arXiv:2302.00971v1 [math.PR] 2 Feb 2023

一般排斥过程的耦合与吸引性

THIERRY GOBRON 和 ELLEN SAADA

Abstract. 吸引性是研究相互作用粒子系统的一项基本工具，而基本耦合构造是证明吸引性的常用途径，例如在简单排斥过程中便是如此。本文研究一般排斥过程，其中粒子从占据格点跳至空格点的跳跃率不仅取决于跳跃位置，还可能取决于整个构型。这类过程尤其包括 F. Spitzer 在 [18] 中提出的速度变化排斥过程。对于这类过程，我们通过构造一种耦合过程，使差异不会增加，从而推导出吸引性的充要条件。我们强调，对于这类过程，基本耦合绝不具有吸引性，简单排斥过程的情形除外；本文介绍的耦合过程必然与基本耦合不同。我们研究了若干例子，并确定了其中极端平移不变不变概率测度的集合。

Dedicated to Errico Presutti

1. Introduction

排斥过程是研究最广泛的相互作用粒子系统之一：尽管形式非常简单，这些马尔可夫过程却展现出鲜明的特征，使其成为研究许多物理或生物现象的理想简化模型。

在排斥过程中，粒子在一个可数的格点集合 S 上演化，例如 $\mathbb{Z}^d$，其中禁止多个粒子同时占据同一格点。排斥规则编码在状态空间的结构中，因此状态空间定义为 $\Omega = \{0,1\}^S$。对于构型 $\eta \in \Omega$ 以及 $x \in S$,$\eta(x)$，它表示格点 x 上的占据数，也就是说，当格点 x 上有粒子时，$\eta(x) = 1$；而当格点 x 为空时，$\eta(x) = 0$。粒子根据 S 上的概率转移 $p(.,.)$，从一个格点跳到另一个空格点（对于 $S = \mathbb{Z}^d$，我们只考虑平移不变的情形）。

研究最广泛的排斥模型是简单排斥过程（SEP），其中粒子的速度都相同，均为 1；也就是说，对于构型 η，粒子从其所在的格点 x 跃迁到空格点 y 的跃迁率不取决于

日期：2023年2月3日。2000 年数学主题分类：主要分类 60K35；次要分类 82C22。关键词和短语：粒子系统、吸引性、耦合、差异、不变测度、速度变化排斥过程。

其他粒子的位置，因此可简单写为 $\eta(x)(1-\eta(y))p(x,y)$。在 Ω 上赋予按坐标定义的（偏）序，即对于 η、$\xi \in \Omega$,

$$\eta \leq \xi \Leftrightarrow \forall x \in S,\, \eta(x) \leq \xi(x) \tag{1.1}$$

我们可以将吸引性定义为这样一种性质：只要在初始时刻成立，该偏序就会在（耦合的）演化过程中保持不变。吸引性是 SEP 的基本性质，也是确定该动力学的极端平移不变不变概率测度集合（参见例如[15]的第八章）的关键工具。该集合由一个伯努利乘积测度的单参数族 $\{\nu_\rho, \rho \in [0,1]\}$ 构成，其中 ρ 表示每个格点上的平均粒子密度。对于非对称转移概率 $p(.,.)$而言，这一性质也是建立水动力学的关键，参见例如 [17, 12]）。在此类问题中，吸引性通过对简单排斥过程的两个副本（η_t）$_{t\geq 0}$ 和（ξ_t）$_{t\geq 0}$ 进行“基本耦合”构造来体现，在该构造下，粒子会尽可能同步移动。换言之，如果在某个时刻 s两个副本中的粒子都试图跳跃，那么只要这些跳跃是允许的，它们就会根据 $p(x,y)$，尝试从同一个出发格点 x 跳到同一个到达格点y （也就是说，如果 $\eta_s(x) = \xi_s(x) = 1$且 $\eta_s(y) = \xi_s(y) = 0$）；否则，只进行那个可能的跳跃。借助基本耦合，可以控制（η_t）$_{t\geq 0}$ 与（ξ_t）$_{t\geq 0}$ 之间差异的演化，也就是构型不同的格点。结合概率转移 $p(.,.)$的某种不可约性，这种控制是推导（$\mathcal{I} \cap \mathcal{S}$）$_e$ 的关键步骤（参见 [13, 15]）。

然而，自 Frank Spitzer 的开创性论文 [18] 首次定义简单排斥过程以来，人们还研究了其他排斥过程，称为速度变化排斥过程，其中跳跃率可能取决于粒子离开格点周围的构型。尽管对于（非守恒）自旋翻转模型，这种依赖关系可以通过基本耦合构造处理，但对于守恒模型而言，情况似乎并不那么简单。为了确定这类模型的集合 $(\mathcal{I} \cap \mathcal{S})_e$，人们需要找到更复杂的吸引性条件及相关的耦合构造。Tom Liggett 在圣弗洛尔讲义 [14] 中，为 [18], 所引入的模型给出了吸引性的充分条件，并构造了相关的耦合；只要满足这些条件，该耦合便导出 $(\mathcal{I} \cap \mathcal{S})_e$。

速度变化排斥过程的全非对称版本也是自然的交通流模型（例如参见 [9]）。近年来，人们重新对排斥过程产生了兴趣，尤其是与可积模型相关的过程，例如促进型排斥过程（例如参见[4, 6, 2]）或 q-Hahn 排斥过程（参见 [5]）。无论这些模型是否具有吸引性，人们都通过其他现有技术对其进行了分析，例如对偶性，或借助与（广义）零程过程之间的专门对应关系。

本文中，我们考虑 $\mathbb{Z}^d$ 上的一般排斥过程，并给出吸引性成立的充要条件。这里，跳跃率不仅取决于发生跳跃的格点的位置和占据数，也可能取决于整个构型，因此，基本耦合构造不再适用

于 SEP 之外。我们的研究延续了此前关于误人型粒子系统的论文思路 [8, 7], ：在这类系统中，即使速率仅通过发生跳跃的格点依赖于构型，更丰富的局部状态空间结构也会带来非平凡的吸引性条件。在本文的构造过程中，我们必须区分单调性与吸引性这两个密切相关的概念。粗略地说，在单调过程中，任意两个初始时有序的构型始终保持有序。这一性质可以用弱形式表述，也可以等价地通过构造递增耦合来表述，该耦合保持其边缘分布的序关系。在吸引过程中，任意一对构型的演化都会使它们之间的差异尽可能消失，从而最终以概率一变得有序。在简单排斥过程等经典例子中，这两个概念是一致的。我们证明，在本文所讨论的更广泛背景下，情况亦是如此：单调性的充要条件蕴含吸引性，但还需要进行额外的论证。与简单排斥过程类似，当这一性质与耦合过程的某种不可约性以及关于动力学的一个附加假设结合时，最终可以完整刻画广义排斥过程的平移不变的极端不变概率测度。

本文结构如下。第 2 节定义广义排斥模型，并陈述主要结果：单调性的充要条件（定理 2.9）、对于单调过程，存在一种递增耦合，使得差异不会增加（定理 2.13），以及集合 $(\mathcal{I}\cap\mathcal{S})_e$ 的确定（定理 2.15）。第 3 节证明定理 2.9，并通过一系列命题给出逐次生成元的构造，从而导出定理 2.13 和定理 2.15。这些命题以及定理 2.13 的证明见第 5 节。第 4 节通过实例阐释我们的结果：首先说明，在简单排斥的情形下，我们的构造会化为基本耦合，而且仅在这种情形下如此。随后，我们考察速度变化排斥过程，扩展 [18, 14] 的结果。最后，我们转向交通模型，先研究 [10], 中所研究的全非对称 2步排斥过程的一种推广，再研究 [9] 中全非对称交通模型的对称化版本。在所有这些情形中，我们都明确计算吸引耦合率，并给出不变测度的集合 $(\mathcal{I}\cap\mathcal{S})_e$。

2. Model and Main Results

本节中，我们定义所研究的排斥模型类别，并陈述两个主要结果：定理 2.9 给出了单调性的充要条件；定理 2.13 则通过一种耦合构造，将该模型的单调性与吸引性联系起来。

我们首先介绍一种一般排斥过程 $(\eta_t)_{t\geq 0}$，其定义在 $S=\mathbb{Z}^d$ 上，并给出一些记号和一般性质。令 $\Omega=\{0,1\}^S$ 为其状态空间，$\mathcal{L}$ 为其形式

ge生成元，它作用于任意柱函数 f，并且对于任意构型 $\eta \in \Omega$ ，

$$\mathcal{L}f(\eta) = \sum_{x,y\in S} \eta(x)(1-\eta(y))\Gamma_\eta(x,y)\big[f(\eta^{x,y}) - f(\eta)\big] \tag{2.1}$$

其中，对于任意 $(x)\, y \in S^2$， $\eta^{x,\,y}$ 是从 η 得到的构型，即在构型 η 的格点 x 和 y处交换占据数

$$\eta^{x,y}(z) = \begin{cases} \eta(y) & \text{if } z = x \\ \eta(x) & \text{if } z = y \\ \eta(z) & \text{otherwise} \end{cases} \tag{2.2}$$

因此，该过程是守恒的，并且从格点 x 跃迁到格点 y时，量 $\eta(x)+\eta(y)$ 保持不变。我们将 $(T(t)\ t \geq 0)$ 记为该过程的半群。

注 2.3。当跳跃率 $\Gamma_\eta(x,y)$ 与构型 η 无关，并且在 S 上化为概率转移 $(p(x,y)\ x,y \in S)$ 时，

$$\Gamma_\eta(x,y) = p(x,y) \tag{2.4}$$

便得到简单排斥过程。

我们对跳跃率作如下假设，从而使 (2.1) 成为定义良好的马尔可夫过程的无穷小生成元（见 [15,第 I 章]）：

$$\sup_{v\in S}\sum_{u\in S}\sup_{\eta\in\Omega}\Gamma_\eta(u,v) < +\infty \quad \text{and} \quad \sup_{u\in S}\sum_{v\in S}\sup_{\eta\in\Omega}\Gamma_\eta(u,v) < +\infty \tag{2.5}$$

当然，根据具体例子的情况，这些一般性条件可以放宽。

我们回顾粒子系统的单调性，引用 [15, 第二章]。我们用 $\mathcal{M}$ 表示 Ω 上所有有界、连续且非递减的函数的集合 f。偏序 (1.1) 在赋予弱拓扑的 Ω 上概率测度集合 $\mathcal{P}$ 中诱导出一个随机序：

$$\forall \nu,\nu' \in \mathcal{P},\ \nu \leq \nu' \Leftrightarrow \big(\forall f \in \mathcal{M}, \nu(f) \leq \nu'(f)\big) \tag{2.6}$$

定理 2.7。 [15, 第二章，定理 2.2] 对于粒子系统 $(\eta_t)_{t\geq 0}$ ，以下两个陈述等价。

(a) $f \in \mathcal{M}$ 蕴含 $T(t)f \in \mathcal{M}$ ，对所有 $t \geq 0$均成立。(b) 对于 ν，$\nu' \in \mathcal{P}$， $\nu \leq \nu'$蕴含 $\nu T(t) \leq \nu' T(t)$，对所有 $t \geq 0$均成立。

定义 2.8。 [15, 第二章，定义 2.3] 如果满足定理 2.7 中的等价陈述，则称粒子系统 $(\eta_t)_{t\geq 0}$ 是单调的。

我们的第一个主要结果是关于单调性的以下一组充要条件。

定理 2.9. 由 (2.1) 定义的排斥过程是单调的，当且仅当对于任意一对构型 $(\xi,\zeta) \in \Omega^2$，满足 $\xi \le \zeta$，以下不等式成立：对于所有满足 $\zeta(y) = 0$ 的 $y \in S$，

$$\sum_{x\in S} \xi(x)\big[\Gamma_\xi(x,y) - \Gamma_\zeta(x,y)\big]^+ \le \sum_{x\in S} \zeta(x)(1-\xi(x))\Gamma_\zeta(x,y) \tag{2.10}$$

对于所有满足 $\xi(x) = 1$ 的 $x \in S$，

$$\sum_{y\in S} (1-\zeta(y))\big[\Gamma_\zeta(x,y) - \Gamma_\xi(x,y)\big]^+ \le \sum_{y\in S} \zeta(y)(1-\xi(y))\Gamma_\xi(x,y) \tag{2.11}$$

在第 3 节中，我们证明这些条件是必要的，并据此在命题 3.9 和 3.24 中构造该过程两个副本之间的耦合。如果一个耦合保持边缘构型之间的随机序，则称其为递增耦合。在第 5 节中，我们完成命题 3.24 的证明，即证明在不等式 (2.10)–(2.11) 成立的假设下，这个耦合是递增的，从而表明这些条件也是充分的。

除了单调性之外，构造耦合对于刻画 $(\mathcal{I}\cap\mathcal{S})_e$ 的极端不变平移不变概率测度集合 $(\eta_t)_{t\ge0}$ 也至关重要。在我们的设定中，在命题 3.9 和 3.24 中构造的耦合过程的边缘分布不一定有序，而控制它们之间差异的演化是主要任务：

定义 2.12. 在耦合过程 $(\xi_t,\zeta_t)_{t\ge0}$ 中，若在时间 t 的格点 $z \in S$ 处有差异，则 $\xi_t(z) \ne \zeta_t(z)$。

如果存在两个该过程副本的耦合，使得边缘分布之间的差异不会随时间增加，并最终消失，从而边缘分布最终以概率 1 变得有序，则称该过程是 $attractive$。

例如，正如引言中所回顾的，对于简单排斥过程（SEP），基本耦合是吸引的；在任何耦合跃迁中，只要两个边缘构型的取值有序，所涉及格点上的差异数就保持不变，否则便会减少。

除此之外，递增耦合并不一定会对无序构型对的耦合演化施加约束，因此差异数不一定非增。不过，此处我们有如下结果：

定理 2.13. 假设由 (2.1) 定义的过程在 $\Omega = \{0,1\}^S$ 上是单调的。那么该过程是吸引的，也就是说，存在 $\Omega\times\Omega$ 上的递增耦合过程，使差异数不随时间增加。

定理 2.13 的证明依赖于对这种 $attractive$耦合的显式构造，它是对先前 $increasing$ 耦合的进一步细化。其构造见命题 3.30，而存在性和吸引性的证明则推迟到第 5 节。

因此，在我们的设定中，单调性与吸引性是一致的，所以在讨论第4节中的例子时，我们只谈吸引性。

为了完成对集合 $(\mathcal{I}\cap\mathcal{S})_e$ 的刻画，仅要求耦合过程中差异的数量不随时间增加还不够，还需要该数量减少。为此，我们需要再次构造另一个耦合过程，但这要求对动力学作出一项额外假设。

定义 2.14. 生成元为 (2.1) 的排斥过程不存在阻塞构型，当且仅当对于任意构型 $\xi\in\Omega$，开放边的集合 $\{(x,y)\in S^2:\Gamma_\xi(x,y)>0\}$ 不依赖于 ξ。若对于所有 $(x,y)\in S^2$，$x\neq y$，在 S 中的 x 与 y 之间都存在一条有限开放路径，即存在某个 $n>0$ 使得序列 $\{x_0,\cdots,x_n\}$ 满足：对于 $i\in\{1,\cdots,n\}$，(x_{i-1},x_i) 是开放的，且 $x_0=x$ 与 $x_n=y$，或 $x_0=y$ 与 $x_n=x$。那么集合 S 就称为全连通。

在第3.3小节中，我们将说明，只要动力学不存在阻塞构型，且 S 是全连通的，就可以构造一种耦合，使任意一对符号相反的差异都有正概率在有限时间内消失。当跳跃率平移不变时，这使得推导集合 $(\mathcal{I}\cap\mathcal{S})_e$基本上归结为经典证明；该证明最初用于简单排斥过程（可追溯至 [13]），并由此得到以下定理。

定理 2.15. 设 $(\eta_t)_{t\geq0}$ 是生成元为 (2.1) 且跳跃率平移不变的排斥过程，不存在阻塞构型，并且 S 按照定义 2.14 的意义是全连通的。若 $(\eta_t)_{t\geq0}$ 是吸引的，则

1) 平移不变的极端不变测度 $(\mathcal{I}\cap\mathcal{S})_e$ 构成一个单参数族 $\{\mu_\rho,\rho\in\mathcal{R}\}$，其中 $\mathcal{R}$ 是 $[0,1]$ 的一个闭子集，且包含 $\{0,1\}$；对于每个 $\rho\in\mathcal{R}$，μ_ρ 都是 Ω 上满足 $\mu_\rho[\eta(0)]=\rho$的平移不变概率测度；此外，这些测度 μ_ρ 按随机序排列，即若 $\rho\leq\rho'$，则 $\mu_\rho\leq\mu_{\rho'}$；

2) 如果 $(\eta_t)_{t\geq0}$ 存在一个单参数族 $\{\mu_\rho\}_\rho$，其成员是乘积型不变概率测度和平移不变概率测度，则有 $(\mathcal{I}\cap\mathcal{S})_e=\{\mu_\rho\}_\rho$。

我们的结果可以通过多种方式推广到更一般的守恒模型，以及一些同时包含交换和与构型无关的出生-死亡事件的混合型非守恒模型，但这超出了本文的讨论范围。

3. Proofs of main theorems and coupling constructions.

本节分三个步骤，致力于构造证明定理 2.9 所需的耦合（见第3.1小节）。我们首先证明，不等式 (2.10)– (2.11) 是必要条件。为了证明这些条件也是充分的，我们在命题 3.9 中引入与 $\mathcal{L}$ 相关的马尔可夫耦合生成元的一般形式 $\mathcal{L}$，该形式取决于一组耦合转移率$G_{\xi,\zeta}(.)$。这些速率在命题 3.24 中定义；我们继而证明，采用这样的选择，且只要满足不等式 (2.10)–(2.11)，生成元 $\mathcal{L}$ 就定义了一个递增耦合。我们

在本节接下来的部分（第3.2小节）中，我们通过证明定理 2.13，继续讨论这一主题，并在命题 3.30 中引入吸引耦合的生成元 $\overline{\mathcal{L}}^D$ 。最后，我们在第3.3小节说明如何通过改进吸引耦合的构造（见命题 3.36）来证明定理 2.15。上述命题的证明见第 5 节。

