arXiv:2302.00969v1 [math.FA] 2 Feb 2023

一类 L^2 型 Riesz 空间的强完备性 *

Wen-Chi Kuo†，金山大学数学学院，
南非约翰内斯堡 WITS 2050，邮政信箱 3

Anke Kalauch 德
累斯顿工业大学

Bruce A. Watson ‡金山大学数学学院，
南非约翰内斯堡 WITS 2050，邮政信箱 3

2023年2月3日

摘要

强收敛和依概率收敛被推广到带条件期望算子的里斯空间 T 的情形，分别称为 T-强收敛和依 T-条件概率收敛，见 [Y. Azouzi, W.-C. Kuo, K.Ramdane, B. A. Watson《带条件期望算子的黎曼空间中的收敛》，Positivity, 19 (2015), 647-657]。对于 $p = 1, 2, \infty$ 的情形，广义 L^p 空间在黎斯空间作为 $L^p(T)$ 空间的框架下进行了讨论，见 [C. C. A. Labuschagne,B. A. Watson《里斯空间中的离散随机积分》，Positivity, 14 (2010), 859-875]。在这些空间上引入了一个取值于 $R(T)$ 的范数，适用于 $p = 1, \infty$ 的情形，见 [W. Kuo, M. Rogans, B.A. Watson,《里斯空间中的混合过程》，数学分析与应用杂志, 456 (2017), 992-1004]；该文还证明了 $R(T)$ 是一个普遍完备的 f-代数，且这些空间是 $R(T)$-模。在关于里斯空间上条件期望的 [Y. Azouzi, M. Trabelsi, L^p-空间中，利用函数演算研究了 $L^p(T)$ 对于 $p \in (1, \infty)$ 的情形，见《里斯空间上的条件期望 [Y. Azouzi, M. Trabelsi, L^p-空间》，数学分析与应用杂志, 447 (2017), 798-816]。强序列

*关键词：强完备性；Riesz 空间；条件期望算子；黎斯表示；强对偶。数学主题分类（2010）：46B40；60F15；60F25。

†本研究部分由南非国家研究基金会资助，资助编号为 CSUR160503163733。

‡本研究部分由应用分析与数论中心资助。

空间 $L^1(T)$ 的完备性（它是条件期望算子 T 的自然定义域）以及 $L^\infty(T)$ 的强完备性已在 [W.-C. Kuo,D. Rodda, B. A. Watson《里斯空间条件期望算子自然定义域的序列强完备性》, Proc. AMS, 147 (2019年), 1597–1603] 中得到证明。本文证明了 $L^2(T)$ 的 T-强完备性，并给出一个里斯-费舍尔型定理，其中对偶性是相对于 T-强对偶而言的。本文还证明，条件期望算子 T 是 T-强对偶的弱序单位。

1 引言

在 [3] 中，强收敛被推广到带有条件期望算子的戴德金完备里斯空间，称为 T-强收敛。在 [12]中，讨论了适用于 $p = 1, 2, \infty$ 的广义 L^p 空间，并将其置于里斯空间的 $L^p(T)$空间框架下。在 [11] 中，针对 $p = 1, \infty$的情形，在 $L^p(T)$空间上引入了一个取值于 $R(T)$ 的范数；文中还证明了 $R(T)$是一个普遍完备的 f-代数，且这些空间是$R(T)$-模。最近，[4], 考察了适用于 $p \in (1, \infty)$的空间 $L^p(T)$。我们还请读者参阅 [16] ，其中利用收敛结构和滤子对向量格中的序列序收敛进行了有趣的研究。在 [10] 中，证明了里斯空间条件期望算子 T 的自然定义域 $L^1(T)$具有 T-强序列完备性；也就是说， $L^1(T)$中的每个 T-强柯西序列都在 $L^1(T)$中T-强收敛。

定义 1.1 若网 (f_α) 位于 $\mathcal{L}^p(T)$ 中，其中 $p \in [0, \infty]$，则称其为强柯西网，当且仅当

$$v_\alpha := \sup_{\beta,\gamma \geq \alpha} \|f_\beta - f_\gamma\|_{T,p}$$

最终在 $R(T)$ 中有定义，且其序极限为零。

此处的 T-强是指相对于给定空间中由条件期望算子 T 所诱导的 $R(T)$ 值范数而言。还证明了 $L^\infty(T)$ 是 T-强完备的，即 $L^\infty(T)$ 中每个 T-强柯西网都是 T-强收敛的。

本文证明了 $L^2(T)$ 的 T-强完备性，即 $L^2(T)$ 中每个关于 $R(T)$ 值范数 $f \mapsto (T|f|^2)^{1/2}$: $=\|f\|_{T,\ 2}$ 为柯西网的网，都关于此范数在 $L^2(T)$ 中收敛。该结论通过一个里斯－费舍尔型定理得到证明，其中对偶性是相对于 $L^2(T)$ 的 T-强对偶而言的。本文还证明，条件期望算子 T 是 $L^2(T)$ 的 T-强对偶的弱序单位。

$L^2(T)$ 的完备性问题在里斯空间中随机积分理论里十分重要，因为这些积分被定义为 $L^2(T)$ 中柯西网的极限，参见例如 [7]。这些结果也影响里斯空间中鞅的研究，参见 [14, 15]。

