耗散相互作用量子比特中的关联缺失：一条禁戒定理

Zeqing Wang,[1,2,3,4] Ran Qi,[1] Yao Lu,[2,3,4] Zhigang Wu,[2,3,4,*] and Jianwen Jie[2,3,4,†]

[1] *Department of Physics, Renmin University of China, Beijing, 100872, China*

[2] *Shenzhen Institute for Quantum Science and Engineering (SIQSE), Southern University of Science and Technology, Shenzhen, P. R. China.*

[3] *International Quantum Academy, Shenzhen 518048, China.*

[4] *Guangdong Provincial Key Laboratory of Quantum Science and Engineering, Southern University of Science and Technology Shenzhen, 518055, China.*(日期：2023年2月3日)

模型问题的精确解虽然难以获得，却是理解多体相互作用系统的有力工具。我们研究了具有海森堡相互作用的耗散量子比特系统，并针对满足特定条件的量子比特，求得描述其动力学的林德布拉德主方程的一个精确稳态解。该解的物理内涵是一条令人瞩目的禁戒定理：对于阻尼率和增益率之比相同的量子比特，在稳态下它们之间无法建立关联。我们在量子比特量子同步的背景下讨论了该定理的两个推论。第一，在上述条件下，量子比特的量子同步会被完全阻断；这一效应令人联想到耗散克尔非谐振子中发现的现象，但其适用范围要广得多。第二，也是更重要的推论是，通过设计耗散机制，有可能将复杂的全连接量子比特网络简化为简单得多的一对多网络。之所以期望实现这种简化，是因为它为优化复杂量子比特网络的量子同步提供了有效工具。最后，我们提出两种具体的实验方案，用于实现我们的模型并检验我们的预测。

arXiv:2302.00976v1 [quant-ph] 2 Feb 2023

引言.— 理解开放量子系统与环境耦合所导致的耗散效应，是量子计算和量子信息领域最重要且最紧迫的任务之一 [1–4]。通常，耗散会损害量子相干性并限制量子优势。人们已开发出多种方法来减少不受控噪声并提高量子存储器的相干时间，例如动态解耦 [5, 6], 、施加强磁场 [7]以及电磁感应透明 [8–10], 。然而，在某些情况下，即便借助这些方法，抑制耗散仍然是一项艰巨的任务。例如，降低具有强各向异性相互作用的自旋系综的退相干仍然很困难 [13]。

因此，人们提出了其他方法：不抑制耗散，而是精心设计耗散，以助力完成量子计算中的某些任务 [14, 15]。由于量子器件的可控性迅速提升 [16–18]，这种处理耗散的方式近来日益受到关注。耗散工程的一个显著例子是量子芝诺效应 [19, 20], ，它可用于构造无退相干子空间 [21, 22], ，这是量子纠错 [4, 23–26]的一项重要要素。其他例子包括制备最大纠缠态 [27–30], 、操控量子态 [31, 32] 以及诱导强多体相互作用 [33, 34]。人们甚至提出，可将耗散率用作灵敏探针，以监测氮-空位中心系统中的磁噪声 [35, 36]。所有这些进展都表明，耗散工程具有巨大的应用潜力。

在这项工作中，我们研究一种模型中的耗散工程。该模型对凝聚态物理和量子计算都至关重要，即由海森堡自旋或量子比特组成的集合，同时受到增益和阻尼作用。我们采用广泛使用的 Lindblad 主方程来描述该系统的动力学；为探究耗散工程的效果，我们聚焦于其稳态解。遗憾的是，对于相互作用系统，除仅含少数量子比特的情形外，数值上很难求得这些解 [37]。精确解也极为罕见，且仅限于某些一维可积系统 [38–43]。因此，我们要探讨：对于这样一个相互作用量子比特系统，当量子比特的增益和阻尼可以任意设计时，能否对其稳态作出普遍且严格的论断？如果可以，这些论断是否具有实用价值?

我们首先为耗散量子比特系统证明一个禁戒定理，以此回答这些问题。具体而言，我们认为，如果量子比特具有相同的增益率与阻尼率之比，那么稳态下就不可能在量子比特之间产生任何关联。我们通过证明，在这一条件下，相互作用系统的精确稳态实际上与非相互作用系统的稳态相同，因而无法编码量子比特之间的任何关联，从而证明了这一禁戒定理。鉴于耗散和自旋关联在量子同步这一现象中都十分重要，我们进一步考察了该定理在量子比特量子同步中的应用。我们发现，首先，该定理为量子同步中发现的一种引人注目的阻塞效应提供了完美的解释，

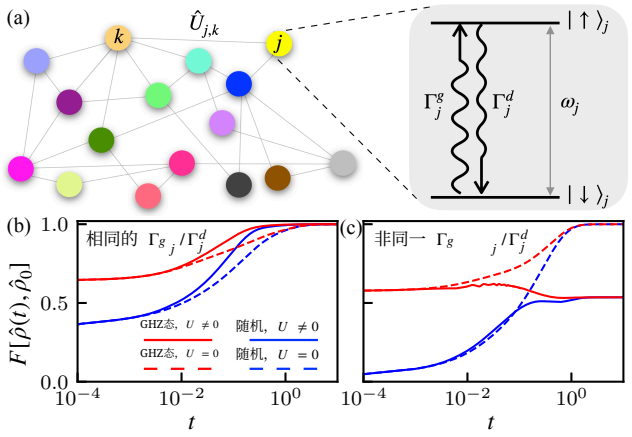

图 1。（a）耗散相互作用量子比特系统示意图。（b）—（c）六量子比特系统态保真度的时间演化，其中（b）具有相同的 Γ_j^g/Γ_j^d，而（c）具有不同的 Γ_j^g/Γ_j^d。在（b）和（c）中，量子比特的增益率均为 $\Gamma^g{}_{(1-6)}$=（1, 0.2, 20, 2, 2.5, 0.3）。阻尼率 $\Gamma^d{}_{(1-6)}$ 在（b）中分别取（4, 0.8, 80, 8, 10, 1.2），在（c）中分别取（0.5, 4, 80, 1, 0.5, 0.2）。实线对应于具有 $U_{jk}^x = U_{jk}^y = 80$ 和 $U_{jk}^z = 1$ 的全连接相互作用系统。虚线表示相应的非相互作用情形。