3.1. 定理 2.9 的证明。不等式 (2.10)–(2.11) 是一组更广泛不等式中的特例（同时也是其中最极端的情形）；这组不等式由 A.W. Massey [16] 首先推导，单调马尔可夫过程的无穷小生成元系数必须满足这些不等式。下文将概述其推导过程，详细推导参见 [16]（细节亦见[8] ）。其思路是利用这样一个事实：任意递增（或递减）柱集 $V \subset \Omega$ 的特征函数都是 Ω 上的单调柱函数，从而推导出马尔可夫过程具有单调性所需满足的跳跃率合理必要条件。设 $(\xi_t)_{t\geq 0}$ 和 $(\zeta_t)_{t\geq 0}$ 是单调过程的两个实例，其初始条件分别为 ξ_0 和 ζ_0，且满足 $\xi_0 \leq \zeta_0$，则 $\mathbf{1}_V(\xi_t) \leq \mathbf{1}_V(\zeta_t)$（对于递减集，不等式方向相反）。此外，若初始条件选取为满足 $\xi_0 \notin V$ 和 $\zeta_0 \notin V$，同一不等式也适用于这些比值

$$\frac{1}{t}\left(\mathbf{1}_V(\xi_t) - \mathbf{1}_V(\xi_0)\right) \leq \frac{1}{t}\left(\mathbf{1}_V(\zeta_t) - \mathbf{1}_V(\zeta_0)\right)$$

对所有 $t > 0$。适当地取极限 $t \to 0$，便得到涉及马尔可夫生成元速率的不等式，以下称为“Massey条件”，在本文情形下表述如下：

If the particle system defined in (2.1) *is monotone, then for all configurations* $(\xi, \zeta) \in \Omega \times \Omega$ *such that* $\xi \leq \zeta$,

(1) *For all increasing cylinder sets* $V \subset \Omega$ *such that* $\zeta \notin V$,

$$\sum_{x,y} \xi(x)(1-\xi(y))\Gamma_\xi(x,y)1_V(\xi^{x,y}) \leq \sum_{x,y} \zeta(x)(1-\zeta(y))\Gamma_\zeta(x,y)1_V(\zeta^{x,y}) \tag{3.1}$$

(2) *For all decreasing cylinder sets* $V \subset \Omega$ *such that* $\xi \notin V$,

$$\sum_{x,y} \zeta(x)(1-\zeta(y))\Gamma_\zeta(x,y)1_V(\zeta^{x,y}) \leq \sum_{x,y} \xi(x)(1-\xi(y))\Gamma_\xi(x,y)1_V(\xi^{x,y}) \tag{3.2}$$

证明。 [定理 2.9，必要条件]。
方程 (2.10) 可由 (3.1) 通过取一列特定的柱形递增集合并令其趋于极限得到。方程 (2.11) 同理可由 (3.2) 得到。设 ξ,ζ 为两个构型，满足 $\xi \leq \zeta$，并取 y 使得 $\zeta(y) = 0$。对于 $n > 0$，我们按如下方式构造一个构型 η_n。

$$\eta_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = y, \\ 1 & \text{if } \|x-y\| \leq n \text{ , } \xi(x) = 1 \text{ and } \Gamma_\xi(x,y) < \Gamma_\zeta(x,y), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{3.3}$$

我们定义递增柱集 $V_n = \{\rho \in \Omega \ \rho \geq \eta_n\}$。由于 $\zeta(y) = 0$，构型ζ （因此 ξ）不属于 V_n。将公式 (3.1) 应用于 V_n，现在选取允许进入 $V_n = \{\rho \in$ 的单次

跳跃，从而将位于任意格点 x 、满足 $\eta_n(x) = 0$ 的粒子移动到格点 y。因此我们得到:

$$\sum_{x\in S}\xi(x)(1-\eta_n(x))\Gamma_\xi(x,y) \le \sum_{x\in S}\zeta(x)(1-\eta_n(x))\Gamma_\zeta(x,y) \tag{3.4}$$

注意到，根据条件（2.5），两个求和都是有限的。对于所有 $x \neq y$，我们有

$$\begin{aligned}\zeta(x)(1-\eta_n(x)) &= \zeta(x)(1-\eta_n(x))(1-\xi(x)) + \zeta(x)(1-\eta_n(x))\xi(x)\\ &= \zeta(x)(1-\xi(x)) + \xi(x)(1-\eta_n(x))\end{aligned}$$

其中第二行来自以下事实: $\eta_n(x) \le \xi(x) \le \zeta(x)$。将此表达式代入（3.4）右端，得到

$$\sum_{x\in S}\xi(x)(1-\eta_n(x))\big(\Gamma_\xi(x,y)-\Gamma_\zeta(x,y)\big) \le \sum_{x\in S}\zeta(x)(1-\xi(x))\Gamma_\zeta(x,y)$$

根据 η_n 的定义（3.3），可得

$$\begin{aligned}\sum_{x\in S:|x-y|\le n}\xi(x)\big[\Gamma_\xi(x,y)-\Gamma_\zeta(x,y)\big]^+ + \sum_{x\in S:|x-y|>n}\xi(x)\big(\Gamma_\xi(x,y)-\Gamma_\zeta(x,y)\big)\\ \le \sum_{x\in S}\zeta(x)(1-\xi(x))\Gamma_\zeta(x,y)\end{aligned} \tag{3.5}$$

条件（2.5）现在意味着，当 $n\to\infty$ 时，（3.5）左端的第二项趋于零。因此，在（3.5）中令 $n\to\infty$ 趋于极限，得到

$$\sum_{x\in S}\xi(x)\big[\Gamma_\xi(x,y)-\Gamma_\zeta(x,y)\big]^+ \le \sum_{x\in S}\zeta(x)(1-\xi(x))\Gamma_\zeta(x,y)$$

这就是方程（2.10）。

方程（2.11）可以用类似的方法从（3.2）推导出来。再次设 ξ、 ζ 为两个构型，使得 $\xi \le \zeta$，现在取 $x \in S$ 使得 $\xi(x) = 1$。设 $n > 0$，并考虑满足以下条件的构型 η_n：

$$\eta_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } y = x\\ 0 & \text{if } |x-y|\le n \text{ , } \zeta(y) = 0 \text{ and } \Gamma_\xi(x,y) > \Gamma_\zeta(x,y),\\ 1 & \text{otherwise.}\end{cases} \tag{3.6}$$

我们构造递减柱集 $V_n = \{\rho \in \Omega\ \rho \le \eta_n\}$。由于 $\xi(x) = 1$，构型 ξ （因此 ζ）不属于 V_n。现在，方程 (3.2) 选出能够进入该递减集的单次跳跃，即移除位于 x 的一个粒子，并将其移至任意可能的格点 y，使得 $\eta_n(y) = 1$。因此我们得到

$$\sum_{y\in S}\eta_n(y)(1-\zeta(y))\Gamma_\zeta(x,y) \le \sum_{y\in S}\eta_n(y)(1-\xi(y))\Gamma_\xi(x,y) \tag{3.7}$$

对于所有 $y \neq x$，现在有

$$\begin{aligned}\eta_n(y)(1-\xi(y)) &= \eta_n(y)(1-\xi(y))(1-\zeta(y)) + \eta_n(y)(1-\xi(y))\zeta(y) \\ &= \eta_n(y)(1-\zeta(y)) + \zeta(y)(1-\xi(y))\end{aligned}$$

其中我们利用了 $\eta_n(y) \geq \zeta(y) \geq \xi(y)$。将此表达式代入（3.7）式的右端，得到

$$\sum_{y\in S} \eta_n(y)(1-\zeta(y))\big(\Gamma_\zeta(x,y)) - \Gamma_\xi(x,y)\big) \leq \sum_{y\in S} \zeta(y)(1-\xi(y))\Gamma_\xi(x,y)$$

利用 η_n的定义（3.6），我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{y\in S:|y-x|\leq n} (1-\zeta(y))\big[\Gamma_\zeta(x,y) - \Gamma_\xi(x,y)\big]^+ + \sum_{y\in S:|y-x|>n} (1-\zeta(y))\big(\Gamma_\zeta(x,y) - \Gamma_\xi(x,y)\big) \\ \leq \sum_{y\in S} \zeta(y)(1-\xi(y))\Gamma_\xi(x,y)\end{aligned} \tag{3.8}$$

在极限 $n \to \infty$ 下，（3.8）式左端的第二项趋于零，从而得到

$$\sum_{y\in S} (1-\zeta(y))\big[\Gamma_\zeta(x,y) - \Gamma_\xi(x,y)\big]^+ \leq \sum_{y\in S} \zeta(y)(1-\xi(y))\Gamma_\xi(x,y)$$

这就是方程（2.11）。 ∎

方程（2.10）–（2.11）可作如下解释。首先，根据条件（2.5），（2.10）–（2.11）中出现的求和总是有限的。（2.10）式的右端衡量的是较小构型 ξ 中空格点 y 被填充的超额速率，因此，若此和不为零，仅将两个构型中从相同初始格点 x 到 y 的跳跃耦合起来，显然不足以保持偏序。（2.10）式表明，可以将这类“超额速率”跳跃与左端涉及的跳跃耦合起来，以保持偏序；也就是说，与从构型ζ中被占据、但在 ξ 中为空的格点跳至 y 的跳跃相耦合。（2.10）式所陈述的正是这些速率足以做到这一点。

方程（2.11）也可以用类似的方式来解释：现在，右边衡量的是较大构型中已占据格点 x 被清空的超额速率，因此，只要这个和不为零，就无法通过将两个构型中从格点x 跳至同一格点 y 的跳跃进行耦合来保持偏序。再一次，方程（2.11）表明，可以将第二组“超额速率跳跃”与较小构型中从同一格点 x 跳至任意格点 y的跳跃进行耦合；该格点在构型 ξ 中为空，但在 ζ中已被占据，从而保持偏序。同样，方程（2.11）指出，跳跃率恰好足以实现这一点。

现在，我们利用这些想法构造一个耦合过程，然后证明它是递增的，也就是说，我们继续进行定理 2.9 证明的第二步和第三步。

证明。 [定理 2.9，耦合过程]。我们定义递增耦合过程应采取的一般形式。

¯命题 3.9。算子 $\mathcal{L}$ 定义如下：对于 $\Omega \times\Omega$ 上任意柱函数 f，以及任意一对构型 $(\xi,\zeta) \in \Omega \times\Omega$,

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathcal{L}} f(\xi,\zeta) &= \sum_{x_1,y_1\in S} \xi(x_1)(1-\xi(y_1))\Gamma_\xi(x_1,y_1)\big(f(\xi^{x_1,y_1},\zeta)-f(\xi,\zeta)\big) \\
&+ \sum_{x_2,y_2\in S} \zeta(x_2)(1-\zeta(y_2))\Gamma_\zeta(x_2,y_2)\big(f(\xi,\zeta^{x_2,y_2})-f(\xi,\zeta)\big) \\
&+ \sum_{x_1,y_1\in S}\sum_{x_2,y_2\in S} \xi(x_1)(1-\xi(y_1))\zeta(x_2)(1-\zeta(y_2))G_{\xi,\zeta}(x_1,y_1;x_2,y_2) \\
&\qquad \times\big(f(\xi^{x_1,y_1},\zeta^{x_2,y_2})-f(\xi^{x_1,y_1},\zeta)-f(\xi,\zeta^{x_2,y_2})+f(\xi,\zeta)\big)
\end{aligned} \tag{3.10}
$$

是由式（2.1）定义的马尔可夫过程的两个副本之间的马尔可夫耦合的生成元，前提是对于所有构型对 $(\xi,\zeta) \in\Omega^2$，耦合速率 $G_{\xi,\,\zeta}$均为非负，且满足以下不等式

$$
\forall (x_1,y_1)\in S^2,\ \sum_{x_2,y_2\in S} \zeta(x_2)(1-\zeta(y_2))\, G_{\xi,\zeta}(x_1,y_1;x_2,y_2) \le \Gamma_\xi(x_1,y_1) \tag{3.11}
$$

$$
\forall (x_2,y_2)\in S^2,\ \sum_{x_1,y_1\in S} \xi(x_1)(1-\xi(y_1))\, G_{\xi,\zeta}(x_1,y_1;x_2,y_2) \le \Gamma_\zeta(x_2,y_2) \tag{3.12}
$$

命题 3.9 的证明推迟到第 5 节。作为式（3.11）–（3.12）左侧各项求和的简写，对于所有构型对 $(\xi,\zeta) \in\Omega \times\Omega$ 以及所有 $(x,y) \in S^2$，定义以下量

$$
\varphi_{\xi,\zeta}(x,y) := \sum_{x',y'\in S} \zeta(x')(1-\zeta(y'))G_{\xi,\zeta}(x,y;x',y') \tag{3.13}
$$

$$
\overline{\varphi}_{\xi,\zeta}(x,y) := \sum_{x',y'\in S} \xi(x')(1-\xi(y'))G_{\xi,\zeta}(x',y';x,y) \tag{3.14}
$$

∎

证明。 [定理 2.9，递增耦合过程]。
现在给出定义递增耦合的耦合速率 $G_{\xi,\,\zeta}(x,y;\,x',y')$。

首先引入一些记号。设 ξ 和 ζ 是 Ω 中的两个构型。对于所有满足 $\xi(x) = \zeta(x) = 1$ 的 $x \in S$，定义以下两个集合

$$
Y^x_{\xi,\zeta} = \{y \in S : \xi(y) = 0, \zeta(y) = 1, \Gamma_\xi(x,y) > 0\} \tag{3.15}
$$

$$
\overline{Y}^x_{\xi,\zeta} = \{y \in S : \xi(y) = \zeta(y) = 0, \Gamma_\zeta(x,y) > \Gamma_\xi(x,y)\} \tag{3.16}
$$

当这两个集合均非空时，我们在其上定义一个任意序，该任意序可能取决于 ξ、ζ 和 x，并分别将 $y^{x,\,k}_{\xi\,\zeta\,,}$（分别为 $\overline{y}^{x,\,k}_{\xi\,\zeta\,,}$）记为 k^{th} 中的元素，该元素属于 $Y^x_{\xi,\,\zeta}$（分别属于 $\overline{Y}^x_{\xi\,,\,\zeta}$）。

类似地，对于所有满足 $\xi(y) = \zeta(y) = 0$ 的 $y \in S$，我们定义

$$X^y_{\xi,\zeta} = \{x \in S : \xi(x) = \zeta(x) = 1, \Gamma_\xi(x,y) > \Gamma_\zeta(x,y)\} \tag{3.17}$$

$$\overline{X}^y_{\xi,\zeta} = \{x \in S : \xi(x) = 0, \zeta(x) = 1, \Gamma_\zeta(x,y) > 0\} \tag{3.18}$$

我们也在这两个集合上定义一个任意序，它可能取决于 ξ、ζ 和 y，并将 $x^{y,\xi}{}^{k}_{,\zeta}$（分别将 $\overline{x}^{y,\xi}{}^{k}_{,\zeta}$）记为 k^{th} 在 $X^y_{\xi,\zeta}$（分别在 $\overline{X}^y_{\xi,\zeta}$）中的元素。

为明确起见，当上述集合之一是有限集或空集时，设为 $|Y^x_{\xi,\zeta}| = C_Y < \infty$，我们可以将其元素的有序序列延拓为无限序列 $(y^{x,\xi}{}^{n}_{,\zeta})_{n>0}$，方法是对所有 $n > C_Y$ 任意设定 $y^{x,\xi}{}^{n}_{,\zeta} = 0$。

对于所有满足 $\xi(x) = \zeta(x) = 1$ 的 $x \in S$，我们定义两个级数 $\left(S^{x,\xi}{}^{n}_{,\zeta}\right)_{n\geq 0}$ 和 $\left(\overline{T}^{x,\xi}{}^{n}_{,\zeta}\right)_{n\geq 0}$，使得 $S^{x,\xi}{}^{0}_{,\zeta} = 0$，$\overline{T}^{x,\xi}{}^{0}_{,\zeta} = 0$，并且

$$S^{x,n}_{\xi,\zeta} = \sum_{k=1}^{n\wedge|Y^x_{\xi,\zeta}|} \Gamma_\xi(x, y^{x,k}_{\xi,\zeta}) \qquad \forall n > 0 \tag{3.19}$$

$$\overline{T}^{x,n}_{\xi,\zeta} = \sum_{k=1}^{n\wedge|\overline{Y}^x_{\xi,\zeta}|} \left[\Gamma_\zeta(x, \overline{y}^{x,k}_{\xi,\zeta}) - \Gamma_\xi(x, \overline{y}^{x,k}_{\xi,\zeta})\right]^+ \qquad \forall n > 0 \tag{3.20}$$

类似地，对于所有满足 $\xi(y) = \zeta(y) = 0$ 的 $y \in S$，我们定义两个级数 $\left(T^{y,\xi}{}^{n}_{,\zeta}\right)_{n\geq 0}$ 和 $\left(\overline{S}^{y,\xi}{}^{n}_{,\zeta}\right)_{n\geq 0}$，使得 $T^{y,\xi}{}^{0}_{,\zeta} = \overline{S}^{y,\xi}{}^{0}_{,\zeta} = 0$ 以及

$$T^{y,n}_{\xi,\zeta} = \sum_{k=1}^{n\wedge|X^y_{\xi,\zeta}|} \left[\Gamma_\xi(x^{y,k}_{\xi,\zeta}, y) - \Gamma_\zeta(x^{y,k}_{\xi,\zeta}, y)\right]^+ \qquad \forall n > 0 \tag{3.21}$$

$$\overline{S}^{y,n}_{\xi,\zeta} = \sum_{k=1}^{n\wedge|\overline{X}^y_{\xi,\zeta}|} \Gamma_\zeta(\overline{x}^{y,k}_{\xi,\zeta}, y) \qquad \forall n > 0 \tag{3.22}$$

注意，根据定义，这四个级数的各项均为非负数且为非递减级数，并且根据（2.5），它们也是收敛级数。

最后，对于任意两个收敛级数 $(S_n)_{n\geq 0}$ 和 $(T_n)_{n\geq 0}$，我们将量 $H_{n,m}(S,T)$ 定义为：对于所有 $n > 0$ 以及所有 $m > 0$，其值为

$$H_{m,n}(S_\cdot, T_\cdot) = S_m \wedge T_n - S_{m-1} \wedge T_n - S_m \wedge T_{n-1} + S_{m-1} \wedge T_{n-1} \tag{3.23}$$