2 预备知识

本文中， E 表示一个带有弱序单位的戴德金完备Riesz空间， T 表示 E上的严格正条件期望算子。所谓 T是 E 上的条件期望算子，是指 T 是 E 上的线性、正、序连续投影，它将弱序单位映射为弱序单位，且其值域 $R(T)$在 E中关于序极限封闭。这说明至少存在一个弱序单位，例如 e，使得 $Te = e$，并且 $R(T)$作为 E的子空间时是戴德金完备的。所谓 T 严格正，是指若 $f \in E_+$属于 E的正锥，且 $f \neq 0$ ，则 $Tf \in E_+$ 且 $Tf \neq 0$。

定义在带有弱序单位的戴德金完备Riesz空间上的严格正条件期望算子 T，可以扩张为定义在其自然定义域上的严格正条件期望算子，仍记为 T，其自然定义域记为 $L^1(T)$: $= \mathrm{dom}(T) - \mathrm{dom}(T)$。若 E 是 T-普遍完备的，则称之为 $E = L^1(T)$。根据$\mathrm{dom}(T)$的定义，见 [9]， E 是 T-普遍完备的，当且仅当对于每个向上有向网$(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ ，若其属于 E^+ ，且$(Tf_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ 在 E_u中序有界，则$(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ 在 E中序收敛。这里 E_u 表示 E的普遍完备化，见 [? ，第 323]页。 E_u 具有 f-代数结构，且可选取使得 e 为乘法单位元。对于作用于 $E = L^1(T)$上的 T， $R(T)$是一个普遍完备的 f-代数，而 $L^1(T)$是一个 $R(T)$-模。由 [9, 定理5.3]可知， T 是一个平均算子，即若 $f \in R(T)$且 $g \in E$，则 $T(fg) = fT(g)$。由此引出 $R(T)$（向量值）范数$|\cdot|_T$,1: $= T|\cdot|$，定义在 $L^1(T)$上。齐次性是相对于乘以 $R(T)^+$中的元素而言的。

里斯空间 $L^2(T) := \{f \in L^1(T) \mid f^2 \in L^1(T)\}$ 的定义见 [12]。根据平均性质， $L^2(T)$ 是一个 $R(T)$-模，且映射

$$f \mapsto \|f\|_{T,2} := (T(f^2))^{1/2}, \quad f \in L^2(T)$$

是 $L^2(T)$ 上取值于 $R(T)$ 的范数。关于一般$1 < p < \infty$ 下 $L^p(T)$ 的这方面研究可见 [4, ?]。这里的乘法定义如 f-代数 E_u 中所述。关于带有条件期望算子的 Riesz 空间中各种 H¨older 型不等式的证明，可见 [11] 和 [4]。特别地，

$$T|fg| \leq \|f\|_{T,2}\|g\|_{T,2}, \text{ for all } f, g \in L^2(T). \tag{2.1}$$

若 F 是具有弱序单位 e的普遍完备 Riesz 空间，则 F 是一个

f-代数，且 e 可取作代数单位，参见 [17, 定理 3.6]。我们回顾 [8, 附录]中关于 Riesz 空间部分逆元的以下内容。

定义 2.1 设 F 是一个带有弱序单位的普遍完备里斯空间，记为 e，并取 e 作为其相应 f-代数结构的代数单位。若存在 $h \in F$ 使得 $gh = hg = P_{|g|}e$，其中 $P_{|g|}$ 表示到由 $|g|$ 生成的带上的带投影，则称 $g \in F$ 有部分逆元。若 h 除了是 g 的部分逆元外，还满足 $(I - P_{|g|})h = 0$，即 $h \in \mathcal{B}_{|g|}$，其中 $\mathcal{B}_{|g|}$ 是由 $|g|$ 生成的带，则称 h 为 g 的典范部分逆元。

以下结果给出了关于部分逆元和典范部分逆元的存在性、唯一性及正性结论。我们用 $\mathcal{B}_f$ 表示由 f 生成的带，用 P_f 表示到 $\mathcal{B}_f$ 上的带投影。

定理 2.2 设 F 是一个带有弱序单位的普遍完备里斯空间，记为 e，并且同样取其作为相应 f-代数结构的代数单位。每个 $g \in F$ 都有部分逆元 $h \in F$。g 的典范部分逆元是唯一的；在此情形下，g 也是 h 的典范部分逆元。若 $g \in F^+$，则其典范部分逆元也具有此性质。

3 对偶空间

设 $E = L^2(T)$。若映射 $\mathfrak{f}: E \to R(T)$ 具有可加性、$R(T)$-齐次性且序有界，则称其为 E 上的 T-线性泛函。我们用 E^* 表示 E 上的 T-线性泛函空间，并称其为 E 的 T-对偶。注意，$E^* \subset \mathcal{L}_b(E, R(T))$，因为 $R(T)$-齐次性蕴含实线性。此外，由于 $R(T)$ 是戴德金完备的，$\mathcal{L}_b(E, R(T))$ 也是戴德金完备的，见第 12], 页；并且 $\mathcal{L}_b(E, R(T)) = \mathcal{L}_r(E, R(T))$，其中 $\mathcal{L}_r(E, R(T))$ 表示正则算子，见第 10] 页。遵循 [2], 的记号，我们用 $\mathcal{L}_n(E, R(T))$ 表示 $\mathcal{L}_b(E, R(T))$ 中的序连续元素；根据第 44], 页，$\mathcal{L}_n(E, R(T))$ 是 $\mathcal{L}_b(E, R(T))$ 的一个带；又由于 $\mathcal{L}_b(E, R(T))$ 是戴德金完备的，$\mathcal{L}_n(E, R(T))$ 也是戴德金完备的。