更重要的是，它为通过耗散工程优化复杂量子比特网络的量子同步这一问题提供了有力的物理见解。最后，我们提出了两个实验系统，可用于检验我们的禁戒定理及其推论。

系统——我们考虑一组同时具有增益和阻尼的耗散量子比特，如图 1 (a) 所示。第 j 个量子比特由其频率 ω_j以及阻尼率和增益率 Γ_j^d 和 Γ_j^g 分别表征。量子比特之间通过海森堡相互作用相互作用

$$\hat{U} = \sum_{j<k} \hat{U}_{jk} = \sum_{j<k} \sum_{\alpha} U_{j,k}^{\alpha} \hat{\sigma}_j^{\alpha} \hat{\sigma}_k^{\alpha}, \tag{1}$$

其中，$\hat{}\sigma^{\alpha=x}$、$_j$ $^{y\ z}$ 、是第 j个量子比特的泡利算符。假设耗散是马尔可夫的，则该开放系统的动力学由著名的林德布拉德主方程（$\hbar = 1$）描述

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -i\left[\hat{H}_0 + \hat{U}, \hat{\rho}\right] + \frac{1}{2}\sum_j \left(\Gamma_j^g \mathcal{D}^+[\hat{\rho}] + \Gamma_j^d \mathcal{D}^-[\hat{\rho}]\right) \tag{2}$$

其中，$\hat{}\ H_0 = \sum_j \omega_j \hat{}\sigma_j^z/2$，$\hat{}\rho$是系统的密度矩阵，而 $\mathcal{D}^{\pm}[\hat{}\rho] = \hat{}\sigma_j^{\pm}\ \hat{}\rho\ \hat{}\sigma_j^{\pm\dagger} - \{\hat{}\sigma_j^{\pm\dagger}\ \hat{}\sigma_j^{\pm}, \hat{}\rho\}/2$ 及$\hat{}\sigma_j^{\pm} \equiv (\hat{}\sigma_j^x \pm i\hat{}\sigma_j^y)/2$ 是林德布拉德算符。方程（2）右侧常写作 $\mathcal{L}[\hat{}\rho]$，其中 $\mathcal{L}$（称为李乌维尔算符）是动力学半群 $\{e^{\mathcal{L}t}, t \geq 0\}$ 的生成元，该半群支配着演化过程。该半群破坏了时间可逆性，并使系统不可避免地演化到某些稳态$\hat{}\rho_{ss} \equiv \hat{}\rho(t = +\infty)$，这些稳态对应于李乌维尔算符 $\mathcal{L}$ 的零特征值本征态，即$\mathcal{L}[\hat{}\rho_{ss}] = 0$。本文主要研究的就是这类稳态。

禁戒定理——现在我们陈述禁戒定理。在 Γ_j^g/Γ_j^d对所有量子比特都相同且相互作用具有 *XXZ* 形式（$U_{jk}^x = U_{jk}^y$）的条件下，由方程（*2*）描述的系统总是演化到一个唯一的稳态，其中量子比特之间完全不存在关联，即

$$\langle \hat{\sigma}_j^{\alpha} \hat{\sigma}_k^{\beta} \rangle - \langle \hat{\sigma}_j^{\alpha} \rangle \langle \hat{\sigma}_k^{\beta} \rangle = 0 \tag{3}$$

对于任意 $j \neq k$，平均值是相对于稳态的密度矩阵计算的。

在证明禁戒定理之前，我们指出它对式（2）所描述的耗散量子比特系统蕴含的三个显著性质。第一，量子比特之间的强相互作用并不必然意味着它们在稳态中存在强关联。第二，无论系统的初态如何，稳态中都不存在关联。第三，禁戒定理的成立不受系统拓扑结构的限制。换言之，该定理给出了一种适用于任意拓扑结构系统的情形：无论相互作用有多强，也无论系统初始时的关联有多强，动力学演化结束时都不会建立关联。

我们分两步证明禁戒定理。首先，我们证明，对于给定的任意一组特定参数，耗散量子比特系统只存在一个稳态。系统的希尔伯特空间为 $\mathcal{H} = \otimes_j \mathcal{H}_j$，其中 $\mathcal{H}_j$ 是与生成元 j第 $\{\hat{}I_j$、$\hat{}\sigma_j^x$、$\hat{}\sigma_j^y$、$\hat{}\sigma_j^z\}$相关的局域物理希尔伯特空间。如补充材料（S.M.）I 所示，[44], 中的算符可以通过乘法和加法，由所有量子比特的跳跃算符生成；这些算符是局域自旋向下和向上的翻转算符 $\{\sigma_j^{\pm}\}$。根据文献 [45–48], 中讨论的定理，这一事实意味着式（2）的稳态具有唯一性。

在确立稳态的唯一性后，我们现在证明，在上述条件下，同一系统在无相互作用时对应的稳态密度矩阵是稳态方程$\mathcal{L}[\hat{}\rho] = 0$的一个解。对于单个量子比特，该方程很容易求解，可得一个唯一的稳态 $\hat{}\rho_{j,\ 0} = (I_j + m_j^z\ \hat{}\sigma_j^z)/2$，其对应第 j 个量子比特，并由磁化强度 $m_j^z = 1 - 2\left(\Gamma_j^g/\Gamma_j^d + 1\right)^{-1}$[49, 50]表征。在无相互作用时，多量子比特系统的稳态密度矩阵仅为

$$\hat{\rho}_0 = \prod_j \hat{\rho}_{j,0} = \prod_j (\hat{I}_j + m_j^z \hat{\sigma}_j^z)/2, \tag{4}$$

其中 $\prod$ 表示以下 $\hat{}$ 的序列的矩阵直积. $_0$。将此表达式代入式（2）的李维尔算符 $\mathcal{L}$，得到

$$\mathcal{L}[\hat{\rho}_0] = [\hat{U}, \hat{\rho}_0] = -\frac{1}{2}\sum_{j<k}\left(\hat{\mathcal{M}}_{jk} + \hat{\mathcal{U}}_{jk}\right)\prod_{l\neq j,k}\hat{\rho}_{l,0}, \quad (5)$$