注意，当 $S_\cdot$ 和 $T_\cdot$ 为非递减级数时，$H_{m,n}(S_\cdot, T_\cdot) \geq 0$。

现在我们可以陈述如下

命题 3.24。在条件 (2.10)–(2.11) 下，由 (3.10) 给出的生成元，采用下方的耦合率 $G_{\xi,\,\zeta}$ 定义了一个递增马尔可夫耦合。

$$
\begin{aligned}
&G_{\xi,\zeta}(x,y;x',y') = \\
&\qquad\begin{cases}
\delta(x,x')\,\delta(y,y')\,\Gamma_\xi(x,y)\wedge\Gamma_\zeta(x,y) & \\
\qquad +\delta(x,x')\sum\limits_{m,n>0}\delta(y,y^{x,m}_{\xi,\zeta})\,\delta(y',\overline{y}^{x,n}_{\xi,\zeta})\,H_{m,n}(S^{x,\cdot}_{\xi,\zeta},\overline{T}^{x,\cdot}_{\xi,\zeta}) & \\
\qquad +\delta(y,y')\sum\limits_{m,n>0}\delta(x,x^{y,m}_{\xi,\zeta})\delta(x',\overline{x}^{y,n}_{\xi,\zeta})\,H_{m,n}(T^{y,\cdot}_{\xi,\zeta},\overline{S}^{x,\cdot}_{\xi,\zeta}) & \text{if } \xi\le\zeta \\
\delta(x,x')\,\delta(y,y')\,\Gamma_\xi(x,y)\wedge\Gamma_\zeta(x,y) & \\
\qquad +\delta(x,x')\sum\limits_{m,n>0}\delta(y,\overline{y}^{x,m}_{\zeta,\xi})\,\delta(y',y^{x,n}_{\zeta,\xi})\,H_{m,n}(\overline{T}^{x,\cdot}_{\zeta,\xi},S^{x,\cdot}_{\zeta,\xi}) & \\
\qquad +\delta(y,y')\sum\limits_{m,n>0}\delta(x,\overline{x}^{y,m}_{\zeta,\xi})\,\delta(x',x^{y,n}_{\zeta,\xi})\,H_{m,n}(\overline{S}^{y,\cdot}_{\zeta,\xi},T^{y,\cdot}_{\zeta,\xi}) & \text{if } \xi>\zeta \\
0 & \text{otherwise}
\end{cases}
\end{aligned}
\tag{3.25}
$$

注 3.26。按照上述选择，除非 ξ 和 ζ 有序，否则跳跃不会耦合。在这种情况下，耦合速率 $G_{\xi,\,\zeta}(x,y;\,x',y')$ 只有在两个耦合跳跃的初始点相同、终点相同或两者都相同时，才可能非零。

注 3.27。(3.15)–(3.18) 中定义的四个集合，其排序可以任意选择，也可以根据构型 ξ 和 ζ 以及公共跳跃位置（初始或终点）来确定。最佳选择可能取决于具体系统，而不同选择会产生不同的递增耦合。此外，所有这些耦合都是极端的，即它们不能表示为其他递增耦合的凸组合；而它们的任意凸组合仍然是递增耦合。

注 3.28。在定义 (3.25) 中，当 $\xi\le\zeta$ 时，右侧出现的第一（分别为第二）个求和项仅在以下情况下可能非零：第一边缘分布 ξ 中存在从格点 x 跳至格点 $y\in Y^x_{\xi,\,\zeta}$ 的跳跃，且该跳跃与第二边缘分布 ζ 中从同一格点 x 跳至格点 $y'\in\overline{Y}^x_{\xi\,,\,\zeta}$ 的跳跃耦合（分别为第一边缘分布中从 $X^y_{\xi\,,\,\zeta}$ 中某格点出发的跳跃，与第二边缘分布中从 $\overline{X}^y_{\xi\,,\,\zeta}$ 跳至同一格点 y 的跳跃耦合）。此外，根据 $Y^x_{\xi,\,\zeta}$ 和 $\overline{Y}^x_{\xi\,,\,\zeta}$ 的定义 (3.15)–(3.16)（分别根据 $X^y_{\xi\,,\,\zeta}$ 和 $\overline{X}^y_{\xi\,,\,\zeta}$ 的定义 (3.15)–(3.18)），$y\neq y'$ 出现在第一个求和项中，而 $x\neq x'$ 出现在第二个求和项中（两种情况下均有 $\xi\le\zeta$ 和 $\xi>\zeta$）。

备注 3.29. 当两个构型相等时，$\zeta=\xi$，对于所有 $x\in S$，两者都满足 $\overline{Y}^x_{\xi\,,\,\xi}=\emptyset$，而对于所有 $y\in S$，也都有 $X^y_{\xi\,,\,\xi}=\emptyset$。因此，唯一非零的耦合速率是对角项 $G_{\xi,\,\xi}(x,y;\,x,y)=\Gamma_\xi(x,y)$，从而边缘分布保持相等。

∎

3.2. 定理 2.13 的证明。上述递增马尔可夫耦合在边缘分布有序时保持其间的序关系，但在其他情况下则不对它们进行耦合。为了处理无序构型并控制其差异，我们将在下一个命题中展示如何从一个递增马尔可夫过程构造出一个吸引的马尔可夫过程。

命题 3.30。设由（2.1）定义的过程在 $\Omega = \{0,1\}^S$ 上是单调的。令 $\overline{\mathcal{L}}$ 是如命题 3.9 中定义在 $\Omega \times \Omega$ 上的一个相关递增过程，其耦合率由命题 3.24 定义。定义在 $\Omega \times \Omega$ 上所有柱函数上的算子 $\overline{\mathcal{L}}^D$ 为

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{L}}^D f(\xi,\zeta) &= \sum_{x_1,y_1\in S} \xi(x_1)(1-\xi(y_1))\Gamma_\xi(x_1,y_1)\big(f(\xi^{x_1,y_1},\zeta)-f(\xi,\zeta)\big)\\ &+ \sum_{x_2,y_2\in S} \zeta(x_2)(1-\zeta(y_2))\Gamma_\zeta(x_2,y_2)\big(f(\xi,\zeta^{x_2,y_2})-f(\xi,\zeta)\big)\\ &+ \sum_{x_1,y_1\in S}\sum_{x_2,y_2\in S} \xi(x_1)(1-\xi(y_1))\zeta(x_2)(1-\zeta(y_2))G^D_{\xi,\zeta}(x_1,y_1;x_2,y_2)\\ &\qquad \times\big(f(\xi^{x_1,y_1},\zeta^{x_2,y_2}) - f(\xi^{x_1,y_1},\zeta) - f(\xi,\zeta^{x_2,y_2}) + f(\xi,\zeta)\big) \qquad (3.31)\end{aligned}$$

其中，对于所有 $(\xi,\zeta)\in\Omega\times\Omega$、所有 $(x_1,y_1)\in S^2$ 以及所有 $(x_2,y_2)\in S^2$，

$$\begin{aligned}G^D_{\xi,\zeta}(x_1,y_1;x_2,y_2) &= \sum_{x,y\in S}(\xi\vee\zeta)(x)(1-(\xi\vee\zeta)(y))\\ &\qquad \times\frac{1}{N_{\xi,\zeta}(x,y)}G_{\xi,\xi\vee\zeta}(x_1,y_1;x,y)\,G_{\xi\vee\zeta,\zeta}(x,y;x_2,y_2) \qquad (3.32)\end{aligned}$$

$$N_{\xi,\zeta}(x,y) = \begin{cases}\Gamma_{\xi\vee\zeta}(x,y) & \text{if } \Gamma_{\xi\vee\zeta}(x,y)>0\\ 1 & \text{otherwise.}\end{cases} \qquad (3.33)$$

这是一个吸引耦合，在该耦合下差异不会增加。

备注 3.34。当构型 ξ,ζ 有序时，对于所有满足 $\xi(x_1)(1-\xi(y_1))\zeta(x_2)(1-\zeta(y_2))\neq 0$ 的 $(x_1,y_1,x_2,y_2)\in S^4$，有

$$G^D_{\xi,\zeta}(x_1,y_1;x_2,y_2) = G_{\xi,\zeta}(x_1,y_1;x_2,y_2) \qquad (3.35)$$

因此，当边缘分布有序时，(3.31) 中的 $\overline{\mathcal{L}}^D f(\xi,\zeta)$ 可化为 (3.10) 中的 $\overline{\mathcal{L}}f(\xi,\zeta)$。

3.3. 不变测度。在上文命题 3.30 中，已经证明差异不会增加，但定理 2.15 对不变测度集合的刻画还需要更多条件，即证明在耦合过程中，任意一对符号相反的差异（也就是说，边缘分布具有相反的占据数，$\xi(x) > \zeta(x)$，$\xi(y) < \zeta(y)$，其中某些 x, y属于 S）以正概率在有限时间内消失。与简单排斥过程的情形不同，这需要对过程作出额外假设。不过，与 SEP 密切相关的是，可以考虑在定义 2.14 意义下不存在阻塞构型的过程。于是我们有以下结果：

命题 3.36。考虑任意生成元为 (2.1) 的排斥过程，假设不存在阻塞构型，且 S 在定义 2.14 意义下是全连通的。若跳跃率使得 (2.10) 和 (2.11) 中的所有不等式均为严格不等式，则存在一个递增耦合过程，使得极端平移不变不变概率测度支撑在耦合构型集合 $\{(\xi,\zeta):\ \xi\le\zeta\}\cup\{(\xi,\zeta):\ \xi>\zeta\}$ 上。

这一结果是确定集合 $(\mathcal{I}\cap\mathcal{S})_e$ 并证明定理 2.15 的关键步骤。该定理类似于 [3, 命题 3.1] 和 [8, 定理 5.13], ; 关于这一方法的完整描述，请参阅上述内容。其证明沿用相同的（经典框架），不过在我们的情形中，转移率所依赖的格点多于一次跃迁的出发点和到达点。证明的关键在于证明：对于耦合过程，所有极端的、平移不变且不变的概率测度都集中在耦合构型集合 $\{(\xi,\zeta):\ \xi\le\zeta\}\cup\{(\xi,\zeta):\ \xi>\zeta\}$ 上，这由命题 3.36 给出。

下一节中，我们将把结果应用于若干简单但并非平凡的例子。

4. 应用

本节通过若干例子阐释我们的结果，并检验它们是否满足定理 2.9 的单调性条件。只要满足这些条件，我们就应用命题 3.9 和 3.30 构造耦合生成元 $\overline{\mathcal{L}}$ 和 $\overline{\mathcal{L}}^D$ 。

在小节 4.1 中，我们证明，在简单排斥的情形下，我们的构造归结为基本耦合。在小节 4.2 中，我们考察 F. Spitzer 在 [18] 中引入、并由 T.M. Liggett 在 [14]中研究的速度变化排斥过程。在这种情况下，我们将此前已知的吸引性条件扩展为充要条件。最后，在小节 4.3 和 4.4 中，我们引入并研究受交通流启发的模型。

4.1. 简单排斥。对于简单排斥过程（见注 2.3），跳跃率与构型无关，

$$\Gamma_\zeta(x,y)-\Gamma_\xi(x,y)=0 \tag{4.1}$$

对于所有 ξ、$\zeta\in\Omega$ 以及所有 x、$y\in S$。

吸引性条件 (2.10)–(2.11) 化简为跳跃率非负，因此总是成立。下面我们证明，在这种情况下，命题 3.30 中定义的耦合化简为基本耦合。事实上，使用简单排斥速率 (2.4)，通过公式 (3.25) 定义的跳跃率对于所有 $(x_1,y_1,x_2,y_2)\in S^4$ 均变为：

$$G_{\xi,\zeta}(x_1,y_1;x_2,y_2)=\begin{cases}\delta_{x_1,x_2}\,\delta_{y_1,y_2}\,p(x_1,y_1) & \text{if } \xi\le\zeta \text{ or } \xi>\zeta\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases} \tag{4.2}$$

因此，通过命题 3.24 定义的递增马尔可夫耦合 $\overline{\mathcal{L}}$ 在边缘分布有序的构型上与基本耦合一致。于是我们有

$$\overline{\varphi}_{\xi,\xi\vee\zeta}(x,y) = \xi(x)(1-\xi(y))p(x,y) \tag{4.3}$$

$$\varphi_{\xi\vee\zeta,\zeta}(x,y) = \zeta(x)(1-\zeta(y))p(x,y) \tag{4.4}$$

and

$$N_{\xi,\zeta}(x,y) = \begin{cases} p(x,y) & \text{if } p(x,y)>0 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{4.5}$$

并使用 (4.2),

$$\begin{aligned} G^D_{\xi,\zeta}(x_1,y_1;x_2,y_2) &= \sum_{x,y}(\xi\vee\zeta)(x)(1-(\xi\vee\zeta)(y))\times \\ &\qquad \frac{1}{N_{\xi,\zeta}(x,y)}\,G_{\xi,\xi\vee\zeta}(x_1,y_1;x,y)G_{\xi\vee\zeta,\zeta}(x,y;x_2,y_2) \\ &= \delta_{x_1,x_2}\,\delta_{y_1,y_2}\,(\xi\vee\zeta)(x_1)(1-(\xi\vee\zeta)(y_1))\,p(x_1,y_1) \end{aligned} \tag{4.6}$$

最终 地，命题 3.30 中定义的耦合过程的生成元为

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{L}}^D f(\xi,\zeta) &= \sum_{x,y\in S} p(x,y)\xi(x)(1-\xi(y))\zeta(x)(1-\zeta(y))\big(f(\xi^{x,y},\zeta^{x,y})-f(\xi,\zeta)\big) \\ &+ \sum_{x,y\in S} p(x,y)\xi(x)(1-\xi(y))\big(1-\zeta(x)(1-\zeta(y))\big)\big(f(\xi^{x,y},\zeta)-f(\xi,\zeta)\big) \\ &+ \sum_{x,y\in S} p(x,y)\zeta(x)(1-\zeta(y))\big(1-\xi(x)(1-\xi(y))\big)\big(f(\xi,\zeta^{x,y})-f(\xi,\zeta)\big) \end{aligned} \tag{4.7}$$

因此， $\overline{\mathcal{L}}^D$ 即为 SEP 的基本耦合生成元。这是因为 (4.2) 中非零的耦合率均位于对角线上，所以公式 (3.32) 中的求和在此处简化为单个对角项。

4.2. 速度变化排斥过程。我们在此考虑一族模型，该模型由 F. Spitzer 在其开创性论文 [18], 中提出，后来由 T.M. Liggett 在[14, 第二部分、第 1.1、4.1]节中研究。其形式为格点 x 处粒子的依赖于构型的速度 $c_\xi(x)$ 与格点 x和 y之间与构型无关的跳跃强度的乘积。这种形式在格气的原始背景下尤其有趣。因此，跳跃率为

$$\Gamma_\eta(x,y) = q(x,y)c_\eta(x) \tag{4.8}$$

其中 $q\colon S\times S\to[0,+\infty)$ 对所有 $x\in S$, $q(x,x)=0$ 均满足，且

$$\sup_{x\in S}\sum_{y\in S}[q(x,y)+q(y,x)]<\infty \tag{4.9}$$

且 c满足

$$\sup_{x\in S,\eta\in X} c_\eta(x) < \infty; \qquad \sup_{x\in S}\sum_{y\in S}[c_{\eta^y}(x) - c_\eta(x)] < \infty \tag{4.10}$$

其中

$$\eta^y(z) = \begin{cases} 1-\eta(y) & \text{if } z = y \\ \eta(z) & \text{otherwise} \end{cases} \tag{4.11}$$

在此背景下，定理 2.9 的单调性条件（2.10）–（2.11）为：

对于所有满足 $\zeta(y) = 0$ 的 $y \in S$，

$$\sum_{x\in S}\xi(x)q(x,y)\left[c_\xi(x) - c_\zeta(x)\right]^+ \le \sum_{x\in S}\zeta(x)(1-\xi(x))\,q(x,y)\,c_\zeta(x) \tag{4.12}$$

对于所有满足 $\xi(x) = 1$ 的 $x \in S$，

$$\big(\sum_{y\in S}(1-\zeta(y))\,q(x,y)\big)\left[c_\zeta(x) - c_\xi(x)\right]^+ \le \big(\sum_{y\in S}\zeta(y)(1-\xi(y))\,q(x,y)\,\big)c_\xi(x) \tag{4.13}$$

T.M. Liggett [14] 在更严格的条件下构造了一个递增耦合，即速度是递增函数，

$$\text{For all } \xi \le \zeta,\ \forall x \in S,\ c_\xi(x) \le c_\zeta(x) \tag{4.14}$$

在这种情况下，方程 (4.12) 恒成立，而方程 (4.13) 可因式分解为

对于所有满足 $x \in S$ $\xi(x) = 1$ 的 $x \in S$，

$$\big(\sum_{y\in S}(1-\zeta(y))\,q(x,y)\big)\,c_\zeta(x) \le \big(\sum_{y\in S}(1-\xi(y))\,q(x,y)\,\big)c_\xi(x) \tag{4.15}$$

这对速度增加施加了严格限制，因为对于所有 $x \in S$，函数$\eta \mapsto \sum_{y\in S}(1-\eta(y))\ q(x,y)$ 都是有界递减函数。对于任意选取的跳跃强度 $q(\cdot,\cdot)$，只要速度函数取以下形式，就可以定义一个具有速度变化的单调排斥过程

$$c_\eta(x) = \varphi\big(\sum_{y\in S}(1-\eta(y))\,q(x,y)\big) \text{ for all } x \in S \text{ and all } \eta \in \Omega \tag{4.16}$$

其中，$u \mapsto \varphi(u)$ 是定义在 $\mathbb{R}^+$ 上的递减函数，满足对某个 $K > 0$ 及所有 $u > 0$，有 $\varphi(u) \ge \frac{K}{u}$。