若 $\mathfrak{f} \in E^*$ 且存在 $k \in R(T)^+$，使得

$$|\mathfrak{f}(g)| \le k\|g\|_{T,2}, \quad \text{for all } g \in E, \tag{3.2}$$

我们称 $\mathfrak{f}$ 是 T-强有界的。我们将 E 上 T-强有界的 T-线性泛函空间记作

$$\hat{E} := \{\mathfrak{f} \in E^* \mid \mathfrak{f} \ T\text{-strongly bounded } \}$$

并称其为 E 的 T-强对偶。此外

$$\|\mathfrak{f}\| := \inf\{k \in R(T)^+ \,|\, |\mathfrak{f}(g)| \le k\|g\|_{T,2} \quad \text{for all } g \in E\}$$

$\hat{}$ 在 E 上定义一个取值于 $R(T)$ 的范数，其中

$$|\mathfrak{f}(g)| \le \|\mathfrak{f}\|\,\|g\|_{T,2} \tag{3.3}$$

对所有 $g \in L^2(T)$ 均成立。

这里注意到，由于映射 $g \mapsto \|g\|_{T,2}$ 是序连续的，(3.2) 中的控制 $\hat{}\,\hat{}$ 表明每个 $\mathfrak{f} \in E$ 都是序连续的。因此 $E \subset E^* \cap \mathcal{L}_n(E, R(T))$。

由 [8] 可得如下里斯-弗雷歇表示定理。

定理 3.1（里斯空间中的里斯-弗雷歇表示定理）由 $\Psi(f)(g) := T_f(g) = T(fg)$ 定义的映射 Ψ 对 $f, g \in L^2(T)$ 是 $E = L^2(T)\hat{}$ 与其 $R(T)$-齐次强对偶 E 之间的双射。该映射是可加的、 $R(T)$-齐次的，并保持 $R(T)$ 值范数，即对所有 $y \in L^2(T)$, $\|T_f\| = \|f\|_{T,2}$。

直接应用定理 3.1 可得 $T \in \hat{}E$，因为 $\Psi(e) = T$，且 $L^2(T)$ 是一个 $R(T)$-模，其中对所有 $f \in L^2(T)$，均有 $ef = f$。

引理 3.2（黎斯–康托罗维奇）空间 E^* 关于偏序 $\mathfrak{f} \le \mathfrak{g}$ 是一个里斯空间，当且仅当对所有 $x \in E_+$， $\mathfrak{f}(x) \le \mathfrak{g}(x)$。此偏序等价于将格运算定义为

$$(\mathfrak{f} \vee \mathfrak{g})(x) := \sup\{\mathfrak{f}(y) + \mathfrak{g}(z) \,|\, y, z \in E_+, y + z = x\}$$

and

$$(\mathfrak{f} \wedge \mathfrak{g})(x) := \inf\{\mathfrak{f}(y) + \mathfrak{g}(z) \,|\, y, z \in E_+, y + z = x\}$$

对所有 $x \in E_+$，并通过康托罗维奇定理将这些算子扩展到 E，参见第 *[2,* 页 *7]*。这里，当且仅当对每个 $x \in E_+$， $\mathfrak{f}_\alpha(x) \downarrow 0$ 属于 E 时， $\mathfrak{f}_\alpha \downarrow \mathfrak{o}$ 属于 E^*。 E^* 是戴德金完备的，并且是一个 $R(T)$-模。

证明：若 $\mathfrak{f}, \mathfrak{g} \in E^*$，则 $\mathfrak{f}, \mathfrak{g} \in \mathcal{L}_b(E, R(T))$，因此（因为 $\mathcal{L}_b(E, R(T))$ 是一个里斯空间） $\mathfrak{f} + \mathfrak{g} \in \mathcal{L}_b(E, R(T))$。此外，对于 $\alpha \in R(T)$ 和 $x \in E$，由于 $\mathfrak{f}$ 和 $\mathfrak{g}$ 是 $R(T)$-齐次的，我们有

$$(\mathfrak{f} + \mathfrak{g})(\alpha x) := \mathfrak{f}(\alpha x) + \mathfrak{g}(\alpha x) = \alpha(\mathfrak{f}(x) + \mathfrak{g}(x)) =: \alpha(\mathfrak{f} + \mathfrak{g})(x).$$

因此 $\mathfrak{f} + \mathfrak{g} \in E^*$。

为了证明 E^* 是 $\mathcal{L}_b(E,R(T))$ 的子格，只需证明对于每个 $\mathfrak{f}$、$\mathfrak{g}\in E^*$，都有 $\mathfrak{f}\vee\mathfrak{g}\in E^*$，其中 $\mathfrak{f}\vee\mathfrak{g}$ 的定义见引理陈述。这也确保了 $\mathfrak{f}\vee_{\mathcal{L}_b(E,R(T))}\mathfrak{g}=\mathfrak{f}\vee_{E^*}\mathfrak{g}$。由于要证明 $E^*\subset\mathcal{L}_b(E,R(T))$ 与 $\mathfrak{f}\vee\mathfrak{g}\in E^*$ 相同，即 $\mathfrak{f}\vee_{\mathcal{L}_b(E,R(T))}\mathfrak{g}=:\mathfrak{f}\vee\mathfrak{g}$，只需证明 $\mathfrak{f}\vee\mathfrak{g}$ 属于 E^*。由于 $\mathfrak{f}\vee\mathfrak{g}\in\mathcal{L}_b(E,R(T))$，因此只需证明它是 $R(T)$ 齐次的。

对于 $\alpha\in R(T)_+$ 和 $x\in E_+$，我们有

$$(\mathfrak{f}\vee\mathfrak{g})(\alpha x):=\sup\{\mathfrak{f}(y)+\mathfrak{g}(z)\,|\,y,z\in E_+,y+z=\alpha x\}.$$

