ESAIM：控制、优化与变分法 由出版商填写
网址：http://www.emath.fr/cocv/

arXiv:2302.00972v1 [math.OC] 2 Feb 2023

重新探讨可平凡化控制仿射系统

Timothée Schmoderer[1] 和 Witold Respondek[1, 2]

摘要。本文旨在探讨平凡控制系统的概念，即动力学仅取决于控制量的系统。Serres 在平面上具有标量控制的控制非线性系统背景下引入并研究了平凡系统。我们的工作首先将平凡性的概念推广到具有任意数量状态和控制量的控制仿射系统。其次，我们给出了平凡控制仿射系统的两种全新刻画，其中一种基于对无穷小对称性的研究，因此具有几何性质。第三，我们推导出一类平凡控制仿射系统的标准形，其无穷小对称李代数包含一个传递的几乎阿贝尔李子代数。第四，我们研究并提出了对具有标量控制的三维流形上平凡控制仿射系统的一种刻画。特别地，我们为 Serres 此前得到的刻画给出了新的证明。我们的刻画基于两个函数反馈不变量的性质：曲率（由 Agrachev 引入）和中心仿射曲率（由 Wilkens 使用）。最后，我们给出了若干控制仿射系统的标准形，其中曲率和中心仿射曲率具有特殊性质。

摘要。本文旨在探讨控制平凡系统的概念，即动力学仅取决于控制量的系统。Serres 在二维、关于单一标量控制量非线性的系统背景下，引入并研究了平凡系统。我们的工作首先将平凡性的概念推广到关于控制量仿射、且状态数和控制量数任意的系统。接着，我们的首项成果给出了仿射平凡系统的两种新刻画，其中一种基于对无穷小对称性的研究，因此具有几何性质。其次，我们为无穷小对称性李代数含有一个近阿贝尔李子代数的仿射平凡系统给出了一种标准形。第三，我们研究并提出了对三维流形上、具有单一标量控制量的仿射平凡系统的一种刻画。特别地，我们为 Serres 先前得到的刻画给出了新的证明。我们的刻画基于反馈的两个函数不变量的性质：曲率（由 Agrachev 引入）和中心仿射曲率（由 Wilkens 使用）。最后，我们给出若干种仿射系统的标准形，在这些标准形中，曲率和中心仿射曲率具有特殊性质。

2020年数学主题分类. 93A10 - 93B52 - 93B10 - 93B27 - 37N35 - 37C79.

2023年2月3日.

关键词和短语： 控制仿射系统 - 反馈等价 - 平凡控制系统 - 控制曲率 - 标准形 - 无穷小对称性

[1] INSA数学实验室UR 3226 - FR CNRS 3335，诺曼底鲁昂国立应用科学学院，大学大道，76800 鲁夫赖圣艾蒂安，法国；电子邮件：timothee.schmoderer@insa-rouen.fr & witold.respondek@insa-rouen.fr

[2] 自动控制研究所，罗兹工业大学，波兰

© EDP科学出版社，法国应用与工业数学学会 1999

1. 引言

本文研究形式如下的控制仿射系统 Σ

$$\Sigma : \dot{\xi} = f(\xi) + \sum_{i=1}^{m} g_i(\xi) u_i, \quad u_i \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

其中，状态 ξ 属于一个光滑的 n 维流形 $\mathcal{M}$ （或者是 $\mathbb{R}^n$ 的一个开子集，因为我们的结果大多是局部的），而 f 和 g 是 $\mathcal{M}$ 上的光滑向量场，即切丛 $T\mathcal{M}$ 的光滑截面。本文中，“光滑”一词始终表示 C^∞-光滑，并且所有对象（流形、向量场、微分形式、函数）都假定为光滑的。我们用有序对 $\Sigma = (f, g)$ 表示一个控制仿射系统，其中 $g = (g_1, \ldots, g_m)$。对于任意控制仿射系统 $\Sigma = (f, g)$，我们定义两个分布：

$$\mathcal{G} = \operatorname{span}\{g_1, \ldots, g_m\} \quad \text{and} \quad \mathcal{G}^1 = \mathcal{G} + [f, \mathcal{G}] = \operatorname{span}\{g_1, \ldots, g_m, [f, g_1], \ldots, [f, g_m]\}. \tag{2}$$

如果存在一个微分同胚 ϕ：$\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ 以及光滑函数 α: $\mathcal{M} \to \mathbb{R}^m$ 和 β：$\mathcal{M} \to GL_m(\mathbb{R})$，使得我们称两个控制仿射系统 $\Sigma = (f, g)$ 和 $\Sigma = (f, \tilde{g})$ 反馈等价，

$$\tilde{f} = \phi_* \left(f + \sum_{i=1}^{m} g_i \alpha_i \right) \quad \text{and} \quad \tilde{g}_i = \phi_* \left(\sum_{j=1}^{m} g_j \beta_i^j \right),$$

其中，ϕ_* 表示 ϕ的切映射。若 ϕ 在 ξ_0 附近局部定义，且 $\xi_0 = \phi(\xi_0)$，则称 Σ 和 Σ 分别在 ξ_0 和 ξ_0处局部反馈等价。控制仿射系统 Σ 的反馈等价，是指分别附属于 Σ 和 Σ的仿射分布 $\mathcal{A} = f + \mathcal{G}$ 与 $\mathcal{A} = f + \mathcal{G}$ 等价。

在这篇学位论文中 [17], Serres 提出了如下形式的平凡系统这一概念：

$$(\mathcal{T}) : \dot{x} = F(w), \quad x \in \mathcal{X}, \quad w \in \mathbb{R}^m,$$

其中，w 是以非线性方式进入系统的控制变量。平凡系统的动力学 $F(w)$ 不依赖于状态变量 x，因此只依赖于控制变量 w。事实上，$\mathcal{T}$）在[17] 中称为平坦，但这个名称可能会引起误解：首先，平坦控制系统 [7] 已有一个广为确立的概念；其次，平凡控制系统这一类并不等同于零曲率控制系统 [2], ，因此后者可视为几何平坦，正如我们将在第 3 节讨论的那样。基于这些原因，我们沿用 [18], 的说法，将$\mathcal{T}$）称为平凡系统；并称一般的控制非线性系统 $\dot{x} = F(x, w)$ 是可平凡化的，如果它经过形如 $\tilde{x} = \phi(x)$ 、 $\tilde{w} = \psi(x, w)$ 的反馈后，等价于一个平凡系统（$\mathcal{T}$），其中 (ϕ, ψ)： $\mathcal{X} \times \mathbb{R}^m \to \mathcal{X} \times \mathbb{R}^m$是一个微分同胚。受上述考量启发，我们将平凡性的概念推广到控制仿射系统，如下所述。

定义1 (平凡控制仿射系统). 如果控制仿射系统 $\Sigma = (f, g)$ 反馈等价于以下形式的平凡系统，则称其为可平凡化的：

$$(T) : \begin{cases} \dot{x} &= F(w) \\ \dot{w} &= u \end{cases}, \quad (x, w) \in \mathcal{M} = \mathcal{X} \times \mathbb{R}^m, \quad u \in \mathbb{R}^m,$$

其 $\dot{x}$-动力学仅依赖于受控的 w-变量。

一般控制非线性系统与控制仿射系统的平凡和可平凡化概念是同一事物的两个方面。事实上，两个控制非线性系统 $\dot{x} = F(x, w)$ 和 $\tilde{x} = F(\tilde{x}, \tilde{w})$ 反馈等价，当且仅当它们的控制仿射扩展 $\dot{x} = F(x, w)$ $\dot{w} = u$和 $\tilde{x} = F(\tilde{x}, \tilde{w})$ $\tilde{w} = \tilde{u}$通过以下方式等价：

控制仿射反馈变换，参见[10, 方程3。6]因此，控制非线性系统 $\dot{x} = F(x, w)$可平凡化，当且仅当 $\dot{x} = F(x, w)$ $\dot{w} = u$ 按照定义1的意义是可平凡化的；后者正是本文的研究对象。

平凡控制系统值得研究，因为它们描述了满足不依赖于点的非完整约束的动力系统轨迹。事实上，在附加正则性假设 rk $\frac{\partial F}{\partial w}(w) = m$ 下，等价地，若 (T) 的分布 $\mathcal{G}^1$ 满足 rk $\mathcal{G}^1 = 2m$，则存在局部坐标$x = (z, y)$，其中 dim $z = n - 2m$，且 $y = (y_1, \ldots, y_m)$，使得 (T) 的方程可改写为

$$\begin{cases} \dot{z} &= \mathsf{f}(w) \\ \dot{y} &= w \\ \dot{w} &= u \end{cases}$$

由此我们得出，(T) 的轨迹满足非完整约束 $\dot{z} = \mathsf{f}(\dot{y})$，其形式与点 $x = (z, y)$ 无关。记 $\mathcal{X}$ 为（局部定义的）商流形 $\mathcal{M}/\mathcal{G}$，我们看到，轨迹 $x(t) \in \mathcal{X}$ 满足非完整约束 $\dot{z} = \mathsf{f}(\dot{y})$，当且仅当存在一个光滑控制$u(t)$，使得 $(x(t)\ w(t))$ 是 (T) 的一条轨迹。切丛上的方程与控制系统之间的联系在 [13, 14] 中进行了探讨。文献中可以找到平凡系统的例子；例如， [14] 刻画了平凡椭圆、双曲和抛物控制系统；Dubin汽车 [6] 是一个非常简单的平凡系统模型；最后，曲面上的平凡控制非线性系统（即 $n = 2$）以及具有标量控制的此类系统已在 [17, 18, 16] 中得到研究和刻画（并给出了特定情形下的标准形）。

1.1. 论文概要

在下一小节中，我们将介绍本文其余部分所需的微分几何和控制理论的主要概念。接下来，在 第 2 节中，我们研究任意维流形上具有任意数量控制量的平凡控制仿射系统。我们提出了刻画平凡系统的两种新方法，其中一种基于无穷小对称李代数。此外，借助通过对称性刻画平凡系统的方法，我们将给出一类平凡系统的标准形，这类系统的无穷小对称李代数具有传递的几乎阿贝尔李子代数。随后，在 第 3 节中，我们将重新探讨 Serres 发现的平凡系统刻画 [17] ，并将其置于曲面上的控制非线性系统背景下。我们提出一种对 3 维流形上具有标量控制的平凡控制仿射系统的刻画。该刻画揭示了一个离散不变量和两个基本的函数不变量：Agrachev 引入的控制曲率 [2, 1], 以及 Wilkens 使用的中心仿射曲率 [19]。这两个函数不变量都可针对任意控制仿射系统计算。我们还将为 Serres 的结果提供另一种证明和解释。最后，在 第 4 节中，我们讨论控制仿射系统的若干种标准形（其中有些是新的，有些则已见于文献），这些系统的控制曲率和中心仿射曲率具有特殊性质。

1.2. 预备知识

本小节将回顾本文所需的微分几何和控制理论中的主要定义与概念。本文所用的主要记号汇总于表 1。

微分几何。对于流形 $\mathcal{M}$，我们分别用 $T\mathcal{M}$ 和 $T^*\mathcal{M}$ 表示其切丛和余切丛。所有光滑向量场（$T\mathcal{M}$ 的光滑截面）的空间记为 $V^\infty(\mathcal{M})$，所有光滑微分 p-形式的空间记为 $\Lambda^p(\mathcal{M})$；光滑函数（0-形式）的空间 ˜ 则记为 $C^\infty(\mathcal{M})$。对于微分同胚 $\phi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$、向量场 $f \in V^\infty(\mathcal{M})$ 以及微分 p-形式 ˜ $\omega \in \Lambda^p(\mathcal{M})$，我们分别用 $\phi_* f \in V^\infty(\mathcal{M})$ 表示 f 的推前，用 $\phi^*\omega \in \Lambda^p(\mathcal{M})$ 表示 ω 的拉回。向量场 $f \in V^\infty(\mathcal{M})$ 的（局部）流记为 γ_t^f （对任意其有定义的 t ）。李

沿向量场 f 对微分 p-形式 ω 取李导数，记为 $\mathrm{L}_f(\omega)$。特别地，对于函数 $\lambda \in C^\infty(\mathcal{M})$ 及其微分 $\mathrm{d}\lambda$ （一个恰当 1-形式），有

$$\mathrm{L}_f(\lambda) = \langle \mathrm{d}\lambda, f \rangle \quad \text{and} \quad \mathrm{L}_f(\mathrm{d}\lambda) = \mathrm{d}\mathrm{L}_f(\lambda).$$

对于任意光滑函数 α、 λ 和 μ，李导数具有以下性质：$\mathrm{L}_{\alpha f}(\lambda) = \alpha \mathrm{L}_f(\lambda)$，且 $\mathrm{L}_f(\lambda\mu) = \mathrm{L}_f(\lambda)\mu + \lambda \mathrm{L}_f(\mu)$。迭代李导数定义为 $\mathrm{L}_f^k(\lambda) = \mathrm{L}_f\left(\mathrm{L}_f^{k-1}(\lambda)\right)$，其中 $k \geq 2$ 为任意值。对于任意两个向量场 f、 $g \in V^\infty(\mathcal{M})$，我们将它们的李括号定义为一个新的向量场，记作 $[f,g] \in V^\infty(\mathcal{M})$，使得对于任意光滑函数 λ，有

$$\mathrm{L}_{[f,g]}(\lambda) = \mathrm{L}_f(\mathrm{L}_g(\lambda)) - \mathrm{L}_g(\mathrm{L}_f(\lambda)).$$

李括号具有以下性质：它关于 $\mathbb{R}$ 是双线性的，且满足反交换性，即 $[f,g] = -[g,f]$，并且满足雅可比恒等式：

$$[f,[g,h]] + [g,[h,f]] + [h,[f,g]] = 0, \quad \forall\, f,g,h \in V^\infty(\mathcal{M}).$$

此外，对于任意光滑函数 α，以及任意向量场 f、 g 和 h，有

$$[f, \alpha g + h] = \alpha [f,g] + \mathrm{L}_f(\alpha)\, g + [f,h].$$

满足条件 $[f,g] = 0$ 的两个向量场 f 和 g 称为对易；由于在微分同胚 $\phi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ 下，李括号按 $[\phi_* f, \phi_* g] = \phi_* [f,g]$ 变换，因此交换性这一性质与坐标无关。著名的流盒定理（也称为“直化定理”或“局部线性化引理”）断言，在给定的 n 维流形 $\mathcal{M}$ 上，任意满足 $f(p) \neq 0$ 的点 p 的某个邻域内，都存在局部坐标系 $(x_1, \ldots, x_n)$，使得 $f = \frac{\partial}{\partial x_1}$。对于一族（局部）线性无关的向量场 $(f_1, \ldots, f_m)$，当且仅当它们两两对易时，也可以同时做到这一点。我们定义 $\mathrm{ad}_f^0 g = g$、$\mathrm{ad}_f g = [f,g]$，并将迭代李括号记为 $\mathrm{ad}_f^k g = \left[f、\mathrm{ad}_f^{k-1} g\right]$，其中 $k \geq 1$；有关上述性质的详细介绍及证明，请参见[9, 第 1] 章。

