^1;2^1 3^2)$, $(1^1 6^2;\ 2^1 3^2)$, $(1^2 2^1;\ 4^1 6^2)$, $(2^3;\ 4^1 6^2)$, $(1^1 3^1 6^1;4^1 6^2)$, $(2^1 3^2;\ 4^1 6^2)$, $(2^1 6^2;4^1 6^2)$, $(1^2 6^1;1^1 3^1 4^1)$, $(2^2 6^1;\ 1^1 3^1 4^1)$, $(3^2 6^1;\ 1^1 3^1 4^1)$, $(6^3;\ 1^1 3^1 4^1)$, $(1^1 2^1 3^1;1^1 3^1 4^1)$	$(8^1;1^2;2^1 6^1)$, $(8^1;\ 3^2;\ 2^1 6^1)$, $(1^1;\ 2^2;\ 2^1 6^1)$, $(2^1;\ 2^2;\ 2^1 6^1)$, $(4^1;2^2;2^1 6^1)$, $(8^1;\ 2^2;\ 2^1 6^1)$, $(1^1;\ 6^2;\ 2^1 6^1)$, $(2^1;\ 6^2;\ 2^1 6^1)$, $(4^1;6^2;2^1 6^1)$, $(8^1;\ 6^2;\ 2^1 6^1)$, $(1^1;\ 1^1 3^1;\ 4^2)$, $(2^1;\ 1^1 3^1;\ 4^2)$, $(4^1;1^1 3^1;\ 4^2)$, $(8^1;\ 1^1 3^1;\ 4^2)$, $(1^1;\ 2^1 6^1;\ 4^2)$, $(2^1;2^1 6^1;\ 4^2)$, $(4^1;\ 2^1 6^1;\ 4^2)$, $(8^1;\ 2^1 6^1;\ 4^2)$ $(1^1;6^1;2^2 4^1)$, $(2^1;\ 6^1;\ 2^2 4^1)$, $(4^1;\ 6^1;\ 2^2 4^1)$, $(8^1;\ 6^1;\ 2^2 4^1)$, $(1^1;6^1;4^1 6^2)$, $(2^1;\ 6^1;\ 4^1 6^2)$, $(4^1;\ 6^1;\ 4^1 6^2)$, $(8^1;\ 6^1;\ 4^1 6^2)$, $(1^1;2^1;1^1 3^1 4^1)$, $(2^1;\ 2^1;\ 1^1 3^1 4^1)$, $(4^1;\ 2^1;\ 1^1 3^1 4^1)$, $(8^1;2^1;1^1 3^1 4^1)$, $(8^1;\ 1^1;\ 1^2 6^1)$, $(8^1;\ 3^1;\ 2^1 3^2)$

下页续

空间	**Form**	
	$\mathcal{M}_{s,\ t}$:$(1^{i_1}2^{i_2}3^{i_3}6^{i_4};\ \ 1^{e_1}2^{e_2}3^{e_3}4^{e_4}6^{e_5})$	$\mathcal{M}$: $(1^{i_1}2^{i_2}4^{i_3}8^{i_4};\ 1^{j_1}2^{j_2}3^{j_3}6^{j_4};\ 1^{e_1}2^{e_2}3^{e_3}4^{e_4}6^{e_5})$
$M_3(24,\chi_{-8})$	$(3^36^1;\ 4^2)$, $(3^16^3;\ 4^2)$, $(1^12^13^2;4^2)$, $(1^12^16^2;\ 4^2)$, $(1^23^16^1;\ 4^2)$, $(2^23^16^1;\ 4^2)$, $(1^36^1;\ 2^16^1)$, $(1^16^3;\ 2^16^1)$, $(2^33^1;2^16^1)$, $(2^13^3;2^16^1)$, $(1^22^13^1;\ 2^16^1)$, $(1^12^26^1;\ 2^16^1)$, $(1^13^26^1;2^16^1)$, $(2^13^16^2;2^16^1)$, $(1^13^1;\ 3^24^16^1)$, $(2^16^1;\ 3^24^16^1)$, $(1^16^1;1^12^23^1)$, $(1^16^1;\ 1^13^16^2)$, $(1^16^1;\ 2^14^26^1)$, $(2^13^1;\ 1^12^23^1)$, $(2^13^1;1^13^16^2)$, $(2^13^1;\ 2^14^26^1)$, $(3^2;\ 1^22^14^1)$, $(6^2;\ 1^22^14^1)$, $(3^16^1;\ 2^4)$, $(3^16^1;\ 4^4)$, $(3^16^1;6^4)$, $(3^16^1;\ 1^23^2)$, $(3^16^1;2^26^2)$, $(1^12^1;6^4)$, $(1^12^1;\ 1^23^2)$, $(1^12^1;\ 2^26^2)$ $(1^13^2;\ 2^24^1)$, $(2^13^16^1;\ 2^24^1)$, $(1^16^2;2^24^1)$, $(1^26^1;\ 1^26^1)$, $(2^26^1;\ 1^26^1)$, $(3^26^1;\ 1^26^1)$, $(6^3;\ 1^26^1)$, $(1^12^13^1;\ 1^26^1)$, $(1^22^1;\ 2^13^2)$, $(2^3;\ 2^13^2)$, $(1^13^16^1;\ 2^13^2)$, $(2^13^2;2^13^2)$, $(2^16^2;\ 2^13^2)$, $(1^3;\ 4^16^2)$, $(1^12^2;4^16^2)$, $(1^13^2;\ 4^16^2)$, $(2^13^16^1;\ 4^16^2)$, $(1^16^2;\ 4^16^2)$, $(1^23^1;1^13^14^1)$, $(3^3;\ 1^13^14^1)$, $(2^23^1;\ 1^13^14^1)$, $(1^12^16^1;\ 1^13^14^1)$, $(3^16^2;1^13^14^1)$	$(1^1;1^16^1;\ 4^2)$, $(2^1;\ 1^16^1;\ 4^2)$, $(4^1;\ 1^16^1;\ 4^2)$, $(8^1;\ 1^16^1;\ 4^2)$, $(1^1;2^13^1;\ 4^2)$, $(2^1;\ 2^13^1;\ 4^2)$, $(4^1;\ 2^13^1;\ 4^2)$, $(8^1;\ 2^13^1;\ 4^2)$, $(1^1;1^12^1;\ 2^16^1)$, $(2^1;\ 1^12^1;\ 2^16^1)$, $(4^1;\ 1^12^1;\ 2^16^1)$, $(8^1;1^12^1;\ 2^16^1)$, $(1^1;\ 3^16^1;\ 2^16^1)$, $(2^1;\ 3^16^1;\ 2^16^1)$, $(4^1;3^16^1;\ 2^16^1)$, $(8^1;\ 3^16^1;\ 2^16^1)$ $(1^1;3^1;2^24^1)$, $(2^1;\ 3^1;\ 2^24^1)$, $(4^1;\ 3^1;\ 2^24^1)$, $(8^1;\ 3^1;\ 2^24^1)$, $(1^1;2^1;1^26^1)$, $(2^1;\ 2^1;\ 1^26^1)$, $(4^1;\ 2^1;\ 1^26^1)$, $(8^1;\ 2^1;\ 1^26^1)$, $(1^1;6^1;2^13^2)$, $(2^1;\ 6^1;\ 2^13^2)$, $(4^1;\ 6^1;\ 2^13^2)$, $(8^1;\ 6^1;\ 2^13^2)$, $(1^1;3^1;4^16^2)$, $(2^1;\ 3^1;\ 4^16^2)$, $(4^1;\ 3^1;\ 4^16^2)$, $(8^1;\ 3^1;\ 4^16^2)$, $(1^1;1^1;1^13^14^1)$, $(2^1;\ 1^1;\ 1^13^14^1)$, $(4^1;\ 1^1;\ 1^13^14^1)$, $(8^1;\ 1^1;\ 1^13^14^1)$
$M_3(24,\chi_{-24})$	$(1^36^1;\ 4^2)$, $(1^16^3;\ 4^2)$, $(2^33^1;4^2)$, $(2^13^3;\ 4^2)$, $(1^22^13^1;\ 4^2)$, $(1^12^26^1;\ 4^2)$, $(1^13^26^1;\ 4^2)$, $(2^13^16^2;4^2)$, $(3^36^1;2^16^1)$, $(3^16^3;2^16^1)$, $(1^12^13^2;\ 2^16^1)$, $(1^12^16^2;\ 2^16^1)$, $(1^23^16^1;2^16^1)$, $(2^23^16^1;2^16^1)$, $(1^2;\ 3^24^16^1)$, $(2^2;\ 3^24^16^1)$, $(3^2;3^24^16^1)$, $(3^2;\ 3^24^16^1)$, $(6^2;\ 3^24^16^1)$, $(1^12^1;\ 1^12^23^1)$, $(1^12^1;\ 1^13^16^2)$, $(1^12^1;2^14^26^1)$, $(3^16^1;\ 1^12^23^1)$, $(3^16^1;\ 1^13^16^2)$, $(3^16^1;\ 2^14^26^1)$, $(1^13^1;1^12^14^1)$, $(2^16^1;\ 1^22^14^1)$, $(1^16^1;\ 2^4)$, $(1^16^1;\ 4^4)$, $(1^16^1;6^4)$, $(1^16^1;\ 1^23^2)$, $(1^16^1;\ 2^26^2)$, $(2^13^1;\ 2^4)$, $(2^13^1;\ 4^4)$, $(2^13^1;6^4)$, $(2^13^1;\ 1^23^2)$, $(2^13^1;\ 2^26^2)$ $(1^23^1;\ 2^24^1)$, $(3^3;\ 2^24^1)$, $(2^23^1;\ 2^24^1)$, $(1^12^16^1;2^24^1)$, $(3^16^2;2^24^1)$, $(1^22^1;\ 1^26^1)$、$(2^3;\ 1^26^1)$、$(1^13^16^1;\ 1^26^1)$、$(2^13^2;\ 1^26^1)$、$(2^16^2;1^26^1)$、 $(1^26^1;\ 2^13^2)$, $(2^26^1;\ 2^13^2)$, $(3^26^1;\ 2^13^2)$, $(6^3;\ 2^13^2)$, $(1^12^13^1;2^13^2)$, $(1^23^1;\ 4^16^2)$, $(3^3;\ 4^16^2)$, $(2^23^1;\ 4^16^2)$, $(1^12^16^1;4^16^2)$, $(3^16^2;4^16^2)$, $(1^3;\ 1^13^14^1)$, $(1^12^2;\ 1^13^14^1)$, $(1^13^2;1^13^14^1)$, $(2^13^16^1;\ 1^13^14^1)$, $(1^16^2;\ 1^13^14^1)$	$(1^1;1^12^1;\ 4^2)$, $(2^1;\ 1^12^1;\ 4^2)$, $(4^1;\ 1^12^1;\ 4^2)$, $(8^1;\ 1^12^1;\ 4^2)$, $(1^1;3^16^1;\ 4^2)$, $(2^1;\ 3^16^1;\ 4^2)$, $(4^1;\ 3^16^1;\ 4^2)$, $(8^1;\ 3^16^1;\ 4^2)$, $(1^1;1^16^1;\ 2^16^1)$, $(2^1;\ 1^16^1;\ 2^16^1)$, $(4^1;\ 1^16^1;\ 2^16^1)$, $(8^1;1^16^1;\ 2^16^1)$, $(1^1;\ 2^13^1;\ 2^16^1)$, $(2^1;\ 2^13^1;\ 2^16^1)$, $(4^1;2^13^1;\ 2^16^1)$, $(8^1;\ 2^13^1;\ 2^16^1)$ $(1^1;1^1;2^24^1)$, $(2^1;\ 1^1;\ 2^24^1)$, $(4^1;\ 1^1;\ 2^24^1)$, $(8^1;\ 1^1;\ 2^24^1)$, $(1^1;6^1;1^26^1)$, $(2^1;\ 6^1;\ 1^26^1)$, $(4^1;\ 6^1;\ 1^26^1)$, $(8^1;\ 6^1;\ 1^26^1)$, $(1^1;2^1;2^13^2)$, $(2^1;\ 2^1;\ 2^13^2)$, $(4^1;\ 2^1;\ 2^13^2)$, $(8^1;\ 2^1;\ 2^13^2)$, $(1^1;1^1;4^16^2)$, $(2^1;\ 1^1;\ 4^16^2)$, $(4^1;\ 1^1;\ 4^16^2)$, $(8^1;\ 1^1;\ 4^16^2)$, $(1^1;3^1;1^13^14^1)$, $(2^1;\ 3^1;\ 1^13^14^1)$, $(4^1;\ 3^1;\ 1^13^14^1)$, $(8^1;\ 3^1;\ 1^13^14^1)$

表2(C)。高阶图形数（当 $a=4$ 时）

空间	形式 $\phi_4^{(1^a,2^{\ b}3^c,6^{\ d})}$
$M_3(24,\chi_{-3})$	$(1^5,2^0,3^1,6^0)$, $(1^2,2^1,3^2,6^1)$, $(1^1,2^0,3^5,6^0)$, $(1^0,2^5,3^0,6^1)$, $(1^0,2^3,3^0,6^3)$, $(1^0,2^1,3^0,6^5)$
$M_3(24,\chi_{-4})$	$(1^4,2^2,3^0,6^0)$, $(1^4,2^0,3^0,6^2)$, $(1^1,2^3,3^1,6^1)$, $(1^1,2^1,3^1,6^3)$, $(1^0,2^2,3^4,6^0)$, $(1^0,2^0,3^4,6^2)$
$M_4(24,\chi_0)$	$(1^8,2^0,3^0,6^0)$, $(1^5,2^1,3^1,6^1)$, $(1^4,2^0,3^4,6^0)$, $(1^2,2^4,3^2,6^0)$, $(1^2,2^2,3^2,6^2)$, $(1^2,2^0,3^2,6^4)$, $(1^1,2^1,3^5,6^1)$, $(1^0,2^8,3^0,6^0)$, $(1^0,2^6,3^0,6^2)$, $(1^0,2^4,3^0,6^4)$, $(1^0,2^2,3^0,6^6)$, $(1^0,2^0,3^8,6^0)$
$M_4(24,\chi_{12})$	$(1^4,2^3,3^0,6^1)$, $(1^4,2^1,3^0,6^3)$, $(1^3,2^2,3^3,6^0)$, $(1^3,2^0,3^3,6^2)$, $(1^1,2^6,3^1,6^0)$, $(1^1,2^4,3^1,6^2)$, $(1^1,2^2,3^1,6^4)$, $(1^1,2^0,3^1,6^6)$, $(1^0,2^3,3^4,6^1)$, $(1^0,2^1,3^4,6^3)$
$M_5(24,\chi_{-3})$	$(1^8,2^1,3^0,6^1)$, $(1^7,2^0,3^3,6^0)$, $(1^5,2^4,3^1,6^0)$, $(1^5,2^2,3^1,6^2)$, $(1^5,2^0,3^1,6^4)$, $(1^4,2^1,3^4,6^1)$, $(1^3,2^0,3^7,6^0)$, $(1^2,2^5,3^2,6^1)$, $(1^2,2^3,3^2,6^3)$, $(1^2,2^1,3^2,6^5)$, $(1^1,2^4,3^5,6^0)$, $(1^1,2^2,3^5,6^2)$, $(1^1,2^0,3^5,6^4)$, $(1^0,2^9,3^0,6^1)$, $(1^0,2^7,3^0,6^3)$, $(1^0,2^5,3^0,6^5)$, $(1^0,2^3,3^0,6^7)$, $(1^0,2^1,3^8,6^1)$, $(1^0,2^1,3^0,6^9)$
$M_5(24,\chi_{-4})$	$(1^6,2^2,3^2,6^0)$, $(1^6,2^0,3^2,6^2)$, $(1^4,2^6,3^0,6^0)$, $(1^4,2^4,3^0,6^2)$, $(1^4,2^2,3^0,6^4)$, $(1^4,2^0,3^0,6^6)$, $(1^3,2^3,3^3,6^1)$, $(1^3,2^1,3^3,6^3)$, $(1^2,2^2,3^6,6^0)$, $(1^2,2^0,3^6,6^2)$, $(1^1,2^7,3^1,6^1)$, $(1^1,2^5,3^1,6^3)$, $(1^1,2^3,3^1,6^5)$, $(1^1,2^1,3^1,6^7)$, $(1^0,2^6,3^4,6^0)$, $(1^0,2^4,3^4,6^2)$, $(1^0,2^2,3^4,6^4)$, $(1^0,2^0,3^4,6^6)$

APPENDIX-III

如 §4.1 所述，为了获得表1和表2中所列形式对应的公式 (32) 所给出的显式公式，我们使用以下各表。这些表（表3至表14）列出了公式 (32) 中出现的所需系数“t_i”。

5.1. 表格形式（4个变量）：我们在下表中给出表示数的示例公式。

表3：由 $M_2(12, \chi_0)$ 中的形式表示正整数的表示数示例公式

表示数	线性张成系数					
	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^1 3^1;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	$-\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	0	$-\frac{1}{8}$	0
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^1;\ 2^1 3^2;\ n-1)$	$-\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	0	$-\frac{1}{8}$	0
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (3^1;\ 1^2 6^1;\ n-1)$	$-\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	0	$-\frac{1}{8}$	0
$\mathcal{N}_{l,\ t}\ (1^1;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	$-\frac{1}{24}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{2}$
$\mathcal{N}_{l,\ t}\ (2^1;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	$-\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{12}$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{4}$
$\mathcal{N}_{l,\ t}\ (4^1;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	$-\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$

表 4：形式 $M_2(12, \chi_{12})$ 表示正整数的表示数示例公式

表示数	线性张成系数			
	t_1	t_2	t_3	t_4
$\delta_4(1^1 2^2 3^1; n-1)$	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	0
$\delta_4(1^1 3^1 6^2; n-2)$	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^2;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (3^2;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (3^1;\ 2^1 3^2;\ n-1)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^1;\ 1^2 6^1;\ n-1)$	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

表5：正整数由 $M_2(24, \chi_0)$ 中的形式表示时的表示数示例公式

表示数	线性张成系数								
	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (3^2;\ 4^2;\ n-1)$	$-\frac{1}{48}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$-\frac{5}{24}$	$-\frac{3}{16}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{8}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (6^2;\ 4^2;\ n-1)$	$-\frac{1}{48}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{24}$	$-\frac{3}{16}$	0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{2}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^1 6^1;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	$-\frac{1}{48}$	$\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{24}$	$\frac{3}{16}$	0	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{2}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^1;\ 4^1 6^2;\ n-2)$	0	$-\frac{1}{24}$	0	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	0	$-\frac{1}{8}$	0	0
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (6^1;\ 1^1 3^1 4^1;\ n-1)$	$-\frac{1}{48}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{16}$	0	$-\frac{1}{16}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$
$\mathcal{N}_{l,\ t}\ (8^1;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	$-\frac{1}{96}$	$\frac{1}{32}$	$-\frac{1}{32}$	$-\frac{1}{48}$	$\frac{3}{32}$	0	$-\frac{1}{16}$	0	$\frac{3}{4}$

表6：形式 $M_2(24,\chi_8)$ 表示正整数的表示数示例公式

表示数	线性张成系数					
	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (3^1 6^1;\ 4^2;\ n-1)$	0	0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^1 6^1;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	0	0	$\frac{4}{5}$	$-\frac{6}{5}$	$\frac{4}{5}$	$-\frac{3}{5}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^1 3^1;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	0	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^1;\ 4^1 6^2;\ n-2)$	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (3^1;\ 1^1 3^1 4^1;\ n-1)$	0	0	$\frac{4}{5}$	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^1;\ 2^1 3^2;\ n-1)$	0	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (6^1;\ 1^2 6^1;\ n-1)$	0	0	$\frac{4}{5}$	$-\frac{6}{5}$	$\frac{4}{5}$	$-\frac{3}{5}$

表7：形式 $M_2(24,\chi_{12})$ 表示正整数的表示数的示例公式

表示数	线性张成系数							
	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^1 3^1;\ 4^2;\ n-1)$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^1 6^1;\ 4^2;\ n-1)$	0	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^2;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	0	0	$\frac{3}{2}$	-3	$-\frac{1}{2}$	-1	0	0
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (6^2;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	0	0	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	1	0	0
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^1;\ 1^1 3^1 4^1;\ n-1)$	0	0	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	0	0
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (6^1;\ 2^2 4^1;\ n-1)$	0	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (6^1;\ 4^1 6^2;\ n-2)$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0
$\mathcal{N}_{l,\ t}\ (1^1;\ 4^2;\ n-1)$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	3	$-\frac{1}{4}$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$
$\mathcal{N}_{l,\ t}\ (2^1;\ 4^2;\ n-1)$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	-3	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$
$\mathcal{N}_{l,\ t}\ (4^1;\ 4^2;\ n-1)$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$
$\mathcal{N}_{l,\ t}\ (8^1;\ 4^2;\ n-1)$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$

表8：形式 $M_2(24,\chi_{24})$ 表示正整数的示例公式

表示数	线性张成系数					
	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6
$\delta_4(3^2 4^1 6^1; n-2)$	0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{3}$	0
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^1 6^1;\ 4^2;\ n-1)$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$	0	2	$\frac{2}{3}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^1 3^1;\ 4^2;\ n-1)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{1}{3}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^1 2^1;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	0	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (3^1 6^1;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^1;\ 1^1 3^1 4^1;\ n-1)$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^1;\ 1^2 6^1;\ n-1)$	0	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (3^1;\ 4^1 6^2;\ n-2)$	0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{3}$	0

下页续...