除了这些模型之外，具有非增速度的单调排斥过程是否存在尚不清楚。下面给出一个速度递减的例子，即对于所有 $\xi \le \zeta$，对于所有 $x \in S$，$c_\xi(x) \ge c_\zeta(x)$。在这种情况下，方程 (4.13) 恒成立，而方程 (4.12) 则变为：

对于所有满足 $\zeta(y) = 0$ 的 $y \in S$，

$$\sum_{x\in S}\xi(x)q(x,y)\,c_\xi(x) \le \sum_{x\in S}\zeta(x)\,q(x,y)\,c_\zeta(x) \tag{4.17}$$

因此，速度函数必须满足一组由 y 的可能取值索引的耦合不等式。取 $S=\mathbb{Z}$，固定 $L\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$，并设：

$$\forall (x,y)\in S^2, q(x,y)=\mathbf{1}_{\{0<y-x\le L\}} \tag{4.18}$$

$$\forall \eta\in\Omega, \forall x\in S, c_\eta(x)=2L-\eta(x)\eta(x+1) \tag{4.19}$$

显然，速度是递减函数，因此方程 (4.13) 恒成立。现在我们证明方程 (4.17) 也成立。

对于任意 $y\in S$，我们有以下界

$$(2L-1)\sum_{x=y-L}^{y-1}\eta(x)\le\sum_{x=y-L}^{y-1}\eta(x)\,q(x,y)\,c_\zeta(x)\le(2L+1)\sum_{x=y-L}^{y-1}\eta(x) \tag{4.20}$$

现在，对于 $\xi\le\zeta$，要么对所有 $x\in[y-L,y-1]$, $c_\xi(x)=c_\zeta(x)$ 都成立，且方程 (4.17) 也成立，因为 $\xi\le\zeta$；要么存在 $x\in[y-L,y-1]$，使得 $\xi(x)=0$ 且 $\zeta(x)=1$，因此利用前面的界 (4.20)，

$$\sum_{x=y-L}^{y-1}\eta(x)\,q(x,y)\,c_\eta(x)-\sum_{x=y-L}^{y-1}\eta(x)\,q(x,y)\,c_\xi(x)\ge-2(L-1)+2L\ge2>0 \tag{4.21}$$

于是方程 (4.17) 得到验证。由 (4.15) 定义的速度递减的排斥过程是单调的。

4.3. k 步排斥过程及相关模型。k 步排斥过程在 [10] 中作为研究长程排斥过程的辅助模型被引入（另见 [1, 11]）。它是简单排斥过程的推广；我们将在第 4.3.1 小节中研究这一模型在一维情形下 $k=2$ 时的情况。随后，我们将在第 4.3.2 小节中引入该模型的第一个变体，称为 2^* 步排斥过程。最后，在第 4.3.3 小节中，我们将结合这两个模型，构建并分析一种称为范围 2 交通模型的交通流模型。

4.3.1. 一维 k步排斥过程。k步排斥过程的状态空间为 $\{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$。其跳跃遵循$\mathbb{Z}^d$上的平移不变概率转移。也就是说，如果位于格点 x 的粒子试图跳跃，它会沿着带有 $X_0^x=x$ 的随机游走（X_n^x）$_{n\ge0}$，最多行进 k 步，直到找到一个空格点 y；如果在这 k 步中遇到的所有格点都被占据，该粒子就留在 x上。一维k步排斥过程的生成元为

$$\mathfrak{L}_k f(\eta)=\sum_{j=1}^{k}\sum_{x,y\in\mathbb{Z}}\eta(x)(1-\eta(y))c_j(x,y,\eta)\left[f(\eta^{x,y})-f(\eta)\right], \tag{4.22}$$

其中 $c_j(x,y,\eta)=\mathrm{E}^x\left[\prod_{i=1}^{j-1}\eta(X_i)\;\sigma_y=j\le\sigma_x\right]$ 和 $\sigma_y=\inf\{n\ge1\colon X_n^x=y\}$ 是格点 y 的首次（非零）到达时间。

为简便起见，我们仅考虑 $S=\mathbb{Z}$ 上完全非对称的最近邻 2步排斥过程这一特例，对于该过程，我们有

$$\sum_{j=1}^{2} c_j(x,y,\eta) = 1_{\{y=x+1\}} + 1_{\{y=x+2\}}\eta(x+1) =: \Gamma_\eta(x,y) \tag{4.23}$$

全不对称最近邻 2步排斥过程具有吸引性，并且与简单排斥过程一样，动力学的极端平移不变不变概率测度集合 $(\mathcal{I}\cap\mathcal{S})_e$ 由一个伯努利乘积测度的单参数族 $\{\nu_\rho, \rho\in[0,1]\}$ 构成，其中 ρ 表示每个位点的平均密度，见 [10]。该过程是第4.3.3小节所研究的范围 2 交通模型的一个特例，因此其耦合率可作为下文命题 4.38 的一个特例导出。

4.3.2. 一维全不对称 2^*步排斥过程。在 $S=\mathbb{Z}$上，我们定义

$$\Gamma_\eta(x,y) = 1_{\{y=x+1\}} + 1_{\{y=x+2\}}(1-\eta(x+1)) \tag{4.24}$$

我们将生成元为 (2.1)、速率 $\Gamma_\eta(x,y)$ 由 (4.24) 给出的排斥过程称为全不对称 2^*步排斥过程。全不对称最近邻二星步排斥过程是下文第4.3.3小节所研究的范围 2 交通模型的一个特例，因此其吸引性由命题 4.29 得出，而其耦合率则作为命题 4.38 的一个特例导出。

该模型也是跃迁率为以下形式的更一般的 2^* 步排斥过程的一个特例

$$\Gamma_\eta(x,y) = p(x,y) + \sum_{z\in\mathbb{Z}} p(x,z)p(z,y)(1-\eta(z)) \tag{4.25}$$

其中转移概率 $p(.,.)$ 平移不变。

命题 4.26. 伯努利乘积测度 $\{\nu_\rho, \rho\in[0,1]\}$ 对于式 (4.25) 中给出的跃迁率为 $\Gamma_\eta(x,y)$ 的二星步排斥过程是不变的。

证明. 我们按照定理 VIII.2.1], 的证明思路，验证 $\int Lf_A d\nu_\rho = 0$，其中 A 是有限位点集，f_A 是由下式定义的柱函数

$$f_A(\eta) = \prod_{x\in A}\eta(x) \tag{4.27}$$

记 $\mathcal{L}_{\mathrm{SEP}}$ 为简单排斥过程的生成元，记 $\mathcal{L}_{2*\mathrm{s}}$ 为二星步排斥过程生成元的第二部分，

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}f_A(\eta) &= \mathcal{L}_{\mathrm{SEP}}f_A(\eta) + \mathcal{L}_{2*\mathrm{s}}f_A(\eta)\\
\mathcal{L}_{2*\mathrm{s}}f_A(\eta) &= \sum_{x,y\in S, x\neq y}\ \sum_{z\in S, z\neq x,y} p(x,z)p(z,y)\eta(x)(1-\eta(y))(1-\eta(z))\big[f_A(\eta^{x,y}) - f_A(\eta)\big]
\end{aligned}$$

由于

$$\int f_A(\eta)\eta(x)(1-\eta(z))(1-\eta(y))d\nu_\rho(\eta) = \begin{cases} 0, & \text{if } y\in A \text{ or } z\in A \\ (1-\rho)^2\rho^{|A\cup\{x\}|}, & \text{if } y\notin A, z\notin A \end{cases}$$

and

$$\int f_A(\eta^{x,y})\eta(x)(1-\eta(z))(1-\eta(y))d\nu_\rho(\eta) = \begin{cases} 0, & \text{if } x\in A \text{ or } z\in A \\ (1-\rho)^2\rho^{|A\cup\{x\}\setminus\{y\}|}, & \text{if } x\notin A, z\notin A \end{cases}$$

我们有

$$\begin{aligned}\int \mathcal{L}_{2*\mathrm{s}} f_A(\eta)d\nu_\rho(\eta) &= \sum_{x,y:x\neq y,x\notin A}\ \sum_{z:z\neq x,y,z\notin A} p(x,z)p(z,y)(1-\rho)^2\rho^{|A\cup\{x\}\setminus\{y\}|} \\ &\quad - \sum_{x,y:x\neq y,y\notin A}\ \sum_{z:z\neq x,y,z\notin A} p(x,z)p(z,y)(1-\rho)^2\rho^{|A\cup\{x\}|}\end{aligned}$$

在右端两项的第一个求和中取 $x\notin A, y\notin A$，结果为 0，因此第一项剩下 $y\in A$，第二项剩下 $x\in A$。在第二项中交换指标 x 和 y，得到

$$\begin{aligned}\int \mathcal{L}_{2*\mathrm{s}} f_A(\eta)d\nu_\rho(\eta) &= (1-\rho)^2\rho^{|A|}\sum_{x,y:x\neq y,x\notin A,y\in A}\ \sum_{z:z\neq x,y,z\notin A}\big[p(x,z)p(z,y)-p(y,z)p(z,x)\big] \\ &= 0\end{aligned}$$

因为 A 是有限的，且 $p(.,.)$ 是双随机的。 ∎

4.3.3. 范围 2 交通模型。在 $S=\mathbb{Z}$ 上，对于 $\alpha,\beta\in[0,1]$，我们定义

$$\Gamma_\eta(x,y) = 1_{\{y=x+1\}} + 1_{\{y=x+2\}}[\alpha\eta(x+1)+\beta(1-\eta(x+1))] \tag{4.28}$$

我们将生成元为 (2.1)、速率 $\Gamma_\eta(x,y)$ 由 (4.28) 给出的排斥过程称为范围 2 交通模型。该速率是相应的一维全非对称简单排斥、2步排斥过程和 2^* 步排斥过程的速率的凸组合。其交通解释是，汽车可以向前行驶一步，也可以通过超越另一辆车或加速而向前行驶两步。

命题 4.29。范围 2 交通模型是吸引的，当且仅当 $|\beta-\alpha|\le 1$。$\beta=\alpha=0$ 的情形对应于简单排斥，$\beta=0$ 的情形对应于 2步排斥过程，$\alpha=0$ 的情形对应于 2^*步排斥过程。

证明。我们需要检验不等式 (2.10)–(2.11)。设 $(\xi,\zeta)\in\Omega^2$，使得 $\xi\le\zeta$。我们先看 (2.10)。设 $y\in\mathbb{Z}$，使得 $\zeta(y)=0$，因此 $\xi(y)=0$。于是我们写作

$$\begin{aligned}&\textstyle\sum_{x\in\mathbb{Z}}\ \zeta(x)(1-\xi(x))\Gamma_\zeta(x,y) \\ &= \zeta(x-1)(1-\xi(x-1)) + \zeta(x-2)(1-\xi(x-2))(\alpha\zeta(x-1)+\beta(1-\zeta(x-1)) \qquad (4.30)\\ &\textstyle\sum_{x\in\mathbb{Z}}\ \xi(x)\big[\Gamma_\xi(x,y)-\Gamma_\zeta(x,y)\big]^+ \\ &= \xi(x-2)\big[(\alpha\xi(x-1)+\beta(1-\xi(x-1))-(\alpha\zeta(x-1)+\beta(1-\zeta(x-1))\big]^+ \qquad (4.31)\end{aligned}$$

首先，若 $\xi(x-1)=1$，则 $\zeta(x-1)=1$，因此 (4.31) 为零；其次，若 $\zeta(x-1)=0$，则$\xi(x-1)=0$，因此 (4.31) 为零；这两种情况下，(2.10) 均成立。最后，若 $\xi(x-1)=0$ 且 $\zeta(x-1)=1$，则 (4.30) 等于 $1+\alpha\zeta(x-2)(1-\xi(x-2))$，而 (4.31) 等于 $\xi(x-2)(\beta-\alpha)^+$：要么 $\xi(x-2)=0$，且 (2.10) 成立；要么 $\xi(x-2)=1$，且要使 (2.10) 成立，必须满足 $(\beta-\alpha)^+\le 1$。

现在验证 (2.11)。设 $x\in\mathbb{Z}$ 满足 $\xi(x)=1$，因此 $\zeta(x)=1$。于是我们写作

$$\begin{aligned}&\textstyle\sum_{y\in\mathbb{Z}}\ \zeta(y)(1-\xi(y))\Gamma_\xi(x,y)\\ &=\zeta(x+1)(1-\xi(x+1))+\zeta(x+2)(1-\xi(x+2))(\alpha\xi(x+1)+\beta(1-\xi(x+1))\end{aligned}\tag{4.32}$$

$$\begin{aligned}&\textstyle\sum_{y\in\mathbb{Z}}\ (1-\zeta(y))\big[\Gamma_\zeta(x,y)-\Gamma_\xi(x,y)\big]^+\\ &=(1-\zeta(x+2))\big[(\alpha\zeta(x+1)+\beta(1-\zeta(x+1))-(\alpha\xi(x+1)+\beta(1-\xi(x+1))\big]^+\end{aligned}\tag{4.33}$$

首先，若 $\xi(x+1)=1$，则 $\zeta(x+1)=1$，因此 (4.33) 为零；其次，若 $\zeta(x+1)=0$，则$\xi(x+1)=0$，因此 (4.33) 为零；这两种情况下，(2.11) 均成立。最后，若 $\xi(x+1)=0$ 且 $\zeta(x+1)=1$，则 (4.32) 等于 $1+\beta\zeta(x+2)(1-\xi(x+2))$，而 (4.33) 等于 $(1-\zeta(x+2))(\alpha-\beta)^+$：要么 $\zeta(x+2)=1$，此时 (2.11) 成立；要么 $\zeta(x+2)=0$，此时必须满足 $(\alpha-\beta)^+\le 1$，(2.11) 才成立。∎

不变测度。与简单排斥、2步排斥过程和二星步排斥过程的情形相同（见命题 4.26），伯努利乘积测度 $\{\nu_\rho,\rho\in[0,1]\}$ 对范围 2 交通模型是不变的。当 α,β 为正时，该模型不存在阻塞构型；此时，根据定理 2.15，伯努利乘积测度是该动力学的极端平移不变不变概率测度。

耦合率。为计算 $S=\mathbb{Z}$ 上动力学的耦合率，我们使用以下公式，它们等价于 (3.25)。对所有 $(x_1,y_1)\in S^2$，

$$G_{\xi,\zeta}(x_1,y_1;x_1,y_1)=\Gamma_\xi(x_1,y_1)\wedge\Gamma_\zeta(x_1,y_1)\tag{4.34}$$

对于所有满足 $(x_1,y_1)\neq(x_2,y_2)$ 的 $(x_1,y_1,x_2,y_2)\in S^4$，

$$G_{\xi,\zeta}(x_1,y_1;x_2,y_2)\ =\ \begin{cases}\delta_{x_1,x_2}\big[H^i_{\xi,\zeta}(x_1;y_1,y_2)\big]^++\delta_{y_1,y_2}\big[H^f_{\xi,\zeta}(x_1,x_2;y_1)\big]^+ & \text{if } \xi\le\zeta\\ \delta_{x_1,x_2}\big[H^i_{\zeta,\xi}(x_1;y_2,y_1)\big]^++\delta_{y_1,y_2}\big[H^f_{\zeta,\xi}(x_2,x_1;y_1)\big]^+ & \text{if } \xi>\zeta\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}\tag{4.35}$$

其中，对于所有 $(x,y,z) \in S^3$,

$$
\begin{aligned}
H^i_{\xi,\zeta}(x;y,z) &= \big(\sum_{y'\le y}(1-\xi(y'))\zeta(y')\Gamma_\xi(x,y')\big) \wedge \big(\sum_{z'\le z}(1-\zeta(z'))\big[\Gamma_\zeta(x,z')-\Gamma_\xi(x,z')\big]^+\big) \\
&\quad -\big(\sum_{y'<y}(1-\xi(y'))\zeta(y')\Gamma_\xi(x,y')\big) \vee \big(\sum_{z'<z}(1-\zeta(z'))\big[\Gamma_\zeta(x,z')-\Gamma_\xi(x,z')\big]^+\big) \qquad (4.36) \\
H^f_{\xi,\zeta}(x,y;z) &= \big(\sum_{x'\le x}\xi(x')\big[\Gamma_\xi(x',z)-\Gamma_\zeta(x',z)\big]^+\big) \wedge \big(\sum_{y'\le y}\zeta(y')(1-\xi(y'))\Gamma_\zeta(y',z)\big) \\
&\quad -\big(\sum_{x'<x}\xi(x')\big[\Gamma_\xi(x',z)-\Gamma_\zeta(x',z)\big]^+\big) \vee \big(\sum_{y'<y}\zeta(y')(1-\xi(y'))\Gamma_\zeta(y',z)\big) \qquad (4.37)
\end{aligned}
$$

因此，对于范围 2 交通模型，应用命题 3.9、3.24 以及公式 (4.34)–(4.37)，首先得到耦合率 $G_{\xi,\zeta}(x_1,y_1;x_2,y_2)$ 的以下公式。需要注意的是，在公式 (3.10) 中，它们会乘以预因子 $\xi(x_1)(1-\xi(y_1))\zeta(x_2)(1-\zeta(y_2))$，因此 $\xi(x_1)=1-\xi(y_1)=\zeta(x_2)=1-\zeta(y_2)=1$:

$$
\begin{aligned}
G_{\xi,\zeta}(x,x+1;x,x+1) &= 1 \\
G_{\xi,\zeta}(x,x+2;x,x+2) &= [\alpha\xi(x+1)+\beta(1-\xi(x+1))] \wedge [\alpha\zeta(x+1)+\beta(1-\zeta(x+1))] \\
G_{\xi,\zeta}(x,x+1;x,x+2) &= [\alpha-\beta]^+\zeta(x+1) \quad \text{when } \xi\le\zeta \\
&= 0 \quad \text{when } \xi>\zeta \\
G_{\xi,\zeta}(x,x+2;x+1,x+2) &= [\beta-\alpha]^+(1-\xi(x+1)) \quad \text{when } \xi\ge\zeta \\
&= 0 \quad \text{when } \xi>\zeta \\
G_{\xi,\zeta}(x+1,x+2;x,x+2) &= 0 \quad \text{when } \xi\ge\zeta \\
&= (\beta-\alpha)^+(1-\zeta(x+1)) \quad \text{when } \xi>\zeta \\
G_{\xi,\zeta}(x,x+2;x,x+1) &= 0 \quad \text{when } \xi\ge\zeta \\
&= 0 \quad \text{when } \xi>\zeta \\
G_{\xi,\zeta}(x+1,x+2;x,x+2) &= 0 \quad \text{when } \xi\ge\zeta \\
&= [\alpha-\beta]^+\xi(x+1) \quad \text{when } \xi>\zeta
\end{aligned}
$$