其中 $\hat{}$ $\mathcal{M}_{jk} = (m_j^z - m_k^z)(U_{jk}^x + U_{jk}^y)(\hat{}\sigma_j^+\hat{}\sigma_k^- - \hat{}\sigma_j^-\hat{}\sigma_k^+)$，且 $\hat{}\mathcal{U}_{jk} = (m_j^z + m_k^z)(U_{jk}^x - U_{jk}^y)(\hat{}\sigma_j^+\hat{}\sigma_k^+ - \hat{}\sigma_j^-\hat{}\sigma_k^-)$。从该表达式可知，若 $m_j^z = m_k^z$，则 $\mathcal{L}[\hat{}\rho_0] = 0$；等价地，若 $\Gamma_j^g/\Gamma_j^d = \Gamma_k^g/\Gamma_k^d$，则 $U_{jk}^x = U_{jk}^y$对所有 $j \neq k$均成立。结合前文证明的稳态唯一性，这意味着在增益与阻尼比相同且存在海森堡 XXZ 相互作用的条件下，式（4）给出的密度矩阵 $\hat{}\rho_0$ 就是相互作用量子比特系统的精确且唯一的稳态。由式（4）可立即推出禁戒定理，即稳态下任意两个量子比特之间都不存在关联。我们注意到，当 $\Gamma_j^d = \Gamma_j^g$ 时，磁化强度 $m_j^z = 0$，因此，即使在这一特殊情况下存在一般的各向异性海森堡 XYZ 相互作用，禁戒定理仍然成立。

如图 1(b-c)所示，我们通过 $\rho(t)$ 与 ρ_0 之间保真度的时间演化，对六量子比特系统的禁戒定理进行了数值验证；其~~中保真度定义~~为 $F[\rho(t), \rho_0] = \mathrm{Tr}[\sqrt{\rho(t)^{1/2}\rho_0\rho(t)}^{1/2}]$ [51]。为检验稳态的唯一性，我们为演化选择了两个初态：最大纠缠 Greenberger–Horne–Zeilinger（GHZ）态（红线）和随机态（蓝线）。对于相同的 Γ_j^g/Γ_j^g，它们都演化至唯一稳态 ρ_0，如 $F[\rho(+\infty), \rho_0] = 1$ 所清楚表明的那样（见图 1(b)）；相比之下，在 Γ_j^g/Γ_j^g 不同的情况下，它们会演化至另一个唯一稳态 $\rho(+\infty) \neq \rho_0$（见图 1(c)）。我们还比较了系统在有相互作用（实线）和无相互作用（虚线）情况下的演化。需要注意的是，对于相同的 m_j^z，尽管相互作用的存在不会改变最终稳态，却会改变演化轨迹。我们还通过直接计算各种关联，数值验证了禁戒定理（见补充材料 II [44]）。

在本文余下部分，我们将探讨禁戒定理在量子比特量子同步中的应用；在这一情境下，耗散和自旋关联都是不可或缺的要素。

量子同步阻塞。— 作为第一个应用，我们将说明我们的禁戒定理如何揭示
关于量子比特量子同步中的一种新型阻塞效应。这里的同步是指弱耦合的自激振荡器调整节律、以相同频率并保持相位锁定而振荡的倾向。这一现象的核心概念是极限环，即振荡器在受到微弱扰动后总会回归的相位对称态。对于耗散量子比特 j，极限环由

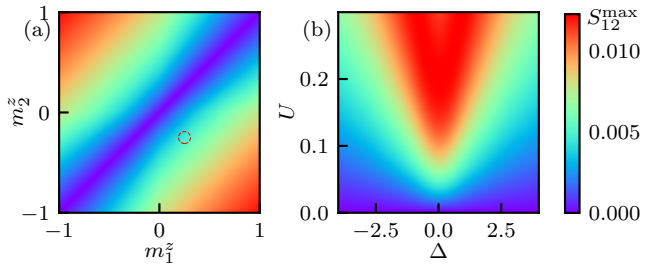

图 2 $m_j^z \geq$. 两 $_0 \leq 0$ 个量子比特的量子同步。对于 ( )，我们固定 $\Gamma_j^g = 1$ ($\Gamma_j^d = 1$)。(a) 各向同性相互作用 $U_{12}^\alpha = U = 1$ ($\alpha = x, y, z$) 和 $\Delta = 0$ 下的量子同步阻塞。(b) (a) 中圈出点对应的阿诺德舌，其中 $m_1^z = -m_2^z = 1/4$。

其稳态 $\hat{}\rho_{j,0}$ 表示。在经典同步中，只有当两个振荡器具有相似或相同的极限环时，它们才能实现同步。然而，在量子情形下，两个相同的振荡器之间的同步会受到抑制；耗散的克尔非谐振荡器以及大自旋 [52–54] 中都发现了这一现象。我们将看到，这种阻塞效应也会出现在量子比特系统中。为了量化第 j 个与第 k 个量子比特之间的同步程度，我们沿用文献 [55]，并定义 S-函数 [49, 50, 56–58], $S_{jk}(\phi) = -(2\pi)^{-1} + \int_0^{2\pi} d\phi_k \int_0^{\pi} d\theta_j \int_0^{\pi} d\theta_k \sin\theta_j \sin\theta_k Q_{jk}(\theta_j, \theta_k, \phi + \phi_k, \phi_k)$，其中 $\phi \equiv \phi_j - \phi_k$。这里，$Q_{jk} \equiv \langle \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}| \hat{} \rho_{jk} |\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}\rangle / (2\pi)^2$ 是 Husimi Q 函数，其中 $\hat{}\rho_{jk}$ 是第 j 个和第 k 个量子比特的约化密度矩阵，而 $|\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}\rangle \equiv |\phi_j, \theta_j\rangle \bigotimes |\phi_k, \theta_k\rangle$ 是自旋相干态的乘积，$|\phi_j, \theta_j\rangle = \exp(-i\phi_j \hat{} \sigma_j^z/2) \exp(-i\theta_j \hat{} \sigma_j^y/2) |\uparrow\rangle_j$。将 $S_{jk}(\phi)$ 改写为以下形式很有启发性（推导见补充材料 III [44]）

$$S_{jk}(\phi) = \frac{\pi}{16}|\langle \hat{\sigma}_j^+ \hat{\sigma}_k^-\rangle| \cos(\phi - \phi^{(0)}), \quad (6)$$