表8：线性张成系数。（续.....）

表示数	线性张成系数					
	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (3^1;\ 2^24^1;\ n-1)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{1}{3}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (6^1;\ 2^13^2;\ n-1)$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

5.2. 表格形式（6个变量）。这里，我们给出用具有某个特征的层 12、权3形式表示正整数的表示数公式。

表9：用 $M_3(12, \chi_{-3})$ 中的形式表示正整数的表示数示例公式

表示数	线性张成系数						
	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7
$\delta_6(1^22^13^26^1; n-2)$	$\frac{-1}{16}$	$\frac{1}{16}$	0	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	0	$\frac{-1}{8}$
$\delta_6(2^56^1; n-2)$	0	$\frac{-1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	0
$\delta_6(2^16^5; n-4)$	0	$\frac{-1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0
$\delta_6(2^36^3; n-3)$	$\frac{-1}{32}$	$\frac{-3}{32}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{-9}{32}$	$\frac{-3}{8}$	$\frac{-1}{16}$
$\mathcal{N}_{l,\ t}\ (1^2;\ 2^16^1;\ n-1)$	$\frac{-5}{4}$	$\frac{-3}{4}$	2	$\frac{15}{4}$	$\frac{-9}{4}$	-6	$\frac{-3}{2}$
$\mathcal{N}_{l,\ t}\ (1^12^1;\ 2^16^1;\ n-1)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{-9}{4}$	2	$\frac{3}{4}$	$\frac{27}{4}$	6	0
$\mathcal{N}_{l,\ t}\ (1^14^1;\ 2^16^1;\ n-1)$	$\frac{-1}{8}$	$\frac{9}{8}$	-1	$\frac{3}{8}$	$\frac{27}{8}$	3	$\frac{3}{4}$
$\mathcal{N}_{l,\ t}\ (2^2;\ 2^16^1;\ n-1)$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-3}{2}$	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{-9}{2}$	-6	0
$\mathcal{N}_{l,\ t}\ (2^14^1;\ 2^16^1;\ n-1)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	-1	$\frac{3}{4}$	$\frac{-9}{4}$	-3	0
$\mathcal{N}_{l,\ t}\ (4^2;\ 2^16^1;\ n-1)$	$\frac{-1}{8}$	$\frac{-3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{-9}{8}$	$\frac{-3}{2}$	$\frac{3}{4}$
$\mathcal{N}_{l,\ t}\ (1^1;\ 2^4;\ n-1)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{-9}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{81}{16}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{3}{8}$
$\mathcal{N}_{l,\ t}\ (2^1;\ 2^26^2;\ n-2)$	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	0
$\mathcal{N}_{l,\ t}\ (4^1;\ 6^4;\ n-3)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{-1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{-3}{16}$	$\frac{-1}{4}$	$\frac{-1}{8}$
$\mathcal{N}_{l,\ t}\ (4^1;\ 1^23^2;\ n-1)$	$\frac{-1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{3}{4}$
$\mathcal{N}(1^1;\ 1^13^1;\ 2^16^1;\ n-1)$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	0
$\mathcal{N}(2^1;\ 1^13^1;\ 2^16^1;\ n-1)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{-1}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	0
$\mathcal{N}(4^1;\ 1^13^1;\ 2^16^1;\ n-1)$	$\frac{-1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{3}{4}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^4;\ 2^16^1;\ n-1)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{-1}{4}$	0	$\frac{9}{4}$	$\frac{9}{4}$	0	$\frac{-3}{2}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^23^2;\ 2^16^1;\ n-1)$	$\frac{-1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{2}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (3^4;\ 2^16^1;\ n-1)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{-1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^2;\ 1^12^13^1;\ n-1)$	$\frac{-1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	0	0
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^2;\ 1^13^16^2;\ n-2)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{-1}{8}$	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{-1}{2}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (3^2;\ 1^12^13^1;\ n-1)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{-1}{8}$	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{1}{2}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (3^2;\ 1^13^16^2;\ n-2)$	$\frac{-1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^13^1;\ 2^4;\ n-1)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{-1}{16}$	0	$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{16}$	0	$\frac{3}{8}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^13^1;\ 6^4;\ n-3)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{-1}{16}$	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	0	$\frac{-1}{8}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^13^1;\ 1^23^2;\ n-1)$	$\frac{-1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{2}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^13^1;\ 2^26^2;\ n-2)$	$\frac{-1}{16}$	$\frac{1}{16}$	0	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	0	$\frac{-1}{8}$
$\mathcal{N}(1^1;\ 1^1;\ 2^13^2;\ n-1)$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	0
下页续.. .							

表9：线性张成系数。（续……）

表示数	线性张成系数						
	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7
$\mathcal{N}(2^1;\ 1^1;\ 2^1 3^2;\ n-1)$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	0
$\mathcal{N}(4^1;\ 1^1;\ 2^1 3^2;\ n-1)$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{3}{4}$
$\mathcal{N}(1^1;\ 3^1;\ 1^2 6^1;\ n-1)$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	0
$\mathcal{N}(2^1;\ 3^1;\ 1^2 6^1;\ n-1)$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	0
$\mathcal{N}(4^1;\ 3^1;\ 1^2 6^1;\ n-1)$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{3}{4}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^3;\ 1^2 6^1;\ n-1)$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{9}{4}$	$\frac{9}{4}$	0	$-\frac{3}{2}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^1 3^2;\ 1^2 6^1;\ n-1)$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{2}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^2 3^1;\ 2^1 3^2;\ n-1)$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{2}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (3^3;\ 2^1 3^2;\ n-1)$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$

表10：形式 $M_3(12, \chi_{-4})$ 表示正整数的表示数示例公式

表示数	线性张成系数					
	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6
$\delta_6(1^4 6^2; n-2)$	0	0	$\frac{2}{7}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{-2}{7}$	$\frac{-9}{7}$
$\delta_6(1^1 2^3 3^1 6^1; n-2)$	0	0	$\frac{5}{28}$	$\frac{-9}{28}$	$\frac{-5}{28}$	$\frac{-3}{7}$
$\delta_6(1^1 2^1 3^1 6^3; n-3)$	0	0	$\frac{1}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{-1}{28}$	$\frac{-2}{7}$
$\delta_6(2^2 3^4; n-2)$	0	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{-6}{7}$	$\frac{-1}{7}$	$\frac{-1}{7}$
$\delta_6(3^4 6^2; n-3)$	0	0	0	1	0	0
$\mathcal{N}_{l,\ t}\ (1^1;\ 1^1 2^2 3^1;\ n-1)$	0	0	$\frac{10}{7}$	$\frac{-18}{7}$	$\frac{-3}{7}$	$\frac{-3}{7}$
$\mathcal{N}_{l,\ t}\ (1^1;\ 1^1 3^1 6^2;\ n-2)$	0	0	$\frac{2}{7}$	$\frac{30}{7}$	$\frac{-2}{7}$	$\frac{-9}{7}$
$\mathcal{N}_{l,\ t}\ (2^1;\ 1^1 2^2 3^1;\ n-1)$	0	0	$\frac{4}{7}$	$\frac{18}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$
$\mathcal{N}_{l,\ t}\ (2^1;\ 1^1 3^1 6^2;\ n-2)$	0	0	$\frac{2}{7}$	$\frac{-12}{7}$	$\frac{-2}{7}$	$\frac{-9}{7}$
$\mathcal{N}_{l,\ t}\ (4^1;\ 1^1 2^2 3^1;\ n-1)$	0	0	$\frac{5}{14}$	$\frac{-9}{14}$	$\frac{9}{14}$	$\frac{15}{7}$
$\mathcal{N}_{l,\ t}\ (4^1;\ 1^1 3^1 6^2;\ n-2)$	0	0	$\frac{1}{14}$	$\frac{15}{14}$	$\frac{-1}{14}$	$\frac{3}{7}$
$\mathcal{N}(1^1;\ 1^2;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	0	0	$\frac{16}{7}$	$\frac{72}{7}$	$\frac{-9}{7}$	$\frac{-30}{7}$
$\mathcal{N}(2^1;\ 1^2;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	0	0	$\frac{10}{7}$	$\frac{-18}{7}$	$\frac{-3}{7}$	$\frac{-24}{7}$
$\mathcal{N}(4^1;\ 1^2;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	0	0	$\frac{4}{7}$	$\frac{18}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{24}{7}$
$\mathcal{N}(1^1;\ 3^2;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	0	0	$\frac{8}{7}$	$\frac{-48}{7}$	$\frac{-1}{7}$	$\frac{6}{7}$
$\mathcal{N}(2^1;\ 3^2;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	0	0	$\frac{2}{7}$	$\frac{30}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{12}{7}$
$\mathcal{N}(4^1;\ 3^2;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	0	0	$\frac{2}{7}$	$\frac{-12}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{12}{7}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^1 3^3;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	0	0	$\frac{4}{7}$	$\frac{-24}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{10}{7}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^3 3^1;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	0	0	$\frac{8}{7}$	$\frac{36}{7}$	$\frac{-1}{7}$	$\frac{6}{7}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^1 3^1;\ 1^1 2^2 3^1;\ n-1)$	0	0	$\frac{5}{7}$	$\frac{-9}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{9}{7}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^1 3^1;\ 1^1 3^1 6^2;\ n-2)$	0	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{15}{7}$	$\frac{-1}{7}$	$\frac{-1}{7}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^2;\ 6^4;\ n-3)$	0	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{-6}{7}$	$\frac{-1}{7}$	$\frac{-8}{7}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^2;\ 1^2 3^2;\ n-1)$	0	0	$\frac{8}{7}$	$\frac{36}{7}$	$\frac{-1}{7}$	$\frac{6}{7}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^2;\ 2^2 6^2;\ n-2)$	0	0	$\frac{2}{7}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{-2}{7}$	$\frac{-9}{7}$

下页续...

表10：线性张成系数（续.....）

表示数	线性张成系数					
	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (3^2;\ 2^4;\ n-1)$	0	0	$\frac{2}{7}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{12}{7}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (3^2;\ 6^4;\ n-3)$	0	0	0	1	0	0
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (3^2;\ 1^2 3^2;\ n-1)$	0	0	$\frac{4}{7}$	$\frac{-24}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{10}{7}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (3^2;\ 2^2 6^2;\ n-2)$	0	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{-6}{7}$	$\frac{-1}{7}$	$\frac{-1}{7}$
$\mathcal{N}(1^1;\ 1^1;\ 1^2 6^1;\ n-1)$	0	0	$\frac{16}{7}$	$\frac{72}{7}$	$-\frac{9}{7}$	$-\frac{30}{7}$
$\mathcal{N}(2^1;\ 1^1;\ 1^2 6^1;\ n-1)$	0	0	$\frac{10}{7}$	$-\frac{18}{7}$	$-\frac{3}{7}$	$-\frac{24}{7}$
$\mathcal{N}(4^1;\ 1^1;\ 1^2 6^1;\ n-1)$	0	0	$\frac{4}{7}$	$\frac{18}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{24}{7}$
$\mathcal{N}(1^1;\ 3^1;\ 2^1 3^2;\ n-1)$	0	0	$\frac{8}{7}$	$-\frac{48}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{6}{7}$
$\mathcal{N}(2^1;\ 3^1;\ 2^1 3^2;\ n-1)$	0	0	$\frac{2}{7}$	$\frac{30}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{12}{7}$
$\mathcal{N}(4^1;\ 3^1;\ 2^1 3^2;\ n-1)$	0	0	$\frac{2}{7}$	$-\frac{12}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{12}{7}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^2 3^1;\ 1^2 6^1;\ n-1)$	0	0	$\frac{8}{7}$	$\frac{36}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{6}{7}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (3^3;\ 1^2 6^1;\ n-1)$	0	0	$\frac{4}{7}$	$-\frac{24}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{10}{7}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^3;\ 2^1 3^2;\ n-1)$	0	0	$\frac{8}{7}$	$\frac{36}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{6}{7}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^1 3^2;\ 2^1 3^2;\ n-1)$	0	0	$\frac{4}{7}$	$-\frac{24}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{10}{7}$

表11： $M_3(24, \chi_{-3})$ 中各形式表示正整数的表示数示例公式

表示数	线性张成系数											
	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}	t_{11}	t_{12}
$\delta_6(1^1 3^1 4^2 6^2; n-3)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{-1}{64}$	0	0	$\frac{-3}{64}$	$\frac{-3}{64}$	$\frac{-3}{4}$	6	$\frac{-7}{32}$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$
$\delta_6(2^1 4^4 6^1; n-3)$	$\frac{1}{128}$	$\frac{3}{128}$	$\frac{-1}{32}$	0	$\frac{9}{128}$	$\frac{-27}{128}$	$\frac{-27}{32}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{-9}{64}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	0
$\delta_6(1^1 2^2 3^1 4^2; n-2)$	$\frac{-1}{64}$	$\frac{1}{64}$	0	0	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	0	0	$\frac{3}{32}$	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{-1}{2}$
$\mathcal{N}_{l,\ t}\ (1^1 8^1;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{-9}{16}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-15}{16}$	$\frac{9}{16}$	6	-36	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{-1}{2}$	2
$\mathcal{N}_{l,\ t}\ (2^1 8^1;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	$\frac{-1}{8}$	$\frac{-3}{8}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-15}{8}$	$\frac{-27}{8}$	-6	36	$\frac{-3}{2}$	$\frac{-3}{2}$	$\frac{1}{2}$	4
$\mathcal{N}_{l,\ t}\ (4^1 8^1;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{-1}{4}$	0	$\frac{-15}{16}$	$\frac{-27}{16}$	$\frac{15}{4}$	-36	$\frac{3}{8}$	-3	$\frac{-1}{2}$	2
$\mathcal{N}_{l,\ t}\ (8^1 8^1;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	$\frac{-1}{32}$	$\frac{-3}{32}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{-33}{32}$	$\frac{-45}{32}$	$\frac{-21}{8}$	18	$\frac{-3}{16}$	$\frac{-3}{4}$	$\frac{1}{4}$	2
$\mathcal{N}_{l,\ t}\ (8^1;\ 1^2 3^2;\ n-1)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{-1}{16}$	0	0	$\frac{-15}{16}$	$\frac{-15}{16}$	$\frac{9}{2}$	-36	$\frac{3}{8}$	$\frac{-3}{2}$	$\frac{-1}{2}$	2
$\mathcal{N}_{l,\ t}\ (8^1;\ 2^4;\ n-1)$	$\frac{-1}{32}$	$\frac{-3}{32}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{-45}{32}$	$\frac{-81}{32}$	$\frac{-9}{8}$	0	$\frac{-9}{16}$	$\frac{-9}{4}$	0	3
$\mathcal{N}_{l,\ t}\ (8^1;\ 2^2 6^2;\ n-2)$	0	$\frac{-1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	0	0	$\frac{3}{4}$	0	0
$\mathcal{N}_{l,\ t}\ (8^1;\ 6^4;\ n-3)$	$\frac{-1}{32}$	$\frac{-3}{32}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{-5}{32}$	$\frac{-9}{32}$	$\frac{-13}{8}$	12	$\frac{-5}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
$\mathcal{N}_{l,\ t}\ (1^1;\ 4^4;\ n-2)$	$\frac{3}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{-9}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{-9}{64}$	$\frac{-135}{16}$	$\frac{45}{2}$	$\frac{-27}{32}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{3}{8}$	0
$\mathcal{N}_{l,\ t}\ (2^1;\ 4^4;\ n-2)$	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{-9}{16}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{9}{16}$	$\frac{81}{16}$	$\frac{9}{2}$	0	$\frac{3}{8}$	0	0
$\mathcal{N}_{l,\ t}\ (4^1;\ 4^4;\ n-2)$	0	$\frac{-1}{8}$	$\frac{-3}{8}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{9}{8}$	$\frac{-27}{8}$	$\frac{-9}{2}$	0	0	0	0
$\mathcal{N}_{l,\ t}\ (8^1;\ 4^4;\ n-2)$	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{-1}{4}$	0	$\frac{9}{16}$	$\frac{-27}{16}$	$\frac{-9}{4}$	0	$\frac{3}{8}$	0	0
$\mathcal{N}(8^1;\ 1^1 3^1;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{-1}{16}$	0	0	$\frac{-15}{16}$	$\frac{-15}{16}$	$\frac{9}{2}$	-36	$\frac{3}{8}$	$\frac{-3}{2}$	$\frac{-1}{2}$	2
$\mathcal{N}(1^1;\ 2^1 6^1;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{-9}{8}$	1	0	$\frac{-3}{8}$	$\frac{21}{8}$	6	-24	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{-1}{3}$	$\frac{4}{3}$
$\mathcal{N}(2^1;\ 2^1 6^1;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	$\frac{-1}{4}$	$\frac{-3}{4}$	1	0	$\frac{-3}{4}$	$\frac{-15}{4}$	-6	24	-1	-1	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$
$\mathcal{N}(4^1;\ 2^1 6^1;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{-3}{8}$	$\frac{-15}{8}$	$\frac{3}{2}$	-24	$\frac{1}{4}$	-2	$\frac{-1}{3}$	$\frac{4}{3}$
$\mathcal{N}(8^1;\ 2^1 6^1;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	$\frac{-1}{16}$	$\frac{-3}{16}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{-21}{16}$	$\frac{-33}{16}$	$\frac{-15}{4}$	24	$\frac{-5}{8}$	-1	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$
$\mathcal{N}(1^1;\ 1^2;\ 4^2;\ n-1)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-7}{4}$	2	$\frac{9}{4}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{-117}{4}$	90	-3	$\frac{9}{2}$	$\frac{3}{2}$	0
$\mathcal{N}(2^1;\ 1^2;\ 4^2;\ n-1)$	$\frac{-1}{8}$	$\frac{-1}{8}$	$\frac{-7}{4}$	2	$\frac{9}{8}$	$\frac{-9}{8}$	$\frac{63}{4}$	18	0	$\frac{3}{2}$	0	0
$\mathcal{N}(4^1;\ 1^2;\ 4^2;\ n-1)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{-5}{16}$	$\frac{-7}{4}$	2	$\frac{9}{16}$	$\frac{45}{16}$	$\frac{-63}{4}$	-18	$\frac{3}{8}$	0	0	0
$\mathcal{N}(8^1;\ 1^2;\ 4^2;\ n-1)$	$\frac{-1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{7}{8}$	-1	$\frac{-45}{32}$	$\frac{-9}{32}$	$\frac{-63}{8}$	-9	$\frac{-9}{16}$	$\frac{-3}{4}$	0	3

下页续.....