无穷小对称性。 我们简要介绍控制仿射系统的对称性这一概念（详见 [12, 8]）。对于控制仿射系统 $\Sigma = (f,\ g)$，见（1），其状态 $\mathcal{M}$ 是一个光滑的 n维流形。我们将容许速度场 $\mathcal{A}$ 定义为

$$\mathcal{A}(\xi) = \{ f(\xi) + \sum_{i=1}^{m} g_i(\xi) u_i \ :\ u_i \in \mathbb{R} \} \subset T_\xi \mathcal{M}.$$

若微分同胚 ϕ： $\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ 保留仿射 m-平面场 $\mathcal{A}$（等价地，仿射分布 $\mathcal{A} = f + \mathcal{G}$），即满足 $\phi_* \mathcal{A} = \mathcal{A}$，则称其为 Σ 的对称性 。若向量场 v 在 $\mathcal{M}$ 上满足：对于任意存在的 t，其（局部）流 γ_t^v都是局部对称性，即 $(\gamma_t^v)_* \mathcal{A} = \mathcal{A}$，则称其为 $\Sigma = (f,g)$的无穷小对称。考虑系统 $\Sigma = (f,g)$，并回顾 $\mathcal{G}$ 是由向量场 g_1、...、 g_m 张成的分布。我们得到无穷小对称性的如下刻画。

命题 1. 向量场 v 是控制仿射系统 $\Sigma = (f,g)$ 的无穷小对称，当且仅当

$$[v,g] = 0 \mod \mathcal{G} \quad \textit{and} \quad [v,f] = 0 \mod \mathcal{G}.$$

由雅可比恒等式可容易看出，若 v_1 和 v_2 是无穷小对称性，则 $[v_1, v_2]$也是无穷小对称性，因此所有无穷小对称性构成一个实李代数。注意，无穷小对称李代数与仿射分布 $\mathcal{A} = f + \mathcal{G}$相关，而不是与某一特定的数对 $(f,g) = (f, g_1, \ldots, g_m)$相关。

通过反馈变换 (α,β) 相关联的不同数对 (f,g) 定义了相同的 $\mathcal{A}$，因此具有相同的无穷小对称李代数；由此，该李代数是与 Σ相关的反馈不变量。

$\mathcal{M}$, $T\mathcal{M}$, $\xi=(x,w)$	光滑的 n 维流形、其切丛及其局部坐标，维数为 $\dim w=m$。
ϕ, ϕ_*, ϕ^*	微分同胚、其切映射及其余切映射。
$\Sigma=(f,g)$	控制仿射系统；见（1）。
$\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{G}^1$	由以下向量场张成的分布： g_1、……、 g_m 以及由以下向量场张成的分布： g_1、……、 g_m 和 $[f,g_1]$、……、 $[f,g_m]$；见（2）。
(T)	平凡控制仿射系统；见定义1。
$\mathfrak{L}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{I}$	实李（子）代数、子代数、理想。
Σ_λ、 $\Sigma^0_{,\ \lambda^k}$	具有无穷小对称性的几乎阿贝尔子代数的平凡系统的标准形；参见 定理2 和 命题 2。
$\Sigma_s=(f_s,\ g)$	由半典范对给出的控制仿射系统；参见 定义 3。
$\Sigma_c=(f_c,\ g_c)$	由典范对给出的控制仿射系统；参见 定义 3。
(k_1,k_2,k_3) 和 $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$	定义在带标量控制的 3 维流形上任意控制仿射系统的结构函数；见（6）。
(ε,κ,ν)	控制仿射系统的反馈不变量；对于典范对由（6'）定义，并由（11）表示为任意控制仿射系统的形式。

表 1. 本文的主要记号

2. 平凡控制仿射系统

本节首先提出可平凡化控制仿射系统的两种新刻画（状态空间维数不限，控制量个数不限）；见下文的 定理 1 。其次，我们给出一类平凡系统的标准形，其无穷小对称李代数含有一个传递的几乎阿贝尔李子代数；见本节的 定理 2 和 命题 2 。

2.1. 平凡系统的刻画

下面的定理给出了平凡系统的两种刻画。第一种刻画在技术层面上说明，平凡性是一种依赖于坐标的性质（如线性控制系统也取决于坐标的选择）；第二种刻画则基于无穷小对称性，因而具有几何性质。回顾一下，对于控制仿射系统 $\Sigma=(f,\ g)$，我们关联两个分布 $\mathcal{G}=$张成 $\{g_1,\dots,g_m\}$和 $\mathcal{G}^1=\mathcal{G}+[f,\mathcal{G}]$，见（2）。

定理 1（可平凡化系统的两种刻画）。考虑一个控制仿射系统 $\Sigma=(f,\ g)$，其状态位于一个 n 维流形 $\mathcal{M}$ 上，且具有 $m\geq 1$ 个控制量。以下断言在 ξ_0 的局部范围内成立：

（*i*）假设 $\operatorname{rk}\mathcal{G}^1=m+k$ 为常数。系统 Σ 局部可平凡化，当且仅当 Σ 局部反馈等价于

$$\Sigma_T:\begin{cases}\dot{x}_i &= h_i(x,w)\\ \dot{w} &= u\end{cases},\quad for\quad 1\leq i\leq n-m,$$

其中光滑标量函数 h_1、……、 h_{n-m} 满足

$$\operatorname{rk}\operatorname{span}\{\mathrm{d}h_1,\dots,\mathrm{d}h_{n-m}\}=k. \tag{3}$$

(ii) Σ 在 ξ_0 附近局部可平凡化，当且仅当分布 $\mathcal{G}$ 对合且具有常秩m，并且此外， Σ 的无穷小对称李代数包含一个阿贝尔子代数 $\mathfrak{A}$，使得 $\mathfrak{A}(\xi_0) \oplus \mathcal{G}(\xi_0) = T_{\xi_0}\mathcal{M}$。

注意，陈述 (i) 中关于分布 $\mathcal{G}^1$ 的秩的假设意味着流形 $\mathcal{M}$ 的维数 n 大于或等于 $m+k$。若 $n = m+k$，则 Σ_T（因而 Σ）的平凡化 (T) 可取为 $\dot{x}_i = w_i$, $1 \le i \le k$, $\dot{w}_j = u_j$, $1 \le j \le m$（对于适当的 w 和 u）。另一方面，若 $n > m+k$，则 $\dot{x}_i = w_i$, $1 \le i \le k$, $\dot{x}_i = F_i(w_1, \dots, w_k)$, $k+1 \le i \le m+k$ 和 $\dot{w}_j = u_j$, $1 \le j \le m$。注意， $k \le m$，因此若 $n > 2m$，则总存在非线性方程 $\dot{x}_i = F_i(w_1, \dots, w_k)$。在条目 (ii) 中，状态空间的维数与控制量的数量之间没有特殊关系（除显而易见的 $n \ge m$ 外）。

注1。对于系统 Σ_T，定义 $H = (h_1, \dots, h_{n-m})^t$。那么，在假设 秩 $\mathcal{G}^1$ 为常数的条件下，条件（*3*）可等价地改写为

$$\operatorname{rk} \frac{\partial H}{\partial w}(x,w) = \operatorname{rk} \frac{\partial H}{\partial (x,w)}(x,w),$$

在(x_0, w_0)的某个邻域内。

证明。

（i）假设 Σ 是局部可平凡化的，即根据定义1， Σ 局部反馈等价于（T），其形式为 Σ_T，其中 $h_i(x,w) = F_i(w)$，对 $1 \le i \le n-m$ 成立。现在证明这些函数满足（ 3 ）。一方面，条件 $\operatorname{rk}\mathcal{G}^1 = m+k$ 意味着雅可比矩阵 $\frac{\partial F}{\partial w}$具有常秩 k，其中 $F = (F_1, \dots, F_{n-m})^T$。另一方面，我们得到 $\mathrm{d}h_i = \mathrm{d}F_i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial F_i}{\partial w_j}\mathrm{d}w_j$。因此，$\operatorname{span}\{\mathrm{d}h_1, \dots, \mathrm{d}h_{n-m}\}$ 的秩与 $\frac{\partial F}{\partial w}$的秩相同，结论由此得出。反过来，假设 Σ 反馈等价于 Σ_T。利用假设 $\operatorname{rk}\ \mathcal{G}^1 = m+k$，我们可以重新排列 x-坐标，使得 $h = (\hat{}h_1, \dots, \hat{}h_k, \tilde{h}_{k+1}, \dots, \tilde{h}_{n-m})$，其中 $\operatorname{rk}\ \frac{\partial h}{\partial w} = k\hat{}$。我们设$\hat{}w_i = h_i(x,w)$，对 $1 \le i \le k$成立，并补上$\hat{}w_{k+1}, \dots, \hat{}w_m$（从 w_i中选取），使得$\hat{}w_1, \dots, \hat{}w_m$ 构成一个局部坐标系。由条件（ 3 ）可知，函数 $\tilde{}h_{k+1}, \dots, h_{n-m}$ 仅依赖于变量 $\hat{}w_1, \dots, \hat{}w_k$。通过使用一个反馈变换，使 $\hat{}w_i = \hat{}u_i$, $1 \le i \le k$，我们得出 Σ_T 确实是坐标（ $x, \hat{}w$ ）下的一个平凡系统。

(ii) 假设 $\Sigma = (f,g)$ 是局部可平凡化的，那么对于 (T)，我们有 $\mathcal{G} = \operatorname{span}\left\{\frac{\partial}{\partial w_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial w_m}\right\}$，它显然是对合的且具有常秩 m。此外，对于 $1 \le i \le n-m$，向量场 $v_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$是 (T) 的对易对称性，它们张成满足 $\mathfrak{A}(\xi_0) \oplus \mathcal{G}(\xi_0) = T_{\xi_0}\mathcal{M}$ 的阿贝尔李代数 $\mathfrak{A}$。反过来，假设 $\Sigma = (f,g)$ 的无穷小对称李代数包含一个阿贝尔子代数 $\mathfrak{A} = \operatorname{vect}_{\mathbb{R}}\{v_1, \dots, v_{n-m}\}$。由 $\mathfrak{A}(\xi_0) \oplus \mathcal{G}(\xi_0) = T_{\xi_0}\mathcal{M}$，向量场 $v_1, \dots, v_{n-m}$ 线性无关，因此我们选取局部坐标 $\tilde{\xi} = (\tilde{x}, \tilde{w})$，使得对于 $1 \le i \le n-m$，有 $v_i = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i}$。在这些坐标下，我们有 $g_j = A_j(\tilde{x}, \tilde{w})\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + B_j(\tilde{x}, \tilde{w})\frac{\partial}{\partial \tilde{w}}$。由于 $\mathcal{G}$ 具有常秩 m，且 $\tilde{}$ $\tilde{}$ 满足 $\mathfrak{A}(\xi_0) \oplus \mathcal{G}(\xi_0) = T_{\tilde{\xi}_0}\mathcal{M}$，通过适当的反馈变换，我们将 $\mathcal{G}$ 的生成元选为 $\tilde{g}_j = A_j(\tilde{x}, \tilde{w})\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial}{\partial \tilde{w}_j}$（为简化记号，我们省略“波浪号”，并用 g_j 表示 $\tilde{g}_j$）。利用 v_i 是 Σ 的对称性这一点，即 $[v_i, g_j] \in \mathcal{G}$，可推出 $A_j = A_j(\tilde{w})$，因此实际上我们有 $[v_i, g_j] = 0$。此外， $\mathcal{G}$ 是对合的，因此可推出 $[g_j, g_k] = 0$。于是，所有向量场 v_i 和 g_j 都彼此对易，因此存在坐标 $\xi = (x,w)$，使得对于 $1 \le i \le n-m$，有 $v_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$，并且对于 $1 \le j \le m$，有 $g_j = \frac{\partial}{\partial w_j}$。向量场 v_i 是 Σ 的对称性，因此 $[v_i, f] \in \mathcal{G}$，这意味着 $f = F\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{f}\frac{\partial}{\partial w}$，其中 $F = F(w)$，通过适当的反馈变换即可得到 $\mathrm{f} = 0$。

□

2.2. 具有几乎阿贝尔无穷小对称李子代数的平凡系统的标准形

定理 1 指出，上一小节中可平凡化系统的无穷小对称李代数具有一个与分布 $\mathcal{G}$互补的阿贝尔子代数。本小节中，我们研究一种特殊情形：阿贝尔子代数 $\mathfrak{A}$ 实际上是对称性子代数$\mathfrak{L}$ 中的余维为一的阿贝尔理想，而后者在 $\mathcal{M}$上传递作用。我们给出具有这类对称李代数的控制仿射系统（其控制必然为标量）的标准形。

定义 2 (几乎阿贝尔李代数**)**。 设 $\mathfrak{L}$ 为实李代数；按照[5], 的定义，我们称$\mathfrak{L}$ 其为几乎阿贝尔的，如果它具有一个余维为一的阿贝尔理想 $\mathfrak{I}$。

利用李代数同调，可以简单地推导出，几乎阿贝尔李代数（可能是无限维的）同构于半直积 $\mathfrak{L} \cong \mathfrak{I} \rtimes \mathbf{vect}_{\mathbb{R}}\{v_0\}$，其结构由 v_0 在 $\mathfrak{I}$上的作用决定，即

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}_{v_0} : \mathfrak{I} &\longrightarrow \mathfrak{I} \\ v &\longmapsto [v_0, v]\,. \end{aligned}$$