其中，$\phi^{(0)}$ 是量子比特翻转-翻转关联函数 $\langle \hat{} \sigma_j^+ \hat{} \sigma_k^-\rangle$ 的相位。该表达式表明，两个量子比特倾向于在 $\phi^{(0)}$ 处实现相位锁定，因为在这一相位值下，同步度量达到最大值 $S_{jk}^{\max} = \frac{\pi}{16}|\langle \hat{} \sigma_j^+ \hat{} \sigma_k^-\rangle|$。

对于具有 XXZ 相互作用（$U_{12}^x = U_{12}^y = U$）的双量子比特系统，自旋翻转-翻转关联函数可通过解析方法求得：

$$\langle \hat{\sigma}_1^+ \hat{\sigma}_2^-\rangle = \frac{4U\Gamma_1\Gamma_2(m_1^z - m_2^z)(4\Delta - i\Gamma)}{64\Gamma^2U^2 + \Gamma_1\Gamma_2(\Gamma^2 + 16\Delta^2)}, \quad (7)$$

其中 $\Delta = \omega_1 - \omega_2$，$\Gamma_j = \Gamma_j^d + \Gamma_j^g$ 且 $\Gamma = \sum_{j=1}^N \Gamma_j$。由此表达式可知，当$m_1^z = m_2^z$时，两个量子比特之间的同步完全受到抑制；也就是说，当量子比特具有相同的极限环时，同步会被阻塞。此外，当两个量子比特的磁化强度方向相反时，同步达到最大值。图2(a) 中清楚地展示了这些特征，其中我们绘制了 $S_{jk}^{\max}$关于

的函数，其中变量为 m_1^z 和 m_2^z，且 $\Delta = 0$。图2(b)还展示了同步的一个标志性特征：当量子比特的频率不同时，同步度量会形成所谓的阿诺德舌。至此，我们通过显式计算自旋关联函数，证明了同步阻塞。根据方程（3）和（6），可知这种阻塞效应是我们的禁戒定理自然推得的。事实上，禁戒定理表明，只要所有量子比特都具有相同的极限环，这种阻塞效应就会在多量子比特系统中持续存在。我们通过直接计算多达六个量子比特的系统的方程（6）对此进行了数值验证。

复杂量子比特网络的同步——量子同步阻塞是禁戒定理的一个确切结果，但在某种意义上却有悖常理。这是因为，在量子比特网络中，我们往往希望增强而非削弱量子比特之间的同步。以量子存储器为例 [59, 60]。用于存储量子信息的量子比特会与环境中的许多其他量子比特相互作用，而这种自旋—自旋相互作用是导致其退相干的最重要原因。通过耗散工程使环境量子比特与存储量子比特同步，可以显著延长后者的相干时间 [50, 61]。然而，随着量子比特数量增加，快速实现多个量子比特同步这一一般问题很快就变得难以处理。这里的主要困难在于，环境量子比特不仅与存储量子比特相互作用，也彼此相互作用；换言之，这些量子比特构成了一个全连接网络。图3(a) 的插图展示了这种网络，其中存储量子比特标记为 $j = 1$。

这里我们展示，禁戒定理可用于降低网络的复杂度，从而为优化同步提供一种方案。禁戒定理的关键观察是，当量子比特具有相同的增益与阻尼比，或等价地具有相同的磁化强度时，确定稳态的过程仿佛不存在自旋-自旋相互作用。这表明，如果将环境量子比特的磁化强度调至相同，它们之间自旋-自旋相互作用的影响便可有效解耦。因此，在此条件下，全连接量子比特网络可以简化为一个更简单的一对多

图中插图所示的网络3(b)。当然，这一论证并非完全严谨，因为禁戒定理仅适用于所有量子比特具有相同磁化强度的情况；这里我们允许记忆量子比特的磁化强度不同于环境量子比特的磁化强度。不过，数值结果将表明，在指定的耗散工程下，就同步而言，这两个网络等效得相当准确。具体而言，我们定义多量子比特系统的同步度量$S_t^{\max} = \sum_{j<k} S_{jk}^{\max}$。我们数值计算

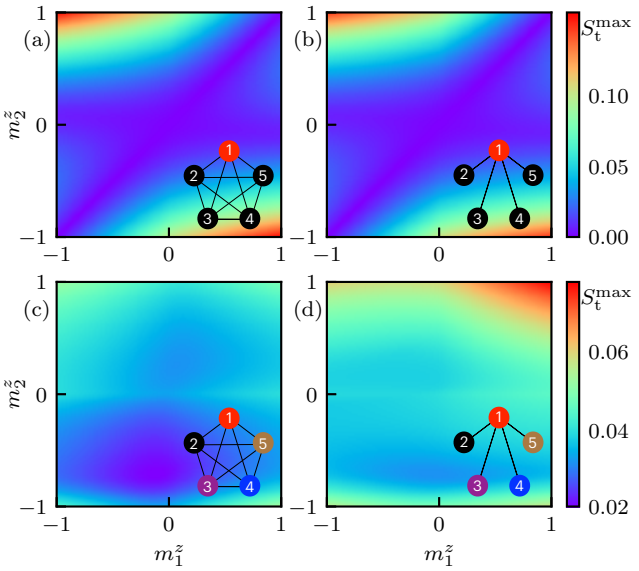

图 3. 全连接（a、c）和一对多（b、d）量子网络中的量子同步。对于 $m^z_{1\le j\le 2} \gtrless 0$ （<0），我们固定$\Gamma^{g(d)}_{1\le j\le 2} = 1$。(a-b)中的相互作用参数为 $U^x_{jk} = U^y_{jk} = 2$；而(c-d)中的相互作用参数为 $U^x_{jk} = 2$, $U^y_{jk} = 0.5$。在(a-b)中，$2 \le j \le 5$ 的 m_j^z 相同，而在(c-d)中则不同。更具体地说，在(a-b)中，我们有 $\Gamma^{g,\ d\ (3-5)}/\Gamma^{g,\ d}_{\ 2}$=(1.5, 2.5, 0.6)；在(c-d)中，我们有 $\Gamma^{g\ (3-5)}/\Gamma^g_2$ = (0.8, 5, 0.1)，以及 $\Gamma^{d}_{\ (3-5)}/\Gamma^d_2$=(1.3, 0.9, 1.2)。其他参数为 $U^z_{jk} = 1$，$\Delta_{jk} = 0$。