表11：线性张成系数。（续.....）

表示数	线性张成系数											
	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}	t_{11}	t_{12}
$\mathcal{N}(1^1;\ 2^2;\ 4^2;\ n-1)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{-9}{16}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{9}{16}$	$\frac{81}{16}$	$\frac{9}{2}$	0	$\frac{3}{8}$	0	0	0
$\mathcal{N}(2^1;\ 2^2;\ 4^2;\ n-1)$	$\frac{-1}{8}$	$\frac{-3}{8}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{9}{8}$	$\frac{-27}{8}$	$\frac{-9}{2}$	0	0	0	0	0
$\mathcal{N}(4^1;\ 2^2;\ 4^2;\ n-1)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{-1}{4}$	0	$\frac{9}{16}$	$\frac{-27}{16}$	$\frac{-9}{4}$	0	$\frac{3}{8}$	0	0	0
$\mathcal{N}(8^1;\ 2^2;\ 4^2;\ n-1)$	$\frac{-1}{32}$	$\frac{-3}{32}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{-45}{32}$	$\frac{-81}{32}$	$\frac{-9}{8}$	0	$\frac{-9}{16}$	$\frac{-9}{4}$	0	3
$\mathcal{N}(1^1;\ 3^2;\ 4^2;\ n-1)$	$\frac{-1}{4}$	0	$\frac{-7}{4}$	2	$\frac{9}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{51}{4}$	-54	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{-5}{6}$	$\frac{-8}{3}$
$\mathcal{N}(2^1;\ 3^2;\ 4^2;\ n-1)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{-3}{8}$	$\frac{-7}{4}$	2	$\frac{-9}{8}$	$\frac{-3}{8}$	$\frac{-33}{4}$	18	-1	$\frac{-5}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$
$\mathcal{N}(4^1;\ 3^2;\ 4^2;\ n-1)$	$\frac{-1}{16}$	$\frac{-3}{16}$	$\frac{-7}{4}$	2	$\frac{-9}{16}$	$\frac{-21}{16}$	$\frac{33}{4}$	-18	$\frac{5}{8}$	-2	$\frac{-1}{3}$	$\frac{4}{3}$
$\mathcal{N}(8^1;\ 3^2;\ 4^2;\ n-1)$	$\frac{1}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{7}{8}$	-1	$\frac{-27}{32}$	$\frac{-39}{32}$	$\frac{33}{8}$	-9	$\frac{5}{16}$	$\frac{-7}{4}$	$\frac{-1}{6}$	$\frac{5}{3}$
$\mathcal{N}(1^1;\ 6^2;\ 4^2;\ n-1)$	$\frac{-1}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{-9}{16}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{9}{2}$	-24	$\frac{5}{8}$	1	$\frac{-1}{3}$	$\frac{4}{3}$
$\mathcal{N}(2^1;\ 6^2;\ 4^2;\ n-1)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{-9}{8}$	$\frac{-21}{8}$	$\frac{-9}{2}$	24	-1	-1	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$
$\mathcal{N}(4^1;\ 6^2;\ 4^2;\ n-1)$	$\frac{-1}{16}$	$\frac{-3}{16}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{-9}{16}$	$\frac{-21}{16}$	$\frac{9}{4}$	-24	$\frac{5}{8}$	-2	$\frac{-1}{3}$	$\frac{4}{3}$
$\mathcal{N}(8^1;\ 6^2;\ 4^2;\ n-1)$	$\frac{1}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{-1}{8}$	0	$\frac{-27}{32}$	$\frac{-39}{32}$	$\frac{9}{8}$	-12	$\frac{5}{16}$	$\frac{-7}{4}$	$\frac{-1}{6}$	$\frac{5}{3}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^3 6^1;\ \ 4^2;\ \ n-1)$	$\frac{-1}{16}$	$\frac{-3}{16}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{-9}{16}$	$\frac{-45}{16}$	$\frac{-9}{4}$	0	$\frac{-3}{8}$	$\frac{-3}{2}$	0	2
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^1 6^3;\ \ 4^2;\ \ n-1)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{-1}{4}$	0	$\frac{-15}{16}$	$\frac{-27}{16}$	$\frac{-3}{4}$	0	$\frac{-1}{8}$	$\frac{-3}{2}$	0	2
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^1 2^2 3^1;\ \ 4^2;\ \ n-1)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{-1}{16}$	0	0	$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{16}$	0	0	$\frac{3}{8}$	0	0	0
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^2 2^1 6^1;\ \ 4^2;\ \ n-1)$	$\frac{-1}{16}$	$\frac{1}{16}$	0	0	$\frac{-9}{16}$	$\frac{-9}{16}$	0	0	$\frac{-3}{8}$	0	0	2
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^1 3^1 6^2;\ \ 4^2;\ \ n-1)$	$\frac{-1}{16}$	$\frac{1}{16}$	0	0	$\frac{-9}{16}$	$\frac{-9}{16}$	3	-24	$\frac{5}{8}$	-1	$\frac{-1}{3}$	$\frac{4}{3}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^1 3^2 6^1;\ \ 4^2;\ \ n-1)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{-1}{16}$	0	0	$\frac{-15}{16}$	$\frac{-15}{16}$	0	0	$\frac{-1}{8}$	-2	0	2
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (6^4;\ \ 2^1 6^1;\ \ n-1)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{-7}{8}$	$\frac{-11}{8}$	$\frac{1}{2}$	-8	$\frac{1}{12}$	$\frac{-5}{3}$	$\frac{-1}{9}$	$\frac{16}{9}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^2 6^2;\ \ 2^1 6^1;\ \ n-1)$	$\frac{-1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{-9}{8}$	$\frac{-9}{8}$	-3	24	$\frac{-3}{4}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^2 3^2;\ \ 2^1 6^1;\ \ n-1)$	$\frac{-1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{-9}{8}$	$\frac{-9}{8}$	-3	24	$\frac{-3}{4}$	-3	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^2 6^2;\ \ 2^1 6^1;\ \ n-1)$	$\frac{-1}{8}$	$\frac{-3}{8}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-9}{8}$	$\frac{-21}{8}$	$\frac{-9}{2}$	24	$\frac{-3}{4}$	-1	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (3^2 6^2;\ \ 2^1 6^1;\ \ n-1)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{-1}{8}$	0	0	$\frac{-7}{8}$	$\frac{-7}{8}$	1	-8	$\frac{1}{12}$	$\frac{-5}{3}$	$\frac{-1}{9}$	$\frac{16}{9}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}(1^1 2^1 3^1 6^1;\ 2^1 6^1; n-1)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{-1}{8}$	0	0	$\frac{-3}{8}$	$\frac{-3}{8}$	3	-24	$\frac{1}{4}$	-1	$\frac{-1}{3}$	$\frac{4}{3}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^1 3^1;\ \ 4^4;\ \ n-2)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{-5}{64}$	$\frac{-7}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{45}{64}$	$\frac{-81}{16}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{-9}{32}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	0
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^1 6^1;\ \ 4^4;\ \ n-2)$	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{-1}{16}$	0	0	$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{16}$	0	0	$\frac{3}{8}$	0	0
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^2;\ \ 2^1 4^2 6^1;\ \ n-2)$	$\frac{1}{32}$	$\frac{-1}{32}$	0	0	$\frac{9}{32}$	$\frac{9}{32}$	$\frac{-9}{4}$	18	$\frac{-9}{16}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	0
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (3^2;\ \ 2^1 4^2 6^1;\ \ n-2)$	$\frac{-1}{32}$	$\frac{1}{32}$	0	0	$\frac{15}{32}$	$\frac{15}{32}$	$\frac{3}{4}$	-6	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{-1}{12}$	$\frac{-2}{3}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^2;\ \ 1^1 2^2 3^1;\ \ n-1)$	$\frac{-1}{16}$	$\frac{1}{16}$	0	0	$\frac{-9}{16}$	$\frac{-9}{16}$	0	0	$\frac{-3}{8}$	-3	0	2
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^2;\ \ 1^1 3^1 6^2;\ \ n-2)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{-1}{16}$	0	0	$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{16}$	3	-24	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{-1}{3}$	$\frac{-2}{3}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^2;\ \ 2^1 4^2 6^1;\ \ n-2)$	0	$\frac{-1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	0	0	0	0	0
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (6^2;\ \ 1^1 2^2 3^1;\ \ n-1)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{-1}{16}$	0	0	$\frac{-15}{16}$	$\frac{-15}{16}$	0	0	$\frac{-1}{8}$	-1	0	2
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (6^2;\ \ 1^1 3^1 6^2;\ \ n-2)$	$\frac{-1}{16}$	$\frac{1}{16}$	0	0	$\frac{-1}{16}$	$\frac{-1}{16}$	-1	8	$\frac{-5}{24}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (6^2;\ \ 2^1 4^2 6^1;\ \ n-2)$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{-1}{8}$	0	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^1 2^1;\ \ 3^2 4^1 6^1;\ \ n-2)$	$\frac{-1}{16}$	$\frac{1}{16}$	0	0	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	0	0	$\frac{-1}{8}$	0	0	0
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (3^1 6^1;\ \ 3^2 4^1 6^1;\ \ n-2)$	$\frac{-1}{16}$	$\frac{1}{16}$	0	0	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	1	-8	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-1}{9}$	$\frac{-2}{9}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^1 6^1;\ \ 1^2 2^1 4^1;\ \ n-1)$	$\frac{-1}{16}$	$\frac{1}{16}$	0	0	$\frac{-9}{16}$	$\frac{-9}{16}$	0	0	$\frac{-3}{8}$	0	0	2
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^1 3^1;\ \ 1^2 2^1 4^1;\ \ n-1)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{-1}{16}$	0	0	$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{16}$	0	0	$\frac{3}{8}$	0	0	0
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^1 6^1;\ \ 2^4;\ \ n-1)$	$\frac{-1}{16}$	$\frac{-3}{16}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{-9}{16}$	$\frac{-45}{16}$	$\frac{-9}{4}$	0	$\frac{-3}{8}$	$\frac{-3}{2}$	0	2
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^1 6^1;\ \ 6^4;\ \ n-3)$	$\frac{-1}{16}$	$\frac{-3}{16}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{-1}{16}$	$\frac{-5}{16}$	$\frac{-5}{4}$	8	$\frac{-5}{24}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^1 6^1;\ \ 1^2 3^2;\ \ n-1)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{-1}{8}$	0	0	$\frac{-3}{8}$	$\frac{-3}{8}$	3	-24	$\frac{1}{4}$	-1	$\frac{-1}{3}$	$\frac{4}{3}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^1 6^1;\ \ 2^2 6^2;\ \ n-2)$	0	$\frac{-1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0
$\mathcal{N}(1^1;\ 2^1;\ 2^2 4^1;\ n-1)$	$\frac{1}{16}$	$-\frac{9}{16}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{9}{16}$	$\frac{81}{16}$	$\frac{9}{2}$	0	$\frac{3}{8}$	0	0	0
$\mathcal{N}(2^1;\ 2^1;\ 2^2 4^1;\ n-1)$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{9}{8}$	$-\frac{27}{8}$	$-\frac{9}{2}$	0	0	0	0	0
$\mathcal{N}(4^1;\ 2^1;\ 2^2 4^1;\ n-1)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{9}{16}$	$-\frac{27}{16}$	$-\frac{9}{4}$	0	$\frac{3}{8}$	0	0	0
$\mathcal{N}(8^1;\ 2^1;\ 2^2 4^1;\ n-1)$	$-\frac{1}{32}$	$-\frac{3}{32}$	$\frac{1}{8}$	0	$-\frac{45}{32}$	$-\frac{81}{32}$	$-\frac{9}{8}$	0	$-\frac{9}{16}$	$-\frac{9}{4}$	0	3
$\mathcal{N}(1^1;\ 2^1;\ 4^1 6^2;\ n-2)$	$-\frac{3}{16}$	$-\frac{5}{16}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{9}{16}$	$-\frac{15}{16}$	$-\frac{3}{2}$	0	$-\frac{3}{8}$	0	0	0
$\mathcal{N}(2^1;\ 2^1;\ 4^1 6^2;\ n-2)$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	0	0	0	0
$\mathcal{N}(4^1;\ 2^1;\ 4^1 6^2;\ n-2)$	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	0	0	0	0

下页续。。。

表11：线性张成系数。（续……）

表示数	线性张成系数											
	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}	t_{11}	t_{12}
$\mathcal{N}(8^1;\ 2^1;\ 4^1 6^2;\ n-2)$	0	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	0	0	$\frac{3}{4}$	0	0
$\mathcal{N}(1^1;\ 6^1;\ 1^1 3^1 4^1;\ n-1)$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	0	3	-24	$\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
$\mathcal{N}(2^1;\ 6^1;\ 1^1 3^1 4^1;\ n-1)$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	0	0	$-\frac{9}{8}$	$-\frac{9}{8}$	-3	24	-1	-1	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$
$\mathcal{N}(4^1;\ 6^1;\ 1^1 3^1 4^1;\ n-1)$	$-\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	0	0	$-\frac{9}{16}$	$-\frac{9}{16}$	3	-24	$\frac{5}{8}$	-2	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
$\mathcal{N}(8^1;\ 6^1;\ 1^1 3^1 4^1;\ n-1)$	$\frac{1}{32}$	$-\frac{1}{32}$	0	0	$-\frac{27}{32}$	$-\frac{27}{32}$	$\frac{3}{2}$	-12	$\frac{5}{16}$	-1	$-\frac{1}{6}$	$\frac{5}{3}$
$\mathcal{N}(8^1;\ 1^1;\ 2^1 3^2;\ n-1)$	$\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{16}$	0	0	$-\frac{15}{16}$	$-\frac{15}{16}$	$\frac{9}{2}$	-36	$\frac{3}{8}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2
$\mathcal{N}(8^1;\ 3^1;\ 1^2 6^1;\ n-1)$	$\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{16}$	0	0	$-\frac{15}{16}$	$-\frac{15}{16}$	$\frac{9}{2}$	-36	$\frac{3}{8}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2
$\mathcal{N}_{s,t}(1^2 6^1; 2^2 4^1;\ n-1)$	$-\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	0	0	$-\frac{9}{16}$	$-\frac{9}{16}$	0	0	$-\frac{3}{8}$	0	0	2
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^2 6^1;\ 2^2 4^1;\ n-1)$	$-\frac{1}{16}$	$-\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{9}{16}$	$-\frac{45}{16}$	$-\frac{9}{4}$	0	$-\frac{3}{8}$	$-\frac{3}{2}$	0	2
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (3^2 6^1;\ 2^2 4^1;\ n-1)$	$\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{16}$	0	0	$-\frac{15}{16}$	$-\frac{15}{16}$	0	0	$-\frac{1}{8}$	-2	0	2
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (6^3;\ 2^2 4^1;\ n-1)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{15}{16}$	$-\frac{27}{16}$	$-\frac{3}{4}$	0	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{3}{2}$	0	2
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^1 2^1 3^1;\ 2^2 4^1;\ n-1)$	$\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{16}$	0	0	$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{16}$	0	0	$\frac{3}{8}$	0	0	0
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^1 2^2;\ 1^2 6^1;\ n-1)$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	9	-72	$\frac{3}{4}$	-3	-1	0
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^1 3^1 6^1;\ 1^2 6^1;\ n-1)$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	0	0	$-\frac{3}{8}$	$-\frac{3}{8}$	3	-24	$\frac{1}{4}$	-1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^1 6^2;\ 1^2 6^1;\ n-1)$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0	$-\frac{9}{8}$	$-\frac{9}{8}$	-3	24	$-\frac{3}{4}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^2 3^1;\ 2^1 3^2;\ n-1)$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0	$-\frac{9}{8}$	$-\frac{9}{8}$	-3	24	$-\frac{3}{4}$	-3	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^1 2^1 6^1;\ 2^1 3^2;\ n-1)$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	0	0	$-\frac{3}{8}$	$-\frac{3}{8}$	3	-24	$\frac{1}{4}$	-1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (3^1 6^2;\ 2^1 3^2;\ n-1)$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	0	0	$-\frac{7}{8}$	$-\frac{7}{8}$	1	-8	$\frac{1}{12}$	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{9}$	$\frac{16}{9}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^2 6^1;\ 4^1 6^2;\ n-2)$	$\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{16}$	0	0	$-\frac{3}{16}$	$-\frac{3}{16}$	-3	24	$-\frac{7}{8}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^2 6^1;\ 4^1 6^2;\ n-2)$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (3^2 6^1;\ 4^1 6^2;\ n-2)$	$-\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	0	0	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	1	-8	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{2}{9}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (6^3;\ 4^1 6^2;\ n-2)$	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^1 2^1 3^1;\ 4^1 6^2;\ n-2)$	$-\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	0	0	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	0	0	$-\frac{1}{8}$	0	0	0
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^2 2^1;\ 1^1 3^1 4^1;\ n-1)$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	0	0	0	0	0	0
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^3;\ 1^1 3^1 4^1;\ n-1)$	$-\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	0	0	$-\frac{9}{16}$	$-\frac{9}{16}$	0	0	$-\frac{3}{8}$	-3	0	2
$\mathcal{N}_{s,\ t}(1^1 3^1 6^1;\ 1^1 3^1 4^1; n-1)$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0	$-\frac{3}{8}$	$-\frac{3}{8}$	3	-24	$\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^1 3^2;\ 1^1 3^1 4^1;\ n-1)$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^1 6^2;\ 1^1 3^1 4^1;\ n-1)$	$\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{16}$	0	0	$-\frac{15}{16}$	$-\frac{15}{16}$	0	0	$-\frac{1}{8}$	-1	0	2

表12：形式为 $M_3(24, \chi_{-4})$的正整数表示数示例公式

表示数	线性张成系数											
	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}	t_{11}	t_{12}
$\delta_6(1^2 3^2 4^2; n-2)$	0	0	0	0	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{9}{14}$	0	$\frac{-1}{7}$	$\frac{-9}{14}$	$\frac{1}{2}$	0
$\delta_6(2^2 4^2 6^2; n-3)$	0	0	0	0	$\frac{1}{14}$	$\frac{-2}{7}$	$\frac{9}{28}$	$\frac{-9}{7}$	$\frac{-1}{14}$	$\frac{-9}{28}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{-3}{14}$
$\delta_6(4^2 6^4; n-4)$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{-6}{7}$	0	0	$\frac{-1}{7}$	$\frac{-1}{7}$
$\mathcal{N}_{l,\ t}\ (1^2;\ 4^2;\ n-1)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{-2}{7}$	$\frac{-9}{7}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{20}{7}$	$\frac{-32}{7}$	$\frac{90}{7}$	$\frac{-144}{7}$	$\frac{-15}{7}$	$\frac{-72}{7}$	$\frac{48}{7}$	0
$\mathcal{N}_{l,\ t}\ (1^1 2^1;\ 4^2;\ n-1)$	$\frac{-5}{14}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{-9}{14}$	$\frac{9}{14}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{40}{7}$	$\frac{-9}{7}$	$\frac{-72}{7}$	$\frac{9}{14}$	$\frac{18}{7}$	$\frac{-18}{7}$	0
$\mathcal{N}_{l,\ t}\ (1^1 4^1;\ 4^2;\ n-1)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{-2}{7}$	$\frac{-9}{7}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{16}{7}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{72}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{9}{7}$	3	$\frac{36}{7}$
$\mathcal{N}_{l,\ t}\ (2^2;\ 4^2;\ n-1)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{-2}{7}$	$\frac{-9}{7}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{-32}{7}$	$\frac{36}{7}$	$\frac{-144}{7}$	$\frac{-3}{7}$	$\frac{-18}{7}$	$\frac{6}{7}$	0
$\mathcal{N}_{l,\ t}\ (2^1 4^1;\ 4^2;\ n-1)$	$\frac{-5}{14}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{-9}{14}$	$\frac{9}{14}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{-20}{7}$	$\frac{-9}{7}$	$\frac{36}{7}$	$\frac{9}{14}$	$\frac{18}{7}$	0	$\frac{18}{7}$
$\mathcal{N}_{l,\ t}\ (4^2;\ 4^2;\ n-1)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{-2}{7}$	$\frac{-9}{7}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{-8}{7}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{-36}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{18}{7}$
$\mathcal{N}_{l,\ t}\ (1^1 8^1;\ 4^2;\ n-1)$	$\frac{5}{28}$	$\frac{-5}{28}$	$\frac{9}{28}$	$\frac{-9}{28}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{10}{7}$	$\frac{-9}{28}$	$\frac{-18}{7}$	$\frac{9}{14}$	$\frac{27}{14}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{117}{7}$
$\mathcal{N}_{l,\ t}\ (2^1 8^1;\ 4^2;\ n-1)$	$\frac{-1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{9}{14}$	$\frac{-9}{14}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{-8}{7}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{-36}{7}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{27}{14}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{45}{7}$

下页续..

表12：线性张成系数。（续……）

表示数	线性张成系数											
	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}	t_{11}	t_{12}
$\mathcal{N}_{l,\ t}\ (4^1 8^1;\ 4^2;\ n-1)$	$\frac{5}{28}$	$\frac{-5}{28}$	$\frac{9}{28}$	$\frac{-9}{28}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{-5}{7}$	$\frac{-9}{28}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{9}{14}$	$\frac{27}{14}$	$\frac{9}{14}$	$\frac{27}{7}$
$\mathcal{N}_{l,\ t}\ (8^2;\ 4^2;\ n-1)$	$\frac{1}{14}$	$\frac{-1}{14}$	$\frac{-9}{28}$	$\frac{9}{28}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{-2}{7}$	$\frac{9}{28}$	$\frac{-9}{7}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{18}{7}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{36}{7}$
$\mathcal{N}_{l,\ t}\ (8^1;\ 1^1 2^2 3^1;\ n-1)$	0	0	0	0	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{9}{14}$	0	$\frac{6}{7}$	$\frac{33}{14}$	$\frac{3}{2}$	9
$\mathcal{N}_{l,\ t}\ (8^1;\ 1^1 3^1 6^2;\ n-2)$	0	0	0	0	$\frac{1}{14}$	0	$\frac{-3}{7}$	0	$\frac{-1}{14}$	$\frac{-15}{14}$	$\frac{3}{2}$	3
$\mathcal{N}_{l,\ t}\ (1^1;\ 2^1 4^2 6^1;\ n-2)$	0	0	0	0	$\frac{3}{7}$	$\frac{-8}{7}$	$\frac{27}{14}$	$\frac{-36}{7}$	$\frac{-3}{7}$	$\frac{-27}{14}$	$\frac{9}{14}$	$\frac{-6}{7}$
$\mathcal{N}_{l,\ t}\ (2^1;\ 2^1 4^2 6^1;\ n-2)$	0	0	0	0	0	$\frac{10}{7}$	0	$\frac{-18}{7}$	0	0	$\frac{-3}{7}$	$\frac{-3}{7}$
$\mathcal{N}_{l,\ t}\ (4^1;\ 2^1 4^2 6^1;\ n-2)$	0	0	0	0	0	$\frac{4}{7}$	0	$\frac{18}{7}$	0	0	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$
$\mathcal{N}_{l,\ t}\ (8^1;\ 2^1 4^2 6^1;\ n-2)$	0	0	0	0	0	$\frac{5}{14}$	0	$\frac{-9}{14}$	0	0	$\frac{9}{14}$	$\frac{15}{7}$
$\mathcal{N}(8^1;\ 1^2;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	0	0	0	0	$\frac{5}{14}$	0	$\frac{-9}{14}$	0	$\frac{9}{14}$	$\frac{-6}{7}$	6	18
$\mathcal{N}(8^1;\ 3^2;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	0	0	0	0	$\frac{1}{14}$	0	$\frac{15}{14}$	0	$\frac{13}{14}$	$\frac{24}{7}$	0	6
$\mathcal{N}(1^1;\ 2^2;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	0	0	0	0	$\frac{4}{7}$	$\frac{32}{7}$	$\frac{18}{7}$	$\frac{144}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{24}{7}$	$\frac{-18}{7}$	$\frac{24}{7}$
$\mathcal{N}(2^1;\ 2^2;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	0	0	0	0	$\frac{10}{7}$	$\frac{-40}{7}$	$\frac{-18}{7}$	$\frac{72}{7}$	$\frac{-3}{7}$	$\frac{-24}{7}$	$\frac{12}{7}$	$\frac{12}{7}$
$\mathcal{N}(4^1;\ 2^2;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	0	0	0	0	$\frac{4}{7}$	$\frac{-16}{7}$	$\frac{18}{7}$	$\frac{-72}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{24}{7}$	$\frac{-12}{7}$	$\frac{-12}{7}$
$\mathcal{N}(8^1;\ 2^2;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	0	0	0	0	$\frac{5}{14}$	$\frac{-10}{7}$	$\frac{-9}{14}$	$\frac{18}{7}$	$\frac{9}{14}$	$\frac{-6}{7}$	$\frac{24}{7}$	$\frac{66}{7}$
$\mathcal{N}(1^1;\ 6^2;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	0	0	0	0	$\frac{2}{7}$	$\frac{16}{7}$	$\frac{-12}{7}$	$\frac{-96}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{12}{7}$	$\frac{26}{7}$	$\frac{96}{7}$
$\mathcal{N}(2^1;\ 6^2;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	0	0	0	0	$\frac{2}{7}$	$\frac{-8}{7}$	$\frac{30}{7}$	$\frac{-120}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{12}{7}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{36}{7}$
$\mathcal{N}(4^1;\ 6^2;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	0	0	0	0	$\frac{2}{7}$	$\frac{-8}{7}$	$\frac{-12}{7}$	$\frac{48}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{12}{7}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{36}{7}$
$\mathcal{N}(8^1;\ 6^2;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	0	0	0	0	$\frac{1}{14}$	$\frac{-2}{7}$	$\frac{15}{14}$	$\frac{-30}{7}$	$\frac{13}{14}$	$\frac{24}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{30}{7}$
$\mathcal{N}(1^1;\ 1^1 3^1;\ 4^2;\ n-1)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{-2}{7}$	$\frac{-9}{7}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{8}{7}$	0	$\frac{36}{7}$	0	$\frac{-3}{7}$	$\frac{-18}{7}$	$\frac{30}{7}$	$\frac{24}{7}$
$\mathcal{N}(2^1;\ 1^1 3^1;\ 4^2;\ n-1)$	$\frac{-5}{14}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{-9}{14}$	$\frac{9}{14}$	$\frac{5}{7}$	0	$\frac{-9}{7}$	0	$\frac{9}{14}$	$\frac{18}{7}$	$\frac{-6}{7}$	$\frac{12}{7}$
$\mathcal{N}(4^1;\ 1^1 3^1;\ 4^2;\ n-1)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{-2}{7}$	$\frac{-9}{7}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{2}{7}$	0	$\frac{9}{7}$	0	$\frac{3}{7}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{24}{7}$
$\mathcal{N}(8^1;\ 1^1 3^1;\ 4^2;\ n-1)$	$\frac{5}{28}$	$\frac{-5}{28}$	$\frac{9}{28}$	$\frac{-9}{28}$	$\frac{5}{28}$	0	$\frac{-9}{28}$	0	$\frac{9}{14}$	$\frac{27}{14}$	$\frac{27}{14}$	$\frac{57}{7}$
$\mathcal{N}(1^1;\ 2^1 6^1;\ 4^2;\ n-1)$	0	0	0	0	$\frac{5}{14}$	$\frac{20}{7}$	$\frac{-9}{14}$	$\frac{-36}{7}$	$\frac{9}{14}$	$\frac{15}{7}$	$\frac{15}{7}$	$\frac{78}{7}$
$\mathcal{N}(2^1;\ 2^1 6^1;\ 4^2;\ n-1)$	0	0	0	0	$\frac{4}{7}$	$\frac{-16}{7}$	$\frac{18}{7}$	$\frac{-72}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{30}{7}$
$\mathcal{N}(4^1;\ 2^1 6^1;\ 4^2;\ n-1)$	0	0	0	0	$\frac{5}{14}$	$\frac{-10}{7}$	$\frac{-9}{14}$	$\frac{18}{7}$	$\frac{9}{14}$	$\frac{15}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{24}{7}$
$\mathcal{N}(8^1;\ 2^1 6^1;\ 4^2;\ n-1)$	0	0	0	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{-4}{7}$	$\frac{9}{14}$	$\frac{-18}{7}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{33}{14}$	$\frac{15}{14}$	$\frac{39}{7}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (3^4;\ 4^2;\ n-1)$	$\frac{-1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{-6}{7}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{2}{7}$	0	$\frac{-12}{7}$	0	$\frac{6}{7}$	$\frac{24}{7}$	$\frac{-8}{7}$	$\frac{16}{7}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^2 3^2;\ 4^2;\ n-1)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{-2}{7}$	$\frac{-9}{7}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{4}{7}$	0	$\frac{18}{7}$	0	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{16}{7}$	$\frac{24}{7}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (6^4;\ 4^2;\ n-1)$	0	0	0	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{-4}{7}$	$\frac{-6}{7}$	$\frac{24}{7}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{20}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{32}{7}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^2 6^2;\ 4^2;\ n-1)$	0	0	0	0	$\frac{2}{7}$	0	$\frac{9}{7}$	0	$\frac{5}{7}$	$\frac{12}{7}$	4	12
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^2 3^2;\ 4^2;\ n-1)$	0	0	0	0	$\frac{2}{7}$	0	$\frac{9}{7}$	0	$\frac{5}{7}$	$\frac{12}{7}$	0	0
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^2 6^2;\ 4^2;\ n-1)$	0	0	0	0	$\frac{2}{7}$	$\frac{-8}{7}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{-36}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{12}{7}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{36}{7}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (3^2 6^2;\ 4^2;\ n-1)$	0	0	0	0	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{-6}{7}$	0	$\frac{6}{7}$	$\frac{20}{7}$	0	4
$\mathcal{N}_{s,\ t}(1236;4^2;\ n-1)$	0	0	0	0	$\frac{5}{14}$	0	$\frac{-9}{14}$	0	$\frac{9}{14}$	$\frac{15}{7}$	1	6
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^3 6^1;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	0	0	0	0	$\frac{5}{7}$	$\frac{-20}{7}$	$\frac{-9}{7}$	$\frac{36}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{-12}{7}$	$\frac{20}{7}$	$\frac{48}{7}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^1 6^3;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	0	0	0	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{-4}{7}$	$\frac{15}{7}$	$\frac{-60}{7}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{20}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{32}{7}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^1 2^2 3^1;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	0	0	0	0	$\frac{4}{7}$	0	$\frac{18}{7}$	0	$\frac{3}{7}$	$\frac{24}{7}$	-2	0
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^2 2^1 6^1;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	0	0	0	0	$\frac{5}{7}$	0	$\frac{-9}{7}$	0	$\frac{2}{7}$	$\frac{-12}{7}$	4	12
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^1 3^1 6^2;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	0	0	0	0	$\frac{2}{7}$	0	$\frac{-12}{7}$	0	$\frac{5}{7}$	$\frac{12}{7}$	2	8
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^1 3^2 6^1;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	0	0	0	0	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{15}{7}$	0	$\frac{6}{7}$	$\frac{20}{7}$	0	4