此外，两个几乎阿贝尔李代数 $\mathfrak{L} = \mathfrak{I} \rtimes \mathbf{vect}_{\mathbb{R}}\{v_0\}$ 和 $\tilde{\mathfrak{L}} = \tilde{\mathfrak{I}} \rtimes \mathbf{vect}_{\mathbb{R}}\{\tilde{v}_0\}$ 同构，当且仅当存在一个实可逆变换 P: $\mathfrak{I} \to \tilde{\mathfrak{I}}$，使得 $P\mathbf{ad}_{v_0} = \mu\,\mathbf{ad}_{\tilde{v}_0}P$，其中某个 $\mu \in \mathbb{R}^*$；见 [4, 命题 11]。因此，几乎阿贝尔李代数的同构类对应于线性算子 $\mathbf{ad}_{v_0}$ 的相似类（相差一个标量乘法）。特别地，如果 $\mathfrak{L}$ 是有限维的，则 $\mathbf{ad}_{v_0}$ 的相似类由约旦标准形给出。在下面的定理中，我们考虑 $\mathbf{ad}_{v_0}$ 在 $\mathbb{R}$ 上可对角化的最简单情形，并给出具有 $\mathfrak{L}$作为无穷小对称李子代数的控制仿射系统的标准形。

定理 2 （几乎阿贝尔无穷小对称性）。 考虑状态流形 $\mathcal{M}$ 上的一个控制仿射系统 $\Sigma = (f,\ g)$，其中 n 为流形维数，并带有标量控制。假设无穷小对称李代数具有一个李子代数 $\mathfrak{L}$，且在 ξ_0处满足以下条件： $f(\xi_0) \notin \mathcal{G}(\xi_0)$， $\mathfrak{L}$ 在 $\mathcal{M}$上传递地作用， $\mathfrak{L} = \mathfrak{I} \rtimes \mathrm{vect}_{\mathbb{R}}\{v_0\}$ 是几乎阿贝尔的，其阿贝尔理想满足 $\mathfrak{I}(\xi_0) \oplus \mathcal{G}(\xi_0) = T_{\xi_0}\mathcal{M}$，并且算子 ad_{v_0}在 $\mathbb{R}$上非奇异且可对角化。那么， Σ 在 ξ_0附近局部反馈等价于如下形式的平凡系统

$$\Sigma_\lambda : \begin{cases} \dot{x}_i &= \eta_i (w+1)^{\lambda_i} \quad 1 \le i \le n-1 \\ \dot{w} &= u \end{cases}, \quad u \in \mathbb{R}$$

在 $(x_0,\ 0) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$附近，其中 λ_i是ad_{v_0} 的特征值，而 η_i 是取值为0 或1的常数，且$\eta_1 = 1$。

注意到以下假设： $\mathfrak{L}$ 是几乎阿贝尔的，在 $\mathcal{M}$上传递地作用，并满足 $\mathfrak{I}(\xi_0) \oplus \mathcal{G}(\xi_0) = T_{\xi_0}\mathcal{M}$；这些假设对 Σ 的控制量数量限制相当严格。也就是说，它们意味着$\mathbf{rk}\,\mathcal{G} = 1$，即 Σ 具有一个标量控制。

注2 （逆命题）。通过直接计算，我们看到向量场

$$v_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \forall\, 1 \le i \le n-1, \quad and \quad v_0 = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + (w+1)\frac{\partial}{\partial w}$$

是 Σ_λ 的无穷小对称性。因此， Σ_λ 的无穷小对称李代数拥有一个几乎阿贝尔子代数 $\mathfrak{L} =$向量场 $_{\mathbb{R}}\{v_1, \ldots, v_{n-1}, v_0\}$。因此，该定理实际上是一个“当且仅当”命题，因为所有其他假设都是反馈不变量。

证明。考虑由向量场 f 和 g 给出的控制仿射系统 $\Sigma=(f,g)$，并令 n 向量场 v_1、.....、v_{n-1}、v_0 生成无穷小对称代数的 n 维李子代数 $\mathfrak{L}=$ 向量场 $_{\mathbb{R}}\{v_1,\ldots,v_{n-1},v_0\}$，根据假设，该子代数是几乎阿贝尔的，其阿贝尔理想为 $\mathfrak{I}=$ 向量场 $_{\mathbb{R}}\{v_1,\ldots,v_{n-1}\}$；又由于 ad_{v_0} 在 $\mathbb{R}$ 上可对角化，我们得到

$$[v_0,v_i]=\lambda_i v_i,\quad \forall\, 1\le i\le n-1. \tag{4}$$

根据定理 1 的陈述 (ii)，Σ 是局部可平凡化的。按照该定理的证明，我们推得在（x_0，0）附近存在局部坐标 $(x,\hat{w})$，使得 $v_i=\frac{\partial}{\partial x_i}$，其中 $1\le i\le n-1$，$g=\frac{\partial}{\partial \hat{w}}$，且$f=\sum_{i=1}^{n-1}F_i\frac{\partial}{\partial x_i}$，其中 $F_i=F_i(\hat{w})$。将无穷小对称 $v_0=\sum_{i=1}^{n-1}\gamma_i\frac{\partial}{\partial x_i}+\bar{\delta}\frac{\partial}{\partial \hat{w}}$表示为$\gamma_i=\gamma_i(x)$，因为 v_0是 $\mathcal{G}=\mathrm{span}\left\{\frac{\partial}{\partial \hat{w}}\right\}$的对称性，且 $\bar{\delta}=\bar{\delta}(x,\hat{w})$。利用经微分同胚作用后未发生改变的交换关系式 (4)，我们得到

$$v_0=-\sum_{i=1}^{n-1}(\lambda_i x_i+a_i)\frac{\partial}{\partial x_i}+\bar{\delta}(\hat{w})\frac{\partial}{\partial \hat{w}},\quad a_i\in\mathbb{R}.$$

为避免不必要的计算，我们用具有相同性质的$-v_0-\sum_{i=1}^{n-1}a_iv_i\in\mathfrak{L}$替换 v_0，因此可以假设 $v_0=\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i x_i\frac{\partial}{\partial x_i}+\delta(\hat{w})\frac{\partial}{\partial \hat{w}}$，其中 $\delta(\hat{w})=-\bar{\delta}(\hat{w})$。利用 v_0是 f的对称性这一事实，即$[v_0,f]\in\mathcal{G}$，我们推导出以下方程：

$$\delta(\hat{w})\frac{\mathrm{d}F_i}{\mathrm{d}\hat{w}}(\hat{w})-\lambda_iF_i(\hat{w})=0,\quad \forall\, 1\le i\le n-1. \tag{5}$$

假设 $f(\xi_0)\notin\mathcal{G}(\xi_0)$意味着$(F_1,\ldots,F_{n-1})(0)\neq 0\in\mathbb{R}^{n-1}$，因此不妨设 $F_1(0)\neq 0$（必要时重新编号 x_i），从而 $F_1(\hat{w})=c+h(\hat{w})$，其中 $c=F_1(0)$，函数 h 满足 $h(0)=0$。将x_1替换为 $\frac{x_1}{c}$后，我们可以假设 $F_1(\hat{w})=1+h(\hat{w})$。此外，由(5)可得 $h'(0)\neq 0$；回顾一下，根据假设，ad_{v_0}是非奇异的，因此对所有 $1\le i\le n-1$，$\lambda_i\neq 0$。于是，$w=(1+h(\hat{w}))^{1/\lambda_1}-1$ 在$\hat{w}_0=0$ 附近是一个微分同胚。为简化记号，我们继续用 f 和 v_0 表示用坐标 w表示的那些向量场。我们有 $F_1(w)=(1+w)^{\lambda_1}$，因此将$\hat{w}$ 重命名为 w后，关系式(5)给出$\delta(w)=w+1$，并意味着函数 $F_2,\ldots,F_{n-1}$ 满足

$$(1+w)\frac{\mathrm{d}F_i}{\mathrm{d}w}(w)=\lambda_iF_i(w),\quad \text{for}\quad 2\le i\le n-1.$$

在 $w_0=0$ 附近求解这些方程，得到 $F_i=c_i(w+1)^{\lambda_i}$，其中 $c_i\in\mathbb{R}$。因此，用非零的 c_i 对 x_i 归一化后，我们得到 Σ 在 $(x_0,0)\in\mathbb{R}^n$ 附近具有 Σ_λ 的形式。□

上述定理推广了我们先前关于双曲系统和抛物系统的无穷小对称李代数的结果；对于这些系统，我们分别有 $n=3$ 和 $(\lambda_1,\lambda_2)=(1,-1)$，以及 $(\lambda_1,\lambda_2)=(2,1)$，参见[15]。

当 $f(\xi_0)\in\mathcal{G}(\xi_0)$ 时，情况要复杂得多，下面的命题对此作了说明。

命题 *2.* 考虑一个控制仿射系统 $\Sigma=(f,g)$，其状态流形维数为 n，且具有标量控制。设 $\mathfrak{L}$ 是无穷小对称性的一个李子代数。假设在 ξ_0处满足以下条件：$f(\xi_0)\in\mathcal{G}(\xi_0)$，存在 $k\ge 1$，使得 $g\wedge \mathrm{ad}_g^k f(\xi_0)\neq 0$是最小整数，$\mathfrak{L}$在 $\mathcal{M}$上传递地作用，$\mathfrak{L}\cong\mathfrak{I}\rtimes \mathrm{vect}_{\mathbb{R}}\{v_0\}$ 几乎阿贝尔，$\mathfrak{I}(\xi_0)\oplus\mathcal{G}(\xi_0)=T_{\xi_0}\mathcal{M}$，且 ad_{v_0} 的作用在 $\mathbb{R}$ 上非奇异且可对角化。于是，ad_{v_0} 的特征值 λ_i 满足：$\frac{\lambda_i}{\lambda_1}k$ 是大于或等于 k的正整数，其中 λ_1 是 ad_{v_0}的绝对值最小的特征值。此外，系统 Σ 局部

反馈等价于

$$\Sigma_{\lambda}^{0,k}:\left\{\begin{array}{ll}\dot{x}_1 & =w^k\\ \dot{x}_i & =\eta_i(w^k)^{\lambda_i/\lambda_1}\quad 2\le i\le n-1\\ \dot{w} & =u\end{array}\right.,\quad u\in\mathbb{R},$$

在$(x_0,0)\in\mathbb{R}^n$附近，其中 η_i 为等于0 或1的常数。

注意，标准形 $\Sigma^{0,k}_{\lambda}$ 定义了一个多项式系统，因为 $k\frac{\lambda_i}{\lambda_1}$ 是正整数。此外，尽管特征值 λ_i 可以是任意值，但上述命题的条件对它们施加了严格限制。具体而言，所有 λ_i's 的符号都相同，且 $\lambda_i=\frac{l_i}{k}\lambda_1$，其中 l_i's 是满足 $l_i\ge k$的整数。此外，一个经典事实是，在上述假设下，整数 k 是反馈变换的不变量。因此，若 $k\neq k'$，则 $\Sigma^{0,k}_{\lambda}$ 和 $\Sigma^{0,k'}_{\lambda}$ 在 $(x_0,0)$ 附近不是局部反馈不变的。

证明。证明的开头与前一个定理的证明相同，直到方程 (5)，因此我们从那里开始。由 $f(\xi_0)\in\mathcal{G}(\xi_0)$，我们有 $(F_1,\dots,F_{n-1})(0)=0\in\mathbb{R}^{n-1}$，并且由于 $g\wedge \mathrm{ad}_g^k f(0)\neq 0$，我们假设 $\mathrm{d}^k F_1\mathrm{d}\hat{}w^k(0)\neq 0$；如有必要，重新标记 x_i-坐标。利用泰勒展开，我们可以写成 $F_1=\hat{}w^k H(\hat{}w)$，其中 $H(0)\neq 0$，并且可以假设 $H(0)>0$；否则，将 x_1 替换为 $-x_1$。我们应用局部微分同胚$w=\hat{}w(H(\hat{}w))^{1/k}$，它将 f和 v_0 映射为向量场；为简便起见，我们仍分别将它们记作 f和 v_0。我们有 $F_1(w)=w^k$，因此，用 w-坐标表示的方程 (5) 表明，对于 $i=1$，有$\delta(w)=\frac{\lambda_1}{k}w$，并且

$$\lambda_1 w\frac{\mathrm{d}F_i}{\mathrm{d}w}(w)=\lambda_i k F_i(w),\quad \text{for}\quad 2\le i\le n-1.$$

在 $w_0=0$ 附近求解这些方程可得 $|F_i|=c_i|w_i|^{k\lambda_i/\lambda_1}$，其中 $c_i\in\mathbb{R}$。唯一的 C^∞解为 $c_i=0$，或 $c_i\neq 0$，其中 $\frac{\lambda_i}{\lambda_1}k$ 是正整数。对应的光滑解为 $F_i=c_i w^{k\lambda_i/\lambda_1}$，根据 k 的定义，我们有 $k\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\ge k$（否则，$g\wedge\mathrm{ad}_f^{k'}g(\xi_0)\neq 0$，其中 $k'=\frac{\lambda_i}{\lambda_1}k<k$，这与 k的定义矛盾）。因此 $|\lambda_i|\ge|\lambda_1|$，而且 λ_1 确实是 ad_{v_0} 的绝对值最小的特征值。最后，对坐标 x_i进行归一化，其中 $c_i\neq 0$，得到所需形式 $\Sigma^{0,k}_{\lambda}$。□

前面的命题描述了所有具有几乎阿贝尔李子代数对称性、且存在 k 的光滑系统，尤其是所有解析系统。注意，对于单输入解析系统，要么存在 k，要么若不存在，则它局部反馈等价于平凡系统 $\dot{x}=c,\dot{w}=u$，其中 $c\in\mathbb{R}^{n-1}$。然而，在 C^∞ 范畴中，存在一些系统，其中 k 不存在，但其对称代数含有一个几乎阿贝尔子代数。例如，考虑点 $(x_0,0)$ 附近的系统

$$\left\{\begin{array}{ll}\dot{x}_1 & =\mathfrak{f}(w)\\ \dot{x}_i & =\mathfrak{f}(w)^{\lambda_i/\lambda_1}\quad 2\le i\le n-1\\ \dot{w} & =u\end{array}\right.,\quad \text{with}\quad \mathfrak{f}(w)=\exp\left(-\frac{1}{w^2}\right),\ \mathfrak{f}(0)=0,$$

以及 $\lambda_i/\lambda_1\in\mathbb{N}^*$。通过直接计算可以验证，该系统具有一个几乎阿贝尔的无穷小对称李子代数，但显然，k 在$(x_0,0)$处不存在，因此它与 $\Sigma^{0,k}_{\lambda}$ 反馈不等价。

3. 三维流形上的平凡系统

本节研究带有标量控制的三维流形上的平凡系统。我们的目标是给出 [16] 的结果的新版本，并通过给出若干标准形对其进行扩展。

在本节中，我们始终考虑如下形式的控制仿射系统 $\Sigma = (f, g)$

$$\Sigma : \dot{\xi} = f(\xi) + g(\xi)u, \quad u \in \mathbb{R},$$

其中，状态 ξ 属于一个三维流形 $\mathcal{M}$，向量场 f 和 g 在任意 $\xi \in \mathcal{M}$ 处都满足以下正则性假设

(A1) $f \wedge g \wedge [g, f] \neq 0$，(

A2) $g \wedge [g, f] \wedge [g, [g, f]] \neq 0$。

对于任意控制仿射系统 $\Sigma = (f, g)$，我们通过以下分解定义了唯一确定的 6 个结构函数：

$$\begin{aligned} [f, [f, g]] &= k_1 g + k_2 [g, f] + k_3 [g, [g, f]], \\ [g, [g, f]] &= \lambda_1 f + \lambda_2 g + \lambda_3 [g, f]. \end{aligned} \tag{6}$$

请注意，假设 (A2) 意味着 $\lambda_1 \neq 0$。现在我们定义两类不同的配对 (f, g) .