进一步计算以得到命题 3.30 中的公式，可得：

命题 4.38。范围 2 交通模型的耦合生成元写为

$$
\overline{\mathcal{L}}^D f(\xi,\zeta) = \overline{\mathcal{L}}^D_1 f(\xi,\zeta) + \overline{\mathcal{L}}^D_2 f(\xi,\zeta) + \overline{\mathcal{L}}^D_{3,1} f(\xi,\zeta) + \overline{\mathcal{L}}^D_{3,2} f(\xi,\zeta) \qquad (4.39)
$$

其中，$\overline{\mathcal{L}}^D_1$ 处理出发点和到达点相同的耦合跳跃，$\overline{\mathcal{L}}^D_2$ 处理出发点或到达点不同的耦合跳跃，而 $\overline{\mathcal{L}}^D_{3,1}$，$\overline{\mathcal{L}}^D_{3,2}$ 处理非耦合跳跃

。它们表示为

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathcal{L}}_1^D f(\xi,\zeta) &= \sum_{x\in S}\xi(x)(1-\xi(x+1))\zeta(x)(1-\zeta(x+1))\times\big(f(\xi^{x,x+1},\zeta^{x,x+1})-f(\xi,\zeta)\big)\\
&+\sum_{x\in S}\xi(x)\zeta(x)(1-(\xi\vee\zeta)(x+2))\\
&\quad\times\big[\alpha\xi(x+1)\zeta(x+1)+\beta(1-(\xi\vee\zeta)(x+1))\\
&\qquad+(\alpha\wedge\beta)\{\xi(x+1)(1-\zeta(x+1))+\zeta(x+1)(1-\xi(x+1))\}\big]\\
&\quad\times\big(f(\xi^{x,x+2},\zeta^{x,x+2})-f(\xi,\zeta)\big)
\end{aligned}
\tag{4.40}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathcal{L}}_2^D f(\xi,\zeta) &= \sum_{x\in S}\xi(x)(1-\xi(x+1))\zeta(x+1)(1-(\xi\vee\zeta)(x+2))(\beta-\alpha)^+\\
&\quad\times\big(f(\xi^{x,x+2},\zeta^{x+1,x+2})-f(\xi,\zeta)\big)\\
&+\sum_{x\in S}\xi(x)(1-\zeta(x))\zeta(x-1)(1-(\xi\vee\zeta)(x+1))(\beta-\alpha)^+\\
&\quad\times\big(f(\xi^{x,x+1},\zeta^{x-1,x+1})-f(\xi,\zeta)\big)\\
&+\sum_{x\in S}\xi(x)\zeta(x)\xi(x+1)(1-\zeta(x+1))(1-(\xi\vee\zeta)(x+2))(\alpha-\beta)^+\\
&\quad\times\big(f(\xi^{x,x+2},\zeta^{x,x+1})-f(\xi,\zeta)\big)\\
&+\sum_{x\in S}\xi(x)\zeta(x)(1-\xi(x+1))\zeta(x+1)(1-(\xi\vee\zeta)(x+2))(\alpha-\beta)^+\\
&\quad\times\big(f(\xi^{x,x+1},\zeta^{x,x+2})-f(\xi,\zeta)\big)
\end{aligned}
\tag{4.41}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathcal{L}}_{3,1}^D f(\xi,\zeta) &= \sum_{x\in S}\xi(x)(1-\xi(x+1))\big[1-\zeta(x)(1-\zeta(x+1))\\
&\qquad-(1-\zeta(x))\zeta(x-1)(1-\zeta(x+1))(\beta-\alpha)^+\\
&\qquad\quad-\zeta(x)\zeta(x+1)(1-(\xi\vee\zeta)(x+2))(\alpha-\beta)^+\big]\\
&\qquad\times\big(f(\xi^{x,x+1},\zeta)-f(\xi,\zeta)\big)\\
&+\sum_{x\in S}\xi(x)(1-\xi(x+2))\big[\alpha\xi(x+1)+\beta(1-\xi(x+1))\\
&\qquad-\zeta(x)(1-\zeta(x+2))\big\{\alpha\xi(x+1)\zeta(x+1)+\beta(1-(\xi\vee\zeta)(x+1))\\
&\qquad\qquad+(\alpha\wedge\beta)\{\xi(x+1)(1-\zeta(x+1))+\zeta(x+1)(1-\xi(x+1))\}\big\}\\
&\qquad-\zeta(x)\xi(x+1)(1-\zeta(x+1))(1-\zeta(x+2))(\alpha-\beta)^+\big]\\
&\qquad\times\big(f(\xi^{x,x+2},\zeta)-f(\xi,\zeta)\big)
\end{aligned}
\tag{4.42}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathcal{L}}^{D}_{3,2} f(\xi,\zeta) \;=\; & \sum_{x\in S} \zeta(x)(1-\zeta(x+1))\big[1-\xi(x)(1-\xi(x+1)) \\
& \qquad -\xi(x)\xi(x+1)(1-(\xi\vee\zeta)(x+2))(\alpha-\beta)^{+} \\
& \qquad -(1-\xi(x))\xi(x-1)(1-\xi(x+1))(\beta-\alpha)^{+}\big] \\
& \quad \times\big(f(\xi,\zeta^{x,x+1})-f(\xi,\zeta)\big) \\
+ \; & \sum_{x\in S} \zeta(x)(1-\zeta(x+2))\big[\alpha\zeta(x+1)+\beta(1-\zeta(x+1)) \\
& \qquad -\xi(x)(1-\xi(x+2))\big\{\alpha\xi(x+1)\zeta(x+1)+\beta(1-(\xi\vee\zeta)(x+1)) \\
& \qquad\quad +(\alpha\wedge\beta)\{\zeta(x+1)(1-\xi(x+1))+\xi(x+1)(1-\zeta(x+1))\big\} \\
& \qquad -\xi(x)(1-\xi(x+1))\zeta(x+1)(1-\xi(x+2))(\alpha-\beta)^{+}\big] \\
& \quad \times\big(f(\xi,\zeta^{x,x+2})-f(\xi,\zeta)\big)
\end{aligned}
\tag{4.43}
$$

注 4.44。取 $\alpha=\beta=0$，可得到 TASEP 的基本耦合生成元；取 $\beta=0$，可得到 2^* 步排斥过程的耦合生成元；取 $\alpha=0$，则可得到 2步排斥过程的耦合生成元。后者不同于 [10],中所使用的耦合生成元：其中耦合跳跃具有相同的出发位置，但不存在到达位置相同而出发位置不同的耦合跳跃。

4.4. 从非吸引性交通模型到吸引性动力学。我们从一种排斥过程开始，其转移率是在 [9] 的元胞自动机动力学背景下引入的。在那里，$S=\mathbb{Z}$，且跃迁是最近邻、全非对称的。对于所有 $x\in S$、$\eta\in X$，满足 $\eta(x)=1$ 且 $\eta(x+1)=0$

$$
\Gamma_\eta(x,x+1)=\begin{cases}
\alpha & \text{if } \eta(x-1)=1,\ \eta(x+2)=0,\ [\text{accelerating}]\\
\beta & \text{if } \eta(x+2)=1,\ \eta(x-1)=0,\ [\text{braking}]\\
\gamma & \text{if } \eta(x-1)=\eta(x+2)=1,\ [\text{congested}]\\
\delta & \text{if } \eta(x-1)=\eta(x+2)=0,\ [\text{driving}]\ .
\end{cases}
\tag{4.45}
$$

其中参数 α、β、γ、δ 均为正。除非该模型退化为简单排斥过程，即 $\alpha=\beta=\gamma=\delta$，否则它不是吸引的。事实上，对于其他任何取值，定理 2.9 中的条件 (2.10)–(2.11) 均不满足。在这里，只需考虑一个对称化版本，就可以将动力学转变为吸引性动力学；该版本的非零速率包括先前的向右速率 (4.45)，以及以下对称的向左跃迁率：

$$
\Gamma_\eta(x+1,x)=\begin{cases}
\alpha & \text{if } \eta(x+2)=1,\ \eta(x-1)=0,\\
\beta & \text{if } \eta(x-1)=1,\ \eta(x+2)=0,\\
\gamma & \text{if } \eta(x+2)=\eta(x-1)=1,\\
\delta & \text{if } \eta(x+2)=\eta(x-1)=0.
\end{cases}
\tag{4.46}
$$

然后，应用定理 2.9 中的条件可得以下结果。

命题 4.47. 速率为 (4.45)–(4.46) 的对称化动力学是吸引的，当且仅当 α、β、γ、δ 满足以下条件

$$\beta \le \gamma \wedge \delta \le \gamma \vee \delta \le \alpha, \qquad \alpha \le \beta + \gamma \wedge \delta, \qquad \delta \le 2\beta \tag{4.48}$$

注意，促进型排斥过程（[2, 4, 6]）的速率为（4.45），其中 $\alpha = \gamma = 1$、$\beta = \delta = 0$。因此，它不是吸引的，其对称化版本（采用相应的（4.46）中的速率）也不是吸引的。事实上，研究这一模型需要借助其他工具。

不变测度。由于参数 α、β、γ、δ 均为正，对称化动力学不存在阻塞构型。因此，我们可以应用定理 2.15。

耦合率。应用命题 3.9、3.24，并结合公式（4.34）–（4.37），首先得到以下耦合率公式：$G_{\xi,\,\zeta}(x_1,\ y_1;\ x_2,\ y_2)$。需注意，这些公式还要乘以预因子 $\xi(x_1)\ (1-\xi(y_1))\ \zeta(x_2)\ (1-\zeta(y_2))$，因此 $\xi(x_1) = 1-\xi(y_1) = \zeta(x_2) = 1-\zeta(y_2) = 1$。注意，由于速率（4.45）和（4.46）是对称的，只需计算正方向上的耦合率，即可利用对称性得到负方向上的耦合率。为简化计算，我们假设 $\gamma \le \delta$。

$$\begin{aligned} G_{\xi,\zeta}(x, x+1; x, x+1) &= \Gamma_\xi(x, x+1) \wedge \Gamma_\zeta(x, x+1) \\ G_{\xi,\zeta}(x, x-1; x, x-1) &= \Gamma_\xi(x, x-1) \wedge \Gamma_\zeta(x, x-1) \end{aligned}$$

当 $\xi \le \zeta$ 时，我们有

$$\begin{aligned} G_{\xi,\zeta}(x, x+1; x, x-1) &= \zeta(x+1)\big[(1-\zeta(x-2))(\alpha-\delta) + \xi(x-2)(\gamma-\beta)\big] \\ G_{\xi,\zeta}(x, x-1; x, x+1) &= \zeta(x-1)\big[(1-\zeta(x+2))(\alpha-\delta) + \xi(x+2)(\gamma-\beta)\big] \\ G_{\xi,\zeta}(x, x+1; x+2, x+1) &= (1-\xi(x+2))\big[(1-\zeta(x-1))(\delta-\beta) \\ &\quad + (1-\xi(x-1))\zeta(x-1)(\delta-\gamma) + \xi(x-1)(\alpha-\gamma)\big] \\ G_{\xi,\zeta}(x, x-1; x-2, x-1) &= (1-\xi(x-2))\big[(1-\zeta(x+1))(\delta-\beta) \\ &\quad + (1-\xi(x+1))\zeta(x+1)(\delta-\gamma) + \xi(x+1)(\alpha-\gamma)\big] \end{aligned}$$

当 $\xi > \zeta$ 时，我们有

$$\begin{aligned} G_{\xi,\zeta}(x, x+1; x, x-1) &= \xi(x-1)\big[(1-\xi(x+2))(\alpha-\delta) + \zeta(x+2)(\gamma-\beta)\big] \\ G_{\xi,\zeta}(x, x-1; x, x+1) &= \xi(x+1)\big[(1-\xi(x-2))(\alpha-\delta) + \zeta(x-2)(\gamma-\beta)\big] \\ G_{\xi,\zeta}(x, x+1; x+2, x+1) &= (1-\zeta(x))\big[(1-\xi(x+3))(\delta-\beta) \\ &\quad + \zeta(x+3)(\alpha-\gamma) + \xi(x+3)(1-\zeta(x+3))(\delta-\gamma)\big] \\ G_{\xi,\zeta}(x, x-1; x-2, x-1) &= (1-\zeta(x))\big[(1-\xi(x-3))(\delta-\beta) \\ &\quad + \zeta(x-3)(\alpha-\gamma) + \xi(x-3)(1-\zeta(x-3))(\delta-\gamma)\big] \end{aligned}$$

最后，将命题 3.30 与公式 (3.32)–(3.33) 结合应用，我们得到以下耦合率公式 $G^D_{\xi,\,\zeta}(x_1,\ y_1;\ x_2, y_2)$。注意到它们乘有前因子 $\xi(x_1)(1-\xi(y_1))\zeta(x_2)(1-\zeta(y_2))$，因此 $\xi(x_1) = 1-\xi(y_1) = \zeta(x_2) = 1-\zeta(y_2) = 1$。同样，由于速率 (4.45) 和 (4.46) 是对称的，只需

compute the coupling rates in the positive direction.

$$
\begin{aligned}
G^D_{\xi,\zeta}(x,x+1;x,x+1) &= \Gamma_\xi(x,x+1)\wedge\Gamma_\zeta(x,x+1)\\
G^D_{\xi,\zeta}(x,x-1;x,x-1) &= \Gamma_\xi(x,x-1)\wedge\Gamma_\zeta(x,x-1)\\
G^D_{\xi,\zeta}(x,x+1;x,x-1) &= (1-\zeta(x+1))\xi(x-1)\times\\
&\qquad\big[(1-(\xi\vee\zeta)(x+2))(\alpha-\delta)+\zeta(x+2)(\gamma-\beta)\big]\\
&\quad+(1-\xi(x-1))\zeta(x+1)\times\\
&\qquad\big[(1-(\xi\vee\zeta)(x-1))(\alpha-\delta)+\xi(x-2)(\gamma-\beta)\big]\\
G^D_{\xi,\zeta}(x,x-1;x,x+1) &= (1-\zeta(x-1))\xi(x+1)\times\\
&\qquad\big[(1-(\xi\vee\zeta)(x-2))(\alpha-\delta)+\zeta(x-2)(\gamma-\beta)\big]\\
&\quad+(1-\xi(x+1))\zeta(x-1)\times\\
&\qquad\big[(1-(\xi\vee\zeta)(x+2))(\alpha-\delta)+(\xi\vee\zeta)(x+2)(\gamma-\beta)\big]\\
G^D_{\xi,\zeta}(x,x+1;x+2,x+1) &= (1-\zeta(x))\big[(1-(\xi\vee\zeta)(x+3))(\delta-\beta)\\
&\qquad+\zeta(x+3)(\alpha-\gamma)+(1-\zeta(x+3))\xi(x+3)(\delta-\gamma)\big]\times\\
&\qquad\big[\xi(x+2)\zeta(x-1)(1-\xi(x-1))\left(\frac{\beta}{\gamma}-1\right)+1\big]\\
&\quad+(1-\xi(x+2))\big[(1-(\xi\vee\zeta)(x-1))(\delta-\beta)\\
&\qquad+\xi(x-1)(\alpha-\gamma)+(1-\xi(x-1))\zeta(x-1)(\delta-\gamma)\big]\times\\
&\qquad\big[\xi(x+3)\zeta(x)(1-\zeta(x+3))\left(\frac{\beta}{\gamma}-1\right)+1\big]\\
G^D_{\xi,\zeta}(x,x-1;x-2,x-1) &= (1-\zeta(x))\big[(1-(\xi\vee\zeta)(x-3))(\delta-\beta)\\
&\qquad+(1-\zeta(x-3))\xi(x-3)(\delta-\gamma)+\zeta(x-3)(\alpha-\gamma)\big]\times\\
&\qquad\big[\xi(x-2)\zeta(x+1)(1-\xi(x+1))\left(\frac{\beta}{\gamma}-1\right)+1\big]\\
&\quad+(1-\xi(x-2))\big[(1-(\xi\vee\zeta)(x+1))(\delta-\beta)\\
&\qquad+\xi(x+1)(\alpha-\gamma)+(1-\xi(x+1))\zeta(x+1)(\delta-\gamma)\big]\times\\
&\qquad\big[\xi(x-3)\zeta(x)(1-\zeta(x-3))\left(\frac{\beta}{\gamma}-1\right)+1\big]\\
G^D_{\xi,\zeta}(x,x+1;x+2,x+3) &= (1-\zeta(x+1))(1-\xi(x+2))\xi(x+3)\zeta(x)\frac{(\gamma-\beta)}{\gamma}\times\\
&\qquad\big[(1-(\xi\vee\zeta)(x-1))(\delta-\beta)\\
&\qquad+(1-\xi(x-1))\zeta(x-1)(\delta-\gamma)+\xi(x-1)(\alpha-\gamma)\big]\\
G^D_{\xi,\zeta}(x,x-1;x-2,x-3) &= (1-\zeta(x-1))(1-\xi(x-2))\xi(x_3)\zeta(x)\frac{(\gamma-\beta)}{\gamma}\times\\
&\qquad\big[(1-(\xi\vee\zeta)(x+1))(\delta-\beta)\\
&\qquad+(1-\xi(x+1))\zeta(x+1)(\delta-\gamma)+\xi(x+1)(\alpha-\gamma)\big]
\end{aligned}
$$