下页续...

表12：线性张成系数。（续.....）

表示数	线性张成系数											
	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}	t_{11}	t_{12}
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (3^1 6^1;\ 1^2 2^1 4^1;\ n-1)$	0	0	0	0	$\frac{5}{14}$	0	$\frac{-9}{14}$	0	$\frac{9}{14}$	$\frac{15}{7}$	1	6
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (3^2;\ 4^4;\ n-2)$	$\frac{1}{14}$	$\frac{-1}{14}$	$\frac{-9}{28}$	$\frac{9}{28}$	$\frac{1}{14}$	0	$\frac{9}{28}$	0	$\frac{-1}{7}$	$\frac{-3}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{6}{7}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^1 6^1;\ 3^2 4^1 6^1;\ n-2)$	0	0	0	0	$\frac{1}{14}$	0	$\frac{15}{14}$	0	$\frac{-1}{14}$	$\frac{-4}{7}$	1	2
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^1 3^1;\ 3^2 4^1 6^1;\ n-2)$	0	0	0	0	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{-6}{7}$	0	$\frac{-1}{7}$	$\frac{-1}{7}$	0	0
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^1 3^1;\ 2^1 4^2 6^1;\ n-2)$	0	0	0	0	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{9}{14}$	0	$\frac{-1}{7}$	$\frac{-9}{14}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^1 6^1;\ 1^1 2^2 3^1;\ n-1)$	0	0	0	0	$\frac{2}{7}$	0	$\frac{9}{7}$	0	$\frac{5}{7}$	$\frac{12}{7}$	1	6
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^1 6^1;\ 1^1 3^1 6^2;\ n-2)$	0	0	0	0	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{-6}{7}$	0	$\frac{-1}{7}$	$\frac{-8}{7}$	1	2
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^1 6^1;\ 2^1 4^2 6^1;\ n-2)$	0	0	0	0	0	$\frac{5}{7}$	0	$\frac{-9}{7}$	0	0	$\frac{2}{7}$	$\frac{9}{7}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (6^2;\ 2^4;\ n-1)$	0	0	0	0	$\frac{2}{7}$	$\frac{-8}{7}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{-36}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{12}{7}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{36}{7}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (6^2;\ 4^4;\ n-2)$	0	0	0	0	0	$\frac{2}{7}$	0	$\frac{9}{7}$	0	0	$\frac{5}{7}$	$\frac{12}{7}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (6^2;\ 6^4;\ n-3)$	0	0	0	0	0	0	1	-4	0	0	0	0
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (6^2;\ 1^2 3^2;\ n-1)$	0	0	0	0	$\frac{2}{7}$	0	$\frac{-12}{7}$	0	$\frac{5}{7}$	$\frac{12}{7}$	2	8
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (6^2;\ 2^2 6^2;\ n-2)$	0	0	0	0	0	$\frac{4}{7}$	0	$\frac{-24}{7}$	0	0	$\frac{3}{7}$	$\frac{10}{7}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^2;\ 6^4;\ n-3)$	0	0	0	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{-4}{7}$	$\frac{-6}{7}$	$\frac{24}{7}$	$\frac{-1}{7}$	$\frac{-8}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{4}{7}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^2;\ 1^2 3^2;\ n-1)$	0	0	0	0	$\frac{4}{7}$	0	$\frac{18}{7}$	0	$\frac{3}{7}$	$\frac{24}{7}$	-2	0
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^2;\ 2^2 6^2;\ n-2)$	0	0	0	0	0	$\frac{8}{7}$	0	$\frac{36}{7}$	0	0	$\frac{-1}{7}$	$\frac{6}{7}$
$\mathcal{N}(1^1;\ 6^1;\ 2^2 4^1;\ n-1)$	0	0	0	0	$\frac{5}{14}$	$\frac{20}{7}$	$-\frac{9}{14}$	$-\frac{36}{7}$	$\frac{9}{14}$	$\frac{15}{7}$	$\frac{15}{7}$	$\frac{78}{7}$
$\mathcal{N}(2^1;\ 6^1;\ 2^2 4^1;\ n-1)$	0	0	0	0	$\frac{4}{7}$	$-\frac{16}{7}$	$\frac{18}{7}$	$-\frac{72}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{30}{7}$
$\mathcal{N}(4^1;\ 6^1;\ 2^2 4^1;\ n-1)$	0	0	0	0	$\frac{5}{14}$	$-\frac{10}{7}$	$-\frac{9}{14}$	$\frac{18}{7}$	$\frac{9}{14}$	$\frac{15}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{24}{7}$
$\mathcal{N}(8^1;\ 6^1;\ 2^2 4^1;\ n-1)$	0	0	0	0	$\frac{1}{7}$	$-\frac{4}{7}$	$\frac{9}{14}$	$-\frac{18}{7}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{33}{14}$	$\frac{15}{14}$	$\frac{39}{7}$
$\mathcal{N}(1^1;\ 6^1;\ 4^1 6^2;\ n-2)$	0	0	0	0	$\frac{3}{14}$	$-\frac{4}{7}$	$\frac{45}{14}$	$-\frac{60}{7}$	$-\frac{3}{14}$	$-\frac{12}{7}$	$\frac{11}{7}$	$\frac{18}{7}$
$\mathcal{N}(2^1;\ 6^1;\ 4^1 6^2;\ n-2)$	0	0	0	0	0	$\frac{8}{7}$	0	$-\frac{48}{7}$	0	0	$-\frac{1}{7}$	$\frac{6}{7}$
$\mathcal{N}(4^1;\ 6^1;\ 4^1 6^2;\ n-2)$	0	0	0	0	0	$\frac{2}{7}$	0	$\frac{30}{7}$	0	0	$\frac{5}{7}$	$\frac{12}{7}$
$\mathcal{N}(8^1;\ 6^1;\ 4^1 6^2;\ n-2)$	0	0	0	0	0	$\frac{2}{7}$	0	$-\frac{12}{7}$	0	0	$\frac{5}{7}$	$\frac{12}{7}$
$\mathcal{N}(1^1;\ 2^1;\ 1^1 3^1 4^1;\ n-1)$	0	0	0	0	$\frac{10}{7}$	0	$-\frac{18}{7}$	0	$-\frac{3}{7}$	$-\frac{3}{7}$	0	0
$\mathcal{N}(2^1;\ 2^1;\ 1^1 3^1 4^1;\ n-1)$	0	0	0	0	$\frac{4}{7}$	0	$\frac{18}{7}$	0	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	0	0
$\mathcal{N}(4^1;\ 2^1;\ 1^1 3^1 4^1;\ n-1)$	0	0	0	0	$\frac{5}{14}$	0	$-\frac{9}{14}$	0	$\frac{9}{14}$	$\frac{15}{7}$	0	0
$\mathcal{N}(8^1;\ 2^1;\ 1^1 3^1 4^1;\ n-1)$	0	0	0	0	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{9}{14}$	0	$\frac{6}{7}$	$\frac{33}{14}$	$\frac{3}{2}$	9
$\mathcal{N}(8^1;\ 1^1;\ 1^2 6^1;\ n-1)$	0	0	0	0	$\frac{5}{14}$	0	$-\frac{9}{14}$	0	$\frac{9}{14}$	$-\frac{6}{7}$	6	18
$\mathcal{N}(8^1;\ 3^1;\ 2^1 3^2;\ n-1)$	0	0	0	0	$\frac{1}{14}$	0	$\frac{15}{14}$	0	$\frac{13}{14}$	$\frac{24}{7}$	0	6
$\mathcal{N}_{s,t}(1^1 3^1 6^1;\ 2^2 4^1;\ n-1)$	0	0	0	0	$\frac{5}{14}$	0	$-\frac{9}{14}$	0	$\frac{9}{14}$	$\frac{15}{7}$	1	6
$\mathcal{N}_{s,\ t}(2^1 3^2;\ 2^2 4^1;\ n-1)$	0	0	0	0	$\frac{2}{7}$	0	$\frac{9}{7}$	0	$\frac{5}{7}$	$\frac{12}{7}$	0	0
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^1 6^2;\ 2^2 4^1;\ n-1)$	0	0	0	0	$\frac{2}{7}$	$-\frac{8}{7}$	$\frac{9}{7}$	$-\frac{36}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{12}{7}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{36}{7}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^2 3^1;\ 1^2 6^1;\ n-1)$	0	0	0	0	$\frac{4}{7}$	0	$\frac{18}{7}$	0	$\frac{3}{7}$	$\frac{24}{7}$	-2	0
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^1 2^1 6^1;\ 1^2 6^1;\ n-1)$	0	0	0	0	$\frac{5}{7}$	0	$-\frac{9}{7}$	0	$\frac{2}{7}$	$-\frac{12}{7}$	4	12
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (3^1 6^2;\ 1^2 6^1;\ n-1)$	0	0	0	0	$\frac{2}{7}$	0	$-\frac{12}{7}$	0	$\frac{5}{7}$	$\frac{12}{7}$	2	8
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^1 2^2;\ 2^1 3^2;\ n-1)$	0	0	0	0	$\frac{4}{7}$	0	$\frac{18}{7}$	0	$\frac{3}{7}$	$\frac{24}{7}$	-2	0
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^1 3^1 6^1;\ 2^1 3^2;\ n-1)$	0	0	0	0	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{15}{7}$	0	$\frac{6}{7}$	$\frac{20}{7}$	0	4
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^1 6^2;\ 2^1 3^2;\ n-1)$	0	0	0	0	$\frac{2}{7}$	0	$-\frac{12}{7}$	0	$\frac{5}{7}$	$\frac{12}{7}$	2	8
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^2 2^1;\ 4^1 6^2;\ n-2)$	0	0	0	0	$\frac{2}{7}$	0	$\frac{9}{7}$	0	$-\frac{2}{7}$	$-\frac{9}{7}$	0	0

下页续..

表12：线性张成系数。（续……）

表示数	线性张成系数											
	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}	t_{11}	t_{12}
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^3;\ 4^1 6^2;\ n-2)$	0	0	0	0	0	$\frac{8}{7}$	0	$\frac{36}{7}$	0	0	$-\frac{1}{7}$	$\frac{6}{7}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^1 3^1 6^1;\ 4^1 6^2;\ n-2)$	0	0	0	0	$\frac{1}{14}$	0	$\frac{15}{14}$	0	$-\frac{1}{14}$	$-\frac{4}{7}$	1	2
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^1 3^2;\ 4^1 6^2;\ n-2)$	0	0	0	0	$\frac{1}{7}$	0	$-\frac{6}{7}$	0	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{7}$	0	0
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^1 6^2;\ 4^1 6^2;\ n-2)$	0	0	0	0	0	$\frac{4}{7}$	0	$-\frac{24}{7}$	0	0	$\frac{3}{7}$	$\frac{10}{7}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^2 6^1;\ 1^1 3^1 4^1;\ n-1)$	0	0	0	0	$\frac{4}{7}$	0	$\frac{18}{7}$	0	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	4	12
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^2 6^1;\ 1^1 3^1 4^1;\ n-1)$	0	0	0	0	$\frac{2}{7}$	0	$\frac{9}{7}$	0	$\frac{5}{7}$	$\frac{12}{7}$	1	6
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (3^2 6^1;\ 1^1 3^1 4^1;\ n-1)$	0	0	0	0	$\frac{2}{7}$	0	$-\frac{12}{7}$	0	$\frac{5}{7}$	$\frac{19}{7}$	0	4
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (6^3;\ 1^1 3^1 4^1;\ n-1)$	0	0	0	0	$\frac{1}{7}$	0	$-\frac{6}{7}$	0	$\frac{6}{7}$	$\frac{20}{7}$	1	6
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^1 2^1 3^1;\ 1^1 3^1 4^1;\ n-1)$	0	0	0	0	$\frac{5}{7}$	0	$-\frac{9}{7}$	0	$\frac{2}{7}$	$\frac{9}{7}$	0	0

表13：由 $M_3(24, \chi_{-8})$中的形式表示正整数的表示数示例公式

表示数	线性张成系数									
	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}
$\delta_6(1^3 3^1 4^1 6^1; n-2)$	0	0	$\frac{8}{39}$	$\frac{6}{13}$	$\frac{-2}{39}$	$\frac{-3}{26}$	$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{-3}{52}$	$\frac{-5}{26}$
$\delta_6(2^3 3^2 4^1; n-2)$	0	0	$\frac{5}{39}$	$\frac{-6}{13}$	$\frac{-5}{156}$	$\frac{-111}{52}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{5}{104}$	$\frac{-33}{104}$	$\frac{-3}{52}$
$\delta_6(2^1 3^2 4^1 6^2; n-3)$	0	0	$\frac{1}{39}$	$\frac{4}{13}$	$\frac{-1}{156}$	$\frac{35}{52}$	$\frac{-11}{156}$	$\frac{1}{104}$	$\frac{9}{104}$	$\frac{-7}{156}$
$\mathcal{N}_{l,\ t}\ (1^1;\ 3^2 4^1 6^1;\ n-2)$	0	0	$\frac{8}{39}$	$\frac{32}{13}$	$\frac{-2}{39}$	$\frac{31}{13}$	$\frac{-3}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{9}{13}$	$\frac{-9}{13}$
$\mathcal{N}_{l,\ t}\ (2^1;\ 3^2 4^1 6^1;\ n-2)$	0	0	$\frac{8}{39}$	$\frac{-20}{13}$	$\frac{-2}{39}$	$\frac{-34}{13}$	$\frac{7}{26}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{-21}{26}$	$\frac{4}{13}$
$\mathcal{N}_{l,\ t}\ (4^1;\ 3^2 4^1 6^1;\ n-2)$	0	0	$\frac{2}{39}$	$\frac{8}{13}$	$\frac{-1}{78}$	$\frac{-43}{26}$	$\frac{5}{26}$	$\frac{1}{52}$	$\frac{9}{52}$	$\frac{-11}{26}$
$\mathcal{N}_{l,\ t}\ (8^1;\ 3^2 4^1 6^1;\ n-2)$	0	0	$\frac{2}{39}$	$\frac{-5}{13}$	$\frac{-1}{78}$	$\frac{-17}{26}$	$\frac{5}{26}$	$\frac{1}{52}$	$\frac{9}{52}$	$\frac{-11}{26}$
$\mathcal{N}(1^1;\ 1^1 6^1;\ 4^2;\ n-1)$	0	0	$\frac{32}{39}$	$\frac{24}{13}$	$\frac{-47}{39}$	$\frac{-6}{13}$	$\frac{14}{13}$	$\frac{21}{26}$	$\frac{33}{26}$	$\frac{-23}{13}$
$\mathcal{N}(2^1;\ 1^1 6^1;\ 4^2;\ n-1)$	0	0	$\frac{20}{39}$	$\frac{-24}{13}$	$\frac{-44}{39}$	$\frac{6}{13}$	$\frac{11}{26}$	$\frac{9}{13}$	$\frac{-33}{26}$	$\frac{23}{13}$
$\mathcal{N}(4^1;\ 1^1 6^1;\ 4^2;\ n-1)$	0	0	$\frac{8}{39}$	$\frac{6}{13}$	$\frac{35}{78}$	$\frac{-3}{26}$	$\frac{7}{26}$	$\frac{-9}{52}$	$\frac{75}{52}$	$\frac{-31}{26}$
$\mathcal{N}(8^1;\ 1^1 6^1;\ 4^2;\ n-1)$	0	0	$\frac{5}{39}$	$\frac{-6}{13}$	$\frac{-11}{39}$	$\frac{3}{26}$	$\frac{25}{52}$	$\frac{9}{52}$	$\frac{21}{26}$	$\frac{-4}{13}$
$\mathcal{N}(1^1;\ 2^1 3^1;\ 4^2;\ n-1)$	0	0	$\frac{40}{39}$	$\frac{-48}{13}$	$\frac{-10}{39}$	$\frac{-105}{13}$	$\frac{11}{13}$	$\frac{-3}{26}$	$\frac{-27}{26}$	$\frac{7}{13}$
$\mathcal{N}(2^1;\ 2^1 3^1;\ 4^2;\ n-1)$	0	0	$\frac{16}{39}$	$\frac{12}{13}$	$\frac{-4}{39}$	$\frac{114}{13}$	$\frac{-25}{26}$	$\frac{-9}{26}$	$\frac{18}{13}$	$\frac{8}{13}$
$\mathcal{N}(4^1;\ 2^1 3^1;\ 4^2;\ n-1)$	0	0	$\frac{10}{39}$	$\frac{-12}{13}$	$\frac{-5}{78}$	$\frac{123}{26}$	$\frac{-7}{13}$	$\frac{-21}{52}$	$\frac{45}{52}$	$\frac{23}{26}$
$\mathcal{N}(8^1;\ 2^1 3^1;\ 4^2;\ n-1)$	0	0	$\frac{4}{39}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{-1}{39}$	$\frac{57}{26}$	$\frac{7}{52}$	$\frac{15}{52}$	$\frac{9}{26}$	$\frac{2}{13}$
$\mathcal{N}(1^1;\ 1^1 2^1;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	0	0	$\frac{80}{39}$	$\frac{-96}{13}$	$\frac{58}{39}$	$\frac{24}{13}$	$\frac{-4}{13}$	$\frac{-3}{13}$	$\frac{12}{13}$	$\frac{-38}{13}$
$\mathcal{N}(2^1;\ 1^1 2^1;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	0	0	$\frac{32}{39}$	$\frac{24}{13}$	$\frac{70}{39}$	$\frac{-6}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{-9}{13}$	$\frac{-3}{13}$	$\frac{-10}{13}$
$\mathcal{N}(4^1;\ 1^1 2^1;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	0	0	$\frac{20}{39}$	$\frac{-24}{13}$	$\frac{-44}{39}$	$\frac{6}{13}$	$\frac{-1}{13}$	$\frac{9}{13}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{10}{13}$
$\mathcal{N}(8^1;\ 1^1 2^1;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	0	0	$\frac{8}{39}$	$\frac{6}{13}$	$\frac{35}{78}$	$\frac{-3}{26}$	$\frac{10}{13}$	$\frac{-9}{52}$	$\frac{-3}{52}$	$\frac{-5}{26}$
$\mathcal{N}(1^1;\ 3^1 6^1;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	0	0	$\frac{32}{39}$	$\frac{-80}{13}$	$\frac{-8}{39}$	$\frac{-58}{13}$	$\frac{14}{13}$	$\frac{4}{13}$	$\frac{-3}{13}$	$\frac{-10}{13}$
$\mathcal{N}(2^1;\ 3^1 6^1;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	0	0	$\frac{8}{39}$	$\frac{32}{13}$	$\frac{-2}{39}$	$\frac{70}{13}$	$\frac{-3}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{9}{13}$	$\frac{4}{13}$
$\mathcal{N}(4^1;\ 3^1 6^1;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	0	0	$\frac{8}{39}$	$\frac{-20}{13}$	$\frac{-2}{39}$	$\frac{44}{13}$	$\frac{-3}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{9}{13}$	$\frac{4}{13}$
$\mathcal{N}(8^1;\ 3^1 6^1;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	0	0	$\frac{2}{39}$	$\frac{8}{13}$	$\frac{-1}{78}$	$\frac{35}{26}$	$\frac{5}{26}$	$\frac{1}{52}$	$\frac{9}{52}$	$\frac{15}{26}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (3^3 6^1;\ 4^2;\ n-1)$	0	0	$\frac{8}{39}$	$\frac{-20}{13}$	$\frac{-2}{39}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{4}{39}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{-4}{13}$	$\frac{38}{39}$

下页续...