定义 3（半典范对）。若满足 $k_3 \equiv 0$，则称对 (f, g) 为半典范对，并记作(f_s, g)。此外，若还满足 $\lambda_1 \equiv \pm 1$，则称 (f, g) 为典范对，并记作(f_c, g_c)。

注意，半典范对的特征是包含关系 $[f, [f, g]] \in$ 张成空间 $\{g, [g, f]\}$，这是 Σ 的奇异向量场所具有的性质（这也说明了半典范对的记号 (f_s, g) 为何如此）。在假设 (A2)下，该奇异向量场是唯一的，并且可以利用奇异控制计算得到。因此，下面的命题表明半典范对存在，这并不令人意外（但请注意，我们的证明不需要使用奇异控制理论）。

下面的命题表明，控制仿射系统总是反馈等价于由半典范对、甚至由典范对给出的系统。此外，这些对可以显式地构造出来，也就是说，将 (f, g) 变换为 (f_s, g) 或变换为 (f_c, g_c) 的反馈变换只需微分和代数运算（无需求解微分方程）。此外，典范对是唯一的（除将 g_c 乘以 -1之外），因此其结构函数是反馈协变量（至多相差一个离散对合，见下文注3 ）。

命题3（半典范对和典范对的存在性）。考虑一个满足假设 $\Sigma =$ （f， g）的控制仿射系统 （*A1*）和 （*A2*）。那么，以下结论在全局上成立：

(i) Σ 在全局上反馈等价于 $\Sigma_s =$ （f_s， g），其中（f_s， g）是一个半典范对；*(ii)* Σ 在全局上反馈等价于 $\Sigma_c =$ （f_c， g_c），其中（f_c， g_c）是一个典范对。

此外，（f_s， g）和（f_c， g_c）可以通过以下反馈变换显式构造

$$f_s = f + g k_3, \quad f_c = f_s, \quad and \quad g_c = |\lambda_1|^{-1/2} g.$$

此外，典范对（f_c， g_c）在相差 $g_c \mapsto -g_c$的意义下唯一。

上述命题的证明基于以下引理，该引理给出了结构函数 k_1， k_2， k_3， λ_1， λ_2和 λ_3之间的一些关系式，并说明它们在反馈变换下如何变化。其证明是一个直接计算，我们将在 附录 A中详细说明。

引理 1. 考虑一个控制仿射系统 $\Sigma = (f, g)$，其结构函数为(k_1, k_2, k_3) 和$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$。那么，下列关系式成立：

$$\mathrm{L}_f(\lambda_1) = -k_2\lambda_1 - \mathrm{L}_g(\lambda_1 k_3), \tag{7a}$$

$$\mathrm{L}_f(\lambda_2) - \lambda_3 k_1 + \mathrm{L}_g(k_1) = -k_2\lambda_2 - \mathrm{L}_g(\lambda_2 k_3), \tag{7b}$$

$$\mathrm{L}_f(\lambda_3) - \lambda_2 = -k_3\lambda_1 - \mathrm{L}_g(k_2) - \mathrm{L}_g(\lambda_3 k_3). \tag{7c}$$

˜在反馈变换 $f \mapsto f = f + g\alpha$ 和 $g \mapsto \tilde{g} = g\beta$下，其中 α 和 β 是满足 $\beta \neq 0$的光滑标量函数，结构函数变换为

$$\begin{aligned}\tilde{k}_1 &= k_1 + \mathrm{L}_{[g,f]}(\alpha) + \tfrac{1}{\beta}\left(\mathrm{L}_f(\gamma) + \alpha \mathrm{L}_g(\gamma) - \gamma \mathrm{L}_g(\alpha)\right) + \tilde{k}_2 \tfrac{\gamma}{\beta} \\ &\quad + \tilde{k}_3\left(\mathrm{L}_{[g,f]}(\beta) + \mathrm{L}_g(\gamma) - \gamma \mathrm{L}_g(\ln(\beta))\right), \\ \tilde{k}_2 &= k_2 - \mathrm{L}_f(\ln(\beta)) - \tfrac{\gamma}{\beta} - \alpha \mathrm{L}_g(\ln(\beta)) + \tilde{k}_3 \mathrm{L}_g(\beta), \\ \tilde{k}_3 &= \tfrac{1}{\beta}(k_3 - \alpha),\end{aligned} \tag{8}$$

$$\tilde{\lambda}_1 = \beta^2 \lambda_1, \quad \tilde{\lambda}_2 = \beta\lambda_2 - \beta\lambda_1\alpha + \gamma\lambda_3 - \mathrm{L}_{[g,f]}(\beta) - \mathrm{L}_g(\gamma) + 2\gamma \mathrm{L}_g(\ln(\beta)), \quad \tilde{\lambda}_3 = \beta\lambda_3 + \mathrm{L}_g(\beta), \tag{9}$$

其中 $\gamma = \mathrm{L}f(\beta) + \alpha \mathrm{L}g(\beta) - \beta \mathrm{L}g(\alpha)$。

命题3的证明。考虑 $\Sigma = (f, g)$，其结构函数为 (k_1, k_2, k_3) 和 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$。根据方程 (8) 和 (9)，在反馈变换 $\beta\tilde{k}_3 = k_3 - \alpha$ 和 $\tilde{\lambda}_1 = \beta^2\lambda_1$下，我们有。因此，选择˜ $\alpha = k_3$后，可得变换后的对 (f, g)，其中 $f = f + gk_3$，是半典范的。此外，再选择 $\beta = |\lambda_1|^{-1/2}$，并回想由假设（A2）可知 $\lambda_1 \neq 0$，可得典范对 $(f_c, g_c) = (\tilde{f}, \tilde{g})$，其中$\tilde{g} = \beta g$。显然，奇异向量场 $f_s = f_c$ 是唯一确定的，但典范向量场 g_c 在 $g_c \mapsto \pm g_c$意义下唯一。□

注意，对于典范对 (f_c, g_c) 根据（ $k_2 \equiv 0$，我们还得到 7a）。因此，典范对 (f_c, g_c) 满足以下分解（将 k_1 重命名为 κ, λ_1 重命名为 ε, λ_2 重命名为 μ, λ_3 重命名为 ν）

$$\begin{aligned}[f_c, [f_c, g_c]] &= \kappa g_c, \\ [g_c, [g_c, f_c]] &= \varepsilon f_c + \mu g_c + \nu [g_c, f_c],\end{aligned} \tag{6'}$$

其中 $\varepsilon = \pm 1$。此外，利用方程（7b）和（7c），我们推得 κ, μ 和 ν 之间满足关系

$$\mathrm{L}_{f_c}(\mu) - \nu\kappa + \mathrm{L}_{g_c}(\kappa) = 0 \tag{7b'}$$

$$\mathrm{L}_{f_c}(\nu) - \mu = 0, \tag{7c'}$$

由此我们推得，反馈不变量 κ 和 ν 之间满足关系

$$\mathrm{L}_{f_c}^2(\nu) - \nu\kappa + \mathrm{L}_{g_c}(\kappa) = 0. \tag{10}$$

因此，典范对明确地确定了一个离散不变量 $\varepsilon = \pm 1$ 以及两个可构造的反馈不变量函数 κ 和 ν；类比 Serres 的著作 [18]，分别称它们为曲率和中心仿射曲率；另见 [19]。注意，由于上文的（7c'）， μ 由 ν确定。此外，曲率κ 将中心仿射曲率 ν 确定到一个仿射部分；也就是说，若 f_c 在$\frac{\partial}{\partial x}$上被规整化，则 ν 可由 κ 通过（10）确定，但相差两个满足 $\mathrm{L}f_c(\nu_i) = 0$的函数 ν_1 和 ν_0。

注3. 典范对的唯一性仅差 $g_c \mapsto -g_c$。因此，中心仿射曲率 ν 是关于对合 $\nu \mapsto -\nu$ 的反馈等变量（这不会影响我们下面的条件）。我们将在 命题6中再讨论这一微妙之处，届时我们将构造若干标准形。另一方面，曲率 κ 是真正的反馈不变量（事实上，它是一个反馈等变量，在微分同胚 $\phi^*\kappa$ 作用下变为 ϕ）。

对于给定的控制仿射系统 $\Sigma_c = (f_c, g_c)$，其由一个典范对给出，我们用 $(\varepsilon, \kappa, \nu)$ 表示不变量三元组。尽管构造典范对并不费力，为求完整起见，我们给出任意控制仿射系统的 $(\varepsilon, \kappa, \nu)$ 表达式。特别地，注意，我们关于曲率 κ 的公式推广了 [3, p. 376]，中给出的公式，其中 k_3 已经归一化为 0。

命题 4（控制仿射系统的不变量）。考虑一个控制仿射系统 $\Sigma = (f,\ g)$ 定义在一个 3 维状态空间流形上，且具有标量控制。设 $(k_1,\ k_2,\ k_3)$ 和 $(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3)$ 为由（6）定义的结构函数。那么，不变量 $(\varepsilon,\ \kappa,\ \nu)$ 由下式给出：

$$\varepsilon = \operatorname{sgn}(\lambda_1), \quad \kappa = k_1 + \frac{1}{2}\mathrm{L}_f(k_2 - \mathrm{L}_g(k_3)) + \frac{1}{4}(k_2 - \mathrm{L}_g(k_3))^2 + \mathrm{L}_{[g,f]}(k_3) + \frac{1}{2}k_3\mathrm{L}_g(k_2 - \mathrm{L}_g(k_3)),$$
$$\textit{and} \quad \nu = |\lambda_1|^{-1/2}\left(\lambda_3 - \frac{1}{2}\mathrm{L}_g(\ln|\lambda_1|)\right). \tag{11}$$

我们关于曲率的公式 κ 确实是[3]中公式的推广，因为如果 $k_3 = 0$（即我们假设 f 是奇异向量场 f_s），那么（11）可写为

$$\kappa = k_1 + \frac{1}{2}\mathrm{L}_f(k_2) + \frac{1}{4}(k_2)^2,$$

也就是说，与 Agrachev[1, 3]给出的公式完全相同。

证明。考虑一对 (f, g)，其结构函数为 (k_1, k_2, k_3) 和 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$。为推导不变量 $(\varepsilon, \kappa, \nu)$ 的表达式，我们将方程 (8) 和 (9) 与 $\alpha = k_3$ 及 $\beta = |\lambda_1|^{-1/2}$ 结合使用，即构造典范对的反馈变换。我们详细说明 κ 的计算，并将 ν 的计算留给读者。请注意，应用反馈来构造典范对时，我们还可顺带得到 $k_2 = 0$（见命题3的证明）。首先，我们有，

$$\gamma = -\frac{1}{2}|\lambda_1|^{-1/2}\mathrm{L}_f(\Lambda) - \frac{1}{2}k_3|\lambda_1|^{-1/2}\mathrm{L}_g(\Lambda) - |\lambda_1|^{-1/2}\mathrm{L}_g(k_3) = |\lambda_1|^{-1/2}\left(-\frac{1}{2}\mathrm{L}_f(\Lambda) - \frac{1}{2}k_3\mathrm{L}_g(\Lambda) - \mathrm{L}_g(k_3)\right),$$

˜其中 $\Lambda = \ln|\lambda_1|$。其次，利用 $k_2 = 0$，我们推得

$$k_2 = -\frac{1}{2}\mathrm{L}_f(\Lambda) - \frac{1}{2}k_3\mathrm{L}_g(\Lambda) + |\lambda|^{1/2}\gamma = -\mathrm{L}_f(\Lambda) - k_3\mathrm{L}_g(\Lambda) - \mathrm{L}_g(k_3).$$

因此，将 k_2 的最后一个表达式代入 γ，可得 $\gamma = \frac{1}{2}|\lambda_1|^{-1/2}(k_2 - \mathrm{L}g(k_3))$。现在，曲率~为 $\kappa = k_1$，即

$$\begin{aligned}
\kappa &= k_1 + \mathrm{L}_{[g,f]}(k_3) + |\lambda_1|^{1/2}\left(\frac{1}{2}\mathrm{L}_f\left(|\lambda_1|^{-1/2}(k_2 - \mathrm{L}_g(k_3))\right) + \frac{1}{2}k_3\mathrm{L}_g\left(|\lambda_1|^{-1/2}(k_2 - \mathrm{L}_g(k_3))\right)\right.\\
&\quad \left. -\frac{1}{2}|\lambda_1|^{-1/2}(k_2 - \mathrm{L}_g(k_3))\mathrm{L}_g(k_3)\right),\\
&= k_1 + \mathrm{L}_{[g,f]}(k_3) - \frac{1}{2}(k_2 - \mathrm{L}_g(k_3))\mathrm{L}_g(k_3)\\
&\quad + \frac{1}{2}|\lambda_1|^{1/2}\left(|\lambda_1|^{-1/2}\mathrm{L}_f(k_2 - \mathrm{L}_g(k_3)) - \frac{1}{2}(k_2 - \mathrm{L}_g(k_3))|\lambda_1|^{-3/2}\mathrm{L}_f(|\lambda_1|)\right)\\
&\quad + \frac{1}{2}|\lambda_1|^{1/2}k_3\left(|\lambda_1|^{-1/2}\mathrm{L}_g(k_2 - \mathrm{L}_g(k_3)) - \frac{1}{2}(k_2 - \mathrm{L}_g(k_3))|\lambda_1|^{-3/2}\mathrm{L}_g(|\lambda_1|)\right)\\
&= k_1 + \mathrm{L}_{[g,f]}(k_3) - \frac{1}{2}(k_2 - \mathrm{L}_g(k_3))\mathrm{L}_g(k_3) + \frac{1}{2}\mathrm{L}_f(k_2 - \mathrm{L}_g(k_3))\\
&\quad - \frac{1}{4}(k_2 - \mathrm{L}_g(k_3))\mathrm{L}_f(\Lambda) + \frac{1}{2}k_3\mathrm{L}_g(k_2 - \mathrm{L}_g(k_3)) - \frac{1}{4}(k_2 - \mathrm{L}_g(k_3))k_3\mathrm{L}_g(\Lambda)\\
&= k_1 + \mathrm{L}_{[g,f]}(k_3) + \frac{1}{2}\mathrm{L}_f(k_2 - \mathrm{L}_g(k_3)) + \frac{1}{2}k_3\mathrm{L}_g(k_2 - \mathrm{L}_g(k_3))\\
&\quad - \frac{1}{4}(k_2 - \mathrm{L}_g(k_3))(\mathrm{L}_f(\Lambda) + \mathrm{L}_g(\Lambda) + 2\mathrm{L}_g(k_3))\\
&= k_1 + \frac{1}{2}\mathrm{L}_f(k_2 - \mathrm{L}_g(k_3)) + \frac{1}{4}(k_2 - \mathrm{L}_g(k_3))^2 + \mathrm{L}_{[g,f]}(k_3) + \frac{1}{2}k_3\mathrm{L}_g(k_2 - \mathrm{L}_g(k_3)).
\end{aligned}$$