若 y、$z\in E_+$ 和 $y+z=\alpha x$，则有 y、$z\in B_\alpha$，其中 B_α 是 E 中由 α 生成的带。

现在，由于 $R(T)$ 是普遍完备的，α 有一个部分逆元 $\beta\in R(T)_+\cap B_\alpha$，使得

$$\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha=P_\alpha e$$

其中 P_α 表示到由 α 生成的带 B_α 上的带投影。因此 $\beta y+\beta z=P_\alpha x$ 且 $\alpha\beta y=y$，对于 z 也同理。于是

$$\begin{aligned}(\mathfrak{f}\vee\mathfrak{g})(\alpha x) &= \sup\{\alpha(\mathfrak{f}(\beta y)+\mathfrak{g}(\beta z)\,|\,y,z\in E_+,\beta y+\beta z=P_\alpha x\}\\ &\le \sup\{\alpha(\mathfrak{f}(y')+\mathfrak{g}(z')\,|\,y',z'\in E_+,y'+z'=P_\alpha x\}\\ &\le \sup\{\alpha(\mathfrak{f}(y')+\mathfrak{g}(z')\,|\,y',z'\in E_+,y'+z'=x\}\\ &= \alpha(\mathfrak{f}\vee\mathfrak{g})(x)\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\alpha\cdot(\mathfrak{f}\vee\mathfrak{g})(x) &= \sup\{\alpha\cdot(\mathfrak{f}(y)+\mathfrak{g}(z))\,|\,y,z\in E_+,y+z=x\}\\ &= \sup\{(\mathfrak{f}(\alpha y)+\mathfrak{g}(\alpha z))\,|\,y,z\in E_+,y+z=x\}\\ &\le \sup\{(\mathfrak{f}(\alpha y)+\mathfrak{g}(\alpha z))\,|\,y,z\in E_+,\alpha y+\alpha z=\alpha x\}\\ &\le \sup\{(\mathfrak{f}(y')+\mathfrak{g}(z'))\,|\,y',z'\in E_+,y'+z'=\alpha x\}\\ &= (\mathfrak{f}\vee\mathfrak{g})(\alpha x)\end{aligned}$$

因此，对于 $\alpha\in R(T)_+$ 和 $x\in E_+$，有 $(\mathfrak{f}\vee\mathfrak{g})(\alpha x)=\alpha(\mathfrak{f}\vee\mathfrak{g})(x)$。证明了 $\mathfrak{f}\wedge\mathfrak{g}$ 的类似结果后，并且由于我们知道 $(\mathfrak{f}\vee\mathfrak{g})(-x)=-(\mathfrak{f}\wedge\mathfrak{g})(x)$，齐次性对所有 $x\in E$ 和 $\alpha\in R(T)$ 都成立。

最后，我们证明 E^* 是戴德金完备的。由于 $\mathcal{L}_b(E,R(T))$ 是戴德金完备的，只需证明 E^* 在 $\mathcal{L}_b(E,R(T))$ 中是序闭的。若 $(\mathfrak{f}_\gamma)$ 是 E^* 中的一个网，且其在 $\mathcal{L}_b(E,R(T))$ 中的序极限为 $\mathfrak{f}$，那么对每个 $\alpha\in R(T)$，我们都有 $\mathfrak{f}_\gamma(\alpha x)=\alpha\mathfrak{f}_\gamma$。此外，由于乘以 $R(T)$ 中元素具有序连续性，可知网 $(\alpha\mathfrak{f}_\gamma)$ 的序极限为 $\alpha\mathfrak{f}$。然而，对每个 $x\in E$，$(\mathfrak{f}_\gamma(\alpha x))$ 的序极限为 $\mathfrak{f}(\alpha x)$，而 $(\alpha\mathfrak{f}_\gamma(x))$ 在 $R(T)$ 中的序极限为 $\alpha\mathfrak{f}(x)\subset E$。因此，$\mathfrak{f}(\alpha x)=\alpha\mathfrak{f}(x)$，从而得到 $\mathfrak{f}\in E^*$。■

ˆ 引理 3.3 空间 E 是 $R(T)$-模，并且是 E^* 的戴德金完备里斯子空间。

ˆ 证明：根据定义，显然 E 是 E^* 的向量子空间，也是一个 ˆ$R(T)$-模。接下来只需证明 E 是 E^* 的子格，并且它是戴德金完备的。

ˆˆ 为证明 E 是 E^* 的子格，我们注意到，若 $\mathfrak{f}$、$\mathfrak{g} \in E$，则存在 $k_{\mathfrak{f}}$、$k_{\mathfrak{g}} \in R(T)_+$，使得 $|\mathfrak{f}(x)| \leq k_{\mathfrak{f}}\|x\|_{T,2}$ 且 $|\mathfrak{g}(x)| \leq k_{\mathfrak{g}}\|x\|_{T,2}$ 对所有 $x \in E$ 均成立。由引理 3.2,

$$|(\mathfrak{f} \vee \mathfrak{g})(x)| \leq \sup\{|\mathfrak{f}(y) + \mathfrak{g}(z)| \,|\, y, z \in E_+, y + z = x\} \leq (k_{\mathfrak{f}} + k_{\mathfrak{g}})\|x\|_{T,2}$$