表13：线性张成系数（续.....）

表示数	线性张成系数									
	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (3^1 6^3;\ 4^2;\ n-1)$	0	0	$\frac{4}{39}$	$\frac{-10}{13}$	$\frac{-1}{39}$	$\frac{22}{13}$	$\frac{2}{39}$	$\frac{1}{26}$	$\frac{9}{26}$	$\frac{19}{39}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^1 2^1 3^2;\ 4^2;\ n-1)$	0	0	$\frac{20}{39}$	$\frac{-24}{13}$	$\frac{-5}{39}$	$\frac{6}{13}$	$\frac{-1}{13}$	$\frac{-4}{13}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{10}{13}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^1 2^1 6^2;\ 4^2;\ n-1)$	0	0	$\frac{10}{39}$	$\frac{-12}{13}$	$\frac{-22}{39}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{6}{13}$	$\frac{9}{26}$	$\frac{3}{26}$	$\frac{5}{13}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^2 3^1 6^1;\ 4^2;\ n-1)$	0	0	$\frac{16}{39}$	$\frac{12}{13}$	$\frac{-4}{39}$	$\frac{-3}{13}$	$\frac{7}{13}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{18}{13}$	$\frac{-18}{13}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^2 3^1 6^1;\ 4^2;\ n-1)$	0	0	$\frac{8}{39}$	$\frac{6}{13}$	$\frac{-2}{39}$	$\frac{57}{13}$	$\frac{-3}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{9}{13}$	$\frac{4}{13}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^3 6^1;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	0	0	$\frac{32}{39}$	$\frac{24}{13}$	$\frac{-8}{39}$	$\frac{-6}{13}$	$\frac{14}{13}$	$\frac{4}{13}$	$\frac{-3}{13}$	$\frac{-10}{13}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^1 6^3;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	0	0	$\frac{8}{39}$	$\frac{-20}{13}$	$\frac{-41}{39}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{17}{39}$	$\frac{15}{26}$	$\frac{5}{26}$	$\frac{25}{39}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^3 3^1;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	0	0	$\frac{20}{39}$	$\frac{-24}{13}$	$\frac{-5}{39}$	$\frac{123}{13}$	$\frac{-14}{13}$	$\frac{5}{26}$	$\frac{45}{26}$	$\frac{-3}{13}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^1 3^3;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	0	0	$\frac{8}{39}$	$\frac{32}{13}$	$\frac{-2}{39}$	$\frac{-8}{13}$	$\frac{4}{39}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{-4}{13}$	$\frac{38}{39}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^2 2^1 3^1;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	0	0	$\frac{40}{39}$	$\frac{-48}{13}$	$\frac{-10}{39}$	$\frac{12}{13}$	$\frac{-2}{13}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{6}{13}$	$\frac{-6}{13}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^1 2^2 6^1;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	0	0	$\frac{16}{39}$	$\frac{12}{13}$	$\frac{35}{39}$	$\frac{-3}{13}$	$\frac{7}{13}$	$\frac{-9}{26}$	$\frac{-3}{26}$	$\frac{-5}{13}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^1 3^2 6^1;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	0	0	$\frac{16}{39}$	$\frac{-40}{13}$	$\frac{-4}{39}$	$\frac{10}{13}$	$\frac{8}{39}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{-2}{39}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^1 3^1 6^2;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	0	0	$\frac{4}{39}$	$\frac{16}{13}$	$\frac{-1}{39}$	$\frac{35}{13}$	$\frac{2}{39}$	$\frac{1}{26}$	$\frac{9}{26}$	$\frac{19}{39}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^1 3^1;\ 3^2 4^1 6^1;\ n-2)$	0	0	$\frac{4}{39}$	$\frac{16}{13}$	$\frac{-1}{39}$	$\frac{-4}{13}$	$\frac{2}{39}$	$\frac{1}{26}$	$\frac{9}{26}$	$\frac{-20}{39}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^1 6^1;\ 3^2 4^1 6^1;\ n-2)$	0	0	$\frac{4}{39}$	$\frac{-10}{13}$	$\frac{-1}{39}$	$\frac{-17}{13}$	$\frac{17}{78}$	$\frac{1}{26}$	$\frac{-2}{13}$	$\frac{-7}{39}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^1 6^1;\ 1^1 2^2 3^1;\ n-2)$	0	0	$\frac{20}{39}$	$\frac{-24}{13}$	$\frac{-5}{39}$	$\frac{6}{13}$	$\frac{11}{26}$	$\frac{5}{26}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{-3}{13}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^1 6^1;\ 1^1 3^1 6^2;\ n-2)$	0	0	$\frac{4}{39}$	$\frac{16}{13}$	$\frac{-1}{39}$	$\frac{-4}{13}$	$\frac{17}{78}$	$\frac{1}{26}$	$\frac{-2}{13}$	$\frac{-7}{39}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^1 6^1;\ 2^1 4^2 6^1;\ n-2)$	0	0	$\frac{4}{39}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{-43}{156}$	$\frac{-3}{52}$	$\frac{7}{52}$	$\frac{17}{104}$	$\frac{-3}{104}$	$\frac{-5}{52}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^1 3^1;\ 1^1 2^2 3^1;\ n-1)$	0	0	$\frac{16}{39}$	$\frac{12}{13}$	$\frac{-4}{39}$	$\frac{-3}{13}$	$\frac{1}{26}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{-3}{26}$	$\frac{8}{13}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^1 3^1;\ 1^1 3^1 6^2;\ n-2)$	0	0	$\frac{8}{39}$	$\frac{-20}{13}$	$\frac{-2}{39}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{-5}{78}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{5}{26}$	$\frac{-14}{39}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^1 3^1;\ 2^1 4^2 6^1;\ n-2)$	0	0	$\frac{5}{39}$	$\frac{-6}{13}$	$\frac{-5}{156}$	$\frac{-111}{52}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{5}{104}$	$\frac{-33}{104}$	$\frac{-3}{52}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (3^2;\ 1^2 2^1 4^1;\ n-1)$	0	0	$\frac{20}{39}$	$\frac{-24}{13}$	$\frac{-5}{39}$	$\frac{6}{13}$	$\frac{-1}{13}$	$\frac{-4}{13}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{10}{13}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (6^2;\ 1^2 2^1 4^1;\ n-1)$	0	0	$\frac{10}{39}$	$\frac{-12}{13}$	$\frac{-22}{39}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{6}{13}$	$\frac{9}{26}$	$\frac{3}{26}$	$\frac{5}{13}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (3^1 6^1;\ 2^4;\ n-1)$	0	0	$\frac{8}{39}$	$\frac{6}{13}$	$\frac{-2}{39}$	$\frac{57}{13}$	$\frac{-3}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{9}{13}$	$\frac{4}{13}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (3^1 6^1;\ 4^4;\ n-2)$	0	0	$\frac{2}{39}$	$\frac{3}{26}$	$\frac{-1}{78}$	$\frac{-15}{13}$	$\frac{5}{26}$	$\frac{1}{52}$	$\frac{9}{52}$	$\frac{-11}{26}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (3^1 6^1;\ 6^4;\ n-3)$	0	0	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (3^1 6^1;\ 1^2 3^2;\ n-1)$	0	0	$\frac{16}{39}$	$\frac{-40}{13}$	$\frac{-4}{39}$	$\frac{10}{13}$	$\frac{8}{39}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{-2}{39}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (3^1 6^1;\ 2^2 6^2;\ n-2)$	0	0	$\frac{4}{39}$	$\frac{-10}{13}$	$\frac{-1}{39}$	$\frac{-17}{13}$	$\frac{17}{78}$	$\frac{1}{26}$	$\frac{-2}{13}$	$\frac{-7}{39}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^1 2^1;\ 6^4;\ n-3)$	0	0	$\frac{2}{39}$	$\frac{8}{13}$	$\frac{19}{39}$	$\frac{-2}{13}$	$\frac{1}{39}$	$\frac{-3}{13}$	$\frac{-1}{13}$	$\frac{-10}{39}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^1 2^1;\ 1^2 3^2;\ n-1)$	0	0	$\frac{40}{39}$	$\frac{-48}{13}$	$\frac{-10}{39}$	$\frac{12}{13}$	$\frac{-2}{13}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{6}{13}$	$\frac{-6}{13}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^1 2^1;\ 2^2 6^2;\ n-2)$	0	0	$\frac{10}{39}$	$\frac{-12}{13}$	$\frac{17}{39}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{-1}{26}$	$\frac{-2}{13}$	$\frac{3}{26}$	$\frac{-8}{13}$
$\mathcal{N}(1^1;\ 3^1;\ 2^2 4^1;\ n-1)$	0	0	$\frac{40}{39}$	$\frac{-48}{13}$	$\frac{-10}{39}$	$\frac{-105}{13}$	$\frac{11}{13}$	$\frac{-3}{26}$	$\frac{-27}{26}$	$\frac{7}{13}$
$\mathcal{N}(2^1;\ 3^1;\ 2^2 4^1;\ n-1)$	0	0	$\frac{16}{39}$	$\frac{12}{13}$	$\frac{-4}{39}$	$\frac{114}{13}$	$\frac{-25}{26}$	$\frac{-9}{26}$	$\frac{18}{13}$	$\frac{8}{13}$
$\mathcal{N}(4^1;\ 3^1;\ 2^2 4^1;\ n-1)$	0	0	$\frac{10}{39}$	$\frac{-12}{13}$	$\frac{-5}{78}$	$\frac{123}{26}$	$\frac{-7}{13}$	$\frac{-21}{52}$	$\frac{45}{52}$	$\frac{23}{26}$
$\mathcal{N}(8^1;\ 3^1;\ 2^2 4^1;\ n-1)$	0	0	$\frac{4}{39}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{-1}{39}$	$\frac{57}{26}$	$\frac{7}{52}$	$\frac{15}{52}$	$\frac{9}{26}$	$\frac{2}{13}$
$\mathcal{N}(1^1;\ 2^1;\ 1^2 6^1;\ n-1)$	0	0	$\frac{80}{39}$	$\frac{-96}{13}$	$\frac{58}{39}$	$\frac{24}{13}$	$\frac{-4}{13}$	$\frac{-3}{13}$	$\frac{12}{13}$	$\frac{-38}{13}$
$\mathcal{N}(2^1;\ 2^1;\ 1^2 6^1;\ n-1)$	0	0	$\frac{32}{39}$	$\frac{24}{13}$	$\frac{70}{39}$	$\frac{-6}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{-9}{13}$	$\frac{-3}{13}$	$\frac{-10}{13}$
$\mathcal{N}(4^1;\ 2^1;\ 1^2 6^1;\ n-1)$	0	0	$\frac{20}{39}$	$\frac{-24}{13}$	$\frac{-44}{39}$	$\frac{6}{13}$	$\frac{-1}{13}$	$\frac{9}{13}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{10}{13}$
$\mathcal{N}(8^1;\ 2^1;\ 1^2 6^1;\ n-1)$	0	0	$\frac{8}{39}$	$\frac{6}{13}$	$\frac{35}{78}$	$\frac{-3}{26}$	$\frac{10}{13}$	$\frac{-9}{52}$	$\frac{-3}{52}$	$\frac{-5}{26}$
$\mathcal{N}(1^1;\ 6^1;\ 2^1 3^2;\ n-1)$	0	0	$\frac{32}{39}$	$\frac{-80}{13}$	$\frac{-8}{39}$	$\frac{-58}{13}$	$\frac{14}{13}$	$\frac{4}{13}$	$\frac{-3}{13}$	$\frac{-10}{13}$

下页续..

表13：线性张成系数（续……）

表示数	线性张成系数									
	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}
$\mathcal{N}(2^1;\ 6^1;\ 2^1 3^2;\ n-1)$	0	0	$\frac{8}{39}$	$\frac{32}{13}$	$\frac{-2}{39}$	$\frac{70}{13}$	$\frac{-3}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{9}{13}$	$\frac{4}{13}$
$\mathcal{N}(4^1;\ 6^1;\ 2^1 3^2;\ n-1)$	0	0	$\frac{8}{39}$	$\frac{-20}{13}$	$\frac{-2}{39}$	$\frac{44}{13}$	$\frac{-3}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{9}{13}$	$\frac{4}{13}$
$\mathcal{N}(8^1;\ 6^1;\ 2^1 3^2;\ n-1)$	0	0	$\frac{2}{39}$	$\frac{8}{13}$	$\frac{-1}{78}$	$\frac{35}{26}$	$\frac{5}{26}$	$\frac{1}{52}$	$\frac{9}{52}$	$\frac{15}{26}$
$\mathcal{N}(1^1;\ 3^1;\ 4^1 6^2;\ n-2)$	0	0	$\frac{8}{39}$	$\frac{32}{13}$	$\frac{-2}{39}$	$\frac{31}{13}$	$\frac{-3}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{9}{13}$	$\frac{-9}{13}$
$\mathcal{N}(2^1;\ 3^1;\ 4^1 6^2;\ n-2)$	0	0	$\frac{8}{39}$	$\frac{-20}{13}$	$\frac{-2}{39}$	$\frac{-34}{13}$	$\frac{7}{26}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{-21}{26}$	$\frac{4}{13}$
$\mathcal{N}(4^1;\ 3^1;\ 4^1 6^2;\ n-2)$	0	0	$\frac{2}{39}$	$\frac{8}{13}$	$\frac{-1}{78}$	$\frac{-43}{26}$	$\frac{5}{26}$	$\frac{1}{52}$	$\frac{9}{52}$	$\frac{-11}{26}$
$\mathcal{N}(8^1;\ 3^1;\ 4^1 6^2;\ n-2)$	0	0	$\frac{2}{39}$	$\frac{-5}{13}$	$\frac{-1}{78}$	$\frac{-17}{26}$	$\frac{5}{26}$	$\frac{1}{52}$	$\frac{9}{52}$	$\frac{-11}{26}$
$\mathcal{N}(1^1;\ 1^1;\ 1^1 3^1 4^1;\ n-1)$	0	0	$\frac{64}{39}$	$\frac{48}{13}$	$\frac{-16}{39}$	$\frac{-12}{13}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{3}{26}$	$\frac{27}{26}$	$\frac{-20}{13}$
$\mathcal{N}(2^1;\ 1^1;\ 1^1 3^1 4^1;\ n-1)$	0	0	$\frac{40}{39}$	$\frac{-48}{13}$	$\frac{-10}{39}$	$\frac{12}{13}$	$\frac{-2}{13}$	$\frac{-3}{26}$	$\frac{-27}{26}$	$\frac{20}{13}$
$\mathcal{N}(4^1;\ 1^1;\ 1^1 3^1 4^1;\ n-1)$	0	0	$\frac{16}{39}$	$\frac{12}{13}$	$\frac{-4}{39}$	$\frac{-3}{13}$	$\frac{1}{26}$	$\frac{-9}{26}$	$\frac{18}{13}$	$\frac{-5}{13}$
$\mathcal{N}(8^1;\ 1^1;\ 1^1 3^1 4^1;\ n-1)$	0	0	$\frac{10}{39}$	$\frac{-12}{13}$	$\frac{-5}{78}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{37}{52}$	$\frac{9}{26}$	$\frac{45}{52}$	$\frac{-29}{26}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^1 3^2;\ \ 2^2 4^1;\ \ n-1)$	0	0	$\frac{20}{39}$	$\frac{-24}{13}$	$\frac{-5}{39}$	$\frac{6}{13}$	$\frac{-1}{13}$	$\frac{-4}{13}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{10}{13}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^1 3^1 6^1;\ \ 2^2 4^1;\ \ n-1)$	0	0	$\frac{8}{39}$	$\frac{6}{13}$	$\frac{-2}{39}$	$\frac{57}{13}$	$\frac{-3}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{9}{13}$	$\frac{4}{13}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^1 6^2;\ \ 2^2 4^1;\ \ n-1)$	0	0	$\frac{10}{39}$	$\frac{-12}{13}$	$\frac{-22}{39}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{6}{13}$	$\frac{9}{26}$	$\frac{3}{26}$	$\frac{5}{13}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^2 6^1;\ \ 1^2 6^1;\ \ n-1)$	0	0	$\frac{32}{39}$	$\frac{24}{13}$	$\frac{-8}{39}$	$\frac{-6}{13}$	$\frac{14}{13}$	$\frac{4}{13}$	$\frac{-3}{13}$	$\frac{-10}{13}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^2 6^1;\ \ 1^2 6^1;\ \ n-1)$	0	0	$\frac{16}{39}$	$\frac{12}{13}$	$\frac{35}{39}$	$\frac{-3}{13}$	$\frac{7}{13}$	$\frac{-9}{26}$	$\frac{-3}{26}$	$\frac{-5}{13}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (3^2 6^1;\ \ 1^2 6^1;\ \ n-1)$	0	0	$\frac{16}{39}$	$\frac{-40}{13}$	$\frac{-4}{39}$	$\frac{10}{13}$	$\frac{8}{39}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{-2}{39}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (6^3;\ \ 1^2 6^1;\ \ n-1)$	0	0	$\frac{8}{39}$	$\frac{-20}{13}$	$\frac{-41}{39}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{17}{39}$	$\frac{15}{26}$	$\frac{5}{26}$	$\frac{25}{39}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^1 2^1 3^1;\ \ 1^2 6^1;\ \ n-1)$	0	0	$\frac{40}{39}$	$\frac{-48}{13}$	$\frac{-10}{39}$	$\frac{12}{13}$	$\frac{-2}{13}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{6}{13}$	$\frac{-6}{13}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^2 2^1;\ \ 2^1 3^2;\ \ n-1)$	0	0	$\frac{40}{39}$	$\frac{-48}{13}$	$\frac{-10}{39}$	$\frac{12}{13}$	$\frac{-2}{13}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{6}{13}$	$\frac{-6}{13}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^3;\ \ 2^1 3^2;\ \ n-1)$	0	0	$\frac{20}{39}$	$\frac{-24}{13}$	$\frac{-5}{39}$	$\frac{123}{13}$	$\frac{-14}{13}$	$\frac{5}{26}$	$\frac{45}{26}$	$\frac{-3}{13}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^1 3^1 6^1;\ \ 2^1 3^2;\ \ n-1)$	0	0	$\frac{16}{39}$	$\frac{-40}{13}$	$\frac{-4}{39}$	$\frac{10}{13}$	$\frac{8}{39}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{-2}{39}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^1 3^2;\ \ 2^1 3^2;\ \ n-1)$	0	0	$\frac{8}{39}$	$\frac{32}{13}$	$\frac{-2}{39}$	$\frac{-8}{13}$	$\frac{4}{39}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{-4}{13}$	$\frac{38}{39}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^1 6^2;\ \ 2^1 3^2;\ \ n-1)$	0	0	$\frac{4}{39}$	$\frac{16}{13}$	$\frac{-1}{39}$	$\frac{35}{13}$	$\frac{2}{39}$	$\frac{1}{26}$	$\frac{9}{26}$	$\frac{19}{39}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^3;\ \ 4^1 6^2;\ \ n-2)$	0	0	$\frac{20}{39}$	$\frac{-24}{13}$	$\frac{-5}{39}$	$\frac{6}{13}$	$\frac{-1}{13}$	$\frac{5}{26}$	$\frac{-33}{26}$	$\frac{10}{13}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^1 2^2;\ \ 4^1 6^2;\ \ n-2)$	0	0	$\frac{10}{39}$	$\frac{-12}{13}$	$\frac{17}{39}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{-1}{26}$	$\frac{-2}{13}$	$\frac{3}{26}$	$\frac{-8}{13}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^1 3^2;\ \ 4^1 6^2;\ \ n-2)$	0	0	$\frac{4}{39}$	$\frac{16}{13}$	$\frac{-1}{39}$	$\frac{-4}{13}$	$\frac{2}{39}$	$\frac{1}{26}$	$\frac{9}{26}$	$\frac{-20}{39}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^1 3^1 6^1;\ \ 4^1 6^2;\ \ n-2)$	0	0	$\frac{4}{39}$	$\frac{-10}{13}$	$\frac{-1}{39}$	$\frac{-17}{13}$	$\frac{17}{78}$	$\frac{1}{26}$	$\frac{-2}{13}$	$\frac{-7}{39}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^1 6^2;\ \ 4^1 6^2;\ \ n-2)$	0	0	$\frac{2}{39}$	$\frac{8}{13}$	$\frac{-20}{39}$	$\frac{-2}{13}$	$\frac{5}{26}$	$\frac{7}{26}$	$\frac{-1}{13}$	$\frac{1}{13}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^2 3^1;\ \ 1^1 3^1 4^1;\ \ n-1)$	0	0	$\frac{32}{39}$	$\frac{24}{13}$	$\frac{-8}{39}$	$\frac{-6}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{-5}{26}$	$\frac{33}{26}$	$\frac{-10}{13}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (3^3;\ \ 1^1 3^1 4^1;\ \ n-1)$	0	0	$\frac{16}{39}$	$\frac{-40}{13}$	$\frac{-4}{39}$	$\frac{10}{13}$	$\frac{-5}{39}$	$\frac{-9}{26}$	$\frac{-3}{26}$	$\frac{50}{39}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^2 3^1;\ \ 1^1 3^1 4^1;\ \ n-1)$	0	0	$\frac{16}{39}$	$\frac{12}{13}$	$\frac{-4}{39}$	$\frac{-3}{13}$	$\frac{1}{26}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{-3}{26}$	$\frac{8}{13}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^1 2^1 6^1;\ \ 1^1 3^1 4^1;\ \ n-1)$	0	0	$\frac{20}{39}$	$\frac{-24}{13}$	$\frac{-5}{39}$	$\frac{6}{13}$	$\frac{11}{26}$	$\frac{5}{26}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{-3}{13}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (3^1 6^2;\ \ 1^1 3^1 4^1;\ \ n-1)$	0	0	$\frac{8}{39}$	$\frac{-20}{13}$	$\frac{-2}{39}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{7}{26}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{5}{26}$	$\frac{4}{13}$