5. Technical proofs

证明. [命题 3.9] 我们将生成元 $\overline{\mathcal{L}}$ （式 (3.10)）改写为,

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{L}}f(\xi,\zeta) &= \sum_{x_1,y_1\in S}\xi(x_1)(1-\xi(y_1))\left(\Gamma_\xi(x_1,y_1)-\sum_{x_2,y_2\in S}\zeta(x_2)(1-\zeta(y_2))G_{\xi,\zeta}(x_1,y_1;x_2,y_2)\right)\\
&\qquad\times\big(f(\xi^{x_1,y_1},\zeta)-f(\xi,\zeta)\big)\\
&+\sum_{x_2,y_2\in S}\zeta(x_2)(1-\zeta(y_2))\left(\Gamma_\zeta(x_2,y_2)-\sum_{x_1,y_1\in S}\xi(x_1)(1-\xi(y_1))G_{\xi,\zeta}(x_1,y_1;x_2,y_2)\right)\\
&\qquad\times\left(f(\xi,\zeta^{x_2,y_2})-f(\xi,\zeta)\right)\\
&+\sum_{x_1,y_1\in S}\sum_{x_2,y_2\in S}\xi(x_1)(1-\xi(y_1))\zeta(x_2)(1-\zeta(y_2))G_{\xi,\zeta}(x_1,y_1;x_2,y_2)\\
&\qquad\times\big(f(\xi^{x_1,y_1},\zeta^{x_2,y_2})-f(\xi,\zeta)\big) \qquad (5.1)
\end{aligned}$$

考虑记号 (3.14)–(3.13)，可得

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{L}}f(\xi,\zeta) &= \sum_{x_1,y_1\in S}\xi(x_1)(1-\xi(y_1))\big(\Gamma_\xi(x_1,y_1)-\varphi_{\xi,\zeta}(x_1,y_1)\big)\\
&\qquad\times\big(f(\xi^{x_1,y_1},\zeta)-f(\xi,\zeta)\big)\\
&+\sum_{x_2,y_2\in S}\zeta(x_2)(1-\zeta(y_2))\big(\Gamma_\zeta(x_2,y_2)-\overline{\varphi}_{\xi,\zeta}(x_2,y_2)\big)\\
&\qquad\times\big(f(\xi,\zeta^{x_2,y_2})-f(\xi,\zeta)\big)\\
&+\sum_{x_1,y_1\in S}\sum_{x_2,y_2\in S}\xi(x_1)(1-\xi(y_1))\zeta(x_2)(1-\zeta(y_2))G_{\xi,\zeta}(x_1,y_1;x_2,y_2)\\
&\qquad\times\big(f(\xi^{x_1,y_1},\zeta^{x_2,y_2})-f(\xi,\zeta)\big) \qquad (5.2)
\end{aligned}$$

在上述表达式中，右端的前两项分别对应非耦合跃迁，即 $(\xi,\zeta)\to(\xi^{x_1,\,y_1},\zeta)$ 和 $(\xi,\zeta)\to(\xi,\zeta^{x_2,\,y_2})$；而第三行对应耦合跃迁 $(\xi,\zeta)\to(\xi^{x_1,\,y_1},\zeta^{x_2,\,y_2})$。

不等式 (3.12)–(3.11) 以及 $G_{\xi,\,\zeta}$ 的非负性确保上述所有非耦合跃迁和耦合跃迁的速率均为非负。

此外，如果 $f(\xi,\zeta)=g(\xi)$ 仅依赖于 ξ（分别地，$f(\xi,\zeta)=h(\zeta)$ 仅依赖于 ζ），则有 $\overline{\mathcal{L}}g(\xi)=\mathcal{L}g(\xi)$（分别地，$\overline{\mathcal{L}}h(\zeta)=\mathcal{L}h(\zeta)$）。因此，$\overline{\mathcal{L}}$ 确实定义了两个广义排斥过程副本的一个耦合。 ∎

证明。 [命题 3.24]

• 我们首先考察式 (3.19)–(3.22) 中定义的级数的极限。根据构造，这些级数非负且单调不减；由式 (2.5) 可知，它们也有上界。因此它们

（绝对）收敛，我们将其极限记为

$$S^{x,*}_{\xi,\zeta} = \lim_{n\to\infty} S^{x,n}_{\xi,\zeta} \tag{5.3}$$

$$\overline{T}^{x,*}_{\xi,\zeta} = \lim_{n\to\infty} \overline{T}^{x,n}_{\xi,\zeta} \tag{5.4}$$

$$T^{y,*}_{\xi,\zeta} = \lim_{n\to\infty} T^{y,n}_{\xi,\zeta} \tag{5.5}$$

$$\overline{S}^{y,*}_{\xi,\zeta} = \lim_{n\to\infty} \overline{S}^{y,n}_{\xi,\zeta} \tag{5.6}$$

用这些记号，方程 (2.10)–(2.11) 可写为：

对于任意满足 $\xi \le \zeta$ 的构型 ξ、$\zeta \in \Omega$,

$$\text{For all } x \in S \text{ such that } \xi(x) = 1, \qquad \overline{T}^{x,*}_{\xi,\zeta} \le S^{x,*}_{\xi,\zeta} \tag{5.7}$$

$$\text{For all } y \in S \text{ such that } \zeta(y) = 0, \qquad T^{y,*}_{\xi,\zeta} \le \overline{S}^{y,*}_{\xi,\zeta} \tag{5.8}$$

• 现在我们证明，对于任意两个非递减的收敛级数 $(S_n)_{n\ge0}$ 和 $(T_n)_{n\ge0}$，式 (3.23) 中定义的量 $H_{m,\,n}(S_\cdot, T_\cdot)$ 对所有 m、$n > 0$ 都非负。我们有

$$\begin{aligned} H_{m,n}(S_\cdot, T_\cdot) &= S_m \wedge T_n - S_{m-1} \wedge T_n - S_m \wedge T_{n-1} + S_{m-1} \wedge T_{n-1} \\ &= (S_m \wedge T_n - S_{m-1} \wedge (S_m \wedge T_n)) - (S_m \wedge T_{n-1} - S_{m-1} \wedge (S_m \wedge \mathbb{T}_{n-1})) \\ &= [S_m \wedge T_n - S_{m-1}]^+ - [S_m \wedge T_{n-1} - S_{m-1}]^+ \\ &\ge 0 \end{aligned} \tag{5.9}$$

在上述方程中，我们使用了 $S_m \ge S_{m-1}$ 得到第二行；第三行是恒等式；最后，非负性源于 $T_n \ge T_{m-1}$ 且函数 $t \to [S_m \wedge t - S_{m-1}]^+$ 单调不减这一事实。

此外，当两个级数收敛时，对于所有 $n > 0$，我们还可得出，和式 $\sum_{m>0} H_{m,\,n}(S_\cdot, T_\cdot)$ 和 $\sum_{m>0} H_{n,\,m}(S_\cdot, T_\cdot)$ 均绝对收敛。特别地，令 $S_* = \lim_{m\to\infty} S_m$ 和 $T_* = \lim_{n\to\infty} T_n$，便得到

$$\sum_{m>0} H_{m,n}(S_\cdot, T_\cdot) = S_* \wedge T_n - S_* \wedge T_{n-1} \qquad \text{for all } n > 0 \tag{5.10}$$

$$\sum_{n>0} H_{m,n}(S_\cdot, T_\cdot) = S_m \wedge T_* - S_{m-1} \wedge T_* \qquad \text{for all } m > 0 \tag{5.11}$$

现在我们可以开始证明命题 3.24。

• 我们首先证明，耦合率（3.25）满足命题 3.9 的条件（3.11）–（3.12）。

首先，对于所有非有序的构型对 $(\xi, \zeta) \in \Omega \times \Omega$，由（3.25）定义的所有耦合率 $G_{\xi,\,\zeta}$ 均为零，因此方程（3.11）–（3.12）的左侧恒等为零，方程（3.11）–（3.12）自然成立。

现在考虑（ξ,ζ） $\in\Omega\times\Omega$ 且满足 $\xi\le\zeta$ 的情形。对于所有（x,y） $\in S^2$，方程（3.11）的左侧为：

$$\begin{aligned}
\varphi_{\xi,\zeta}(x,y) &= \sum_{x',y'\in S}\zeta(x')\,(1-\zeta(y'))\,G_{\xi,\zeta}(x,y;x',y')\\
&= \zeta(x)\,(1-\zeta(y))\,\Gamma_\xi(x,y)\wedge\Gamma_\zeta(x,y)\\
&\quad+\zeta(x)\sum_{m,n>0}\delta(y,y^{x,m}_{\xi,\zeta})\sum_{y'\in S}\delta(y',\overline{y}^{x,n}_{\xi,\zeta})\,H_{m,n}(S^{x,\cdot}_{\xi,\zeta},\overline{T}^{x,\cdot}_{\xi,\zeta})\\
&\quad+(1-\zeta(y))\sum_{m,n>0}\delta(x,x^{y,m}_{\xi,\zeta})\sum_{x'\in S}\delta(x',\overline{x}^{y,n}_{\xi,\zeta})\,H_{m,n}(T^{y,\cdot}_{\xi,\zeta},\overline{S}^{x,\cdot}_{\xi,\zeta})\\
&= \zeta(x)\,(1-\zeta(y))\,\Gamma_\xi(x,y)\wedge\Gamma_\zeta(x,y)\\
&\quad+\zeta(x)\zeta(y)\sum_{m>0}\delta(y,y^{x,m}_{\xi,\zeta})\,\left(S^{x,m}_{\xi,\zeta}\wedge\overline{T}^{x,*}_{\xi,\zeta}-S^{x,m-1}_{\xi,\zeta}\wedge\overline{T}^{x,*}_{\xi,\zeta}\right)\\
&\quad+\zeta(x)\,(1-\zeta(y))\sum_{m>0}\delta(x,x^{y,m}_{\xi,\zeta})\,\left(T^{y,m}_{\xi,\zeta}\wedge\overline{S}^{y,*}_{\xi,\zeta}-T^{y,m-1}_{\xi,\zeta}\wedge\overline{S}^{y,*}_{\xi,\zeta}\right)\\
&= \zeta(x)\,(1-\zeta(y))\,\Gamma_\xi(x,y)\wedge\Gamma_\zeta(x,y)\\
&\quad+\zeta(x)\zeta(y)\sum_{m>0}\delta(y,y^{x,m}_{\xi,\zeta})\,\left(S^{x,m}_{\xi,\zeta}\wedge\overline{T}^{x,*}_{\xi,\zeta}-S^{x,m-1}_{\xi,\zeta}\wedge\overline{T}^{x,*}_{\xi,\zeta}\right)\\
&\quad+\zeta(x)\,(1-\zeta(y))\sum_{m>0}\delta(x,x^{y,m}_{\xi,\zeta})\,[\Gamma_\xi(x,y)-\Gamma_\zeta(x,y)]^+\\
&= \zeta(x)\,(1-\zeta(y))\,\Gamma_\xi(x,y)\\
&\quad+\zeta(x)\zeta(y)\sum_{m>0}\delta(y,y^{x,m}_{\xi,\zeta})\,\left(S^{x,m}_{\xi,\zeta}\wedge\overline{T}^{x,*}_{\xi,\zeta}-S^{x,m-1}_{\xi,\zeta}\wedge\overline{T}^{x,*}_{\xi,\zeta}\right) \qquad (5.12)
\end{aligned}$$

在第二个表达式中，第二项对 y' 的求和以及第三项对 x' 的求和都等于 1；我们利用表达式 (5.11) 计算对 $n>0$ 的求和。第四个等号由关系式 (5.7) 得出，该关系式给出

$$T^{y,m}_{\xi,\zeta}\wedge\overline{S}^{y,*}_{\xi,\zeta}-T^{y,m-1}_{\xi,\zeta}\wedge\overline{S}^{y,*}_{\xi,\zeta}=T^{y,m}_{\xi,\zeta}-T^{y,m-1}_{\xi,\zeta}=\left[\Gamma_\xi(x^{y,m}_{\xi,\zeta},y)-\Gamma_\zeta(x^{y,m}_{\xi,\zeta},y)\right]^+$$

现在利用估计式

$$S^{x,m}_{\xi,\zeta}\wedge\overline{T}^{x,*}_{\xi,\zeta}-S^{x,m-1}_{\xi,\zeta}\wedge\overline{T}^{x,*}_{\xi,\zeta}\le S^{x,m}_{\xi,\zeta}-S^{x,m-1}_{\xi,\zeta}=\Gamma_\xi(x,y^{x,m}_{\xi,\zeta})$$

我们得到不等式

$$\varphi_{\xi,\zeta}(x,y)\le\zeta(x)\,(1-\zeta(y))\,\Gamma_\xi(x,y)+\zeta(x)\zeta(y)\Gamma_\xi(x,y)\le\Gamma_\xi(x,y) \qquad (5.13)$$

因此，对于 $\xi\le\zeta$，不等式（3.11）成立。

我们以类似的方式证明 $\xi \le \zeta$ 的方程（3.12），如下所示。对于所有 $(x,y) \in S^2$，方程（3.12）的左端为：

$$\begin{aligned}
\overline{\varphi}_{\xi,\zeta}(x,y) &= \sum_{x',y' \in S} \xi(x')\,(1-\xi(y'))\,G_{\xi,\zeta}(x',y';x,y) \\
&= \xi(x)\,(1-\xi(y))\,\Gamma_\xi(x,y) \wedge \Gamma_\zeta(x,y) \\
&\quad + \xi(x) \sum_{m,n>0} \sum_{y' \in S} \delta(y', y^{x,m}_{\xi,\zeta})\,\delta(y, \overline{y}^{x,n}_{\xi,\zeta})\,H_{m,n}(S^{x,\cdot}_{\xi,\zeta}, \overline{T}^{x,\cdot}_{\xi,\zeta}) \\
&\quad + (1-\xi(y)) \sum_{m,n>0} \sum_{x' \in S} \delta(x', x^{y,m}_{\xi,\zeta})\delta(x, \overline{x}^{y,n}_{\xi,\zeta})\,H_{m,n}(T^{y,\cdot}_{\xi,\zeta}, \overline{S}^{x,\cdot}_{\xi,\zeta}) \\
&= \xi(x)\,(1-\xi(y))\,\Gamma_\xi(x,y) \wedge \Gamma_\zeta(x,y) \\
&\quad + \xi(x)\,(1-\xi(y)) \sum_{n>0} \delta(y, \overline{y}^{x,n}_{\xi,\zeta})\,\left(S^{x,*}_{\xi,\zeta} \wedge \overline{T}^{x,n}_{\xi,\zeta} - S^{x,*}_{\xi,\zeta} \wedge \overline{T}^{x,n-1}_{\xi,\zeta}\right) \\
&\quad + (1-\xi(x))\,(1-\xi(y)) \sum_{n>0} \delta(x, \overline{x}^{y,n}_{\xi,\zeta})\,\left(T^{y,*}_{\xi,\zeta} \wedge \overline{S}^{y,n}_{\xi,\zeta} - T^{y,*}_{\xi,\zeta} \wedge \overline{S}^{y,n-1}_{\xi,\zeta}\right) \\
&= \xi(x)\,(1-\xi(y))\,\Gamma_\xi(x,y) \wedge \Gamma_\zeta(x,y) \\
&\quad + \xi(x)\,(1-\xi(y)) \sum_{n>0} \delta(y, \overline{y}^{x,n}_{\xi,\zeta})\,\left[\Gamma_\zeta(x,y) \wedge \Gamma_\xi(x,y)\right]^+ \\
&\quad + (1-\xi(x))\,(1-\xi(y)) \sum_{n>0} \delta(x, \overline{x}^{y,n}_{\xi,\zeta})\,\left(T^{y,*}_{\xi,\zeta} \wedge \overline{S}^{y,n}_{\xi,\zeta} - T^{y,*}_{\xi,\zeta} \wedge \overline{S}^{y,n-1}_{\xi,\zeta}\right) \\
&= \xi(x)\,(1-\xi(y))\,\Gamma_\zeta(x,y) \\
&\quad + (1-\xi(x))\,(1-\xi(y)) \sum_{n>0} \delta(x, \overline{x}^{y,n}_{\xi,\zeta})\,\left(T^{y,*}_{\xi,\zeta} \wedge \overline{S}^{y,n}_{\xi,\zeta} - T^{y,*}_{\xi,\zeta} \wedge \overline{S}^{y,n-1}_{\xi,\zeta}\right) \qquad (5.14)
\end{aligned}$$

在第二个表达式中，第二项对 y' 的求和以及第三项对 x' 的求和均为 1，而我们使用表达式（5.10）计算对 $n > 0$ 的求和。为得到第四个表达式，我们利用关系（5.8）得到

$$S^{x,*}_{\xi,\zeta} \wedge \overline{T}^{x,n}_{\xi,\zeta} - S^{x,*}_{\xi,\zeta} \wedge \overline{T}^{x,n-1}_{\xi,\zeta} = \overline{T}^{x,n}_{\xi,\zeta} - \overline{T}^{x,n-1}_{\xi,\zeta} = \left[\Gamma_\zeta(x, \overline{y}^{x,n}_{\xi,\zeta}) - \Gamma_\xi(x, \overline{y}^{x,n}_{\xi,\zeta})\right]^+$$

现在我们得到估计

$$T^{y,*}_{\xi,\zeta} \wedge \overline{S}^{y,n}_{\xi,\zeta} - T^{y,*}_{\xi,\zeta} \wedge \overline{S}^{y,n-1}_{\xi,\zeta} \le \overline{S}^{y,n}_{\xi,\zeta} - \overline{S}^{y,n-1}_{\xi,\zeta} = \Gamma_\zeta(\overline{x}^{y,n}_{\xi,\zeta}, y)$$

由此可得

$$(5.15)\quad \overline{\varphi}_{\xi,\zeta}(x,y) \le \xi(x)\,(1-\xi(y))\,\Gamma_\zeta(x,y) + (1-\xi(x))\,(1-\xi(y))\,\Gamma_\zeta(x,y) \le \Gamma_\zeta(x,y)$$

方程（3.12）对 $\xi \le \zeta$ 得证。

在 $\zeta < \xi$ 的情形下也可进行类似的推导。因此，命题 3.24 中定义的耦合率满足命题 3.9 的条件（3.11）–（3.12）。

•现在我们证明该耦合是递增的。

我们假设 $\xi \leq \zeta$。首先考虑耦合跃迁。由方程 (3.25) 可知，耦合跃迁 $(\xi, \zeta) \to (\xi^{x,y}, \zeta^{x',y'})$ 在以下三种情况下可能具有非零耦合速率$G_{\xi,\zeta}(x, y;\ x', y')$:

• $x = x'$ 和 $y = y'$: 因
此

$$\begin{aligned}
\xi^{x,y}(x) &= \zeta^{x',y'}(x) = 0 \\
\xi^{x,y}(y) &= \zeta^{x',y'}(y) = 1 \\
\xi^{x,y}(z) &= \xi(z) \leq \zeta(z) = \zeta^{x',y'}(z) \qquad \text{for all } z \neq x, y
\end{aligned}$$

• $x = x'$, $y \in Y^x_{\xi,\zeta}$ 和 $y' \in \overline{Y}^x_{\xi,\zeta}$
因此 $y \neq y'$, $\zeta(y) = 1$ 和

$$\begin{aligned}
\xi^{x,y}(x) &= \zeta^{x',y'}(x) = 0 \\
\xi^{x,y}(y) &\leq 1 = \zeta(y) = \zeta^{x',y'}(y) \\
\xi^{x,y}(y') &\leq 1 = \zeta^{x',y'}(y') \\
\xi^{x,y}(z) &= \xi(z) \leq \zeta(z) = \zeta^{x',y'}(z) \qquad \text{for all } z \neq x, y, y'
\end{aligned}$$

• $y = y'$, $x \in X^y_{\xi,\zeta}$ 和 $x' \in \overline{X}^y_{\xi,\zeta}$
因此 $x \neq x'$, $\xi(x') = 0$ 和

$$\begin{aligned}
\xi^{x,y}(x) &= 0 \leq \zeta^{x',y'}(x) \\
\xi^{x,y}(x') &= \xi(x') = 0 \leq \zeta^{x',y'}(x') \\
\xi^{x,y}(y) &= \zeta^{x',y'}(y') = 1 \\
\xi^{x,y}(z) &= \xi(z) \leq \zeta(z) = \zeta^{x',y'}(z) \qquad \text{for all } z \neq x, x', y
\end{aligned}$$

在这三种情况下，我们都发现 $\xi^{x,y} \leq \zeta^{x',y'}$。因此，对于所有 $\xi \leq \zeta$，耦合跃迁都保留偏序。

现在我们转而讨论非耦合跃迁，$(\xi, \zeta) \to (\xi^{x,y}, \zeta)$ 和 $(\xi, \zeta) \to (\xi, \zeta^{x',y'})$，其速率分别为 $(\Gamma_\xi(x, y) - \varphi_{\xi,\zeta}(x, y))$ 和 $\big(\Gamma_\zeta(x, y) - \overline{\varphi}_{\xi,\zeta}(x, y)\big)$。在这两种情况下，当且仅当 $\xi(x) = \zeta(x) = 1$, $\xi(y) = \zeta(y) = 0$ 且相应的跃迁率非零时，偏序才可能被破坏。在第一种情况下，$\zeta(x) = 1$ 意味着 $y \notin Y^x_{\xi,\zeta}$，这使我们能够精确化估计式 (5.13)，并得到 $\varphi_{\xi,\zeta}(x, y)$ 的值，如下所示。注意，在 $\xi \leq \zeta$ 时，表达式 (3.25) 中的 $G_{\xi,\zeta}(x, y;\ x', y')$，由于 $y \notin Y^x_{\xi,\zeta}$，属于情形 $y = y'$

因此，$G_{\xi,\ \zeta}(x,y;\ x',y')$ 由 (3.25) 的第三行给出：

$$\begin{aligned}
\varphi_{\xi,\zeta}(x,y) &= \Gamma_\xi(x,y)\wedge\Gamma_\zeta(x,y)+\sum_{m,n>0}\delta(x,x^{y,m}_{\xi,\zeta})\sum_{x'\in S}\delta(x',\overline{x}^{y,n}_{\xi,\zeta})\,H_{m,n}(T^{y,\cdot}_{\xi,\zeta},\overline{S}^{x,\cdot}_{\xi,\zeta})\\
&= \Gamma_\xi(x,y)\wedge\Gamma_\zeta(x,y)+\sum_{m>0}\delta(x,x^{y,m}_{\xi,\zeta})\left(T^{y,m}_{\xi,\zeta}\wedge\overline{S}^{y,*}_{\xi,\zeta}-T^{y,m-1}_{\xi,\zeta}\wedge\overline{S}^{y,*}_{\xi,\zeta}\right)\\
&= \Gamma_\xi(x,y)\wedge\Gamma_\zeta(x,y)+\sum_{m>0}\delta(x,x^{y,m}_{\xi,\zeta})\left[\Gamma_\xi(x,y)-\Gamma_\zeta(x,y)\right]^+\\
&= \Gamma_\xi(x,y)\wedge\Gamma_\zeta(x,y)+\mathbf{1}_{x\in X^y_{\xi,\zeta}}\left[\Gamma_\xi(x,y)-\Gamma_\zeta(x,y)\right]^+\\
&= \Gamma_\xi(x,y)\wedge\Gamma_\zeta(x,y)+\left[\Gamma_\xi(x,y)-\Gamma_\zeta(x,y)\right]^+\\
&= \Gamma_\xi(x,y) \qquad (5.16)
\end{aligned}$$

因此，在情形 $\xi\le\zeta$ 下，第一边缘分布中不保持偏序的非耦合跃迁，其跃迁率为零。

对于第二边缘分布中的非耦合跃迁，$(\xi,\zeta)\to(\xi,\zeta^{x,\ y})$ 中可能破坏偏序的情形，$\xi(y)=0$ 意味着 $x\notin X^y_{\xi\ ,\ \zeta}$，并沿用 (5.15) 中相同的推导思路，现在可得 $\overline{\varphi}_{\xi,\ \zeta}(x,y)$ 的值。同样，在表达式 (3.25) 中，当$\xi\le\zeta$时，$G_{\xi,\ \zeta}(x,y;\ x',y')$，由于 $x\notin X^y_{\xi\ ,\ \zeta}$，我们处于情形 $x=x'$，因此 $G_{\xi,\ \zeta}(x,y;\ x',y')$ 由 (3.25) 的第二行给出：

$$\begin{aligned}
\overline{\varphi}_{\xi,\zeta}(x,y) &= \sum_{x',y'\in S}\xi(x')\,(1-\xi(y'))\,G_{\xi,\zeta}(x',y';x,y)\\
&= \Gamma_\xi(x,y)\wedge\Gamma_\zeta(x,y+\sum_{m,n>0}\sum_{y'\in S}\delta(y',y^{x,m}_{\xi,\zeta})\,\delta(y,\overline{y}^{x,n}_{\xi,\zeta})\,H_{m,n}(S^{x,\cdot}_{\xi,\zeta},\overline{T}^{x,\cdot}_{\xi,\zeta})\\
&= \Gamma_\xi(x,y)\wedge\Gamma_\zeta(x,y)+\sum_{n>0}\delta(y,\overline{y}^{x,n}_{\xi,\zeta})\ \left(S^{x,*}_{\xi,\zeta}\wedge\overline{T}^{x,n}_{\xi,\zeta}-S^{x,*}_{\xi,\zeta}\wedge\overline{T}^{x,n-1}_{\xi,\zeta}\right)\\
&= \Gamma_\xi(x,y)\wedge\Gamma_\zeta(x,y)+\sum_{n>0}\delta(y,\overline{y}^{x,n}_{\xi,\zeta})\ \left[\Gamma_\zeta(x,y)-\Gamma_\xi(x,y)\right]^+\\
&= \Gamma_\xi(x,y)\wedge\Gamma_\zeta(x,y)+\mathbf{1}_{y\in\overline{Y}^x_{\xi,\zeta}}\left[\Gamma_\zeta(x,y)-\Gamma_\xi(x,y)\right]^+\\
&= \Gamma_\xi(x,y)\wedge\Gamma_\zeta(x,y)+\ \left[\Gamma_\zeta(x,y)-\Gamma_\xi(x,y)\right]^+\\
&= \Gamma_\zeta(x,y) \qquad (5.17)
\end{aligned}$$

因此，在情形$\xi\le\zeta$ 下，第二边缘分布中不保持偏序的非耦合跃迁，其跃迁率也为零。

总之，对于速率为 (3.25) 的耦合过程生成元 (3.10)，对于所有满足 $\xi\le\zeta$ 的构型对 $(\xi,\zeta)\in\Omega\times\Omega$，所有跃迁率非零的可能跃迁，无论是耦合的还是非耦合的，都会保持偏序。在 $\xi>\zeta$ 的情况下，沿用类似思路也可得到相同结果，因此省略其证明。因此，命题 3.24 中定义的耦合是递增的。 ∎

证明。 [命题 3.30]

• 我们首先证明，由 (3.31) 定义的算子是一个有效的耦合，也就是说，与每个跃迁对应的系数均为非负。我们将生成元 $\overline{\mathcal{L}}^D$ 改写为，

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathcal{L}}^D f(\xi,\zeta) \;=\; & \sum_{x_1,y_1\in S} \xi(x_1)(1-\xi(y_1))\big(\Gamma_\xi(x_1,y_1) - \sum_{x_2,y_2\in S} \zeta(x_2)(1-\zeta(y_2)) G^D_{\xi,\zeta}(x_1,y_1;x_2,y_2)\big) \\
& \qquad \times \big(f(\xi^{x_1,y_1},\zeta) - f(\xi,\zeta)\big) \\
& + \sum_{x_2,y_2\in S} \zeta(x_2)(1-\zeta(y_2))\big(\Gamma_\zeta(x_2,y_2) - \sum_{x_1,y_1\in S} \xi(x_1)(1-\xi(y_1)) G^D_{\xi,\zeta}(x_1,y_1;x_2,y_2)\big) \\
& \qquad \times \big(f(\xi,\zeta^{x_2,y_2}) - f(\xi,\zeta)\big) \qquad (5.18) \\
& + \sum_{x_1,y_1\in S}\sum_{x_2,y_2\in S} \xi(x_1)(1-\xi(y_1))\zeta(x_2)(1-\zeta(y_2)) G^D_{\xi,\zeta}(x_1,y_1;x_2,y_2) \\
& \qquad \times \big(f(\xi^{x_1,y_1},\zeta^{x_2,y_2}) - f(\xi,\zeta)\big)
\end{aligned}
$$

在上述表达式中，第一行（分别是第二行）指非耦合跃迁 $(\xi,\zeta) \to (\xi^{x_1,y_1},\zeta)$（分别是 $(\xi,\zeta) \to (\xi,\zeta^{x_2,y_2})$），而第三行指耦合跃迁 $(\xi,\zeta) \to (\xi^{x_1,y_1},\zeta^{x_2,y_2})$。

我们首先证明，与非耦合跃迁 $(\xi,\zeta) \to (\xi^{x_1,y_1},\zeta)$ 相关的系数非负。其表达式为

$$
\begin{aligned}
& \xi(x_1)(1-\xi(y_1))\big(\Gamma_\xi(x_1,y_1) - \sum_{x_2,y_2\in S} \zeta(x_2)(1-\zeta(y_2)) G^D_{\xi,\zeta}(x_1,y_1;x_2,y_2)\big) \\
& = \xi(x_1)(1-\xi(y_1))\big(\Gamma_\xi(x_1,y_1) - \sum_{x_2,y_2\in S} \zeta(x_2)(1-\zeta(y_2)) \\
& \qquad \times \sum_{x,y\in S} (\xi\vee\zeta)(x)(1-(\xi\vee\zeta)(y)) \frac{1}{N_{\xi,\zeta}(x,y)} G_{\xi,\xi\vee\zeta}(x_1,y_1;x,y) G_{\xi\vee\zeta,\zeta}(x,y;x_2,y_2)\big) \qquad (5.19) \\
& = \xi(x_1)(1-\xi(y_1))\big(\Gamma_\xi(x_1,y_1) \\
& \qquad - \sum_{x,y\in S} (\xi\vee\zeta)(x)(1-(\xi\vee\zeta)(y)) \frac{1}{N_{\xi,\zeta}(x,y)} \varphi_{\xi\vee\zeta,\zeta}(x,y)\; G_{\xi,\xi\vee\zeta}(x_1,y_1;x,y)\big) \\
& \geq \xi(x_1)(1-\xi(y_1))\big(\Gamma_\xi(x_1,y_1) - \sum_{x,y\in S} (\xi\vee\zeta)(x)(1-(\xi\vee\zeta)(y)) G_{\xi,\xi\vee\zeta}(x_1,y_1;x,y)\big) \\
& \geq 0
\end{aligned}
$$

在这一推导中，我们用 (3.32) 得到第一个等式，随后交换求和次序并用 (3.13) 得到第二个等式；第一个不等式由 $\frac{1}{N_{\xi,\zeta}}(x,y)\,\varphi_{\xi\vee\zeta,\zeta}(x,y) \leq 1$以及耦合率 $G_{\xi,\xi\vee\zeta}$ 的非负性得出；最后一个不等式则由不等式 (3.11) 得出。与非耦合跃迁 $(\xi,\zeta) \to (\xi,\zeta^{x_2,y_2})$ 相关的系数非负性，可用类似方法并结合不等式 (3.12) 得出。$G_{\xi,\zeta}$ 的非负性确保耦合跃迁 $(\xi,\zeta) \to (\xi^{x_1,y_1},\zeta^{x_2,y_2})$ 的速率 $G^D_{\xi,\zeta}$ 也非负。

•现在我们证明这个新的耦合是递增的。

假设 t $\xi \le \zeta$。我们有 $\xi \vee \zeta = \zeta$；方程 (3.14)–(3.13) 和备注 3.29 给出

$$\begin{aligned}\overline{\varphi}_{\xi,\xi\vee\zeta}(x,y) &= \overline{\varphi}_{\xi,\zeta}(x,y) = \sum_{x',y'} \xi(x')(1-\xi(y'))G_{\xi,\zeta}(x',y';x,y)\\ \varphi_{\xi\vee\zeta,\zeta}(x,y) &= \varphi_{\zeta,\zeta}(x,y) = \sum_{x',y'} \zeta(x')(1-\zeta(y'))G_{\zeta,\zeta}(x,y;x',y') = \zeta(x)(1-\zeta(y))\Gamma_\zeta(x,y)\end{aligned}$$

不等式 (3.12) 在此意味着 $\overline{\varphi}_{\xi,\,\zeta}(x,y) \le \Gamma_\zeta(x,y)$，由方程 (3.33) 可得

$$\zeta(x)(1-\zeta(y))\,\frac{1}{N_{\xi,\zeta}(x,y)}\,\Gamma_\zeta(x,y) = \begin{cases}1 & \text{if } \zeta(x)(1-\zeta(y))\Gamma_\zeta(x,y)\neq 0\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases} \tag{5.20}$$

这使我们能够证明备注 3.34。对于所有满足 $\xi(x_1)(1-\xi(y_1))\zeta(x_2)(1-\zeta(y_2)) \neq 0$ 的 (x_1,y_1,x_2,y_2)，耦合率 $G^D_{\xi,\,\zeta}(x_1,y_1;\,x_2,y_2)$ 因而可写为

$$\begin{aligned}G^D_{\xi,\zeta}(x_1,y_1;x_2,y_2) &= \sum_{x,y\in S}\zeta(x)(1-\zeta(y))\,\frac{1}{N_{\xi,\zeta}(x,y)}\,G_{\xi,\zeta}(x_1,y_1;x,y)G_{\zeta,\zeta}(x,y;x_2,y_2)\\ &= \zeta(x_2)(1-\zeta(y_2))\frac{1}{N_{\xi,\zeta}(x_2,y_2)}\Gamma_\zeta(x_2,y_2)G_{\xi,\zeta}(x_1,y_1;x_2,y_2)\\ &= G_{\xi,\zeta}(x_1,y_1;x_2,y_2) \qquad (5.21)\end{aligned}$$

第一个等式在当前情形下即为方程 (3.32)；第二个等式由备注 3.29 得出；最后一个等式由 (5.20) 和 $0 \le G_{\xi,\,\zeta}(x_1,y_1;\,x_2,y_2) \le \Gamma_\zeta(x_2,y_2)$ 得出（最后这个不等式源于以下事实：在 $\overline{\mathcal{L}}$ 中，命题 3.24 所定义的递增耦合生成元的非耦合跃迁速率均为非负，参见 (5.1)–(5.2)）。

将方程 (5.21) 代入 (3.31)，得到

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{L}}^D f(\xi,\zeta) &= \sum_{x_1,y_1\in S}\xi(x_1)(1-\xi(y_1))\Gamma_\xi(x_1,y_1)\big(f(\xi^{x_1,y_1},\zeta)-f(\xi,\zeta)\big)\\ &\quad+\sum_{x_2,y_2\in S}\zeta(x_2)(1-\zeta(y_2))\Gamma_\zeta(x_2,y_2)\big(f(\xi,\zeta^{x_2,y_2})-f(\xi,\zeta)\big)\\ &\quad+\sum_{x_1,y_1\in S}\sum_{x_2,y_2\in S}\xi(x_1)(1-\xi(y_1))\zeta(x_2)(1-\zeta(y_2))G_{\xi,\zeta}(x_1,y_1;x_2,y_2)\\ &\qquad\times\big(f(\xi^{x_1,y_1},\zeta^{x_2,y_2})-f(\xi^{x_1,y_1},\zeta)-f(\xi,\zeta^{x_2,y_2})+f(\xi,\zeta)\big)\\ &= \overline{\mathcal{L}}f(\xi,\zeta)\end{aligned}$$

对于 $\xi > \zeta$，类似的恒等式也成立。由于两个生成元在 $\{\xi \le \zeta\} \cup \{\xi > \zeta\}$ 上相同，生成元为 $\overline{\mathcal{L}}^D$ 的耦合也具有递增性。

•现在我们证明，差异在 $\overline{\mathcal{L}}^D$ 下不会增加。

对于任意有限区域 $D \subset S$，Ω 中两个构型 ξ、ζ 在 D 中的差异数定义为

$$\sum_{x\in D}|\xi(x)-\zeta(x)|$$

(3.31) 中每个跃迁率为正的跃迁，都涉及有限数量格点上的变化。对于任意这样的跃迁，例如 $(\xi,\zeta) \longrightarrow (\xi',\zeta')$，以及任意包含该跃迁涉及的所有格点的有限区域 D

$$D \supset \big\{x \in S, \xi'(x) \neq \xi(x) \text{ or } \zeta'(x) \neq \zeta(x)\big\} \tag{5.22}$$