□

现在考虑一个平凡系统，其状态 (x, y, w) 属于三维流形 $\mathcal{M}$，

$$(T): \begin{cases} \dot{x} &= F_1(w) \\ \dot{y} &= F_2(w) \\ \dot{w} &= u \end{cases}, \quad (x, y, w) \in \mathcal{M}, \quad u \in \mathbb{R}.$$

注意到(T) 通常不是由典范对给出的，而是由半典范对给出的，因为 $[f,[f,g]]$ =0。显然，对于平凡系统，我们有 $\kappa = 0$，但反过来并不成立，这一点已在[16] 中发现，且我们将在下面的定理中予以证明。

定理 3 (平凡系统的刻画)。考虑控制仿射系统 $\Sigma = (f, g)$ 及其结构函数 κ 和 ν。那么， Σ 局部可平凡化，当且仅当其典范形式 $\Sigma_c = (f_c, g_c)$满足

$$\kappa = 0, \quad \mathrm{L}_{f_c}(\nu) = 0, \quad and \quad \mathrm{L}_{[f_c,g_c]}(\nu) = 0. \tag{12}$$

注意，条件 (12) 可以直接在控制仿射系统 $\Sigma = (f, g)$ 上检验。事实上，借助命题3，我们可以显式构造 Σ 的典范对 (f_c, g_c)，其不变量κ 和 ν 仅通过代数运算即可计算。检验任意控制仿射系统 $\Sigma = (f, g)$ 上条件 (12) 的另一种方法是，利用 (11) 计算不变量 κ 和 ν，然后用$f_c = f + gk_3$ 和 $g_c = |\lambda_1|^{-1/2} g$评估 (12)。

证明。 我们先证明必要性，并假设 Σ可平凡化。那么，(T) 由 $f = F_1(w)\frac{\partial}{\partial x} + F_2(w)\frac{\partial}{\partial y}$和 $g = \frac{\partial}{\partial w}$ 给出（后者先验上并非典范对），其结构函数为 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$,

$\lambda_1=\lambda_1(w)$、 $\lambda_2=0$和 $\lambda_3=\lambda_3(w)$。特别地，注意到 λ_1 和 λ_3 满足 $\mathrm{L}_f(\lambda_1)=\mathrm{L}_{[g,f]}(\lambda_1)=0$ 以及 $\mathrm{L}_f(\lambda_3)=\mathrm{L}_{[g,f]}(\lambda_3)=0$。与命题3的证明中一样，为了将 (T) 的对 (f,g) 变换为典范对 (f_c,g_c)，我们使用 $\beta=|\lambda_1|^{-1/2}$，因此它满足 $\mathrm{L}_f(\beta)=0$ 和 $\mathrm{L}_{[g,f]}(\beta)=0$。现在，利用引理 1 的方程 (8) 和 (9)，我们计算 $(f_c,g_c)=(f,g\beta)$ 的结构函数，得到 $\tilde{\kappa}=0$、 $\tilde{\varepsilon}=\pm1$、$\tilde{\mu}=0$和 $\tilde{\nu}=\lambda_3=\beta\lambda_3+\mathrm{L}_g(\beta)$。因此，对于 (T) 的典范对 (f_c,g_c)，有

$$\begin{aligned}\mathrm{L}_{f_c}(\tilde{\nu})&=\beta\mathrm{L}_f(\lambda_3)+\mathrm{L}_f(\mathrm{L}_g(\beta))=\beta\mathrm{L}_f(\lambda_3)+\mathrm{L}_g(\mathrm{L}_f(\beta))-\mathrm{L}_{[g,f]}(\beta)=0,\\ \mathrm{L}_{[g_c,f_c]}(\tilde{\nu})&=\beta\mathrm{L}_{[g,f]}(\tilde{\nu})=\beta\left(\mathrm{L}_{[g,f]}(\lambda_3)+\mathrm{L}_{[g,f]}(\mathrm{L}_g(\beta))\right)=\beta\left(\mathrm{L}_g\left(\mathrm{L}_{[g,f]}(\beta)\right)-\mathrm{L}_{[g,[g,f]]}(\beta)\right)\\ &=\beta\left(-\lambda_1\mathrm{L}_f(\beta)-\lambda_3\mathrm{L}_{[g,f]}(\beta)\right)=0,\end{aligned}$$

且（12）的必要性得以证明。

现在，反过来，假设 Σ_c 由其典范对（f_c,g_c）给出，并满足（12）。首先，根据附录 B 的引理 2，我们应用微分同胚（x,y,w）$=\phi(\xi)$，同时将分布 $\mathcal{F}=$span $\{f_c,[g_c,f_c]\}$ 和向量场 g_c 化为标准形式，即 $\phi_*\mathcal{F}=$ span $\left\{\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right\}$ 和 $\phi_*g_c=\frac{\partial}{\partial w}$。在这些坐标下，我们有 $f_c=f_1\frac{\partial}{\partial x}+f_2\frac{\partial}{\partial y}$，其中 $f_i=f_i(x,y,w)$，并且由于 $\mathrm{L}_{f_c}(\nu)=\mathrm{L}_{[g_c,f_c]}(\nu)=0$ 和 $f_c\wedge g_c\wedge[g_c,f_c]\neq0$，我们有 $\nu=\nu(w)$。因此，利用关系式（6’），可推得 f_c 满足以下两个方程（注意，方程（7c’）与 $\mathrm{L}_{f_c}(\nu)=0$ 一起推出 $\mu=0$）

$$[f_c,[f_c,g_c]]=0\quad\text{and}\quad[g_c,[g_c,f_c]]=\varepsilon f_c+\nu(w)\,[g_c,f_c]\,.$$

第二个方程为

$$\frac{\partial^2 f_c}{\partial w^2}=\varepsilon f_c+\nu(w)\frac{\partial f_c}{\partial w},\tag{13}$$

并且，将其视为关于 w 、以 (x,y) 为参数的二阶线性常微分方程时，它具有如下形式的局部解

$$f_c(x,y,w)=F_1(w)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\0\end{pmatrix}+F_2(w)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\0\end{pmatrix}=F_1(w)A+F_2(w)B.\tag{14}$$

在 (14) 中， $F_1(w)$ 和 $F_2(w)$ 是 (13) 的光滑基本解函数（即 $F_1(w_0)=1$, $F_1'(w_0)=0$,$F_2(w_0)=0$，且 $F_2'(w_0)=1$），而 $a_i=a_i(x,y)$ 和 $b_i=b_i(x,y)$ 对于 $i=1$、2 而言，因此 $A=a_1\frac{\partial}{\partial x}+a_2\frac{\partial}{\partial y}$和$B=b_1\frac{\partial}{\partial x}+b_2\frac{\partial}{\partial y}$是定义在配备坐标 (x,y) 的 $\mathbb{R}^2$ 上的光滑向量场。

利用 f_c 和 $[g_c,f_c]$ 的交换性，我们推得

$$[F_1A+F_2B,F_1'A+F_2'B]=(F_1F_2'-F_1'F_2)\,[A,B]=0.$$

由 $F_1F_2'-F_1'F_2\neq0$（因为 $f_c\wedge[g_c,f_c]\neq0$），我们得出 $[A,B]=0$，因此，存在一个局部微分同胚 $\psi(x,y)$，可同时将 A 和 B （视为 $\mathbb{R}^2$ 上的向量场）化为标准形式。为简便起见，我们仍用 (x,y) 表示新坐标，即有 $\psi_*A=\frac{\partial}{\partial x}$和 $\psi_*B=\frac{\partial}{\partial y}$。在坐标 (x,y,w) 下，向量场 (f_c,g_c) 具有如下形式

$$f_c=F_1(w)\frac{\partial}{\partial x}+F_2(w)\frac{\partial}{\partial y}\quad\text{and}\quad g_c=\frac{\partial}{\partial w}$$

因此，我们得出结论：系统 $\Sigma_c=(f_c,g_c)$ 是平凡的。 □

请注意，在我们的证明中，我们从一个典范对 (f_c, g_c) 出发，并通过构造合适的局部坐标系使其变得平凡。

注 4。前一个定理最初由 *Serres* 在 [17] 中发现。在 [17, 定理 4.3.3]（以及 [18, 定理 4.3] 和 [16, 定理 3.4]）的证明中，他使用自己的记号证明了 $\alpha_2 = a_2(u, q_2) - q_1$ 和 $\frac{\partial a_2}{\partial q_2} = b(u)$，随后考虑了情形 $\alpha_2 = a_2(u) - q_1$，而非一般情形 $\alpha_2 = b(u)q_2 + a_2(u) - q_1$。针对情形 $b \equiv 0$（用我们的记号表示，相当于 $\nu \equiv 0$）给出的 [17, 定理 4.3.3], 的证明，仍为处理一般情形提供了启发性直觉，正如我们在证明中所做的那样。

在下面的命题中，我们给出平凡系统（T）的结构函数，并给出可平凡化控制仿射系统的两种典范形式。这两种典范形式均使用典范对表示，但采用不同的坐标系。对于两个光滑标量函数 $F(w)$ 和 $G(w)$，我们将它们的朗斯基行列式定义为 $\mathrm{W}(F, G) = F'G - FG'$。回顾一下，对于满足 (A1) 和 (A2) 的任意控制仿射系统 $\Sigma = (f, g)$，我们通过 (6) 定义了结构函数 k_1, k_2, k_3 和 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$。

命题 5. 考虑一个控制仿射系统 $\Sigma = (f, g)$ 并假设它满足[12] 中的条件定理 3。那么，局部而言，以下结论成立

(i) Σ 具有标准形(T)，即

$$\Sigma^T : \begin{cases} \dot{x} &= F_1(w) \\ \dot{y} &= F_2(w) \\ \dot{w} &= u \end{cases}$$

其结构函数为 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ 和 $\lambda_1 = -\frac{\mathrm{W}(F_1, F_2)}{\mathrm{W}(F_1, F_2)}\lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = \frac{\mathrm{W}'(F_1, F_2)}{(\mathrm{W}(F_1, F_2))^2}$.

(ii) Σ 具有典范形式 $\Sigma^{T,1}_c$ 和 $\Sigma^{T,2}_c$，分别由以下形式给出

$$\Sigma^{T,1}_c : \begin{cases} \dot{x} &= F_{c,1}(w) \\ \dot{y} &= F_{c,2}(w) \\ \dot{w} &= u \end{cases} \quad \text{and} \quad \Sigma^{T,2}_c : \begin{cases} \dot{x} &= 1 + \varepsilon y u \\ \dot{y} &= (x - \nu(w) y)\, u \\ \dot{w} &= u \end{cases},$$

其中 $\mathrm{W}(F_c', F_c) \equiv \pm 1$，其不变量分别为 $(\varepsilon^1, \kappa^1, \nu^1) = \left(-\frac{\mathrm{W}'(F_c', F_c)}{\mathrm{W}(F_c', F_c)}, 0, \frac{\mathrm{W}'(F_c, F_c)}{\mathrm{W}(F_c, F_c)}\right)$，以及 $(\varepsilon^2, \kappa^2, \nu^2) = (\varepsilon, 0, \nu(w))$。

注5。结构函数 k_i 和 λ_i 都不是反馈不变量。条目 *(i)* 断言，对于标准形 $\Sigma^T = (f, g)$，所有 $k_i = 0$，因此这对 (f, g) 是半典范的（所以实际上是 $f = f_s$），但一般而言，它并非规范的，因为 λ_1 是一个非平凡函数。条目 *(ii)* 保证，给定 $\Sigma^T = (f, g)$，我们总能选取 w_c-坐标，如 $w = \phi(w_c)$，使得 $F_{c,i} = \phi^* F_i$ 满足 $\mathrm{W}(F_c', F_c) = \pm 1$，而相应的一对 (f_c, g_c)（其中 $f_c = F_{c,1}\frac{\partial}{\partial x} + F_{c,2}\frac{\partial}{\partial y}$ 和 $g_c = \beta g$，且 $\beta = \phi'$）是规范的。

证明。 第 *(i)* 项给出的标准形是定理 1 的直接推论，而推导结构函数的表达式则是一个简单的计算。为得到第 *(ii)*项的典范形式 $\Sigma^{T,1}_c$ 我们考虑 Σ^T 并定义 $g_c = \beta g$，其中 $\beta = |\lambda_1|^{-1/2}$，参见命题3。我们选取满足 $(\phi^{-1})' \beta = 1$ 的 $w = \phi(\hat{w})$。在坐标 $(x, y, \hat{w})$ 下，系统 Σ^T 具有形式 $\Sigma^{T,1}_c$，其中 $F_{c,i} = \phi^* F_i$ 且，其第三个方程为 $\dot{\hat{w}} = \hat{u}$。

最后，典范 形式 $\Sigma^{T,2}_c$ 是下一节所述命题6 的 *(i)* 项的一个特例。 □

所给出的两种规范形式在某种意义上彼此对偶。事实上，两者均以 Σ 的规范对 (f_c, g_c) 表示；对于 $\Sigma^{T,1}_c$ 我们采用使向量场 g_c^1 得到整直的坐标，而对于 $\Sigma^{T,2}_c$ 则选择使 f_c^2 得到整直的坐标。这两种标准形承载着关于控制仿射系统 Σ 的互补信息。规范形式 $\Sigma^{T,1}_c$ 揭示了 Σ 的平凡性，但其不变量 ε 和 ν 并非一目了然；而规范形式 $\Sigma^{T,2}_c$ 则明确给出了不变量