ˆ 对所有 $x \in E$ 均成立，从而得到 $\mathfrak{f} \vee \mathfrak{g} \in E$。

ˆ 关于戴德金完备性，我们注意到，若 $C \subset E_+$ 是一个由 $\mathfrak{g} \in E_+$ 在上方有界的非空集合 ˆ，则 $C \subset E^*{}_+$，并且在 E^* 中由 $\mathfrak{g}$ 在上方有界。因此 $\mathfrak{h} := \sup C$ 在 E^* 中存在，因为 E^* 是戴德金完备的。此外，$\mathfrak{h} \leq \mathfrak{g}$，因此存在 $k \in R(T)_+$，使得

$$|\mathfrak{h}(x)| \leq |\mathfrak{g}(x)| \leq k\|x\|_{T,2}.$$

ˆˆˆˆˆ 因此 $\mathfrak{h} \in E$。若 $\mathfrak{h} \in E$ 是 E 中 C 的一个上界，那么 $\mathfrak{h}$ 也是 E^* 中 C 的一个上界 ˆ，从而 $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{h}$，因此 $\mathfrak{h}$ 是 C 的最小上界。 ■

ˆ 定理 3.4 T 是 E 的弱序单位。

证明：设 $\mathfrak{f} \in$ ˆE_+。对于满足 $x \geq 0$ 的 $x \in L^2(T)$，有

$$\begin{aligned}
\sup_{n\in\mathbb{N}}(\mathfrak{f} \wedge nT)(x) &= \sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\inf_{u+v=x,u,v\geq 0}(\mathfrak{f}(u) + nT(v))\right) \\
&= \sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\inf_{u+v=x,u,v\geq 0} T(y(\mathfrak{f})u + nv)\right) \\
&= \sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\inf_{x\geq v\geq 0} T(y(\mathfrak{f})(x-v) + nv)\right) \\
&= \sup_{n\in\mathbb{N}}\left(T(y(\mathfrak{f})x) + \inf_{x\geq v\geq 0} T(v(ne - y(\mathfrak{f})))\right) \\
&= T(y(\mathfrak{f})x) + \sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\inf_{x\geq v\geq 0} T(v(ne - y(\mathfrak{f})))\right).
\end{aligned}$$

Here

$$-T(x(ne - y(\mathfrak{f}))^-) \leq \inf_{x\geq v\geq 0} T(v(ne - y(\mathfrak{f}))) \leq 0$$

但 e 是一个弱序单位，因此 $(ne - y(\mathfrak{f}))^- \downarrow 0$ 按序收敛于 $n \to \infty$，从而 $-T(x(ne - y(\mathfrak{f}))^-) \uparrow 0$ 按序收敛于 $n \to \infty$。因此

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\inf_{x\geq v\geq 0} T(v(ne - y(\mathfrak{f}))\right) = 0$$

and

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}(\mathfrak{f}\wedge nT)(x)=0$$

ˆ使 T 成为 E的弱序单位。 ■

定理 3.5 Ψ 是 E_+ 与ˆ E_+之间的双射。因此， Ψ 和 Ψ^{-1} 是保序双射。特别地， $\Psi(f)^{\pm}=\Psi(f^{\pm})$， $\Psi(f)\vee\Psi(g)=\Psi(f\vee g)$，且$\Psi(f)\wedge\Psi(g)=\Psi(f\wedge g)$，对所有 $f,g\in E$均成立。

ˆˆ证明：由定理 3.1，映射 $\Psi: E\to E$ 是一个双射。若 $\mathfrak{f}\in E_+$，则存在 $f\in E$ 使得 $\mathfrak{f}=\Psi(f)$，由引理 3.2可得

$$\begin{aligned}0\le(\Psi(f)\wedge 0)(x) &:= \inf\{T(fy)\,|\,y,z\in E_+, y+z=x\}\\ &= \inf\{T(fy)\,|\,0\le y\le x\}\end{aligned}$$

对所有 $x\in E_+$均成立。若 $f\notin E_+$，则 $f^-=0\vee(-f)\neq 0$。令 P_{f^-}为到由 f^-生成的带上的带投影（ E中的所有带都是主带），并且 $p_{f^-}=P_{f^-}e\in E_+$。取 $x=p_{f^-}$，得到

$$0\le\mathfrak{f}(x)=(\mathfrak{f}\wedge 0)(x)=(\Psi(f)\wedge 0)(x)=(-Tf^-)\wedge 0\notin E_+,$$

因为 T是一个严格正算子，它给出 $Tf^->0$。因此产生矛盾，并且$f\in E_+$。

若 $f\in E_+$，则对于 $x\in E_+$,

$$(\Psi(f)\wedge 0)(x)=\inf\{T(fy)\,|\,y,z\in E_+, y+z=x\}\ge 0$$

ˆ因为 $y\ge 0$ 且 T是一个正算子。因此 $\Psi(f)\in E_+$，且 Ψ 是 E_+ˆ与 E_+之间的双射。

定理的其余结论可直接得出： Ψ 是 E_+ˆ与 E_+之间的线性双射。

■

定理 3.6 Ψ 是 e 在 E 中的分量与 T 在 E中的分量ˆ之间的双射。

证明：我们首先证明，对于每个 p a component of$e$， $\Psi(p)$ 都是 T 的一个分量。根据定理 3.5，我们有 $0\le\Psi(p)\le\Psi(e)=T$。再次根据定理 3.5，我们有

$$\Psi(p)\wedge\Psi(e-p)=\Psi(p\wedge(e-p))=\Psi(0)=0.$$

因此，我们已经证明，对于每个 p a component of e， $\Psi(p)$ 都是 T 的一个分量。反过来，我们只需处理 Ψ^{-1}。 ■

由上可知，对于 E 中 e 的分量 p、q，有

$$\Psi(p)\cdot\Psi(q)=\Psi(p\cdot q) \tag{3.4}$$

ˆ 其中，乘法是相对于 E_e 和 E_T 的 f-代数结构而言的， e 和 T 分别是它们的代数单位。

引理 3.7 Ψ 和 Ψ^{-1} 是序连续的，并且

$$\Psi(p)\cdot\Psi(q)=\Psi(p\cdot q). \tag{3.5}$$

对所有 $p\in E_e$ 和 $q\in E$ 均成立。

证明：设 f_α 是 E 中一个序极限为 f 的网，并设 $g\in E$，则

$$\Psi(f_\alpha)(g)=T(f_\alpha g)\to T(fg)$$

因为逐点乘法是从 $L^2(T)\times L^2(T)$ 到 $\to L^1(T)$ 的序连续映射，且 T 在 $L^1(T)$ 上序连续。因此， Ψ 是序连续的。