差异的变化为

$$\begin{aligned}
\Delta_D(\xi,\zeta;\xi',\zeta') &= \sum_{x\in D} |\xi'(x)-\zeta'(x)| - \sum_{x\in D} |\xi(x)-\zeta(x)| \\
&= \sum_{x\in D} \big(2\xi'(x)\vee\zeta'(x) - \xi'(x) - \zeta'(x)\big) - \sum_{x\in D}\big(2\xi(x)\vee\zeta(x) - \xi(x) - \zeta(x)\big) \\
&= 2\sum_{x\in D}\big(\xi'(x)\vee\zeta'(x) - \xi(x)\vee\zeta(x)\big) \qquad (5.23)
\end{aligned}$$

最后一个等式成立，因为该过程是守恒的。

• 我们首先考虑一个耦合跃迁 $(\xi,\zeta) \longrightarrow (\xi^{x_1,\ y_1}, \zeta^{x_2,\ y_2})$，其中某些 (x_1,y_1)、(x_2,y_2) 属于 S^2，且在 $\overline{\mathcal{L}}^D$ 中具有正跃迁率，

$$\xi(x_1)(1-\xi(y_1))\zeta(x_2)(1-\zeta(y_2))G^D_{\xi,\zeta}(x_1,y_1;x_2,y_2) > 0 \tag{5.24}$$

回到定义 (3.32)，$G^D_{\xi,\zeta}(x_1,y_1;\ x_2,y_2) > 0$ 意味着存在 $(x_0,y_0) \in S^2$，使得 $G_{\xi,\xi\vee\zeta}(x_1,y_1;\ x_0,y_0) > 0$ 和 $G_{\xi\vee\zeta,\zeta}(x_0,y_0;\ x_2,y_2) > 0$ 均成立。因此，跃迁 $(\xi,\xi\vee\zeta) \longrightarrow (\xi^{x_1,y_1}, (\xi\vee\zeta)^{x_0,y_0})$ 和 $(\xi\vee\zeta,\zeta) \longrightarrow ((\xi\vee\zeta)^{x_0,y_0}, \zeta^{x_2,y_2})$ 在 $\overline{\mathcal{L}}$ 中具有正跃迁率。由于它是递增耦合的生成元，$\xi \le (\xi\vee\zeta)$ 和 $\zeta \le (\xi\vee\zeta)$ 意味着 $\xi^{x_1,y_1} \le (\xi\vee\zeta)^{x_0,y_0}$ 以及 $\zeta^{x_2,y_2} \le \xi\vee\zeta)^{x_0,y_0}$，因此

$$\xi^{x_1,y_1} \vee \zeta^{x_2,y_2} \le (\xi\vee\zeta)^{x_0,y_0}$$

现在，对于 (5.22) 中的任意区域 D，

$$\begin{aligned}
\Delta_D(\xi,\zeta;\xi^{x_1,y_1},\zeta^{x_2,y_2}) &= \Delta_{D\cup\{x_0,y_0\}}(\xi,\zeta;\xi^{x_1,y_1},\zeta^{x_2,y_2}) \\
&= 2\sum_{x\in D\cup\{x_0,y_0\}} \big(\xi^{x_1,y_1}(x)\vee\zeta^{x_2,y_2}(x) - \xi(x)\vee\zeta(x)\big) \\
&\le 2\sum_{x\in D\cup\{x_0,y_0\}} \big((\xi\vee\zeta)^{x_0,y_0}(x) - (\xi\vee\zeta)(x)\big) \\
&= 0
\end{aligned}$$

最后一个等式由粒子守恒得出。因此，在 $\overline{\mathcal{L}}^D$ 中的任何耦合跃迁中，差异的数量都不会增加。

• 现在我们转而讨论 $\overline{\mathcal{L}}^D$ 中的非耦合跃迁。考虑第一边缘分布中的一次跃迁，例如，对于 S^2 中的某个 (x_1,y_1)，有 $(\xi,\zeta) \longrightarrow (\xi^{x_1,y_1},\zeta)$。对于任意有限区域 D 使得

that $\{x_1, y_1\} \subset D$，差异数量的变化为

$$\begin{aligned}\Delta_D(\xi,\zeta;\xi^{x_1,y_1},\zeta) &= 2\big(\xi^{x_1,y_1}(x_1)\vee\zeta(x_1)-\xi(x_1)\vee\zeta(x_1)\big)\\ &\quad +2\big(\xi^{x_1,y_1}(y_1)\vee\zeta(y_1)-\xi(y_1)\vee\zeta(y_1)\big)\\ &= 2\big(\zeta(x_1)-\zeta(y_1)\big) \qquad (5.25)\end{aligned}$$

因此，差异的变化非正，唯一的例外是 $\zeta(x_1) = 1$和 $\zeta(y_1) = 0$同时成立的情形。现在我们证明，这种跃迁在 $\overline{\mathcal{L}}^D$ 中的速率为 0：

首先，由于 $(\xi\vee\zeta)(y_1) = 0, y_1 \notin Y_\xi^{x_1,\ \xi\vee\zeta}$并且根据 (3.25)，对于任意满足 $y \neq y_1$,$G_{\xi,\ \xi\vee\zeta}(x_1, y_1; x, y) = 0$ 的 $(x, y) \in S^2$。此外，$\varphi_{\xi\vee\zeta,\ \zeta}(x, y_1) = \overline{\varphi}_{\zeta,\ \xi\vee\zeta,}(x, y_1)$，并且由于 $\zeta(y_1) = 0$，等式 (5.17) 成立，因此有

$$\varphi_{\xi\vee\zeta,\zeta}(x, y_1) = \Gamma_{\xi\vee\zeta}(x, y_1) \qquad (5.26)$$

现在，$\overline{\mathcal{L}}^D$ 中跃迁 $(\xi, \zeta) \longrightarrow (\xi^{x_1,\ y_1}, \zeta)$ 的速率为

$$\begin{aligned}&\xi(x_1)(1-\xi(y_1))\big(\Gamma_\xi(x_1,y_1)-\sum_{x_2,y_2\in S}\zeta(x_2)(1-\zeta(y_2))G^D_{\xi,\zeta}(x_1,y_1;x_2,y_2)\big)\\ =\ &\xi(x_1)(1-\xi(y_1))\big(\Gamma_\xi(x_1,y_1)-\sum_{x_2,y_2\in S}\zeta(x_2)(1-\zeta(y_2))\\ &\qquad\times\sum_{x,y\in S}(\xi\vee\zeta)(x)(1-(\xi\vee\zeta)(y))\frac{1}{N_{\xi,\zeta}(x,y)}G_{\xi,\xi\vee\zeta}(x_1,y_1;x,y)G_{\xi\vee\zeta,\zeta}(x,y;x_2,y_2)\big)\\ =\ &\xi(x_1)(1-\xi(y_1))\big(\Gamma_\xi(x_1,y_1)\\ &\qquad-\sum_{x,y\in S}(\xi\vee\zeta)(x)(1-(\xi\vee\zeta)(y))\frac{1}{N_{\xi,\zeta}(x,y)}\varphi_{\xi\vee\zeta,\zeta}(x,y)\,G_{\xi,\xi\vee\zeta}(x_1,y_1;x,y)\big)\\ =\ &\xi(x_1)(1-\xi(y_1))\big(\Gamma_\xi(x_1,y_1)-\sum_{x,y\in S}(\xi\vee\zeta)(x)(1-(\xi\vee\zeta)(y))G_{\xi,\xi\vee\zeta}(x_1,y_1;x,y)\big)\\ =\ &\xi(x_1)(1-\xi(y_1))\big(\Gamma_\xi(x_1,y_1)-\varphi_{\xi,\xi\vee\zeta}(x_1,y_1)\big)\\ =\ &0\end{aligned}$$

其中，第三个等号来自以下事实：$\frac{1}{N_{\xi\ \zeta}}$, $(x, y)\,\varphi_{\xi\vee\zeta,\ \zeta}(x, y) = 1$ 当 $y = y_1$且 $\Gamma_{\xi\vee\zeta}(x, y_1) > 0$时，而 $G_{\xi,\ \xi\vee\zeta}(x_1, y_1; x, y) = 0$ 在其他情况下；最后一个等号来自 $(\xi \vee \zeta)(x_1) = 1$, $\xi \le \xi \vee \zeta$ 以及方程（5.16）。

因此，在 $\overline{\mathcal{L}}^D$ 中，任何非耦合的第一边缘转移都不会使差异的数量增加。

• 最后，我们考虑某个 $(x_2, y_2) \in S^2$ 对应的一个非耦合第二边缘跃迁 $(\xi, \zeta) \longrightarrow (\xi, \zeta^{x_2,\ y_2})$。同样可以证明，差异的数量要么不增加，要么跃迁率为零。推导过程与前一个基本相同，因此略去。

综合所有情况，我们已经证明，在 $\overline{\mathcal{L}}^D$ 中任何跃迁率非零的跃迁都不会增加差异的数量。结论得证。 ∎

证明。 [命题 3.36]
我们首先按照命题 3.24 构造一种新的递增耦合，其新速率为

$$
\begin{aligned}
&G_{\xi,\zeta}(x,y;x',y') = \\
&\begin{cases}
\delta(x,x')\,\delta(y,y')\,\Gamma_\xi(x,y)\wedge\Gamma_\zeta(x,y) & \\
\qquad +\delta(x,x')\mathbf{1}_{y\in Y^x_{\xi,\zeta}}\,\mathbf{1}_{y'\in\overline{Y}^x_{\xi,\zeta}}\,\dfrac{1}{N^{x,*}_{\xi,\zeta}}\,\Gamma_\xi(x,y)\,[\Gamma_\zeta(x,y')-\Gamma_\xi(x,y')]^+ & \\
\qquad +\delta(y,y')\mathbf{1}_{x\in X^y_{\xi,\zeta}}\,\mathbf{1}_{x'\in\overline{X}^y_{\xi,\zeta}}\dfrac{1}{\overline{N}^{y,*}_{\xi,\zeta}}\,[\Gamma_\xi(x,y)-\Gamma_\zeta(x,y)]^+\,\Gamma_\zeta(x',y) & \text{if } \xi\le\zeta \\
\delta(x,x')\,\delta(y,y')\,\Gamma_\xi(x,y)\wedge\Gamma_\zeta(x,y) & \\
\qquad +\delta(x,x')\mathbf{1}_{y\in\overline{Y}^x_{\zeta,\xi}}\,\mathbf{1}_{y'\in Y^x_{\zeta,\xi}}\,\dfrac{1}{N^{x,*}_{\zeta,\xi}}\,[\Gamma_\xi(x,y)-\Gamma_\zeta(x,y)]^+\,\Gamma_\zeta(x,y') & \\
\qquad +\delta(y,y')\mathbf{1}_{x\in\overline{X}^y_{\zeta,\xi}}\,\mathbf{1}_{x'\in X^y_{\zeta,\xi}}\,\dfrac{1}{\overline{N}^{y,*}_{\zeta,\xi}}\,\Gamma_\xi(x,y)\,[\Gamma_\zeta(x',y)-\Gamma_\xi(x',y)]^+ & \text{if } \xi>\zeta \\
0 & \text{otherwise}
\end{cases}
\end{aligned}
\tag{5.27}
$$

其中

$$
N^{x,*}_{\xi,\zeta} = \begin{cases} S^{x,*}_{\xi,\zeta} & \text{if } S^{x,*}_{\xi,\zeta}>0 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}
\tag{5.28}
$$

其他归一化因子的定义类似，其中 $S^{x,*}_{\xi,\zeta}$, $\overline{S}^{y,*}_{\xi,\zeta}$, $S^{x,*}_{\zeta,\xi}$,以及 $\overline{S}^{y,*}_{\zeta,\xi}$,如方程 (5.3)–(5.6) 所示。对于两个满足 $\xi\le\zeta$ 的构型 ξ 和 ζ，可以很容易地计算出与某个边缘分布中的一次跳跃相关的相关跳跃率之和。分别可得

$$
\begin{aligned}
\varphi_{\xi,\zeta}(x,y) &= \sum_{x',y'\in S}\zeta(x')\,(1-\zeta(y'))\,G_{\xi,\zeta}(x,y;x',y') \\
&= \zeta(x)\,(1-\zeta(y))\,\Gamma_\xi(x,y)+\zeta(x)\,\zeta(y)\frac{\overline{T}^{x,*}_{\xi,\zeta}}{S^{x,*}_{\xi,\zeta}}\,\Gamma_\xi(x,y)
\end{aligned}
\tag{5.29}
$$

and

$$
\begin{aligned}
\overline{\varphi}_{\xi,\zeta}(x,y) &= \sum_{x',y'\in S}\xi(x')\,(1-\xi(y'))\,G_{\xi,\zeta}(x',y';x,y) \\
&= \xi(x)\,(1-\xi(y))\,\Gamma_\zeta(x,y)+(1-\xi(x))\,(1-\xi(y))\,\frac{T^{y,*}_{\xi,\zeta}}{\overline{S}^{y,*}_{\xi,\zeta}}\,\Gamma_\zeta(x,y)
\end{aligned}
\tag{5.30}
$$

显然，对于 $\xi\le\zeta$，耦合跳跃率 $G_{\xi,\zeta}(x,y;\,x',y')$ 和非耦合跳跃率 $\Gamma_\xi(x,y)-\varphi_{\xi,\zeta}(x,y)$,$\Gamma_\zeta(x,y)-\overline{\varphi}_{\xi,\zeta}(x,y)$ 均为非负；对于 $\xi>\zeta$，结论也类似。按照命题 3.24 的证明思路，可以发现上述速率定义了一种递增马尔可夫耦合。利用这些新速率，可以像命题

3.30 中那样定义一种新的耦合 $\overline{\mathcal{L}}^D$，使得差异不会增加。现在假设对于一对不可比较的构型 ξ 和 ζ，格点 x处存在一个差异，设为$\xi(x) = 1$ 和 $\zeta(x) = 0$。此时，该差异可以随第一边缘分布中的粒子移动到任意一个空格点 y，条件是边 (x, y) 开放，移动速率为 $\Gamma_\xi(x, y) > 0$；也可以与第二边缘分布中的一个粒子一起沿相反方向移动到任意一个全占据格点 y，条件是边 (y, x) 开放，速率为 $1 - \overline{T}^{x}_{\xi^*, \frac{\zeta}{S^x}, \xi^*, \zeta}\Big)\Gamma_\zeta(y, x) > 0$。在这种情况下，通过开放路径相连的异号差异对有正概率消失。

∎

致谢。我们感谢 Lorenzo Bertini 在本工作的早期阶段进行的有益讨论。T. Gobron 感谢 Labex CEMPI（ANR-11-LABX- 0007-01）提供的支持。本工作的部分内容是在 FP2M 联盟（法国国家科学研究中心 FR 2036）内完成的。

References

[1] E.D. Andjel, H. Guiol. 长程排斥过程、生成元与不变测度。《概率年刊》33 (2005), 第 6 期, 2314–2354.[2]A. Ayyer, S. Goldstein, J. L. Lebowitz, E. R. Speer. 一维促进型非对称排斥过程的稳态。即将发表于 Ann. Inst. Henri Poincar´e Probab. Stat. arXiv:2010.07257 [math.Pr[3] C. Bahadoran, H. Guiol, K. Ravishankar, E. Saada. 一维吸引型粒子系统的欧拉水动力学。《概率年刊》34，第 4 期 (2006), 1339–1369.[4] J. Baik, G. Barraquand, I. Corwin, T. Suidan. 促进型排斥过程。载于《阿贝尔研讨会：动力学、随机学与控制中的计算和组合学》，1–35。施普林格国际出版公司，2018.[5] G. Barraquand, I. Corwin. q-Hahn 非对称排斥过程。《应用概率年刊》26 (2016), 第 4 期，2304–2356. [6] O. Blondel, C. Erignoux, M. Sasada, M. Simon. 促进型排斥过程的水动力学极限。Ann. Inst. Henri Poincar´e Probab. Stat. 56 (2020), 第 1 期，667–714.[7] L. Fajfrov´a, T. Gobron, E. Saada. 质量迁移过程的不变测度。《电子概率期刊》21 (2016), 论文编号 60，共 52 页。[8] T. Gobron, E. Saada. 守恒粒子系统的耦合、吸引性与水动力学。Ann. Inst. H. Poincar´e Probab. Statist. 46，第 4 期 (2010), 1132–1177.[9] L. Gray, D. Griffeath. 交通堵塞的遍历理论。《统计物理学杂志》105 (2001), 第 3/4 期，413–452.[10] H. Guiol. k-步排斥过程的一些性质。《统计物理学杂志》94 (1999) 第 (3/4) 期, 495–511。

[11] H. Guiol. 关于长程排斥过程。《马尔可夫过程及相关领域》10 (2004), 第 3 期，457–476.[12] C. Kipnis, C. Landim. 相互作用粒子系统的尺度极限。数学科学基础丛书 [数学科学基本原理], **320**。施普林格出版社，柏林，1999。[13] T.M. Liggett. 简单排斥过程的耦合。《概率年刊》4 (1976), 339–356。[14] T.M. Liggett. 无限相互作用粒子系统的随机演化。数学讲义 598，施普林格出版社，1977，第 188–248 页。[15]T.M. Liggett. 相互作用粒子系统。数学经典（第一版重印），施普林格出版社，纽约，2005。[16] A.W. Massey. 偏序空间上马尔可夫过程的随机序。《数学运筹研究》12 第 2 期 (1987), 350–367。[17] F. Rezakhanlou. $\mathbb{Z}^d$上的吸引型粒子系统的水动力学极限。《数学物理通讯》140 (3) (1991), 417–448。[18] F. Spitzer. 马尔可夫过程的相互作用。《数学进展》5(1970), 247–290。

CNRS UMR 8524, Université de Lille - Laboratoire Paul Painlevé, F-59000 Lille, France
CNRS, UMR 8145, Laboratoire MAP5, Université Paris Cité, campus Saint-Germain-des-Prés; 45 rue des Saints-Pères, 75270 Paris cedex 06, France