$\varepsilon=\pm1$ 和 ν，但掩盖了系统的平凡性。这两种规范形式表明，平凡系统取决于一个单变量光滑函数：对于 $\Sigma^{T,}{}_{c}{}^{2}$显然是 $\nu(w)$；对于 $\Sigma^{T,}{}_{c}{}^{1}$，则由函数$F_{c,\,2}(w)$通过常微分方程$\mathtt{W}\,(F'_{c,\,1},\,F'_{c,\,2})\,\mathtt{W}\,(F_{c,\,1},\,F_{c,\,2})=\pm1$确定$F_{c,\,1}(w)$（反之亦然）。

4. 三维流形上平坦和中心平坦控制仿射系统的标准形

我们已证明，曲率 κ 和中心仿射曲率 ν 是控制仿射系统的两个函数反馈等变不变量，因此，它们的性质定义了系统的非等价类。本节为下文表 2 中所列的每类控制系统提出一种标准形。所列类别涵盖曲率 κ 和中心仿射曲率 ν 满足 $\kappa\nu\equiv0$ 的所有情形，以及满足以下附加条件的特定子情形：要么 κ 要么 ν 为常数。

记号	Name	性质
$\Sigma^{\varepsilon,\kappa=0,\nu}$	Flat	曲率 κ 消失
$\Sigma^{\varepsilon,\kappa,\nu=0}$	中心平坦	中心仿射曲率 ν 消失
$\Sigma^{\varepsilon,\kappa'=0,\nu=0}$	平坦-常值	曲率 κ 为常数，且中心仿射曲率 ν 为零
$\Sigma^{\varepsilon,\kappa=0,\nu'=0}$	中心平坦-常值	曲率 κ 为零，且中心仿射曲率 ν 为常数
$\Sigma^{\varepsilon,\kappa=0,\nu=0}$	完全平坦	曲率 κ 和 ν 消失

表 2. 平坦与中心平坦控制仿射系统子类的命名

上表中介绍的每一类控制系统都用上标 $I=(a,b,c)$ 表示，其定义如下。第一个元素始终为 $\varepsilon=\pm1$，强调标准形对不变量 ε 的依赖；第二个元素要么是 $\kappa=0$，表示曲率消失，要么是 $\kappa'=0$，表示曲率为常数（这种记号略有滥用，因为一般而言 κ 不是单变量函数）；最后，第三个指标为 $\nu=0$ 或 $\nu'=0$，其含义与前述相同。以下命题为每一类控制仿射系统 Σ^I 提供一个标准形 Σ^I_c，其中上方多重指标 I 是表 2 中给出的五种之一。下标 c 表示所有标准形 Σ^I_c 均用其典范对表示。回顾一下，结构函数 ν 除符号外是唯一的，即改变 $g_c\mapsto-g_c$ 会得到 $\nu\mapsto-\nu$，因此在下文的标准形中，我们假设 $\nu\geq0$。

命题6（平坦控制仿射系统的标准形）。考虑一个控制仿射系统 $\Sigma=(f,\,g)$ 及其不变量 ε、κ 和 ν。则以下结论在局部成立（以下所有标准形均由一个典范对 $(f_c,\,g_c)$ 表示，并在任意点 $(x_0,\,y_0,\,w_0)\in\mathbb{R}^3$附近考察）。

(i) 若 $\kappa=0$，则 Σ 局部反馈等价于

$$\Sigma_c^{\varepsilon,\kappa=0,\nu}:\begin{cases}\dot{x}&=1+\quad a(y,w)u\\ \dot{y}&=\qquad(x+b(y,w))\,u\\ \dot{w}&=\qquad c(y,w)u\end{cases},$$

其不变量为 ε、 $\kappa = 0$ 和 $\nu = \nu_1(y,w)x + \nu_0(y,w)$，且函数 a, b 和 c 满足以下微分方程

$$\begin{aligned}
\frac{\partial a}{\partial y} &= \varepsilon + \nu_1(y,w)a(y,w), & a(y_0,w) &= 0,\\
\frac{\partial b}{\partial y} &= \nu_1(y,w)b(y,w) - \nu_0(y,w), & b(y_0,w) &= 0,\\
\frac{\partial c}{\partial y} &= \nu_1(y,w)c(y,w), & c(y_0,w) &= 1,
\end{aligned}$$

因此由下式给出

$$\begin{aligned}
a(y,w) &= \left[\varepsilon \int_{y_0}^{y} \exp\left(-\int_{y_0}^{\tau} \nu_1(t,w)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\tau\right] \exp\left(\int_{y_0}^{y} \nu_1(\tau,w)\mathrm{d}\tau\right),\\
b(y,w) &= \left[-\int_{y_0}^{y} \nu_0(\tau,w) \exp\left(-\int_{y_0}^{\tau} \nu_1(t,w)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\tau\right] \exp\left(\int_{y_0}^{y} \nu_1(\tau,w)\mathrm{d}\tau\right),\\
c(y,w) &= \exp\left(\int_{y_0}^{y} \nu_1(\tau,w)\mathrm{d}\tau\right).
\end{aligned}$$

(ii) 若 $\nu = 0$，则 Σ 局部反馈等价于

$$\Sigma_c^{\varepsilon,\kappa,\nu=0} : \left\{\begin{array}{ll} \dot{x} & = r(x,y)\, c_\varepsilon(w)\\ \dot{y} & = r(x,y)\, s_\varepsilon(w)\\ \dot{w} & = \varepsilon \frac{\partial r}{\partial y}\, c_\varepsilon(w) + \frac{\partial r}{\partial x}\, s_\varepsilon(w) + u \end{array}\right. ,$$

其中

$$c_\varepsilon(w) = \frac{e^{w\sqrt{\varepsilon}} + e^{-w\sqrt{\varepsilon}}}{2} \quad and \quad s_\varepsilon(w) = \frac{e^{w\sqrt{\varepsilon}} - e^{-w\sqrt{\varepsilon}}}{2\sqrt{\varepsilon}},$$

其不变量为 ε、 $\kappa = \kappa(x, y)$、 $\nu = 0$，且函数 $r(x, y)$ 满足 $r > 0$ 以及以下非线性偏微分方程

$$-r(x,y)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\ln r(x,y)) = \kappa(x,y). \tag{15}$$

(iii) 若 κ 和 ν 为常数，则

$$\kappa\nu = 0, \tag{16}$$

也就是说，其中至少一个为零。

(iv) 如果 $\kappa = 0$ 和 ν 为常数，那么 Σ 局部反馈等价于

(a) 若 $\varepsilon = 1$，则

$$\Sigma_c^{+,\kappa=0,\nu'=0} : \left\{\begin{array}{ll} \dot{x} & = e^{\nu w} e^{w\sqrt{\nu^2+4}}\\ \dot{y} & = e^{\nu w} e^{-w\sqrt{\nu^2+4}}\\ \dot{w} & = \frac{1}{2}u \end{array}\right. , \quad where \quad \nu \geq 0;$$

(b) 若 $\varepsilon=-1$ 且 $\nu>2$，则

$$\Sigma_c^{-,\kappa=0,\nu'=0,+}:\begin{cases}\dot{x} &= e^{\nu w}e^{w\sqrt{\nu^2-4}}\\ \dot{y} &= e^{\nu w}e^{-w\sqrt{\nu^2-4}}\\ \dot{w} &= \frac{1}{2}u\end{cases};$$

(c) 若 $\varepsilon=-1$ 和 $\nu=2$，则

$$\Sigma_c^{-,\kappa=0,\nu'=0,0}:\begin{cases}\dot{x} &= e^{w}\\ \dot{y} &= we^{w}\\ \dot{w} &= u\end{cases};$$

(d) 若 $\varepsilon=-1$ 和 $0\leq\nu<2$，则

$$\Sigma_c^{-,\kappa=0,\nu'=0,-}:\begin{cases}\dot{x} &= e^{\nu w}\cos\left(w\sqrt{4-\nu^2}\right)\\ \dot{y} &= e^{\nu w}\sin\left(w\sqrt{4-\nu^2}\right)\\ \dot{w} &= \frac{1}{2}u\end{cases}$$

此外，对于上述四种标准形，ε、$\kappa=0$和 ν 是完全不变量。*(v)* 若 $\nu=0$ 且 κ 为常数，则 Σ 局部反馈等价于

$$\Sigma_c^{\varepsilon,\kappa'=0,\nu=0}:\begin{cases}\dot{x} &= \left(1-\frac{\kappa}{4}\left(x^2-\varepsilon y^2\right)\right)c_\varepsilon(w)\\ \dot{y} &= \left(1-\frac{\kappa}{4}\left(x^2-\varepsilon y^2\right)\right)s_\varepsilon(w)\\ \dot{w} &= \frac{-\kappa}{2}\left(y\,c_\varepsilon(w)-x\,s_\varepsilon(w)\right)+u\end{cases},$$

其完全不变量为 ε、κ和 $\nu=0$。

(vi) 若 $\kappa=0$ 且 $\nu=0$，则 Σ 局部反馈等价于

$$\Sigma_c^{\varepsilon,\kappa=0,\nu=0}:\begin{cases}\dot{x} &= c_\varepsilon(w)\\ \dot{y} &= s_\varepsilon(w)\\ \dot{w} &= u\end{cases}.$$

在给出这些标准形的证明之前，我们先对它们作一些说明。对于条目 *(i)*，我们采用使向量场 f_c 直化的坐标；对于其他标准形，则选择使向量场 g_c 直化的坐标。平坦控制仿射系统的第一个标准形 $\Sigma^{\varepsilon,\ \kappa=0,\ c}\quad{}^{\nu}$ 描述了曲率 κ 消失的系统的最一般形式。另一方面，条目 *(ii)*的标准形 $\Sigma^{\varepsilon,}{}_{c}{}^{\ \kappa\ \nu=0,}$ 描述了中心仿射曲率 ν 消失的系统。其余所有条目都是这两个一般标准形的特例。

请注意，ν 的取值在正负号意义下唯一，因此在条目 *(iv)* 中，对于 $\nu\geq 0$，我们将 *(iv)*-*(a)* 到 *(iv)*-*(d)*都取为此值。值得注意的是，如果 κ 和 ν 为常数（因而是真正的不变量），那么根据条目 *(iii)*，它们至少有一个为零。此外，关系式（16）已见于 [19], ，其中列出了由$\kappa=0$ 和 ν 为常数组成的四族标准形（但当时并未讨论 ν 符号的不变性）。条目 *(vi)* 中，$\varepsilon=\pm1$ 和 $\kappa=\nu=0$ 对应的两个标准形分别为

$$\Sigma_c^{+,\kappa=0,\nu=0}:\begin{cases}\dot{x} &= \cosh(w)\\ \dot{y} &= \sinh(w)\\ \dot{w} &= u\end{cases}\quad\text{and}\quad\Sigma_c^{-,\kappa=0,\nu=0}:\begin{cases}\dot{x} &= \cos(w)\\ \dot{y} &= \sin(w)\\ \dot{w} &= u\end{cases}$$

对应于不含参数的双曲系统和椭圆系统，并已在 [14, 15] 中得到广泛分析和不同刻画。

证明。对于每个条目，我们考虑由典范对给出的控制仿射系统 $\Sigma_c = (f_c, g_c)$，其具有$\varepsilon = \pm 1$ 以及结构函数 κ 和 ν。

(i) 由于 $\kappa = 0$，利用关系式（6’），我们得出向量场 f_c 和 $[f_c, g_c]$ 对易。因此，我们可以同时将它们化为标准形式，得到$f_c = \frac{\partial}{\partial x}$和 $[f_c, g_c] = \frac{\partial}{\partial y}$。随后，我们确定向量场 g_c的形式。首先，它满足 $\left[\frac{\partial}{\partial x}, g_c\right] = \frac{\partial}{\partial y}$，因此我们立即得出

$$g_c = a(y,w)\frac{\partial}{\partial x} + (x + b(y,w))\frac{\partial}{\partial y} + c(y,w)\frac{\partial}{\partial w}.$$

此外，假设（A1）和（A2）意味着 $c \neq 0$和$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a}{c}\right) \neq 0$。其次，对于 g_c，我们有$\left[g_c, -\frac{\partial}{\partial y}\right] = \varepsilon\frac{\partial}{\partial x} + \mu g_c - \nu\frac{\partial}{\partial y}$，其中函数 μ和 ν满足（7b’）和（7c’），因此 $\nu = \nu_1(y, w)x + \nu_0(y, w)$以及 $\mu = \nu_1(y, w)$。因此，g_c的函数 a、b和 c满足

$$\begin{aligned}
\frac{\partial a}{\partial y}(y,w) &= \varepsilon + \nu_1(y,w)a(y,w),\\
\frac{\partial b}{\partial y}(y,w) &= \nu_1(y,w)b(y,w) - \nu_0(y,w),\\
\frac{\partial c}{\partial y}(y,w) &= \nu_1(y,w)c(y,w).
\end{aligned}$$

这些方程的解分别为：

$$a(y,w) = \left[\varepsilon\int_{y_0}^{y}\exp\left(-\int_{y_0}^{\tau}\nu_1(t,w)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\tau + A(w)\right]\exp\left(\int_{y_0}^{y}\nu_1(\tau,w)\mathrm{d}\tau\right), \tag{17a}$$

$$b(y,w) = \left[-\int_{y_0}^{y}\nu_0(\tau,w)\,\text{指数}\left(-\int_{\tau}^{y}\nu_1(t,w)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\tau + B(w)\right]\exp\left(\int_{y_0}^{y}\nu_1(\tau,w)\mathrm{d}\tau\right), \tag{17b}$$

$$c(y,w) = C(w)\,\text{指数}\left(\int_{y_0}^{y}\nu_1(\tau,w)\mathrm{d}\tau\right). \tag{17c}$$

更新坐标后，我们可以令 $C(w) = 1$, $A(w) = B(w) = 0$；在这些坐标下，我们得到标准形 $\Sigma^{\varepsilon,\ \kappa=0,\ c\quad\ \nu}$。