假设 $(\mathfrak{f}_\alpha)\subset\hat{}E_+$ 是一个向下有向网，且满足 $\mathfrak{f}_\alpha\downarrow 0$。那么 $(\Psi^{-1}(\mathfrak{f}_\alpha))\subset E_+$ 是一个向下有向网，且满足 $\Psi^{-1}(\mathfrak{f}_\alpha)\downarrow h\geq 0$。因此，对于 $g\in E_+$，我们有

$$T(\Psi^{-1}(\mathfrak{f}_\alpha)g)\downarrow T(hg)$$

由乘法和 T 的序连续性可得。然而

$$T(\Psi^{-1}(\mathfrak{f}_\alpha)g)=\mathfrak{f}_\alpha(g)\downarrow 0.$$

因此，对所有 $g\in E_+$，都有 $T(hg)=0$，特别是对 $g=h$ 也成立。因此 $T(h^2)=0$，结合 T 的严格正性可得 $h^2=0$，从而得到 $h=0$。因此 Ψ^{-1} 是序连续的。

由于 Ψ 是线性的，(3.4) 可立即推广到 p，以及作为 e 的分量的线性组合的 q。结合弗罗伊登塔尔定理以及 Ψ 和乘法的序连续性，即可得出结论。 ■

需要注意的是，(3.5) 可以推广到 $p\in L^\infty(T)$，其中

$$L^\infty(T)=\{f\in E^u\,|\,|f|\leq\alpha \text{ for some } \alpha\in R(T)\},$$

有关 $L^\infty(T)$ 和这种乘法的更多详情，请参见 [11]。

ˆ 我们可以刻画 E 上的带投影。

定理 3.8 $\hat{}E$ 上的带投影是映射 $\hat{}P = \Psi P \Psi^{-1}$，其中 P 是 E 上的带投影。

$\hat{}\hat{}\hat{}\hat{}$ 证明：设 P 是 E 上值域为 B 的带投影。由于 E 中所有的带都是主带，且 T 是 E 的弱序单位，因此 PT 是 B 的生成元，进一步说，它是 T 的一个分量。于是，存在 E 中 e 的一个分量 p，使得 $\Psi(p) = PT$。

$\hat{}\hat{}$ 令 $\mathfrak{g} \in E$，则 P 在 $\mathfrak{g}$ 上的作用为

$$\hat{P}\mathfrak{g} = (\hat{P}T) \cdot \mathfrak{g} = \Psi(p) \cdot \Psi(\Psi^{-1}(\mathfrak{g})).$$

应用 (3.4)，得到

$$\Psi(p) \cdot \Psi(\Psi^{-1}(\mathfrak{g})) = \Psi(p \cdot \Psi^{-1}(\mathfrak{g})) = \Psi(P\Psi^{-1}(\mathfrak{g})),$$

其中 P 是 E 中由 p 生成的带投影。因此 $\hat{} P\mathfrak{g} = \Psi(P\Psi^{-1}(\mathfrak{g}))$。 ■

$\hat{}\hat{}$ 推论 3.9 对于 E 上的每个带投影 P，带投影 $P := _{\Psi^{-1}} \hat{}P\Psi$ 在 E 上满足 $\hat{}P\mathfrak{f} = \mathfrak{f}P$，对所有 $\mathfrak{f} \in \hat{}E$ 均成立。

证明：这里 $\hat{}P = \Psi P \Psi^{-1}$。因此，对所有 $\mathfrak{f} \in \hat{}E$ 和 $g \in E$，

$$(\hat{P}\mathfrak{f})(g) = (\Psi P \Psi^{-1}\mathfrak{f})(g) = \Psi(P\Psi^{-1}\mathfrak{f})(g) = T(\Psi^{-1}\mathfrak{f} \cdot Pg) = \mathfrak{f}(Pg) = \mathfrak{f} \circ P(g),$$

对所有的 $\mathfrak{f} \in \hat{}E$ 和 $g \in E$。这里我们用到了 $\Psi^{-1}\mathfrak{f} \cdot Pg = P\Psi^{-1}\mathfrak{f} \cdot g$。 ■

$\hat{}$注 3.10 每个 $\mathfrak{f} \in E$ 都可以视为定义在 E 中 e 的分量上的一个 $R(T)$ 值 Radon测度 $\mu_{\mathfrak{f}}$，其定义为 $\mu_{\mathfrak{f}}(p) = \mathfrak{f}(p)$。从这个意义上说，该测度的黎斯表示为 $\mu_{\mathfrak{f}}(p) = T(\Psi(\mathfrak{f}) \cdot p)$，而 $\Psi(\mathfrak{f})$ 是 $\mu_{\mathfrak{f}}$ 关于 μ_T 的 Radon–Nikod ´ym 导数。