了 $S_t^{\max}$五量子比特系统在全连接网络和一对多网络中的同步度量，分别如图3(a-b)所示；在这两个网络中，环境量子比特的磁化强度均相同。可以看到，这两个网络的总同步度量几乎无法区分，这为我们先前基于禁戒定理作出的论证提供了有力证据。然而，当环境量子比特的磁化强度彼此不同时，这两个网络显然并不等效，如图3(c-d)所示。

实验实现。— 在此，我们提出两个实验系统来检验我们的禁戒定理。在我们几位作者近期的一项实验工作中 [50]，，我们对一个八能级离子施加增益、阻尼和再泵浦激光，实现了一个增益率和阻尼率均受控的量子比特。在此，我们提出加入一个声光调制器（AOM），将激光分束，以便分别操控多个离子 [62]，，如图4(a)所示。施加的相互作用激光全局照射这些离子，并将其量子比特态与集体运动模耦合。由此产生的有效相互作用是一种幂律广义海森堡 XYZ 相互作用 $V_{XYZ} = \sum_{j<k} \sum_{\alpha=x,\ y,\ z} U^{\alpha}_{jk} \hat{\sigma}^{\alpha}_j \hat{\sigma}^{\alpha}_k + B \sum_j \hat{\sigma}^z_j$，在强磁场 [63–67]下将简化为 XX 相互作用 $\hat{}\ V_{XX} = \sum_{j<k} U_{jk} (\hat{\sigma}^+_j \hat{\sigma}^-_k + \hat{\sigma}^-_k \hat{\sigma}^+_j)$。

第二种实验系统是图 4(b) 所示的超导电路。这里我们使用电感器

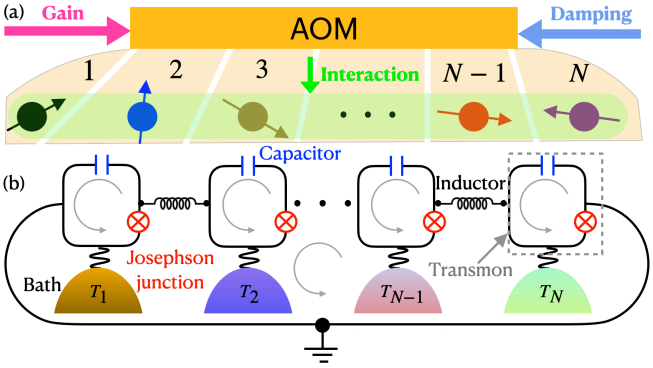

图 4. 实现我们模型的实验方案。（a）囚禁离子平台。（b）超导电路系统。

来耦合相邻的类 transmon 量子比特，每个量子比特都由一个电容器和一个约瑟夫森结构成。这导致量子比特之间产生海森堡 XX 相互作用 V_{XX} [68, 69]。该系统的优点是所有元件都可以独立控制。施加的 j第 个热浴可独立控制 j第 个类 transmon 量子比特的耗散率之比，$\Gamma_j^g/\Gamma_j^d = 1-[1+n_j^{\mathrm{B}}(T_j)]^{-1}$通过调节平均声子数$n_j^{\mathrm{B}}$，即温度 T_j [70]。

展望 — 除了本文讨论的禁戒定理的两项意义之外，我们还简要概述了该定理的其他潜在应用和扩展。首先，禁戒定理提供了一种重置机制 [71–73]，能够在存在相互作用的情况下，将量子比特系统重置为任意混合态，且不受量子比特位置和系统拓扑结构的影响。这对于耗散动力学的实验研究很有帮助，包括动力学纯化相变 [74]，，因为这类研究通常需要从混合态开始。我们的结果还可以推广到驱动耗散量子比特系统 [42, 75–77]，以进一步理解由非平衡稳态表征的复杂量子网络的简化。最后，尽管我们已经验证，海森堡相互作用下的自旋-1系统不适用该禁戒定理 [44]，，但更大的耗散自旋系统或其他模型（例如哈伯德模型）中是否存在类似的禁戒定理，仍是一个悬而未决的问题。所有这些问题都将在未来的研究中加以探讨。

作者感谢 Tongxing Yan 就超导量子比特电路开展的有益讨论。本工作得到国家重点研发计划项目（编号：2022YFA1404103，Z. W.）、国家自然科学基金项目（编号：12104210，J. J.；11974161，Z. W.；12022405，R. Q.）以及中国博士后科学基金项目（编号：2022M711496，J. J.）的资助，编号：2018YFA0306501（R. Q.）、北京自然科学基金项目（编号：Z180013，R. Q.）以及深圳市科技计划项目（编号：KQTD20200820113010023，Z. W.）。