表14：通过 $M_3(24, \chi_{-24})$ 中的形式表示正整数的示例公式

表示数	线性张成系数									
	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}
$\delta_6(1^2 4^1 6^3; n-3)$	0	$\frac{3}{46}$	$\frac{1}{46}$	0	$\frac{-17}{92}$	$\frac{-19}{184}$	$\frac{31}{46}$	$\frac{21}{92}$	$\frac{-39}{92}$	$\frac{-39}{184}$
$\delta_6(1^1 2^1 3^3 4^1; n-2)$	0	$\frac{3}{23}$	$\frac{-1}{23}$	0	$\frac{1}{46}$	$\frac{9}{184}$	$\frac{-1}{46}$	$\frac{-1}{46}$	$\frac{-3}{46}$	$\frac{-21}{184}$
$\delta_6(1^2 2^2 4^1 6^1; n-2)$	0	$\frac{9}{46}$	$\frac{-1}{46}$	0	$\frac{-15}{92}$	$\frac{-5}{92}$	$\frac{15}{23}$	$\frac{19}{92}$	$\frac{-45}{92}$	$\frac{-15}{46}$
$\delta_6(3^2 4^3 6^1; n-3)$	0	$\frac{3}{92}$	$\frac{1}{92}$	0	$\frac{29}{184}$	$\frac{1}{92}$	$\frac{-15}{92}$	$\frac{-1}{92}$	$\frac{-39}{184}$	$\frac{-1}{23}$
$\mathcal{N}_{l,\ t}\ (1^1;\ 1^2 2^1 4^1;\ n-1)$	0	$\frac{36}{23}$	$\frac{-4}{23}$	0	$\frac{-51}{92}$	$\frac{3}{46}$	$\frac{51}{23}$	$\frac{15}{23}$	$\frac{-153}{92}$	$\frac{-51}{46}$
$\mathcal{N}_{l,\ t}\ (2^1;\ 1^2 2^1 4^1;\ n-1)$	0	$\frac{18}{23}$	$\frac{2}{23}$	0	$\frac{-63}{92}$	$\frac{-21}{92}$	$\frac{54}{23}$	$\frac{18}{23}$	$\frac{-117}{92}$	$\frac{-39}{92}$
$\mathcal{N}_{l,\ t}\ (4^1;\ 1^2 2^1 4^1;\ n-1)$	0	$\frac{9}{23}$	$\frac{-1}{23}$	0	$\frac{39}{92}$	$\frac{9}{23}$	$\frac{-39}{23}$	$\frac{-27}{46}$	$\frac{117}{92}$	$\frac{39}{46}$
$\mathcal{N}_{l,\ t}\ (8^1;\ 1^2 2^1 4^1;\ n-1)$	0	$\frac{9}{46}$	$\frac{1}{46}$	0	$\frac{9}{23}$	$\frac{3}{23}$	$\frac{27}{46}$	$\frac{9}{46}$	$\frac{63}{46}$	$\frac{21}{46}$
$\mathcal{N}(1^1;\ 1^1 2^1;\ 4^2;\ n-1)$	0	$\frac{36}{23}$	$\frac{-4}{23}$	0	$\frac{-51}{92}$	$\frac{3}{46}$	$\frac{51}{23}$	$\frac{15}{23}$	$\frac{-153}{92}$	$\frac{-51}{46}$
$\mathcal{N}(2^1;\ 1^1 2^1;\ 4^2;\ n-1)$	0	$\frac{18}{23}$	$\frac{2}{23}$	0	$\frac{-63}{92}$	$\frac{-21}{92}$	$\frac{54}{23}$	$\frac{18}{23}$	$\frac{-117}{92}$	$\frac{-39}{92}$
$\mathcal{N}(4^1;\ 1^1 2^1;\ 4^2;\ n-1)$	0	$\frac{9}{23}$	$\frac{-1}{23}$	0	$\frac{39}{92}$	$\frac{9}{23}$	$\frac{-39}{23}$	$\frac{-27}{46}$	$\frac{117}{92}$	$\frac{39}{46}$
$\mathcal{N}(8^1;\ 1^1 2^1;\ 4^2;\ n-1)$	0	$\frac{9}{46}$	$\frac{1}{46}$	0	$\frac{9}{23}$	$\frac{3}{23}$	$\frac{27}{46}$	$\frac{9}{46}$	$\frac{63}{46}$	$\frac{21}{46}$
$\mathcal{N}(1^1;\ 3^1 6^1;\ 4^2;\ n-1)$	0	$\frac{12}{23}$	$\frac{-4}{23}$	0	$\frac{-15}{92}$	$\frac{41}{92}$	$\frac{21}{23}$	$\frac{-2}{23}$	$\frac{183}{92}$	$\frac{27}{92}$
$\mathcal{N}(2^1;\ 3^1 6^1;\ 4^2;\ n-1)$	0	$\frac{6}{23}$	$\frac{2}{23}$	0	$\frac{93}{92}$	$\frac{2}{23}$	$\frac{-30}{23}$	$\frac{-2}{23}$	$\frac{51}{92}$	$\frac{15}{23}$
$\mathcal{N}(4^1;\ 3^1 6^1;\ 4^2;\ n-1)$	0	$\frac{3}{23}$	$\frac{-1}{23}$	0	$\frac{-21}{92}$	$\frac{-7}{92}$	$\frac{-12}{23}$	$\frac{-1}{46}$	$\frac{201}{92}$	$\frac{93}{92}$
$\mathcal{N}(8^1;\ 3^1 6^1;\ 4^2;\ n-1)$	0	$\frac{3}{46}$	$\frac{1}{46}$	0	$\frac{3}{46}$	$\frac{1}{46}$	$\frac{-15}{46}$	$\frac{-1}{46}$	$\frac{42}{23}$	$\frac{21}{23}$
$\mathcal{N}(1^1;\ 1^1 6^1;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	0	$\frac{24}{23}$	$\frac{-8}{23}$	0	$\frac{-15}{46}$	$\frac{-5}{46}$	$\frac{134}{23}$	$\frac{42}{23}$	$\frac{-93}{46}$	$\frac{-65}{46}$
$\mathcal{N}(2^1;\ 1^1 6^1;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	0	$\frac{12}{23}$	$\frac{4}{23}$	0	$\frac{-45}{46}$	$\frac{-15}{46}$	$\frac{124}{23}$	$\frac{42}{23}$	$\frac{-87}{46}$	$\frac{-55}{46}$
$\mathcal{N}(4^1;\ 1^1 6^1;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	0	$\frac{6}{23}$	$\frac{-2}{23}$	0	$\frac{24}{23}$	$\frac{8}{23}$	$\frac{-70}{23}$	$\frac{-24}{23}$	$\frac{66}{23}$	$\frac{35}{23}$
$\mathcal{N}(8^1;\ 1^1 6^1;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	0	$\frac{3}{23}$	$\frac{1}{23}$	0	$\frac{3}{23}$	$\frac{27}{92}$	$\frac{31}{23}$	$\frac{21}{46}$	$\frac{15}{23}$	$\frac{7}{92}$
$\mathcal{N}(1^1;\ 2^1 3^1;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	0	$\frac{24}{23}$	$\frac{8}{23}$	0	$\frac{-21}{46}$	$\frac{8}{23}$	$\frac{18}{23}$	$\frac{-8}{23}$	$\frac{33}{46}$	$\frac{-9}{23}$
$\mathcal{N}(2^1;\ 2^1 3^1;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	0	$\frac{12}{23}$	$\frac{-4}{23}$	0	$\frac{27}{46}$	$\frac{-7}{23}$	$\frac{-48}{23}$	$\frac{-2}{23}$	$\frac{57}{46}$	$\frac{24}{23}$
$\mathcal{N}(4^1;\ 2^1 3^1;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	0	$\frac{6}{23}$	$\frac{2}{23}$	0	$\frac{6}{23}$	$\frac{2}{23}$	$\frac{-30}{23}$	$\frac{-2}{23}$	$\frac{30}{23}$	$\frac{15}{23}$
$\mathcal{N}(8^1;\ 2^1 3^1;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	0	$\frac{3}{23}$	$\frac{-1}{23}$	0	$\frac{12}{23}$	$\frac{-7}{92}$	$\frac{-12}{23}$	$\frac{-1}{46}$	$\frac{33}{23}$	$\frac{93}{92}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}(1^3 6^1; 4^2;\ n-1)$	0	$\frac{18}{23}$	$\frac{2}{23}$	0	$\frac{213}{92}$	$\frac{71}{92}$	$\frac{-15}{23}$	$\frac{-5}{23}$	$\frac{-117}{92}$	$\frac{-39}{92}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^1 6^3;\ 4^2;\ n-1)$	0	$\frac{3}{23}$	$\frac{-1}{23}$	0	$\frac{71}{92}$	$\frac{39}{92}$	$\frac{-35}{23}$	$\frac{-12}{23}$	$\frac{201}{92}$	$\frac{93}{92}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^3 3^1;\ 4^2;\ n-1)$	0	$\frac{9}{23}$	$\frac{-1}{23}$	0	$\frac{39}{92}$	$\frac{-5}{46}$	$\frac{-39}{23}$	$\frac{-2}{23}$	$\frac{117}{92}$	$\frac{39}{46}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^1 3^3;\ 4^2;\ n-1)$	0	$\frac{6}{23}$	$\frac{2}{23}$	0	$\frac{1}{92}$	$\frac{2}{23}$	$\frac{-7}{23}$	$\frac{-2}{23}$	$\frac{51}{92}$	$\frac{15}{23}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^2 2^1 3^1;\ 4^2;\ n-1)$	0	$\frac{18}{23}$	$\frac{-2}{23}$	0	$\frac{9}{92}$	$\frac{13}{46}$	$\frac{-9}{23}$	$\frac{-4}{23}$	$\frac{27}{92}$	$\frac{9}{46}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^1 2^2 6^1;\ 4^2;\ n-1)$	0	$\frac{9}{23}$	$\frac{1}{23}$	0	$\frac{3}{92}$	$\frac{1}{92}$	$\frac{27}{23}$	$\frac{9}{23}$	$\frac{45}{92}$	$\frac{15}{92}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^1 3^2 6^1;\ 4^2;\ n-1)$	0	$\frac{6}{23}$	$\frac{-2}{23}$	0	$\frac{-19}{92}$	$\frac{9}{92}$	$\frac{-1}{23}$	$\frac{-1}{23}$	$\frac{195}{92}$	$\frac{71}{92}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^1 3^1 6^2;\ 4^2;\ n-1)$	0	$\frac{3}{23}$	$\frac{1}{23}$	0	$\frac{35}{92}$	$\frac{1}{23}$	$\frac{-15}{23}$	$\frac{-1}{23}$	$\frac{129}{92}$	$\frac{19}{23}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (3^3 6^1;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	0	$\frac{4}{23}$	$\frac{4}{23}$	0	$\frac{7}{46}$	$\frac{7}{138}$	$\frac{-26}{69}$	$\frac{-2}{23}$	$\frac{61}{46}$	$\frac{95}{138}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (3^1 6^3;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	0	$\frac{2}{23}$	$\frac{2}{23}$	0	$\frac{15}{46}$	$\frac{5}{46}$	$\frac{-12}{23}$	$\frac{-1}{23}$	$\frac{65}{46}$	$\frac{35}{46}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^1 2^1 3^2;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	0	$\frac{12}{23}$	$\frac{4}{23}$	0	$\frac{1}{46}$	$\frac{4}{23}$	$\frac{-14}{23}$	$\frac{-4}{23}$	$\frac{51}{46}$	$\frac{7}{23}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^1 2^1 6^2;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	0	$\frac{6}{23}$	$\frac{2}{23}$	0	$\frac{-11}{46}$	$\frac{2}{23}$	$\frac{62}{23}$	$\frac{21}{23}$	$\frac{-9}{46}$	$\frac{-8}{23}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^2 3^1 6^1;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	0	$\frac{12}{23}$	$\frac{-4}{23}$	0	$\frac{27}{46}$	$\frac{9}{46}$	$\frac{-2}{23}$	$\frac{-2}{23}$	$\frac{57}{46}$	$\frac{25}{46}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^2 3^1 6^1;\ 2^1 6^1;\ n-1)$	0	$\frac{6}{23}$	$\frac{-2}{23}$	0	$\frac{25}{46}$	$\frac{-7}{46}$	$\frac{-24}{23}$	$\frac{-1}{23}$	$\frac{63}{46}$	$\frac{47}{46}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^2;\ 3^2 4^1 6^1;\ n-2)$	0	$\frac{6}{23}$	$\frac{2}{23}$	0	$\frac{47}{92}$	$\frac{2}{23}$	$\frac{-7}{23}$	$\frac{-2}{23}$	$\frac{-87}{92}$	$\frac{-8}{23}$

下页续...

表14：线性张成系数（续.....）

表示数	线性张成系数									
	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^2;\ 3^2 4^1 6^1;\ n-2)$	0	$\frac{3}{23}$	$\frac{1}{23}$	0	$\frac{-11}{92}$	$\frac{1}{23}$	$\frac{8}{23}$	$\frac{-1}{23}$	$\frac{-9}{92}$	$\frac{-4}{23}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (3^2;\ 3^2 4^1 6^1;\ n-2)$	0	$\frac{2}{23}$	$\frac{-2}{23}$	0	$\frac{-13}{92}$	$\frac{5}{138}$	$\frac{5}{69}$	0	$\frac{21}{92}$	$\frac{-5}{138}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (6^2;\ 3^2 4^1 6^1;\ n-2)$	0	$\frac{1}{23}$	$\frac{-1}{23}$	0	$\frac{5}{92}$	$\frac{7}{69}$	$\frac{14}{69}$	0	$\frac{-1}{92}$	$\frac{-7}{69}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^1 2^1;\ 1^1 2^2 3^1;\ n-1)$	0	$\frac{18}{23}$	$\frac{2}{23}$	0	$\frac{3}{46}$	$\frac{1}{46}$	$\frac{-15}{23}$	$\frac{-5}{23}$	$\frac{45}{46}$	$\frac{15}{46}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^1 2^1;\ 1^1 3^1 6^2;\ n-2)$	0	$\frac{6}{23}$	$\frac{-2}{23}$	0	$\frac{1}{23}$	$\frac{-7}{46}$	$\frac{-1}{23}$	$\frac{-1}{23}$	$\frac{-3}{23}$	$\frac{1}{46}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^1 2^1;\ 2^1 4^2 6^1;\ n-2)$	0	$\frac{9}{46}$	$\frac{-1}{46}$	0	$\frac{-15}{92}$	$\frac{-5}{92}$	$\frac{15}{23}$	$\frac{19}{92}$	$\frac{-45}{92}$	$\frac{-15}{46}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (3^1 6^1;\ 1^1 2^2 3^1;\ n-1)$	0	$\frac{6}{23}$	$\frac{2}{23}$	0	$\frac{6}{23}$	$\frac{2}{23}$	$\frac{-7}{23}$	$\frac{-2}{23}$	$\frac{30}{23}$	$\frac{15}{23}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (3^1 6^1;\ 1^1 3^1 6^2;\ n-2)$	0	$\frac{2}{23}$	$\frac{-2}{23}$	0	$\frac{5}{46}$	$\frac{5}{138}$	$\frac{5}{69}$	0	$\frac{-1}{46}$	$\frac{-5}{138}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (3^1 6^1;\ 2^1 4^2 6^1;\ n-2)$	0	$\frac{3}{46}$	$\frac{-1}{46}$	0	$\frac{1}{92}$	$\frac{2}{23}$	$\frac{11}{46}$	$\frac{-1}{92}$	$\frac{-3}{92}$	$\frac{-11}{92}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^1 3^1;\ 1^2 2^1 4^1;\ n-1)$	0	$\frac{18}{23}$	$\frac{-2}{23}$	0	$\frac{9}{92}$	$\frac{13}{46}$	$\frac{-9}{23}$	$\frac{-4}{23}$	$\frac{27}{92}$	$\frac{9}{46}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^1 6^1;\ 1^2 2^1 4^1;\ n-1)$	0	$\frac{9}{23}$	$\frac{1}{23}$	0	$\frac{3}{92}$	$\frac{1}{92}$	$\frac{27}{23}$	$\frac{9}{23}$	$\frac{45}{92}$	$\frac{15}{92}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^1 6^1;\ 2^4;\ n-1)$	0	$\frac{9}{23}$	$\frac{1}{23}$	0	$\frac{3}{92}$	$\frac{1}{92}$	$\frac{27}{23}$	$\frac{9}{23}$	$\frac{45}{92}$	$\frac{15}{92}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^1 6^1;\ 4^4;\ n-2)$	0	$\frac{9}{92}$	$\frac{1}{92}$	0	$\frac{105}{184}$	$\frac{35}{184}$	$\frac{-21}{46}$	$\frac{-7}{46}$	$\frac{-81}{184}$	$\frac{-27}{184}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^1 6^1;\ 6^4;\ n-3)$	0	$\frac{1}{23}$	$\frac{1}{23}$	0	$\frac{-31}{92}$	$\frac{-31}{276}$	$\frac{97}{69}$	$\frac{11}{23}$	$\frac{-73}{92}$	$\frac{-125}{276}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^1 6^1;\ 1^2 3^2;\ n-1)$	0	$\frac{12}{23}$	$\frac{-4}{23}$	0	$\frac{27}{46}$	$\frac{9}{46}$	$\frac{-2}{23}$	$\frac{-2}{23}$	$\frac{57}{46}$	$\frac{25}{46}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^1 6^1;\ 2^2 6^2;\ n-2)$	0	$\frac{3}{23}$	$\frac{-1}{23}$	0	$\frac{-21}{92}$	$\frac{-7}{92}$	$\frac{34}{23}$	$\frac{11}{23}$	$\frac{-75}{92}$	$\frac{-45}{92}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^1 3^1;\ 2^4;\ n-1)$	0	$\frac{9}{23}$	$\frac{-1}{23}$	0	$\frac{39}{92}$	$\frac{-5}{46}$	$\frac{-39}{23}$	$\frac{-2}{23}$	$\frac{117}{92}$	$\frac{39}{46}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^1 3^1;\ 4^4;\ n-2)$	0	$\frac{9}{92}$	$\frac{-1}{92}$	0	$\frac{-15}{184}$	$\frac{9}{92}$	$\frac{15}{46}$	$\frac{-1}{46}$	$\frac{-45}{184}$	$\frac{-15}{92}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^1 3^1;\ 6^4;\ n-3)$	0	$\frac{1}{23}$	$\frac{-1}{23}$	0	$\frac{5}{92}$	$\frac{-3}{46}$	$\frac{-3}{23}$	0	$\frac{-1}{92}$	$\frac{3}{46}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^1 3^1;\ 1^2 3^2;\ n-1)$	0	$\frac{12}{23}$	$\frac{4}{23}$	0	$\frac{1}{46}$	$\frac{4}{23}$	$\frac{-14}{23}$	$\frac{-4}{23}$	$\frac{51}{46}$	$\frac{7}{23}$
$\mathcal{N}_{s,t}(2^1 3^1; 2^2 6^2;\ n-2)$	0	$\frac{3}{23}$	$\frac{1}{23}$	0	$\frac{-11}{92}$	$\frac{1}{23}$	$\frac{8}{23}$	$\frac{-1}{23}$	$\frac{-9}{92}$	$\frac{-4}{23}$
$\mathcal{N}(1^1;\ 1^1;\ 2^2 4^1;\ n-1)$	0	$\frac{36}{23}$	$-\frac{4}{23}$	0	$-\frac{51}{92}$	$\frac{3}{46}$	$\frac{51}{23}$	$\frac{15}{23}$	$-\frac{153}{92}$	$-\frac{51}{46}$
$\mathcal{N}(2^1;\ 1^1;\ 2^2 4^1;\ n-1)$	0	$\frac{18}{23}$	$\frac{2}{23}$	0	$-\frac{63}{92}$	$-\frac{21}{92}$	$\frac{54}{23}$	$\frac{18}{23}$	$-\frac{117}{92}$	$-\frac{39}{92}$
$\mathcal{N}(4^1;\ 1^1;\ 2^2 4^1;\ n-1)$	0	$\frac{9}{23}$	$-\frac{1}{23}$	0	$\frac{39}{92}$	$\frac{9}{23}$	$-\frac{39}{23}$	$-\frac{27}{46}$	$\frac{117}{92}$	$\frac{39}{46}$
$\mathcal{N}(8^1;\ 1^1;\ 2^2 4^1;\ n-1)$	0	$\frac{9}{46}$	$\frac{1}{46}$	0	$\frac{9}{23}$	$\frac{3}{23}$	$\frac{27}{46}$	$\frac{9}{46}$	$\frac{63}{46}$	$\frac{21}{46}$
$\mathcal{N}(1^1;\ 6^1;\ 1^2 6^1;\ n-1)$	0	$\frac{24}{23}$	$-\frac{8}{23}$	0	$-\frac{15}{46}$	$-\frac{5}{46}$	$\frac{134}{23}$	$\frac{42}{23}$	$-\frac{93}{46}$	$-\frac{65}{46}$
$\mathcal{N}(2^1;\ 6^1;\ 1^2 6^1;\ n-1)$	0	$\frac{12}{23}$	$\frac{4}{23}$	0	$-\frac{45}{46}$	$-\frac{15}{46}$	$\frac{124}{23}$	$\frac{42}{23}$	$-\frac{87}{46}$	$-\frac{55}{46}$
$\mathcal{N}(4^1;\ 6^1;\ 1^2 6^1;\ n-1)$	0	$\frac{6}{23}$	$-\frac{2}{23}$	0	$\frac{24}{23}$	$\frac{8}{23}$	$-\frac{70}{23}$	$-\frac{24}{23}$	$\frac{66}{23}$	$\frac{35}{23}$
$\mathcal{N}(8^1;\ 6^1;\ 1^2 6^1;\ n-1)$	0	$\frac{3}{23}$	$\frac{1}{23}$	0	$\frac{3}{23}$	$\frac{27}{92}$	$\frac{31}{23}$	$\frac{21}{46}$	$\frac{15}{23}$	$\frac{7}{92}$
$\mathcal{N}(1^1;\ 2^1;\ 2^1 3^2;\ n-1)$	0	$\frac{24}{23}$	$\frac{8}{23}$	0	$-\frac{21}{46}$	$\frac{8}{23}$	$\frac{18}{23}$	$-\frac{8}{23}$	$\frac{33}{46}$	$-\frac{9}{23}$
$\mathcal{N}(2^1;\ 2^1;\ 2^1 3^2;\ n-1)$	0	$\frac{12}{23}$	$-\frac{4}{23}$	0	$\frac{27}{46}$	$-\frac{7}{23}$	$-\frac{48}{23}$	$-\frac{2}{23}$	$\frac{57}{46}$	$\frac{24}{23}$
$\mathcal{N}(4^1;\ 2^1;\ 2^1 3^2;\ n-1)$	0	$\frac{6}{23}$	$\frac{2}{23}$	0	$\frac{6}{23}$	$\frac{2}{23}$	$-\frac{30}{23}$	$-\frac{2}{23}$	$\frac{30}{23}$	$\frac{15}{23}$
$\mathcal{N}(8^1;\ 2^1;\ 2^1 3^2;\ n-1)$	0	$\frac{3}{23}$	$-\frac{1}{23}$	0	$\frac{12}{23}$	$-\frac{7}{92}$	$-\frac{12}{23}$	$-\frac{1}{46}$	$\frac{33}{23}$	$\frac{93}{92}$
$\mathcal{N}(1^1;\ 1^1;\ 4^1 6^2;\ n-2)$	0	$\frac{12}{23}$	$\frac{4}{23}$	0	$-\frac{21}{92}$	$-\frac{15}{46}$	$\frac{55}{23}$	$\frac{19}{23}$	$-\frac{243}{92}$	$-\frac{55}{46}$
$\mathcal{N}(2^1;\ 1^1;\ 4^1 6^2;\ n-2)$	0	$\frac{6}{23}$	$-\frac{2}{23}$	0	$-\frac{111}{92}$	$-\frac{37}{92}$	$\frac{68}{23}$	$\frac{22}{23}$	$-\frac{81}{92}$	$-\frac{67}{92}$
$\mathcal{N}(4^1;\ 1^1;\ 4^1 6^2;\ n-2)$	0	$\frac{3}{23}$	$\frac{1}{23}$	0	$\frac{81}{92}$	$\frac{27}{92}$	$-\frac{38}{23}$	$-\frac{25}{46}$	$-\frac{9}{92}$	$\frac{7}{92}$
$\mathcal{N}(8^1;\ 1^1;\ 4^1 6^2;\ n-2)$	0	$\frac{3}{46}$	$-\frac{1}{46}$	0	$\frac{6}{23}$	$\frac{2}{23}$	$\frac{17}{23}$	$\frac{11}{46}$	$-\frac{18}{23}$	$-\frac{17}{46}$
$\mathcal{N}(1^1;\ 3^1;\ 1^1 3^1 4^1;\ n-1)$	0	$\frac{24}{23}$	$-\frac{8}{23}$	0	$-\frac{15}{46}$	$\frac{9}{23}$	$-\frac{4}{23}$	$-\frac{4}{23}$	$\frac{45}{46}$	$\frac{2}{23}$
$\mathcal{N}(2^1;\ 3^1;\ 1^1 3^1 4^1;\ n-1)$	0	$\frac{12}{23}$	$\frac{4}{23}$	0	$\frac{12}{23}$	$\frac{4}{23}$	$-\frac{14}{23}$	$-\frac{4}{23}$	$-\frac{9}{23}$	$\frac{7}{23}$
$\mathcal{N}(4^1;\ 3^1;\ 1^1 3^1 4^1;\ n-1)$	0	$\frac{6}{23}$	$-\frac{2}{23}$	0	$-\frac{21}{46}$	$\frac{9}{92}$	$-\frac{1}{23}$	$-\frac{1}{23}$	$\frac{63}{46}$	$\frac{71}{92}$