(ii) 假设 $\nu = 0$ 并选取坐标 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{w})$ 使得 $g_c = \frac{\partial}{\partial \bar{w}}$。然后，由关系式 (6’) 可得

$$f_c = \bar{A}(\bar{x},\bar{y})c_\varepsilon(\bar{w}) + \bar{B}(\bar{x},\bar{y})s_\varepsilon(\bar{w}), \quad c_\varepsilon(\bar{w}) = \frac{e^{\bar{w}\sqrt{\varepsilon}} + e^{-\bar{w}\sqrt{\varepsilon}}}{2}, \quad s_\varepsilon(\bar{w}) = \frac{e^{\bar{w}\sqrt{\varepsilon}} - e^{-\bar{w}\sqrt{\varepsilon}}}{2\sqrt{\varepsilon}},$$

其中 $\bar{A} = a_1\frac{\partial}{\partial \bar{x}} + a_2\frac{\partial}{\partial \bar{y}} + a_3\frac{\partial}{\partial \bar{w}}$，满足 $a_i = a_i(\bar{x}, \bar{y})$，而 $\bar{B} = b_1\frac{\partial}{\partial \bar{x}} + b_2\frac{\partial}{\partial \bar{y}} + b_3\frac{\partial}{\partial \bar{w}}$，满足 $b_i = b_i(\bar{x}, \bar{y})$，均为光滑向量场。由假设 (A1)，可得 $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$，因此 $\bar{\bar{A}} = a_1\frac{\partial}{\partial \bar{x}} + a_2\frac{\partial}{\partial \bar{y}}$和 $\bar{B} = b_1\frac{\partial}{\partial \bar{x}} + b_2\frac{\partial}{\partial \bar{y}}$构成 $\mathcal{X} = \mathcal{O}/\mathcal{G}$ 的切丛上的移动标架，其中 $\mathcal{O}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一个开子集，整流坐标 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{w})$ 定义在该子集上，并且 $\mathcal{G} =$ 张成 $\left\{\frac{\partial}{\partial \bar{w}}\right\}$。我们在 $\mathcal{X}$ 上定义一个$_{_}\ ^{_}\ ^{_}$度量 $^{_}\mathsf{g}$，使 (A, B) 成为标准正交组，即

$$\bar{\bar{\mathsf{g}}}(\bar{\bar{A}}, \bar{\bar{A}}) = 1, \quad \bar{\bar{\mathsf{g}}}(\bar{\bar{A}}, \bar{\bar{B}}) = 0, \quad \text{and} \quad \bar{\bar{\mathsf{g}}}(\bar{\bar{B}}, \bar{\bar{B}}) = -\varepsilon.$$

注意到 $^{_}\mathsf{g}$ 的签名为（+, –sgn(ε)），因此 $^{_}\mathsf{g}$ 在 $\varepsilon = -1$ 时为正定，在 $\varepsilon = 1$ 时为不定。由于二维流形上的所有度量都是局部共形平坦的，我们得出存在

一个等距变换 $(x,y) = \psi(\bar{x},\bar{y})$，使得 $\bar{}\mathsf{g} = \psi^*\mathsf{g}$，其中 $\mathsf{g} = \varrho(x,y)(\mathrm{d}x^2 - \varepsilon \mathrm{d}y^2)$，且 $\varrho > 0$。在坐标 (x, y) 中，$(\tilde{A},\tilde{B})$ 这一对（其中 $\tilde{A} = \psi_*\bar{\tilde{A}}$ 且 $\tilde{B} = \psi_*\bar{\tilde{B}}$）以及 $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ 构成 g 的正交归一标架，因此我们有

$$(\tilde{A},\tilde{B}) = r(x,y)I(x,y)\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right),$$

其中，$r = \frac{1}{\sqrt{\varrho}}$ 和 $I(x,y)$是一个线性等距变换，即它属于（伪）正交群$O(1,-\varepsilon)$。通过对变量 $w = \bar{w} + h(x,y)$ 进行适当的变换，我们可以消去 $I(x,y)$。最后，在坐标(x,y,w)中，控制系统的向量场 f_c 具有如下形式

$$f_c = r(x,y)c_\varepsilon(w)\frac{\partial}{\partial x} + r(x,y)s_\varepsilon(w)\frac{\partial}{\partial y} + (a(x,y)c_\varepsilon(w) + b(x,y)s_\varepsilon(w))\frac{\partial}{\partial w}.$$

现在我们利用结构方程（6’）推得必有

$$a(x,y) = \varepsilon\frac{\partial r}{\partial y} \quad \text{and} \quad b(x,y) = \frac{\partial r}{\partial x}$$

并且 r 满足

$$\varepsilon r\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} - \varepsilon\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 - r\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \kappa(x,y).$$

它可以表示为（15）的形式。

(iii) 若 κ 和 ν 为常数，则根据关系式（10），我们立即得到（16）。

(iv) 假设 $\kappa = 0$ 和 ν 为常数，则 Σ 满足定理 3 的条件（12），因此 Σ 是局部可平凡化的。利用命题 5的第*(ii)* 项结果，我们取 Σ 为 $\Sigma^T{}_c$ 1的形式，使得 $f_c = F_{c,1}(w)\frac{\partial}{\partial x} + F_{c,2}(w)\frac{\partial}{\partial y}$ 和 $g_c = \frac{\partial}{\partial w}$ 构成一个典范对。利用（6’），我们得出函数 $F_{c,i}$（其中 $i = 1$为 2）满足以下二阶线性常微分方程

$$F''_{c,i}(w) = \varepsilon F_{c,i}(w) + \nu F'_{c,i}(w). \tag{18}$$

解由常微分方程的特征多项式的判别式 $\Delta = \nu^2 + 4\varepsilon$ 的符号决定。此外，特征多项式的根为 $r_{1/2} = \frac{\nu \pm \sqrt{\Delta}}{2}$。回想一下，$\nu$ 的符号不是不变量，因此通过适当选择 w，我们总能得到 $\nu \geq 0$。此外，直接计算即可验证下文给出的解是方程（18）的基本解，即我们只需计算在 w_0处的朗斯基行列式。

(a) 若 $\varepsilon = +1$，则 $\Delta > 0$ 对所有 $\nu \geq 0$。(18) 的解为（将 w 归一化为 1 2 –）

$$F_{c,1}(w) = e^{\nu w}e^{w\sqrt{\nu^2+4}} \quad \text{and} \quad F_{c,2}(w) = e^{\nu w}e^{-w\sqrt{\nu^2+4}},$$

并得到标准形 $\Sigma^+_{c,\ \kappa=0\ \nu'=0,}$。

(b) 若 $\varepsilon = -1$ 且 $\nu > 2$，则 $\Delta > 0$，求解 (18) 得

$$F_{c,1}(w) = e^{\nu w}e^{w\sqrt{\nu^2-4}}, \quad \text{and} \quad F_{c,2}(w) = e^{\nu w}e^{-w\sqrt{\nu^2-4}},$$

并且我们得到标准形 $\Sigma^-_{c,\ \kappa=0\qquad +,\ \nu'=0}$。

(c) 若 $\varepsilon=-1$ 且 $\nu=2$，则 $\Delta=0$，方程 (18) 的解为

$$F_{c,1}(w)=we^{w},\quad \text{and}\quad F_{c,2}(w)=e^{w},$$

由此得到 $\Sigma^{-,}_{c\ \kappa=0\ \nu'=0\ 0}$ ，，。

(d) 若 $\varepsilon=-1$ 且 $0\leq\nu<2$，则 $\Delta<0$，而方程(18) 的解为

$$F_{c,1}(w)=e^{\nu w}\cos\left(w\sqrt{4-\nu^{2}}\right),\quad \text{and}\quad F_{c,2}(w)=e^{\nu w}\sin\left(w\sqrt{4-\nu^{2}}\right),$$

由此得到 $\Sigma^{-,}_{\kappa=0,\ \nu'=0,\ c}$ $^{-}$。

(v) 假设 κ 为常数且 $\nu=0$，则我们对第 (ii) 项的标准形 $\Sigma^{\varepsilon,}_{c\ \kappa\ \nu=0}$ 作进一步细化。我们注意到，由 $r(x,y)$ 满足的方程 (15) 描述了度量 $\mathrm{g}=\frac{1}{r^{2}}(\mathrm{d}x^{2}-\varepsilon\mathrm{d}y^{2})$ 的曲率（通常微分几何意义下的曲率）。根据假设，g 的曲率为常数（等于 $-\kappa$）；根据明丁定理，具有相同常曲率的曲面局部等距。因此，存在等距变换 $(\tilde{x},\tilde{y})=\psi(x,y)$，使得 $\mathrm{g}=\psi^{*}\tilde{\mathrm{g}}$，其中

$$\tilde{\mathrm{g}}=\left(\frac{1}{1-\frac{\kappa}{4}\left(\tilde{x}^{2}-\varepsilon\tilde{y}^{2}\right)}\right)^{2}\left(\mathrm{d}\tilde{x}^{2}-\varepsilon\mathrm{d}\tilde{y}^{2}\right),$$

其曲率也为 $-\kappa$。等距变换对 $(\dot{x},\dot{y})$ 的作用可以通过施加$w\mapsto w+h(x,y)$来补偿，其中函数 h 适当，因此我们得到系统的形式为 $\Sigma^{\varepsilon,}_{c\ \kappa\ \nu=0,}$ 其中 $r(x,y)=1-\frac{\kappa}{4}\left(x^{2}-\varepsilon y^{2}\right)$，即得到 $\Sigma^{\varepsilon,}_{c\ \kappa'=0\ \nu=0}$。

(vi) 标准形 $\Sigma^{\varepsilon,}_{c\ \kappa=0\ \nu=0,}$ 是条目 (v) 在 $\kappa=0$的特殊情况。

□

5. 结论与展望

本文详细分析了适用于控制仿射系统的平凡性概念。我们提出了平凡控制仿射系统的两种新刻画，其中一种基于无穷小对称李代数中存在阿贝尔子代数。具体而言，对于无穷小对称李代数含有传递的几乎阿贝尔李子代数的平凡控制仿射系统，我们给出了其标准形。未来，我们将致力于把结果推广到多输入系统，并尝试提出其他纯粹几何性的平凡性刻画。在本文第二部分，我们重新审视了 Serres 的结果 [17] ，并为他关于三维流形上标量输入平凡系统的刻画给出了新的证明。具体而言，我们的刻画使用了一个离散不变量 $\varepsilon=\pm1$ ，以及反馈变换的两个定义良好的函数不变量：曲率κ （由 Agrachev 引入 [2]）和中心仿射曲率 ν （由 Wilkens 研究 [19]）。我们证明，这些不变量可以针对任意控制仿射系统显式计算；此外，还可以通过纯代数定义的反馈变换构造一对规范向量场（f_c， g_c），其中 κ 和 ν 会显式出现。随后，我们通过给出若干控制仿射系统的标准形，扩展了 Serres 和 Wilkens 的结果。未来，我们的目标有两个方面：首先，我们将研究如何将三元组（ε， κ，ν）扩充为控制仿射系统（定义在带标量控制的三维流形上）的完全不变量集。确定一组完全不变量将有助于获得三维控制仿射系统的标准形。其次，我们将致力于把对平凡控制仿射系统的刻画推广至多输入情形；特别是，[11], 提出的动力学对曲率这一概念颇具前景。

参考文献

[1] Andrei A. Agrachev.《反馈不变最优控制理论与微分几何，II：奇异极值轨线的雅可比曲线》。动力系统与控制系统杂志 4.4（1998）。doi: 10.1023/A :1021871218615。[2] Andrei A. Agrachev 和 Revaz V. Gamkrelidze.《反馈不变最优控制理论与微分几何——I：正则极值轨线》。动力系统与控制系统杂志 3.3（1997）。doi: 10.1007/BF02463256。[3] Andrei A. Agrachev 和 Yuri Sachkov.《几何视角下的控制理论》。第 87 卷。施普林格科学与商业媒体，2013。doi: 10.1007/978-3-662-06404-7。[4] Zhirayr Avetisyan.《几乎阿贝尔李代数的结构》。arXiv:1610.*05365* [数学]（2016）。url: http://arxiv.org/abs/1610.05365。[5] Dietrich Burde 和 Manuel Ceballos.《可解李代数的最大维数阿贝尔理想》。arXiv:0911.*2995* [数学]（2011）。url: http://arxiv.org/abs/0911.2995。[6] Lester E. Dubins.《具有平均曲率约束以及给定初始位置、终端位置和切线的最短曲线》。美国数学杂志 79.3（1957）。doi: 10.2307/2372560。[7] Michel Fliess 等。《关于微分平坦非线性系统》。法语。IFAC会议论文集 25.13（1992）。doi: 10.1016/S1474-6670(17)52275-2。[8] Jessy Grizzle 和 Steven Marcus.《具有对称性的非线性控制系统的结构》。IEEE自动控制汇刊 30.3（1985）。[9] Alberto Isidori.《非线性控制系统》。通信与控制工程，非线性控制系统。施普林格出版社，1995。doi: 10.1007/978-1-84628-615-5。[10] Bronislaw Jakubczyk.《非线性控制系统的等价与不变量》。非线性可控性与最优控制。第 133 卷。劳特利奇，1990。[11] Bronislaw Jakubczyk 和 Wojciech Kryński.《带有分布的向量场与常微分方程的不变量》。几何力学杂志 5.1（2013）。doi: 10.3934/jgm.2013.5.85。[12] Witold Respondek 和 Issa A. Tall.《不可线性化单输入控制系统不具有平稳对称性》。系统与控制快报 46.1（2002）。doi: 10.1016/S0167-6911(01)00197-9。[13] Timothée Schmoderer.《二次非完整约束下的控制系统研究：运动规划，正则化延拓法导论》。博士论文。诺曼底鲁昂国立应用科学学院，2022。url: http://theses.fr/s221665。[14] Timothée Schmoderer 和 Witold Respondek.《曲面上的圆锥非完整约束与控制系统》。2021。url: http://arxiv.org/abs/2106.08635。[15] Timothée Schmoderer 和 Witold Respondek.《$\mathbb{R}^3$ 中的圆锥系统零形式由其对称性决定》。系统与控制快报 170（2022）。doi: https : / / doi . org / 10 . 1016 / j . sysconle .2022.105397。[16] Ulysse Serres.《零曲率控制系统未必可平凡化》。arXiv:0902.2332/数学/（2009）。url: http://arxiv.org/abs/0902.2332。[17] Ulysse Serres.《低维非线性控制系统的几何与反馈分类》。博士论文。勃艮第大学，2006。url: https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00172902。[18] Ulysse Serres.《二维最优控制系统的曲率与反馈分类》。数学科学杂志 144.1（2007）。doi: 10.1007/s10958-007-0237-8。[19] George R. Wilkens.《平面中心仿射几何与二状态标量控制系统的反馈不变量》。纯数学研讨会论文集。G. Ferreyra 等编。第 64 卷。美国数学学会，1998。doi: 10.1090/pspum/064/1654544。