* wuzg@sustech.edu.cn † Jianwen.Jie1990@gmail.com

[1] H. Breuer, F. Petruccione 和 S. Petruccione, *The Theory of Open Quantum Systems*（牛津大学出版社，2002年）。[2] ´A. Rivas 和 S. Huelga, *Open Quantum Systems: An Introduction*, 《物理学 SpringerBriefs 丛书》（施普林格·柏林·海德堡，2011年）。[3] I. de Vega 和 D. Alonso, 《现代物理评论》89，015001（2017年）。[4] J. Preskill, arXiv:2208.08064（2022年）。[5] L. Viola 和 S. Lloyd, 《物理评论A》58，2733（1998年）。[6] L. Viola、E. Knill 和 S. Lloyd, 《物理评论快报》82，2417（1999年）。[7] S. Takahashi、I. Tupitsyn、J. Van Tol、C. Beedle、D. Hendrickson 和 P. Stamp, 《自然》476，76（2011年）。[8] M. Fleischhauer 和 M. D. Lukin, 《物理评论快报》84，5094（2000年）。[9] D. F. Phillips、A. Fleischhauer、A. Mair、R. L. Walsworth 和 M. D. Lukin, 《物理评论快报》86，783（2001年）。[10] M. Fleischhauer 和 M. D. Lukin, 《物理评论A》65，022314（2002年）。[11] A. I. Lvovsky、B. C. Sanders 和 W. Tittel, 《自然光子学》3，706（2009年）。[12] S. Freer、S. Simmons、A. Laucht、J. T. Muhonen、J. P. Dehollain、R. Kalra、F. A. Mohiyaddin、F. E. Hudson、K. M. Itoh、J. C. McCallum、D. N. Jamieson、A. S. Dzurak 和 A. Morello, 《量子科学与技术》2，015009（2017年）。[13] B. Merkel、P. Cova Far˜ina 和 A. Reiserer, 《物理评论快报》127，030501（2021年）。[14] P. M. Harrington、E. J. Mueller 和 K. W. Murch, 《自然·物理评论》4，660（2022年）。[15] J. F. Poyatos、J. I. Cirac 和 P. Zoller, 《物理评论快报》77，4728（1996年）。[16] I. Bloch、J. Dalibard 和 W. Zwerger, 《现代物理评论》80，885（2008年）。[17] K. Kim、M.-S. Chang、S. Korenblit、R. Islam、E. E. Edwards、J. K. Freericks、G.-D. Lin、L.-M. Duan 和 C. Monroe, 《自然》465，590（2010年）。[18] I. Siddiqi, 《自然·材料评论》6，875（2021年）。[19] W. M. Itano、D. J. Heinzen、J. J. Bollinger 和 D. J. Wineland, 《物理评论A》41，2295（1990年）。[20] P. M. Harrington、J. T. Monroe 和 K. W. Murch, 《物理评论快报》118，240401（2017年）。[21] A. Beige、D. Braun、B. Tregenna 和 P. L. Knight, 《物理评论快报》85，1762（2000年）。[22] L. Bretheau、P. Campagne-Ibarcq、E. Flurin、F. Mallet 和 B. Huard, 《科学》348，776（2015年）。[23] P. W. Shor, 《物理评论A》52，R2493（1995年）。[24] A. Peres, 《物理评论A》32，3266（1985年）。[25] P. Campagne-Ibarcq、A. Eickbusch、S. Touzard、E. Zalys-Geller、N. E. Frattini、V. V. Sivak、P. Reinhold、S. Puri、S. Shankar、R. J. Schoelkopf、 *et al.*, 《自然》584，368