下页续...

表14：线性张成系数（续.....）

表示数	线性张成系数									
	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}
$\mathcal{N}(8^1;\ 3^1;\ 1^13^14^1;\ n-1)$	0	$\frac{3}{23}$	$\frac{1}{23}$	0	$\frac{3}{23}$	$\frac{1}{23}$	$-\frac{7}{46}$	$-\frac{1}{23}$	$\frac{99}{46}$	$\frac{19}{23}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^23^1;\ \ 2^24^1;\ \ n-1)$	0	$\frac{18}{23}$	$-\frac{2}{23}$	0	$\frac{9}{92}$	$\frac{13}{46}$	$-\frac{9}{23}$	$-\frac{4}{23}$	$\frac{27}{92}$	$\frac{9}{46}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (3^3;\ \ 2^24^1;\ \ n-1)$	0	$\frac{6}{23}$	$\frac{2}{23}$	0	$\frac{1}{92}$	$\frac{2}{23}$	$-\frac{7}{23}$	$-\frac{2}{23}$	$\frac{51}{92}$	$\frac{15}{23}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^23^1;\ \ 2^24^1;\ \ n-1)$	0	$\frac{9}{23}$	$-\frac{1}{23}$	0	$\frac{39}{92}$	$-\frac{5}{46}$	$-\frac{39}{23}$	$-\frac{2}{23}$	$\frac{117}{92}$	$\frac{39}{46}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^12^16^1;\ \ 2^24^1;\ \ n-1)$	0	$\frac{9}{23}$	$\frac{1}{23}$	0	$\frac{3}{92}$	$\frac{1}{92}$	$\frac{27}{23}$	$\frac{9}{23}$	$\frac{45}{92}$	$\frac{15}{92}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (3^16^2;\ \ 2^24^1;\ \ n-1)$	0	$\frac{3}{23}$	$\frac{1}{23}$	0	$\frac{35}{92}$	$\frac{1}{23}$	$-\frac{15}{23}$	$-\frac{1}{23}$	$\frac{129}{92}$	$\frac{19}{23}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^22^1;\ \ 1^26^1;\ \ n-1)$	0	$\frac{36}{23}$	$-\frac{4}{23}$	0	$\frac{9}{46}$	$-\frac{10}{23}$	$-\frac{18}{23}$	$-\frac{8}{23}$	$\frac{27}{46}$	$\frac{9}{23}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^3;\ \ 1^26^1;\ \ n-1)$	0	$\frac{18}{23}$	$-\frac{2}{23}$	0	$\frac{39}{46}$	$-\frac{5}{23}$	$-\frac{78}{23}$	$-\frac{27}{23}$	$\frac{117}{46}$	$\frac{39}{23}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^13^16^1;\ \ 1^26^1;\ \ n-1)$	0	$\frac{12}{23}$	$-\frac{4}{23}$	0	$\frac{27}{46}$	$\frac{9}{46}$	$-\frac{2}{23}$	$-\frac{2}{23}$	$\frac{57}{46}$	$\frac{25}{46}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^13^2;\ \ 1^26^1;\ \ n-1)$	0	$\frac{12}{23}$	$\frac{4}{23}$	0	$\frac{1}{46}$	$\frac{4}{23}$	$-\frac{14}{23}$	$-\frac{4}{23}$	$\frac{51}{46}$	$\frac{7}{23}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^16^2;\ \ 1^26^1;\ \ n-1)$	0	$\frac{6}{23}$	$\frac{2}{23}$	0	$-\frac{11}{46}$	$\frac{2}{23}$	$\frac{62}{23}$	$\frac{21}{23}$	$-\frac{9}{46}$	$-\frac{8}{23}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^26^1;\ \ 2^13^2;\ \ n-1)$	0	$\frac{12}{23}$	$-\frac{4}{23}$	0	$\frac{27}{46}$	$\frac{9}{46}$	$-\frac{2}{23}$	$-\frac{2}{23}$	$\frac{57}{46}$	$\frac{25}{46}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^26^1;\ \ 2^13^2;\ \ n-1)$	0	$\frac{6}{23}$	$-\frac{2}{23}$	0	$\frac{25}{46}$	$-\frac{7}{46}$	$-\frac{24}{23}$	$-\frac{1}{23}$	$\frac{63}{46}$	$\frac{47}{46}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (3^26^1;\ \ 2^13^2;\ \ n-1)$	0	$\frac{4}{23}$	$\frac{4}{23}$	0	$\frac{7}{46}$	$\frac{7}{138}$	$-\frac{26}{69}$	$-\frac{2}{23}$	$\frac{61}{46}$	$\frac{95}{138}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (6^3;\ \ 2^13^2;\ \ n-1)$	0	$\frac{2}{23}$	$\frac{2}{23}$	0	$\frac{15}{46}$	$\frac{5}{46}$	$-\frac{12}{23}$	$-\frac{1}{23}$	$\frac{65}{46}$	$\frac{35}{46}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^12^13^1;\ \ 2^13^2;\ \ n-1)$	0	$\frac{12}{23}$	$\frac{4}{23}$	0	$\frac{1}{46}$	$\frac{4}{23}$	$-\frac{14}{23}$	$-\frac{4}{23}$	$\frac{51}{46}$	$\frac{7}{23}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^23^1;\ \ 4^16^2;\ \ n-2)$	0	$\frac{6}{23}$	$\frac{2}{23}$	0	$\frac{47}{92}$	$\frac{2}{23}$	$-\frac{7}{23}$	$-\frac{2}{23}$	$-\frac{87}{92}$	$-\frac{8}{23}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (3^3;\ \ 4^16^2;\ \ n-2)$	0	$\frac{2}{23}$	$-\frac{2}{23}$	0	$-\frac{13}{92}$	$\frac{5}{138}$	$\frac{5}{69}$	0	$\frac{21}{92}$	$-\frac{5}{138}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^23^1;\ \ 4^16^2;\ \ n-2)$	0	$\frac{3}{23}$	$\frac{1}{23}$	0	$-\frac{11}{92}$	$\frac{1}{23}$	$\frac{8}{23}$	$-\frac{1}{23}$	$-\frac{9}{92}$	$-\frac{4}{23}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^12^16^1;\ \ 4^16^2;\ \ n-2)$	0	$\frac{3}{23}$	$-\frac{1}{23}$	0	$-\frac{21}{92}$	$-\frac{7}{92}$	$\frac{34}{23}$	$\frac{11}{23}$	$-\frac{75}{92}$	$-\frac{45}{92}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (3^16^2;\ \ 4^16^2;\ \ n-2)$	0	$\frac{1}{23}$	$-\frac{1}{23}$	0	$\frac{5}{92}$	$\frac{7}{69}$	$\frac{14}{69}$	0	$-\frac{1}{92}$	$-\frac{7}{69}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^3;\ \ 1^13^14^1;\ \ n-1)$	0	$\frac{36}{23}$	$\frac{4}{23}$	0	$\frac{75}{46}$	$\frac{25}{46}$	$-\frac{30}{23}$	$-\frac{10}{23}$	$-\frac{117}{46}$	$-\frac{39}{46}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^12^2;\ \ 1^13^14^1;\ \ n-1)$	0	$\frac{18}{23}$	$\frac{2}{23}$	0	$\frac{3}{46}$	$\frac{1}{46}$	$-\frac{15}{23}$	$-\frac{5}{23}$	$\frac{45}{46}$	$\frac{15}{46}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^13^2;\ \ 1^13^14^1;\ \ n-1)$	0	$\frac{12}{23}$	$-\frac{4}{23}$	0	$-\frac{19}{46}$	$\frac{9}{46}$	$-\frac{2}{23}$	$-\frac{2}{23}$	$\frac{57}{46}$	$\frac{25}{46}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (2^13^16^1;\ \ 1^13^14^1;\ \ n-1)$	0	$\frac{6}{23}$	$\frac{2}{23}$	0	$\frac{6}{23}$	$\frac{2}{23}$	$-\frac{7}{23}$	$-\frac{2}{23}$	$\frac{30}{23}$	$\frac{15}{23}$
$\mathcal{N}_{s,\ t}\ (1^16^2;\ \ 1^13^14^1;\ \ n-1)$	0	$\frac{6}{23}$	$-\frac{2}{23}$	0	$\frac{25}{46}$	$\frac{8}{23}$	$-\frac{1}{23}$	$-\frac{1}{23}$	$\frac{63}{46}$	$\frac{12}{23}$

6. APPENDIX-II

我们给出了用系数为 1、2、3 和 6 的高阶形数之和表示正整数的表示公式（当$a=4$时），其中变量数分别为 6 个（见表15-16）、8 个（见表17）和 10 个（见表18-19）。我们使用表B中构造的一些狄利克雷特征，以及权3、层 24 的基元素的 n^{th} 傅里叶系数，给出这些表示公式。

表15：在 $M_3(24,\chi_{-3})$ 中，以系数为 $a=3$ 的形数之和表示正整数的表示数示例公式（当 $a=3$ 时）

图形形式	线性张成系数											
	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	c_9	c_{10}	c_{11}	c_{12}
$N_4(1^5,2^0,3^1,6^0;n-1)$	$\frac{-1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	0	0	0	0	0	0
$N_4(1^2,2^1,3^2,6^1;n-2)$	$\frac{-1}{16}$	$\frac{1}{16}$	0	0	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	0	0	$\frac{-1}{8}$	0	0	0
$N_4(1^1,2^0,3^5,6^0;n-2)$	$\frac{-1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0	0	0	0	0
$N_4(1^0,2^5,3^0,6^1;n-2)$	0	$\frac{-1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	0	0	0	0	0
下页续...												

表15：线性张成系数。（续.....）

图形形式	线性张成系数											
	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	c_9	c_{10}	c_{11}	c_{12}
$N_4(1^0,2^3,3^0,6^3;n-3)$	$\frac{-1}{32}$	$\frac{-3}{32}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{3}{32}$	$\frac{-9}{32}$	$\frac{-3}{8}$	0	$\frac{-1}{16}$	0	0	0
$N_4(1^0,2^1,3^0,6^5;n-4)$	0	$\frac{-1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0	0	0	0

表16：当 $a=3$ 时，在 $M_3(24,\chi_{-4})$ 中用带系数的形数之和表示正整数的表示数的示例公式

图形形式	线性张成系数											
	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	c_9	c_{10}	c_{11}	c_{12}
$N_4(1^4,2^2,3^0,6^0;n-1)$	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
$N_4(1^4,2^0,3^0,6^2;n-2)$	0	0	0	0	$\frac{2}{7}$	0	$\frac{9}{7}$	0	$\frac{-2}{7}$	$\frac{-9}{7}$	0	0
$N_4(1^1,2^3,3^1,6^1;n-2)$	0	0	0	0	$\frac{5}{28}$	0	$\frac{-9}{28}$	0	$\frac{-5}{28}$	$\frac{-3}{7}$	0	0
$N_4(1^1,2^1,3^1,6^3;n-3)$	0	0	0	0	$\frac{1}{28}$	0	$\frac{15}{28}$	0	$\frac{-1}{28}$	$\frac{-2}{7}$	0	0
$N_4(1^0,2^2,3^4,6^0;n-2)$	0	0	0	0	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{-6}{7}$	0	$\frac{-1}{7}$	$\frac{-1}{7}$	0	0
$N_4(1^0,2^0,3^4,6^2;n-3)$	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0

表17：当 a $=4$ 时，在 $M_4(24,\chi_0)$ 中，系数为正整数的形数之和表示正整数的示例公式

图形形式	线性张成系数 M_k							
	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8
	c_9	c_{10}	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}	c_{16}
$N_4(1^8,2^0,3^0,6^0;n-1)$	$\frac{1}{240}$	$\frac{-1}{240}$	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0
$N_4(1^5,2^1,3^1,6^1;n-2)$	$\frac{13}{19200}$	$\frac{-13}{19200}$	$\frac{9}{6400}$	0	$\frac{-9}{6400}$	0	0	0
	$\frac{-1}{10}$	$\frac{-1}{2}$	0	0	0	$\frac{-1}{16}$	0	0
$N_4(1^4,2^0,3^4,6^0;n-2)$	$\frac{1}{2400}$	$\frac{-1}{2400}$	$\frac{3}{800}$	0	$\frac{-3}{800}$	0	0	0
	$\frac{-1}{10}$	0	0	0	0	0	0	0
$N_4(1^2,2^4,3^2,6^0;n-2)$	$\frac{7}{19200}$	$\frac{-7}{19200}$	$\frac{-9}{6400}$	0	$\frac{9}{6400}$	0	0	0
	$\frac{-1}{40}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	$\frac{-1}{16}$	0	0
$N_4(1^2,2^2,3^2,6^2;n-3)$	$\frac{1}{9600}$	$\frac{-1}{9600}$	$\frac{3}{3200}$	0	$\frac{-3}{3200}$	0	0	0
	$\frac{-1}{40}$	$\frac{-1}{4}$	0	0	0	0	0	0
$N_4(1^2,2^0,3^2,6^4;n-4)$	$\frac{1}{19200}$	$\frac{-1}{19200}$	$\frac{-7}{6400}$	0	$\frac{7}{6400}$	0	0	0
	$\frac{1}{120}$	$\frac{-1}{12}$	0	0	0	$\frac{-1}{48}$	0	0
$N_4(1^1,2^1,3^5,6^1;n-3)$	$\frac{1}{19200}$	$\frac{-1}{19200}$	$\frac{13}{6400}$	0	$\frac{-13}{6400}$	0	0	0
	$\frac{-1}{30}$	$\frac{-1}{6}$	0	0	0	$\frac{1}{48}$	0	0
$N_4(1^0,2^8,3^0,6^0;n-2)$	0	$\frac{1}{240}$	0	$\frac{-1}{240}$	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0
$N_4(1^0,2^6,3^0,6^2;n-3)$	$\frac{7}{38400}$	$\frac{-21}{12800}$	$\frac{-9}{12800}$	$\frac{7}{4800}$	$\frac{81}{12800}$	0	$\frac{-9}{1600}$	0
	$\frac{-1}{80}$	$\frac{-1}{40}$	0	0	0	$\frac{-1}{32}$	0	0
$N_4(1^0,2^4,3^0,6^4;n-4)$	0	$\frac{1}{2400}$	0	$\frac{-1}{2400}$	$\frac{3}{800}$	0	$\frac{-3}{800}$	0
	0	$\frac{-1}{10}$	0	0	0	0	0	0
$N_4(1^0,2^2,3^0,6^6;n-5)$	$\frac{1}{38400}$	$\frac{-3}{12800}$	$\frac{-7}{12800}$	$\frac{1}{4800}$	$\frac{63}{12800}$	0	$\frac{-7}{1600}$	0
	$\frac{1}{240}$	$\frac{1}{120}$	0	0	0	$\frac{-1}{96}$	0	0
$N_4(1^0,2^0,3^8,6^0;n-3)$	0	0	$\frac{1}{240}$	0	$\frac{-1}{240}$	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0
$N_4(1^4,2^3,3^0,6^1;n-2)$	0	0	$\frac{27}{184}$	0	0	0	$\frac{-1}{184}$	0
	$\frac{-13}{92}$	0	$\frac{-5}{23}$	0	$\frac{1}{46}$	0	$\frac{7}{46}$	0
$N_4(1^4,2^1,3^0,6^3;n-3)$	0	0	$\frac{9}{184}$	0	0	0	$\frac{1}{184}$	0
	$\frac{-5}{92}$	0	$\frac{-8}{23}$	0	$\frac{-17}{92}$	0	$\frac{-7}{92}$	0

下页续

17 – 接上一页

图形形式	线性张成系数 M_k							
	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8
	c_9	c_{10}	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}	c_{16}
$N_4(1^3,2^2,3^3,6^0;n-2)$	0	0	$\frac{9}{92}$	0	0	0	$\frac{-1}{92}$	0
	$\frac{-2}{23}$	0	$\frac{3}{23}$	0	$\frac{19}{92}$	0	$\frac{21}{92}$	0
$N_4(1^3,2^0,3^3,6^2;n-3)$	0	0	$\frac{3}{92}$	0	0	0	$\frac{1}{92}$	0
	$\frac{-1}{23}$	0	$\frac{-4}{23}$	0	$\frac{17}{92}$	0	$\frac{-1}{92}$	0
$N_4(1^1,2^6,3^1,6^0;n-2)$	0	0	$\frac{27}{368}$	0	0	0	$\frac{1}{368}$	0
	$\frac{-7}{92}$	0	$\frac{10}{23}$	0	$\frac{-16}{23}$	0	$\frac{-19}{92}$	0
$N_4(1^1,2^4,3^1,6^2;n-3)$	0	0	$\frac{9}{368}$	0	0	0	$\frac{-1}{368}$	0
	$\frac{-1}{46}$	0	$\frac{-5}{23}$	0	$\frac{11}{46}$	0	$\frac{11}{92}$	0
$N_4(1^1,2^2,3^1,6^4;n-4)$	0	0	$\frac{3}{368}$	0	0	0	$\frac{1}{368}$	0
	$\frac{-1}{92}$	0	$\frac{-1}{23}$	0	$\frac{-13}{92}$	0	$\frac{-3}{46}$	0
$N_4(1^1,2^0,3^1,6^6;n-5)$	0	0	$\frac{1}{368}$	0	0	0	$\frac{-1}{368}$	0
	0	0	$\frac{-1}{23}$	0	$\frac{-7}{92}$	0	0	0
$N_4(1^0,2^3,3^4,6^1;n-3)$	0	0	$\frac{3}{184}$	0	0	0	$\frac{-1}{184}$	0
	$\frac{-1}{92}$	0	$\frac{-4}{23}$	0	$\frac{35}{92}$	0	$\frac{17}{92}$	0
$N_4(1^0,2^1,3^4,6^3;n-4)$	0	0	$\frac{1}{184}$	0	0	0	$\frac{1}{184}$	0
	$\frac{-1}{92}$	0	0	0	$\frac{-3}{46}$	0	$\frac{-3}{46}$	0