4 完备性

$\hat{}$ 与标量情形一样，我们可以在 E 上定义一个范数；然而，在这里考虑的情形下，它是一个 $R(T)$ 值范数，或者按照 [11] 的记法，是一个 T-范数。对于 $\mathfrak{f} \in E$，我们定义

$$\|\mathfrak{f}\| = \inf\{k \in R(T)^+ \mid |\mathfrak{f}(x)| \leq k\|x\|_{T,2} \text{ for all } x \in E\}. \tag{4.6}$$

由于 $R(T)$ 是戴德金完备的，因此 $\|\mathfrak{f}\| \in R(T)^+$。

对于每个 $x \in E$, $\{k \in R(T)^+ \mid |\mathfrak{f}(x)| \le k\|x\|_{T,2}\}$，它是 $R(T)^+$ 中的一个凸锥（关于 E 中的序极限）且为闭集。因此

$$Y := \bigcap_{x\in E} \{k \in R(T)^+ \mid |\mathfrak{f}(x)| \le k\|x\|_{T,2}\}$$

在 $R(T)^+$ 中是凸的、可加的，并且关于序极限、上确界和下确界封闭。因此， Y 有唯一极小元

$$\|\mathfrak{f}\| := \inf \bigcap_{x\in E} \{k \in R(T)^+ \mid |\mathfrak{f}(x)| \le k\|x\|_{T,2}\}.$$

由于 $\|\mathfrak{f}\| \in Y$，我们有 $|\mathfrak{f}(x)| \le \|\mathfrak{f}\|\,\|x\|_{T,\,2}$ 对每个 $\mathfrak{f} \in \hat{}E$ 和 $x \in L^2(T)$。

ˆ 定理 4.1 对偶空间 E 是强完备的。

ˆ 证明：设 $(\mathfrak{f}_\alpha)$ 是 E 中的一个强柯西网。由于

$$|\mathfrak{f}_\alpha(x) - \mathfrak{f}_\beta(x)| \le \|\mathfrak{f}_\alpha - \mathfrak{f}_\beta\|\,\|x\|_{T,2}$$

由此可知，对每个 $x \in L^2(T)$，$(\mathfrak{f}_\alpha(x))$ 都是 $R(T)$ 中的柯西网。最终

$$v_\alpha := \sup_{\beta,\gamma\ge\alpha} \|\mathfrak{f}_\beta - \mathfrak{f}_\gamma\|_{T,2}$$

作为 $R(T)$ 和 $v_\alpha \downarrow 0$ 中的一个元素存在。这里，“最终”是指该网的指标集中存在一个 β，使得对 $\alpha \ge \beta$，给定的陈述成立。因此最终

$$|\mathfrak{f}_\beta(x) - \mathfrak{f}_\gamma(x)| \le v_\alpha\|x\|_{T,2}, \quad \text{for all } \beta,\gamma \ge \alpha, \tag{4.7}$$

且柯西网 $(\mathfrak{f}_\alpha(x))$ 最终在 $R(T)$ 中有界。这里，网 $(|\mathfrak{f}_\beta(x) - \mathfrak{f}_\gamma(x)|)$ 被视为以 (α,β) 为指标，其中 $(\alpha,\beta) \le (\alpha_1,\beta_1)$ 表示 $\alpha \le \alpha_1$ 和 $\beta \le \beta_1$。因此，我们可以在 $R(T)$ 中定义 $\underline{\mathfrak{f}}(x) :=$ 下极限$_\alpha\, \mathfrak{f}_\alpha(x)$，$\overline{\mathfrak{f}}(x) :=$ 上极限$_\alpha\, \mathfrak{f}_\alpha(x)$。这里

$$0 \le \overline{\mathfrak{f}}(x) - \underline{\mathfrak{f}}(x) = \lim_\alpha (\sup_{\beta\ge\alpha} \mathfrak{f}_\beta(x) - \inf_{\gamma\ge\alpha} \mathfrak{f}_\gamma(x)) = \lim_\alpha \sup_{\beta,\gamma\ge\alpha} (\mathfrak{f}_\beta(x) - \mathfrak{f}_\gamma(x)) \le \lim_\alpha v_\alpha\|x\|_{T,2} = 0.$$

因此，我们可以令 $\mathfrak{f}(x) := \overline{\mathfrak{f}}(x) = \mathfrak{f}(x)$，其中 $(\mathfrak{f}_\alpha(x))$ 按序收敛到 $\mathfrak{f}(x)$，见 [3], ，于是对每个 $\bar{x} \in L^2(T)$，$\mathfrak{f}(x)$ 都有定义。

由序极限的线性性以及每个 $\mathfrak{f}_\alpha$ 的线性性可知，$\mathfrak{f}: L^2(T) \to R(T)$ 是一个线性映射。对 (4.7) 关于 γ 取序极限，得到

$$|\mathfrak{f}_\beta(x) - \mathfrak{f}(x)| \le v_\alpha\|x\|_{T,2}, \quad \text{for all } \beta \ge \alpha, x \in L^2(T). \tag{4.8}$$

Thus

$$|\mathfrak{f}(x)| \le |\mathfrak{f}_\alpha(x)| + v_\alpha\|x\|_{T,2} \le (\|\mathfrak{f}_\alpha\| + v_\alpha)\|x\|_{T,2}$$

对所有 $x \in L^2(T)$，由此可得 $\mathfrak{f} \in \hat{E}$。

现在，(4.8) 可以写成

$$\|\mathfrak{f}_\beta - \mathfrak{f}\| \le v_\alpha, \quad \text{for all } \beta \ge \alpha,$$