（2020年）。[26] B. de Neeve、T.-L. Nguyen、T. Behrle 和 J. P. Home，《自然·物理》18，296（2022 年）。[27] Y. Lin、J. Gaebler、F. Reiter、T. R. Tan、R. Bowler、A. Sørensen、D. Leibfried 和 D. J. Wineland，《自然》504，415（2013年）。[28] S. Shankar、M. Hatridge、Z. Leghtas、K. Sliwa、A. Narla、U. Vool、S. M. Girvin、L. Frunzio、M. Mirrahimi 和 M. H. Devoret，《自然》504，419（2013年）。[29] P. Magnard、P. Kurpiers、B. Royer、T. Walter、J.-C. Besse、S. Gasparinetti、M. Pechal、J. Heinsoo、S. Storz、A. Blais 和 A. Wallraff，《物理评论快报》121，060502（2018年）。[30] M. Malinowski、C. Zhang、V. Negnevitsky、I. Rojkov、F. Reiter、T.-L. Nguyen、M. Stadler、D. Kienzler、K. K. Mehta 和 J. P. Home，《物理评论快报》128，080503（2022年）。[31] S. Roy、J. T. Chalker、I. V. Gornyi 和 Y. Gefen，《物理评论研究》2，033347（2020年）。[32] T. Ramos、H. Pichler、A. J. Daley 和 P. Zoller，《物理评论快报》113，237203（2014年）。[33] A. J. Daley、J. M. Taylor、S. Diehl、M. Baranov 和 P. Zoller，《物理评论快报》102，040402（2009年）。[34] M. Roncaglia、M. Rizzi 和 J. I. Cirac，《物理评论快报》104，096803（2010年）。[35] J. R. Maze、P. L. Stanwix、J. S. Hodges、S. Hong、J. M. Taylor、P. Cappellaro、L. Jiang、M. Dutt、E. Togan、A. Zibrov、*et al.*，《自然》455，644（2008年）。[36] C. Zu、F. Machado、B. Ye、S. Choi、B. Kobrin、T. Mittiga、S. Hsieh、P. Bhattacharyya、M. Markham、D. Twitchen、*et al.*，《自然》597，45（2021年）。[37] H. Weimer、A. Kshetrimayum 和 R. Or´us，《现代物理评论》93，015008（2021年）。[38] O. Golinelli 和 K. Mallick，《物理学杂志A：数学与通论》39，12679（2006年）。[39] T. c. v. Prosen，《物理评论快报》107，137201（2011年）。[40] D. Karevski、V. Popkov 和 G. M. Sch¨utz，《物理评论快报》110，047201（2013年）。[41] T. c. v. Prosen，《物理评论快报》112，030603（2014年）。[42] M. Foss-Feig、J. T. Young、V. V. Albert、A. V. Gorshkov 和 M. F. Maghrebi，《物理评论快报》119，190402（2017年）。[43] V. Popkov、T. c. v. Prosen 和 L. Zadnik，《物理评论快报》124，160403（2020年）。[44] 在补充材料中，我们将在第 I 节详细证明稳态的唯一性，在第 II 节通过数值方法讨论若干自旋关联的动力学，在第 III 节推导公式 (6)，并在第 IV 节证明自旋-1原子禁戒定理并不存在。[45] D. E. Evans，《数学物理通讯》54，293（1977年）。[46] A. Frigerio，《数学物理通讯》63，269（1978年）。[47] T. Prosen，《物理学纪事》86，058511（2012年）。[48] T. Prosen，《物理学杂志A：数学与理论》48，373001（2015年）。[49] A. Parra-L´opez 和 J. Bergli，《物理评论A》101，062104（2020年）。[50] L. Zhang、Z. Wang、Y. Wang、J. Zhang、Z. Wu、J. Jie 和 Y. Lu，arXiv:2205.05936（2022年）。[51] M. Nielsen 和 I. Chuang，*Quantum Computation and Quantum Information*，《剑桥信息与自然科学丛书》（剑桥大学出版社，2000年）。[52] N. L¨orch、S. E. Nigg、A. Nunnenkamp、R. P. Tiwari 和 C. Bruder，《物理评论快报》118，243602（2017年）。[53] S. E. Nigg，《物理评论A》97，013811（2018年）。[54] P. Solanki、F. M. Mehdi、M. Hajdu˘sek 和 S. Vinjanampathy，arXiv:2212.09388（2022年）。[55] A. Roulet 和 C. Bruder，《物理评论快报》121，063601（2018年）。[56] A. Roulet 和 C. Bruder，《物理评论快报》121，053601（2018年）。[57] M. Koppenh¨ofer 和 A. Roulet，《物理评论A》99，043804（2019年）。[58] A. W. Laskar、P. Adhikary、S. Mondal、P. Katiyar、S. Vinjanampathy 和 S. Ghosh，《物理评论快报》125，013601（2020年）。[59] M. Zhong、M. P. Hedges、R. L. Ahlefeldt、J. G. Bartholomew、S. E. Beavan、S. M. Wittig、J. J. Longdell 和 M. J. Sellars，《自然》517，177（2015年）。[60] H. Zhou、J. Choi、S. Choi、R. Landig、A. M. Douglas、J. Isoya、F. Jelezko、S. Onoda、H. Sumiya、P. Cappellaro、H. S. Knowles、H. Park 和 M. D. Lukin，《物理评论X》10，031003（2020年）。[61] M. A. Lohe，《物理学杂志A：数学与理论》43，465301（2010年）。[62] S. Debnath、N. M. Linke、C. Figgatt、K. A. Landsman、K. Wright 和 C. Monroe，《自然》536，63（2016年）。[63] P. Jurcevic、B. P. Lanyon、P. Hauke、C. Hempel、P. Zoller、R. Blatt 和 C. F. Roos，《自然》511，202（2014年）。[64] K. Kim、M.-S. Chang、R. Islam、S. Korenblit、L.-M. Duan 和 C. Monroe，《物理评论快报》103，120502（2009年）。[65] D. Porras 和 J. I. Cirac，《物理评论快报》92，207901（2004年）。[66] R. Islam、C. Senko、W. C. Campbell、S. Korenblit、J. Smith、A. Lee、E. E. Edwards、C.-C. J. Wang、J. K. Freericks 和 C. Monroe，《科学》340，583（2013年）。[67] J. W. Britton、B. C. Sawyer、A. C. Keith、C.-C. J. Wang、J. K. Freericks、H. Uys、M. J. Biercuk 和 J. J. Bollinger，《自然》484，489（2012年）。[68] O. Naaman 和 J. Aumentado，《PRX量子》3，020201（2022年）。[69] P. Krantz、M. Kjaergaard、F. Yan、T. P. Orlando、S. Gustavsson 和 W. D. Oliver，《应用物理评论》6，021318（2019年）。[70] J. B. Brask、G. Haack、N. Brunner 和 M. Huber，《新物理学杂志》17，113029（2015年）。[71] K. Geerlings、Z. Leghtas、I. M. Pop、S. Shankar、L. Frunzio、R. J. Schoelkopf、M. Mirrahimi 和 M. H. Devoret，《物理评论快报》110，120501（2013年）。[72] S. Boutin、C. K. Andersen、J. Venkatraman、A. J. Ferris 和 A. Blais，《物理评论A》96，042315（2017年）。[73] P. Magnard、P. Kurpiers、B. Royer、T. Walter、J.-C. Besse、S. Gasparinetti、M. Pechal、J. Heinsoo、S. Storz、A. Blais 和 A. Wallraff，《物理评论快报》121，060502（2018年）。[74] M. J. Gullans 和 D. A. Huse，《物理评论X》10，041020（2020年）。[75] C.-K. Chan、T. E. Lee 和 S. Gopalakrishnan，《物理评论A》91，051601（2015年）。[76] E. T. Owen、J. Jin、D. Rossini、R. Fazio 和 M. J. Hartmann，《新物理学杂志》20，045004（2018年）。[77] C. D. Parmee 和 N. R. Cooper，《物理评论A》97，053616（2018年）。

I. 稳态唯一性的证明

我们考虑由 N 量子比特构成的耗散系统，其动力学由林德布拉德主方程（$\hbar = 1$）描述

$$\dot{\hat{\rho}} = \mathcal{L}[\hat{\rho}] = -i[\hat{H}, \hat{\rho}] + \sum_j \mathcal{L}_j \hat{\rho}, \tag{S1}$$