附录 A. 引理 1 的详细计算

在本附录中，我们详细说明如何推导结构函数之间的关系式（7a）-（7c），并证明变换规则（8）和（9），这些规则展示了结构函数在反馈变换下如何变化。考虑一个控制仿射系统 $\Sigma = (f,\ g)$，其结构函数为 $(k_1,\ k_2,\ k_3)$ 和 $(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3)$。首先，对 $[f,[g,[g,f]]]$ 应用雅可比恒等式，可推得 $[f,[g,[g,f]]] = -[g,[f,[f,g]]]$。我们分别计算等式左边和右边：

$$\begin{aligned}
[f,[g,[g,f]]] &= \mathrm{L}_f(\lambda_1) f + \mathrm{L}_f(\lambda_2) g - \lambda_2 [g,f] + \mathrm{L}_f(\lambda_3) - \lambda_3 (k_1 g + k_2 [g,f] + k_3 [g,[g,f]]), \\
&= \mathrm{L}_f(\lambda_1) f + (\mathrm{L}_f(\lambda_2) - \lambda_3 k_1) g + (\mathrm{L}_f(\lambda_3) - \lambda_2 - \lambda_3 k_2) [g,f] \\
&\quad - \lambda_3 k_3 (\lambda_1 f + \lambda_2 g + \lambda_3 [g,f]), \\
&= (\mathrm{L}_f(\lambda_1) - \lambda_3 k_3 \lambda_1) f + (\mathrm{L}_f(\lambda_2) - \lambda_3 k_1 - \lambda_3 k_3 \lambda_2) g \\
&\quad + \left(\mathrm{L}_f(\lambda_3) - \lambda_2 - \lambda_3 k_2 - \lambda_3^2 k_3\right) [g,f].
\end{aligned}$$

另一方面，我们有

$$\begin{aligned}
[g,[f,[f,g]]] &= \mathrm{L}_g(k_1) g + \mathrm{L}_g(k_2) [g,f] + k_2 (\lambda_1 f + \lambda_2 g + \lambda_3 [g,f]) \\
&\quad + \mathrm{L}_g(k_3) (\lambda_1 f + \lambda_2 g + \lambda_3 [g,f]) + k_3 [g, \lambda_1 f + \lambda_2 g + \lambda_3 [g,f]], \\
&= (k_2 \lambda_1 + \lambda_1 \mathrm{L}_g(k_3)) f + (\mathrm{L}_g(k_1) + k_2 \lambda_2 + \mathrm{L}_g(k_3) \lambda_2) g \\
&\quad + (\mathrm{L}_g(k_2) + k_2 \lambda_3 + \mathrm{L}_g(k_3) \lambda_3) [g,f] \\
&\quad + k_3 (\mathrm{L}_g(\lambda_1) f + \lambda_1 [g,f] + \mathrm{L}_g(\lambda_2) g + \mathrm{L}_g(\lambda_3) [g,f] + \lambda_3 (\lambda_1 f + \lambda_3 g + \lambda_3 [g,f])), \\
&= (k_2 \lambda_1 + \lambda_1 \mathrm{L}_g(k_3) + k_3 \mathrm{L}_g(\lambda_1) + k_3 \lambda_3 \lambda_1) f \\
&\quad + (\mathrm{L}_g(k_1) + k_2 \lambda_2 + \mathrm{L}_g(k_3) \lambda_2 + k_3 \mathrm{L}_g(\lambda_2) + k_3 \lambda_3 \lambda_2) g \\
&\quad + \left(\mathrm{L}_g(k_2) + k_2 \lambda_3 + \mathrm{L}_g(k_3) \lambda_3 + k_3 \lambda_1 + k_3 \mathrm{L}_g(\lambda_3) + k_3 \lambda_3^2\right) [g,f]
\end{aligned}$$

比较 f，g 和 $[g,f]$ 前的各项，可得方程（7a）至（7c）。

现在，我们应用形式为 $\tilde{f} = f + g\alpha$ 以及 $\tilde{g} = g\beta$ 的反馈变换，首先得到 $\left[\tilde{f},\ \tilde{g}\right] = \beta [f,g] + \gamma g$，其中 $\gamma = \mathrm{L}_f(\beta) + \alpha \mathrm{L}_g(\beta) - \beta \mathrm{L}_g(\alpha)$。其次，

$$\begin{aligned}
\left[\tilde{g},\left[\tilde{g},\tilde{f}\right]\right] &= \beta^2 [g,[g,f]] + \beta \mathrm{L}_g(\beta) [g,f] + \left(-\beta \mathrm{L}_{[g,f]}(\beta) - \beta \mathrm{L}_g(\gamma) + \gamma \mathrm{L}_g(\beta)\right) g \\
&= \beta^2 \lambda_1 f + \left(\beta^2 \lambda_2 - \beta \mathrm{L}_{[g,f]}(\beta) - \beta \mathrm{L}_g(\gamma) + \gamma \mathrm{L}_g(\beta)\right) g + \left(\beta^2 \lambda_3 + \beta \mathrm{L}_g(\beta)\right) [g,f] \\
&= \beta^2 \lambda_1 \tilde{f} + \left(-\beta^2 \lambda_1 \alpha + \beta^2 \lambda_2 - \beta \mathrm{L}_{[g,f]}(\beta) - \beta \mathrm{L}_g(\gamma) + \gamma \mathrm{L}_g(\beta) + \gamma (\beta \lambda_3 + \mathrm{L}_g(\beta))\right) g \\
&\quad + (\beta \lambda_3 + \mathrm{L}_g(\beta)) \left[\tilde{g},\tilde{f}\right],
\end{aligned}$$

这意味着 $\tilde{\lambda}_1 = \beta^2\lambda_1$, $\tilde{\lambda}_2 = \beta\lambda_2 - \beta\lambda_1\alpha + \gamma\lambda_3 - \mathrm{L}^{[g,f]}(\beta) - \mathrm{L}^{g}(\gamma) + 2\gamma\mathrm{L}^{g}(\ln|\beta|)$, 以及 $\tilde{\lambda}_3 = \beta\lambda_3 + \mathrm{L}^{g}(\beta)$。第三, 我们有

$$\begin{aligned}
\left[\tilde{f},\left[\tilde{f},\tilde{g}\right]\right] &= [f+g\alpha,\beta[f,g]+\gamma g] \\
&= \beta[f,[f,g]] + \mathrm{L}_f(\beta)[f,g] + \mathrm{L}_f(\gamma)g + \gamma[f,g] \\
&\quad + \alpha\beta[g,[f,g]] + \alpha\mathrm{L}_g(\beta)[f,g] - \beta\mathrm{L}_{[f,g]}(\alpha)g + \alpha\mathrm{L}_g(\gamma)g - \gamma\mathrm{L}_g(\alpha)g, \\
&= \left(\beta k_1 + \mathrm{L}_f(\gamma) + \beta\mathrm{L}_{[g,f]}(\alpha) + \alpha\mathrm{L}_g(\gamma) - \gamma\mathrm{L}_g(\alpha)\right)g + \left(\beta k_2 - \mathrm{L}_f(\beta) - \gamma - \alpha\mathrm{L}_g(\beta)\right)[g,f] \\
&\quad + (\beta k_3 - \alpha\beta)[g,[g,f]], \\
&= \left(\beta k_1 + \mathrm{L}_f(\gamma) + \beta\mathrm{L}_{[g,f]}(\alpha) + \alpha\mathrm{L}_g(\gamma) - \gamma\mathrm{L}_g(\alpha)\right)g + \left(\beta k_2 - \mathrm{L}_f(\beta) - \gamma - \alpha\mathrm{L}_g(\beta)\right)[g,f] \\
&\quad + \frac{1}{\beta^2}(\beta k_3 - \alpha\beta)\left\{\left[\tilde{g},\left[\tilde{g},\tilde{f}\right]\right] - \beta\mathrm{L}_g(\beta)[g,f] + \beta\mathrm{L}_{[g,f]}(\beta)g + \beta\mathrm{L}_g(\gamma)g - \gamma\mathrm{L}_g(\beta)g\right\},
\end{aligned}$$

这意味着 $\tilde{k}_3 = \frac{1}{\beta}(k_3 - \alpha)$。接下来, 继续计算（记 $\tilde{h} = \tilde{k}_3\left[\tilde{g},\left[\tilde{g},\tilde{f}\right]\right]$）：

$$\begin{aligned}
\left[\tilde{f},\left[\tilde{f},\tilde{g}\right]\right] &= \left(\beta k_1 + \mathrm{L}_f(\gamma) + \beta\mathrm{L}_{[g,f]}(\alpha) + \alpha\mathrm{L}_g(\gamma) - \gamma\mathrm{L}_g(\alpha) + \tilde{k}_3\left(\beta\mathrm{L}_{[g,f]}(\beta) + \beta\mathrm{L}_g(\gamma) - \gamma\mathrm{L}_g(\beta)\right)\right)g + \tilde{h} \\
&\quad + \left(\beta k_2 - \mathrm{L}_f(\beta) - \gamma - \alpha\mathrm{L}_g(\beta) - \tilde{k}_3\beta\mathrm{L}_g(\beta)\right)[g,f] + \tilde{h} \\
&= \left(\beta k_1 + \mathrm{L}_f(\gamma) + \beta\mathrm{L}_{[g,f]}(\alpha) + \alpha\mathrm{L}_g(\gamma) - \gamma\mathrm{L}_g(\alpha) + \tilde{k}_3\left(\beta\mathrm{L}_{[g,f]}(\beta) + \beta\mathrm{L}_g(\gamma) - \gamma\mathrm{L}_g(\beta)\right)\right)g \\
&\quad \frac{1}{\beta}\left(\beta k_2 - \mathrm{L}_f(\beta) - \gamma - \alpha\mathrm{L}_g(\beta) - \tilde{k}_3\beta\mathrm{L}_g(\beta)\right)\left\{\left[\tilde{g},\tilde{f}\right] + \gamma g\right\} + \tilde{h},
\end{aligned}$$

~ ~这意味着 $k_2 = k_2 - \mathrm{L}_f(\ln|\beta|) - \frac{\gamma}{\beta} - \alpha\mathrm{L}_g(\ln|\beta|) - k_3$

$\mathrm{L}_g(\beta)$, 最后

$$\begin{aligned}
\tilde{k}_1 &= \frac{1}{\beta}\left(\beta k_1 + \mathrm{L}_f(\gamma) + \beta\mathrm{L}_{[g,f]}(\alpha) + \alpha\mathrm{L}_g(\gamma) - \gamma\mathrm{L}_g(\alpha) + \tilde{k}_3\left(\beta\mathrm{L}_{[g,f]}(\beta) + \beta\mathrm{L}_g(\gamma) - \gamma\mathrm{L}_g(\beta)\right) + \tilde{k}_2\gamma\right) \\
&= k_1 + \mathrm{L}_{[g,f]}(\alpha) + \frac{1}{\beta}\left(\mathrm{L}_f(\gamma) + \alpha\mathrm{L}_g(\gamma) - \gamma\mathrm{L}_g(\alpha) + \tilde{k}_3\left(\beta\mathrm{L}_{[g,f]}(\beta) + \beta\mathrm{L}_g(\gamma) - \gamma\mathrm{L}_g(\beta)\right) + \tilde{k}_2\gamma\right).
\end{aligned}$$

附录 B. 证明 定理 3的技术引理

定理 3 证明的充分性部分 依赖于存在一个微分同胚, 它能够同时将分布 张成 $\{f_c,[g_c,f_c]\}$ 和向量场 g_c 化为规范形式, 正如下列引理所证明的。

引理 2。 考虑一个控制仿射系统 $\Sigma_c = (f_c, g_c)$ 由其典范对给出, 并假设集合 $\mathcal{F}$ =张成 $\{f_c,[g_c,f_c]\}$。若 Σ_c 的结构函数满足条件（*12*） 定理 *3*中所述, 则存在一个微分同胚 $(x,y,w) = \phi(\xi)$ 使得 $\phi_*\mathcal{F}$ =张成 $\left\{\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right\}$ 并且 $\phi_* g_c = \frac{\partial}{\partial w}$。

证明。 首先, 我们证明系统存在光滑解 h

$$\mathrm{L}_{f_c}(h) = 0, \quad \mathrm{L}_{[g_c,f_c]}(h) = 0, \quad \text{and} \quad \mathrm{L}_{g_c}(h) = 1.$$

我们需要检查三个可积性条件:

(1) $\mathrm{L}^{[f_c,[g_c,f_c]]}(h) = \mathrm{L}_{f_c}\left(\mathrm{L}^{[g_c,f_c]}(h)\right) - \mathrm{L}^{[g_c,f_c]}(\mathrm{L}_{f_c}(h)) = 0$ 且 $[f_c,[g_c,f_c]] = 0$, 因此 $0 = 0$, 第一条件成立。(2) $\mathrm{L}^{[f_c,g_c]}(h) = \mathrm{L}_{f_c}(\mathrm{L}_{g_c}(h)) - \mathrm{L}_{g_c}(\mathrm{L}_{f_c}(h)) = 0$ 且 $\mathrm{L}^{[f_c,g_c]}(h) = 0$, 因此 $0 = 0$, 第二个可积性条件成立。

(3) $\mathrm{L}_{[[g_c,f_c],g_c]}(h) = \mathrm{L}_{[g_c,f_c]}(\mathrm{L}_{g_c}(h)) - \mathrm{L}_{g_c}\left(\mathrm{L}_{[g_c,f_c]}(h)\right) = 0$ 且 $[[g_c,f_c],g_c] = -\varepsilon f_c - \nu[g_c,f_c]$。因此 $\mathrm{L}_{[[g_c,f_c],g_c]}(h) = -\varepsilon \mathrm{L}_{f_c}(h) - \nu \mathrm{L}_{[g_c,f_c]}(h) = 0$ 且 $0 = 0$，第三个条件成立。

取上述系统的一个光滑解 h，将其重新命名为 $\phi_3 = h$，并选取 ϕ_1、ϕ_2，使得 $\mathrm{d}\phi_1$ 和 $\mathrm{d}\phi_2$ 均湮灭 g_c 且彼此独立（它们存在，因为 $g_c \neq 0$）。微分同胚 $\phi = (\phi_1,\phi_2,\phi_3) = (x,y,w)$ 满足：$\phi_*\mathcal{F} =$ 张成 $\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right\}$ 和 $\phi_* g_c = \frac{\partial}{\partial w}$。

□