由此可得，$(\mathfrak{f}_\alpha)$ 强收敛到 $\mathfrak{f}$。 ■

我们从 [10] 回顾一些强完备性的概念，以及它们与 $L^2(T)$ 的关系。

定义 4.2 若 $L^2(T)$ 中的一个网 (f_α) 满足

$$v_\alpha := \sup_{\beta,\gamma \ge \alpha} \|f_\beta - f_\gamma\|_{T,2}$$

在某个时刻之后有定义，且其序极限为零，即存在 δ，使得对所有 $\alpha \ge \delta$，v_α 都有定义，并且 $\inf_{\alpha \ge \delta} v_\alpha = 0$。

应当注意，这等价于要求 $\|f_\beta - f_\gamma\|_{T,2}$ 作为一个以 (β, γ) 为指标且具有逐分量定向性的网，在序意义下收敛到 0。现在我们可以给出强完备性的定义了。

定义 4.3 若每个 $L^2(T)$ 中的强柯西网 (f_α) 在 $L^2(T)$ 中强收敛，则称 $L^2(T)$ 强完备，即存在 $f \in L^2(T)$，使得

$$w_\alpha := \sup_{\beta \ge \alpha} \|f_\beta - f\|_{T,2}$$

最终有定义且其序极限为零，即存在 δ，使得 w_α 对所有 $\alpha \ge \delta$ 均有定义，且 $\inf_{\alpha \ge \delta} w_\alpha = 0$。

应注意，对于 $E = L^2(\Omega\ \Sigma, \mu)$ 的情形，若 μ 是有限测度且 $Tf = \mathbf{1}_{\mu}{}^{1}{}_{(\Omega)} \int_\Omega f\, d\mu$，其中 1 是常值函数 1，则 $L^2(T) = E$，向量范数 $\|f\|_{T,\ 2} = \|f\|_2$ 是标准的 L^2 范数，而强柯西网与强完备性的概念分别与范数/强柯西网和范数/强完备性的概念一致。

定理 4.4 $L^2(T)$ 强完备。

证明：映射 $\Psi : y \mapsto T_y$ 是一个保持 $R(T)$ 值向量范数的 $R(T)$-线性双射，定义在 $L^2(T)$ 与 $\hat{E}$ 之间。因此，给定 $L^2(T)$ 中的一个强柯西网 (y_α)，$(\Psi(y_\alpha)\ \hat{}\ \hat{}$ 是 E 中的强柯西网，故强收敛于某个 $\mathfrak{f} \in E$。由于 Ψ 是双射，存在 $y \in L^2(T)$，使得 $\mathfrak{f} = \Psi(y) = T_y$。由于 Ψ 的 $R(T)$-线性，且该映射保持 $R(T)$ 值向量范数，$(\Psi(y_\alpha)$ 在 $\hat{E}$ 中强收敛于 $\mathfrak{f}$，从而推出 (y_α) 在 $L^2(T)$ 中强收敛于 y。 ■

参考文献

[1] Y. Abramovich, G. Sirotkin,《网的序收敛》，Positivity，9（2005），287-292。[2] C.D. Aliprantis, O. Burkinshaw,《正算子》，Academic Press，1985。[3] Y. Azouzi, W.-C. Kuo, K. Ramdane, B. A. Watson,《带条件期望算子的黎曼空间中的收敛》，Positivity，19（2015），647-657。[4] Y. Azouzi, M. Trabelsi, L^p-空间上的里斯空间条件期望，J. Math. Anal. Appl., 447 (2017), 798-816[5] S.K. Berberian,《测度与积分》，AMS Chelsea，1965。[6] B. de Pagter, P. G. Dodds, C. B. Huijsmans,《条件期望型算子的刻画》，Pacific J. Math., 141 (1990), 55-77。[7] J.J. Grobler, C.C.A. Labuschagne,《向量格中布朗运动的 Itˆo 积分：第二部分》，J. Math. Anal. Appl. 423 (2015), 820-833。[8] A. Kalauch, W.-C. Kuo, B. A. Watson,《里斯空间中的哈恩-若尔当分解与里斯-弗雷歇表示定理》，已提交，卷（2022），页码，arXiv: 2209.00715v1。[9] W.-C. Kuo, C. C. A. Labuschagne, B. A. Watson,《里斯空间上的条件期望》，J. Math. Anal. Appl., 303 (2005), 509-521。[10] W. Kuo, D. Rodda, B.A. Watson,《里斯空间条件期望算子自然定义域的序列强完备性》，Proc. AMS, 147 (2019), 1597–1603。[11] W. Kuo, M. Rogans, B.A. Watson,《里斯空间中的混合过程》，J. Math. Anal. Appl., 456 (2017), 992-1004。[12] C. C. A. Labuschagne, B. A. Watson,《里斯空间中的离散随机积分》，Positivity，14（2010），859-875。[13] W. A. J. Luxemburg, A. C. Zaanen,《里斯空间》，I，North Holland，阿姆斯特丹，1971。[14] G. Stoica,《向量格中的鞅》，Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie, N.S., 34 (82) (1990), 357-362。[15] V. Troitsky,《巴拿赫格中的鞅》，Positivity，9（2005），437-456。[16] J. H. van der Walt,《序收敛结构》，Indagationes Mathematicae, 21 (2011), 138-155。[17] L. Venter, P. van Eldik,《普遍完备里斯空间与 f-代数》，Suid-Afrikaanse Tydskrif vir Wetenskap, 84 (1988), 343-346。[18] B. A. Watson,《里斯空间中带条件期望的 Andˆo-Douglas 型定理》，Positivity，13（2009），543 - 558。[19] A. C. Zaanen,《里斯空间算子理论导论》，Springer-Verlag，1997。