表18：当 a $=4$ 属于 $M_5(24, X_{-3})$ 时，带系数的形数之和表示正整数的表示数示例公式。

图形形式	线性张成系数 M_k									
	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	c_9	c_{10}
	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}	c_{16}	c_{17}	c_{18}	c_{19}	c_{20}
$N_4(1^8,2^1,3^0,6^1;n-2)$	$\frac{1}{704}$	$\frac{-1}{704}$	0	0	$\frac{81}{704}$	$\frac{81}{704}$	0	0	$\frac{-95}{352}$	$\frac{-31}{88}$
	$\frac{-137}{352}$	$\frac{-5}{352}$	$\frac{-27}{11}$	$\frac{-27}{11}$	0	0	$\frac{27}{176}$	$\frac{27}{88}$	$\frac{27}{22}$	0
$N_4(1^7,2^0,3^3,6^0;n-2)$	$\frac{1}{352}$	$\frac{-1}{352}$	0	0	$\frac{27}{352}$	$\frac{27}{352}$	0	0	$\frac{-25}{88}$	$\frac{3}{22}$
	$\frac{-61}{88}$	$\frac{-9}{88}$	$\frac{-36}{11}$	$\frac{-36}{11}$	0	0	$\frac{9}{44}$	$\frac{9}{22}$	$\frac{18}{11}$	0
$N_4(1^5,2^4,3^1,6^0;n-2)$	$\frac{-1}{1408}$	$\frac{1}{1408}$	0	0	$\frac{81}{1408}$	$\frac{81}{1408}$	0	0	$\frac{-5}{88}$	$\frac{13}{44}$
	$\frac{-19}{44}$	$\frac{-1}{8}$	0	0	0	0	0	0	0	0
$N_4(1^5,2^2,3^1,6^2;n-3)$	$\frac{1}{1408}$	$\frac{-1}{1408}$	0	0	$\frac{27}{1408}$	$\frac{27}{1408}$	0	0	$\frac{-25}{352}$	$\frac{-19}{88}$
	$\frac{5}{352}$	$\frac{13}{352}$	$\frac{-9}{11}$	$\frac{-9}{11}$	0	0	$\frac{9}{176}$	$\frac{9}{88}$	$\frac{9}{22}$	0
$N_4(1^5,2^0,3^1,6^4;n-4)$	$\frac{-1}{1408}$	$\frac{1}{1408}$	0	0	$\frac{9}{1408}$	$\frac{9}{1408}$	0	0	$\frac{5}{176}$	$\frac{-1}{11}$
	$\frac{17}{176}$	$\frac{3}{176}$	$\frac{6}{11}$	$\frac{6}{11}$	0	0	$\frac{-3}{88}$	$\frac{-3}{44}$	$\frac{-3}{11}$	0
$N_4(1^4,2^1,3^4,6^1;n-3)$	$\frac{1}{704}$	$\frac{-1}{704}$	0	0	$\frac{9}{704}$	$\frac{9}{704}$	0	0	$\frac{-35}{352}$	$\frac{-1}{8}$
	$\frac{-29}{352}$	$\frac{7}{352}$	$\frac{-15}{11}$	$\frac{-15}{11}$	0	0	$\frac{15}{176}$	$\frac{15}{88}$	$\frac{15}{22}$	0
$N_4(1^3,2^0,3^7,6^0;n-3)$	$\frac{1}{352}$	$\frac{-1}{352}$	0	0	$\frac{3}{352}$	$\frac{3}{352}$	0	0	$\frac{-15}{88}$	$\frac{-1}{22}$
	$\frac{-43}{88}$	$\frac{-7}{88}$	$\frac{-28}{11}$	$\frac{-28}{11}$	0	0	$\frac{7}{44}$	$\frac{7}{22}$	$\frac{14}{11}$	0
$N_4(1^2,2^5,3^2,6^1;n-3)$	$\frac{-1}{2816}$	$\frac{1}{2816}$	0	0	$\frac{27}{2816}$	$\frac{27}{2816}$	0	0	$\frac{-391}{1408}$	$\frac{-43}{352}$
	$\frac{-1279}{1408}$	$\frac{-299}{1408}$	$\frac{-189}{44}$	$\frac{-189}{44}$	0	0	$\frac{189}{704}$	$\frac{189}{352}$	$\frac{189}{88}$	0
$N_4(1^2,2^3,3^2,6^3;n-4)$	$\frac{1}{2816}$	$\frac{-1}{2816}$	0	0	$\frac{9}{2816}$	$\frac{9}{2816}$	0	0	$\frac{97}{1408}$	$\frac{-1}{32}$
	$\frac{433}{1408}$	$\frac{117}{1408}$	$\frac{51}{44}$	$\frac{51}{44}$	0	0	$\frac{-51}{704}$	$\frac{-51}{352}$	$\frac{-51}{88}$	0
$N_4(1^2,2^1,3^2,6^5;n-5)$	$\frac{-1}{2816}$	$\frac{1}{2816}$	0	0	$\frac{3}{2816}$	$\frac{3}{2816}$	0	0	$\frac{-19}{1408}$	$\frac{-7}{352}$
	$\frac{-9}{128}$	$\frac{-31}{1408}$	$\frac{-9}{44}$	$\frac{-9}{44}$	0	0	$\frac{9}{704}$	$\frac{9}{352}$	$\frac{9}{88}$	0

下页续

18 – 接续上一页

图形形式	线性张成系数 M_k									
	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	c_9	c_{10}
	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}	c_{16}	c_{17}	c_{18}	c_{19}	c_{20}
$N_4(1^1,2^4,3^5,6^0;n-3)$	$\frac{-1}{1408}$	$\frac{1}{1408}$	0	0	$\frac{9}{1408}$	$\frac{9}{1408}$	0	0	$\frac{-61}{176}$	$\frac{-1}{11}$
	$\frac{-107}{88}$	$\frac{-13}{44}$	$\frac{-60}{11}$	$\frac{-60}{11}$	0	0	$\frac{15}{44}$	$\frac{15}{22}$	$\frac{30}{11}$	0
$N_4(1^1,2^2,3^5,6^2;n-4)$	$\frac{1}{1408}$	$\frac{-1}{1408}$	0	0	$\frac{3}{1408}$	$\frac{3}{1408}$	0	0	$\frac{29}{352}$	$\frac{-1}{88}$
	$\frac{133}{352}$	$\frac{37}{352}$	$\frac{15}{11}$	$\frac{15}{11}$	0	0	$\frac{-15}{176}$	$\frac{-15}{88}$	$\frac{-15}{22}$	0
$N_4(1^1,2^0,3^5,6^4;n-5)$	$\frac{-1}{1408}$	$\frac{1}{1408}$	0	0	$\frac{1}{1408}$	$\frac{1}{1408}$	0	0	$\frac{-1}{264}$	$\frac{-1}{44}$
	$\frac{5}{528}$	$\frac{-1}{528}$	$\frac{-2}{33}$	$\frac{-2}{33}$	0	0	$\frac{1}{264}$	$\frac{1}{132}$	$\frac{1}{33}$	0
$N_4(1^0,2^9,3^0,6^1;n-3)$	$\frac{1}{5632}$	$\frac{15}{5632}$	$\frac{-1}{352}$	0	$\frac{81}{5632}$	$\frac{-1215}{5632}$	$\frac{-81}{352}$	0	$\frac{229}{2816}$	$\frac{41}{704}$
	$\frac{71}{256}$	$\frac{193}{2816}$	$\frac{135}{88}$	$\frac{135}{88}$	0	0	$\frac{-135}{1408}$	$\frac{-135}{704}$	$\frac{-135}{176}$	0
$N_4(1^0,2^7,3^0,6^3;n-4)$	0	$\frac{1}{352}$	$\frac{-1}{352}$	0	0	$\frac{27}{352}$	$\frac{27}{352}$	0	$\frac{-9}{88}$	$\frac{-7}{88}$
	$\frac{-57}{176}$	$\frac{-13}{176}$	$\frac{-18}{11}$	$\frac{-18}{11}$	0	0	$\frac{9}{88}$	$\frac{9}{44}$	$\frac{9}{11}$	0
$N_4(1^0,2^5,3^0,6^5;n-5)$	$\frac{1}{5632}$	$\frac{15}{5632}$	$\frac{-1}{352}$	0	$\frac{9}{5632}$	$\frac{-135}{5632}$	$\frac{-9}{352}$	0	$\frac{145}{2816}$	$\frac{5}{704}$
	$\frac{505}{2816}$	$\frac{125}{2816}$	$\frac{75}{88}$	$\frac{75}{88}$	0	0	$\frac{-75}{1408}$	$\frac{-75}{704}$	$\frac{-75}{176}$	0
$N_4(1^0,2^3,3^0,6^7;n-6)$	0	$\frac{1}{352}$	$\frac{-1}{352}$	0	0	$\frac{3}{352}$	$\frac{3}{352}$	0	$\frac{-1}{44}$	$\frac{-1}{88}$
	$\frac{-1}{11}$	$\frac{-1}{44}$	$\frac{-4}{11}$	$\frac{-4}{11}$	0	0	$\frac{1}{44}$	$\frac{1}{22}$	$\frac{2}{11}$	0
$N_4(1^0,2^1,3^8,6^1;n-4)$	$\frac{1}{704}$	$\frac{-1}{704}$	0	0	$\frac{1}{704}$	$\frac{1}{704}$	0	0	$\frac{91}{1056}$	$\frac{1}{88}$
	$\frac{389}{1056}$	$\frac{113}{1056}$	$\frac{47}{33}$	$\frac{47}{33}$	0	0	$\frac{-47}{528}$	$\frac{-47}{264}$	$\frac{-47}{66}$	0
$N_4(1^0,2^1,3^0,6^9;n-7)$	$\frac{1}{5632}$	$\frac{15}{5632}$	$\frac{-1}{352}$	0	$\frac{1}{5632}$	$\frac{-15}{5632}$	$\frac{-1}{352}$	0	$\frac{5}{768}$	$\frac{1}{704}$
	$\frac{191}{8448}$	$\frac{59}{8448}$	$\frac{29}{264}$	$\frac{29}{264}$	0	0	$\frac{-29}{4224}$	$\frac{-29}{2112}$	$\frac{-29}{528}$	0

表19：当 a $=4$ 在 $M_5(24,\chi_{-4})$ 中时，带系数的形数之和表示正整数的表示数示例公式

图形形式	线性张成系数 M_k									
	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	c_9	c_{10}
	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}	c_{16}	c_{17}	c_{18}	c_{19}	c_{20}
$N_4(1^6,2^2,3^2,6^0;n-2)$	0	0	0	0	$\frac{4}{61}$	0	$\frac{81}{305}$	0	$\frac{1}{61}$	0
	$\frac{81}{1220}$	0	$\frac{-9}{488}$	$\frac{-5}{61}$	$\frac{-41}{488}$	$\frac{9}{244}$	0	0	0	0
$N_4(1^6,2^0,3^2,6^2;n-3)$	0	0	0	0	$\frac{7}{305}$	0	$\frac{-54}{305}$	0	$\frac{7}{1220}$	0
	$\frac{-27}{610}$	0	$\frac{-177}{488}$	$\frac{-7}{244}$	$\frac{7}{488}$	$\frac{-3}{122}$	0	0	0	0
$N_4(1^4,2^6,3^0,6^0;n-2)$	0	0	0	0	$\frac{1}{20}$	0	0	0	$\frac{-1}{20}$	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$N_4(1^4,2^4,3^0,6^2;n-3)$	0	0	0	0	$\frac{1}{61}$	0	$\frac{81}{1220}$	0	$\frac{-57}{976}$	0
	$\frac{81}{4880}$	0	$\frac{-279}{976}$	$\frac{41}{976}$	$\frac{-173}{976}$	$\frac{9}{976}$	0	0	0	0
$N_4(1^4,2^2,3^0,6^4;n-4)$	0	0	0	0	$\frac{7}{1220}$	0	$\frac{-27}{610}$	0	$\frac{-149}{2440}$	0
	$\frac{-27}{2440}$	0	$\frac{-45}{244}$	$\frac{27}{488}$	$\frac{-11}{122}$	$\frac{-3}{488}$	0	0	0	0
$N_4(1^4,2^0,3^0,6^6;n-5)$	0	0	0	0	$\frac{1}{610}$	0	$\frac{63}{1220}$	0	$\frac{-303}{4880}$	0
	$\frac{63}{4880}$	0	$\frac{-95}{976}$	$\frac{59}{976}$	$\frac{-121}{976}$	$\frac{7}{976}$	0	0	0	0
$N_4(1^3,2^3,3^3,6^1;n-3)$	0	0	0	0	$\frac{13}{1220}$	0	$\frac{27}{244}$	0	$\frac{13}{4880}$	0
	$\frac{27}{976}$	0	$\frac{-99}{976}$	$\frac{-13}{976}$	$\frac{-85}{976}$	$\frac{15}{976}$	0	0	0	0
$N_4(1^3,2^1,3^3,6^3;n-4)$	0	0	0	0	$\frac{1}{244}$	0	$\frac{-117}{1220}$	0	$\frac{1}{976}$	0
	$\frac{-117}{4880}$	0	$\frac{-85}{976}$	$\frac{-5}{976}$	$\frac{33}{976}$	$\frac{-13}{976}$	0	0	0	0
$N_4(1^2,2^2,3^6,6^0;n-3)$	0	0	0	0	$\frac{2}{305}$	0	$\frac{63}{305}$	0	$\frac{1}{610}$	0
	$\frac{63}{1220}$	0	$\frac{-7}{488}$	$\frac{-1}{122}$	$\frac{-59}{488}$	$\frac{7}{244}$	0	0	0	0

下页续

19 – 接续上一页

图形形式	线性张成系数 M_k									
	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	c_9	c_{10}
	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}	c_{16}	c_{17}	c_{18}	c_{19}	c_{20}
$N_4(1^2,2^0,3^6,6^2;n-4)$	0	0	0	0	$\frac{1}{305}$	0	$\frac{-12}{61}$	0	$\frac{1}{1220}$	0
	$\frac{-3}{61}$	0	$\frac{-41}{1464}$	$\frac{-1}{244}$	$\frac{1}{488}$	$\frac{-5}{183}$	0	0	0	0
$N_4(1^1,2^7,3^1,6^1;n-3)$	0	0	0	0	$\frac{41}{4880}$	0	$\frac{-81}{4880}$	0	$\frac{-33}{2440}$	0
	$\frac{1539}{1220}$	0	$\frac{-171}{488}$	$\frac{5}{976}$	$\frac{7}{244}$	$\frac{135}{976}$	0	0	0	0
$N_4(1^1,2^5,3^1,6^3;n-4)$	0	0	0	0	$\frac{13}{4880}$	0	$\frac{27}{976}$	0	$\frac{-73}{4880}$	0
	$\frac{-405}{976}$	0	$\frac{21}{976}$	$\frac{3}{244}$	$\frac{-67}{976}$	$\frac{-21}{488}$	0	0	0	0
$N_4(1^1,2^3,3^1,6^5;n-5)$	0	0	0	0	$\frac{1}{976}$	0	$\frac{-117}{4880}$	0	$\frac{-15}{976}$	0
	$\frac{657}{4880}$	0	$\frac{-67}{976}$	$\frac{7}{488}$	$\frac{-7}{976}$	$\frac{3}{244}$	0	0	0	0
$N_4(1^1,2^1,3^1,6^7;n-6)$	0	0	0	0	$\frac{1}{4880}$	0	$\frac{123}{4880}$	0	$\frac{-19}{1220}$	0
	$\frac{-99}{2440}$	0	$\frac{-7}{732}$	$\frac{15}{976}$	$\frac{-19}{488}$	$\frac{-5}{2928}$	0	0	0	0
$N_4(1^0,2^6,3^4,6^0;n-3)$	0	0	0	0	$\frac{7}{1220}$	0	$\frac{-27}{610}$	0	$\frac{7}{4880}$	0
	$\frac{8181}{4880}$	0	$\frac{-363}{976}$	$\frac{-7}{976}$	$\frac{95}{976}$	$\frac{177}{976}$	0	0	0	0
$N_4(1^0,2^4,3^4,6^2;n-4)$	0	0	0	0	$\frac{1}{610}$	0	$\frac{63}{1220}$	0	$\frac{1}{2440}$	0
	$\frac{-1341}{2440}$	0	$\frac{11}{122}$	$\frac{-1}{488}$	$\frac{-15}{244}$	$\frac{-27}{488}$	0	0	0	0
$N_4(1^0,2^2,3^4,6^4;n-5)$	0	0	0	0	$\frac{1}{1220}$	0	$\frac{-3}{61}$	0	$\frac{1}{4880}$	0
	$\frac{171}{976}$	0	$\frac{-173}{2928}$	$\frac{-1}{976}$	$\frac{31}{976}$	$\frac{41}{2928}$	0	0	0	0
$N_4(1^0,2^0,3^4,6^6;n-6)$	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{20}$	0	0	0
	$\frac{-1}{20}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0

References

[1] A. Alaca、S. Alaca、M. F. Lemire 和 K. S. Williams, *Nineteen quaternary quadratic forms*, 《算术学报》130（2007），277–310。[2] A. Alaca、S. Alaca、M. Lemire 和 K. S. Williams, *Theta function identities and representations by certain quaternary quadratic forms* **4** 2008 219 239 , 《国际数论杂志》（），–。[3] A. Alaca、S. Alaca 和 K. S. Williams, *Evaluation of the convolution sums* $\sum_{l+12m=n}\sigma\ l\ \sigma\ m$ *and* () () () $\sum_{3l+4m=n}\sigma\ l\ \sigma\ m$ **1** 2006 1, 27 48 （），《理论与应用数学进展》（），第 – 期。[4] A. Alaca、S. Alaca 和 K. S. Williams, *On the two-dimensional theta functions of the Borweins*, 《算术学报》124（2006），177–195。[5] A. Alaca、S. Alaca 和 K. S. Williams, *Some new theta function identities with applications to septenary quadratic forms* **1** 2009 89 98 , 《组合与数论杂志》（），–。[6] S. Alaca、I. Pehlivan 和 K. S. Williams, *On the number of representations of a positive integer as a sum of two binary quadratic forms* **10** 2014 1395 1420 , 《国际数论杂志》（），–。[7] S. Alaca 和 K. S. Williams, *Evaluation of the convolution sums* $\sum_{l+6m=n}\sigma\ (l)\ \sigma\ (m)$ *and* $\sum_{2l+3m=n}\sigma\ (l)\ \sigma\ (m)$，《数论杂志》124（2007），491–510。[8] B. Berndt，Ramanujan笔记，第三部分，*Springer*，纽约，1991。[9] D. Dummit、H. Kisilevsky 和 J. McKay, *Multiplicative products of η-functions*，载于《有限群的成熟》（加拿大魁北克省蒙特利尔，1982），89–98，《当代数学》45，美国数学会，普罗维登斯（罗得岛州），1985。[10] ¨O. Imamo¯glu 和 W. Kohnen, *Representations of integers as sums of an even number of squares*，《数学年刊》333（2005），815–829。[11] H. Y. Lam, *The number of representations by sums of squares and triangular numbers* **7** 2007 28, , 《整数》（），14 A # 页。[12] T. Miyake，模形式，*Springer-Verlag*，柏林，1989。[13] K. Ono、S. Robins 和 P. T. Wahl, *On the representations of integers as sums of triangular numbers*，《等式数学》50（1995），73–94。[14] K. Ono, *The web of modularity: arithmetic of the coefficients of modular forms and q-series*，CBMS数学区域会议系列102。由数学科学会议委员会出版，华盛顿特区；美国数学会出版，普罗维登斯（罗得岛州），2004。viii+216 页。[15] B. Ramakrishnan、Brundaban Sahu 和 Anup Kumar Singh, *On the number of representations by certain octonary quadratic forms with coefficients 1 2 3 4 and 6* **14** 2018 3, 751 812 , , , 《国际数论杂志》（），第 – 期。[16] S. Ramanujan, *On the expression of a number in the form* $ax^2+by^2+cz^2+du^2$，《剑桥哲学学会会刊》19（1917），11–21。[17] S. Robins，模形式的算术性质，博士论文，加州大学洛杉矶分校，1991。

[18] B. Schoeneberg, 《椭圆模函数：导论》, *Die Grundlehren der Mathematischen Wis- sen-schaften* 203 *Springer* 1974 , 第

卷, 纽约, 。[19] W. A. Stein, 《模形式：计算方法》, *American Mathematical Society*, 普罗维登斯（罗得岛州）, 2007。[20] K.S. Williams,
On the representations of a positive integer by the forms $x^2+y^2+z^2+2t^2$ *and* $x^2+2y^2+2z^2+2t^2$, 《现代数学国际期刊》3（2008）, 225–230。[21] E.X.W. Xia、Y. H. Ma 和 L. X. Tian,
On the number of representations of integers by sums of mixed numbers, 《国际数论杂志》12（2016）, 945–954。

(B. Ramakrishnan) Indian Statistical Institute, North-East Centre, Punioni, Solmara, Tezpur 784501 Assam, India(Lalit Vaishya) The Institute of Mathematical Sciences, HBNI, CIT Campus, Taramani, Chennai600 113, *Email address*, B. Ramakrishnan：ramki@isine.ac.in, b.ramki61@gmail.com*Email address*, Lalit Vaishya：lalitvaishya@gmail.com，lalitv@imsc.res.in