其哈密顿量为 $\hat{H}$。耗散项由 $\mathcal{L}_j\hat{\rho} = (\Gamma_j^g \mathcal{D}[\hat{\sigma}_j^+] + \Gamma_j^d \mathcal{D}[\hat{\sigma}_j^-])\hat{\rho}/2$ 给出，其中 Lindblad 超算符为 $\mathcal{D}[\hat{\mathcal{A}}]\hat{\rho} = \hat{\mathcal{A}}\hat{\rho}\hat{\mathcal{A}}^\dagger - \{\hat{\mathcal{A}}^\dagger\hat{\mathcal{A}}, \hat{\rho}\}/2$，跳跃算符为 $\hat{\mathcal{A}}$。式 (S1) 中开放系统的时间演化由李乌维尔算符 $\mathcal{L}$生成的半群 $\{e^{\mathcal{L}t}, t \geq 0\}$ 描述。该半群破坏时间可逆性，并使系统趋向稳态 $\hat{\rho}_*$；该稳态是与李乌维尔算符 $\mathcal{L}$ 的零特征值相对应的本征态，即 $\hat{\rho} = \mathcal{L}[\hat{\rho}_*] = 0$。稳态的简并会对李乌维尔动力学产生重要影响。稳态唯一性的判定是证明正文中禁戒定理的第一步，数十年来一直受到研究。此处我们遵循 Evans [45] 和 Frigeiro [46] 给出的定理，证明本系统稳态的唯一性。本系统的希尔伯特空间为 $\mathcal{H} = \otimes_j \mathcal{H}_j$，其中 $\mathcal{H}_j$ 是与生成元 $\{\hat{I}_j、\hat{\sigma}_j^x、\hat{\sigma}_j^y、\hat{\sigma}_j^z\}$相关联的第 j 个量子比特的局域物理希尔伯特空间。Evans [45] 和 Frigeiro [46] 给出的一个定理指出：若希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 中的所有算符都能由哈密顿量 $\hat{H}$、所有跳跃算符 $\{\mathcal{A}_j\}$ 及其共轭算符 $\{\mathcal{A}_j^\dagger\}$ 通过乘法和加法生成，则式 (S1) 的稳态唯一。在本系统中，每个量子比特均采用局域自旋向下和向上的翻转算符 $\{\sigma_j^\pm;\ j = 1, 2, \cdots, N\}$ 作为跳跃算符；显然，这些算符的集合能够重建希尔伯特空间 $\mathcal{H}$。例如，第 j 个量子比特的泡利算符和恒等算符可由以下方式生成，

$$\hat{\sigma}_j^x = \hat{\sigma}_j^+ + \hat{\sigma}_j^-, \tag{S2}$$
$$\hat{\sigma}_j^y = (\hat{\sigma}_j^+ - \hat{\sigma}_j^-)/i, \tag{S3}$$
$$\hat{\sigma}_j^z = \hat{\sigma}_j^+\hat{\sigma}_j^- - \hat{\sigma}_j^-\hat{\sigma}_j^+, \tag{S4}$$
$$\hat{I}_j = \hat{\sigma}_j^+\hat{\sigma}_j^- + \hat{\sigma}_j^-\hat{\sigma}_j^+. \tag{S5}$$

因此，我们的系统具有唯一的稳态。该定理也被应用于其他耗散海森堡自旋链 [39, 47, 48]。

II. 关联的动力学

正文中的图 1(b-c) 通过保真度以数值方式展示了禁戒定理。这里我们进一步展示关联函数的结果，关联函数定义为量子比特之间关联的总和，

$$C_{\alpha\beta} = \sum_{j<k} \mathrm{Tr}[\hat{\rho}_{jk}\hat{\sigma}_j^\alpha\hat{\sigma}_k^\beta]; \alpha, \beta = x, y, \pm, \tag{S6}$$

其中，$\hat{\rho}_{jk} = \mathrm{Tr}^{l\neq j,k}[\hat{\rho}]$ 是第 j个量子比特与第 k个量子比特组合的约化密度矩阵算符。为了更好地理解关联函数，我们将约化密度矩阵 ρ_{jk} 改写为一般形式，

$$\rho_{jk} = \begin{pmatrix} a & p^* & q^* & r^* \\ p & b & s^* & u^* \\ q & s & c & v^* \\ r & u & v & d \end{pmatrix}, \tag{S7}$$

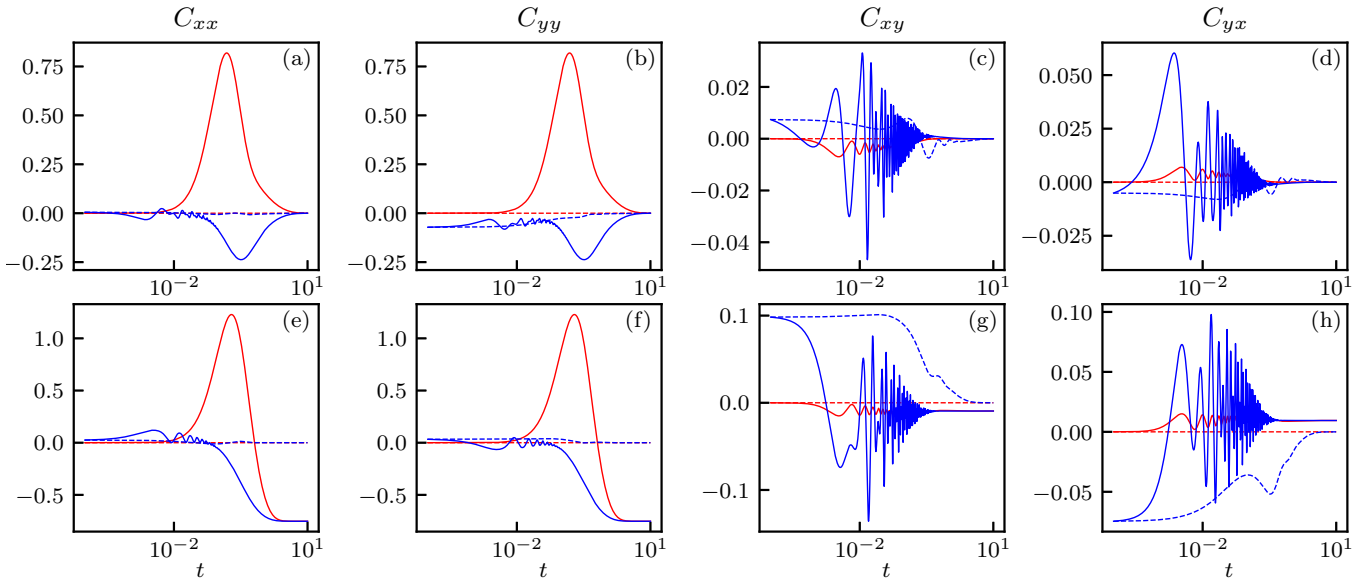

图 S1。（a-d）：与正文图 1(b) 中各情形对应的关联函数。（e-h）：与正文图 1(c) 中各情形对应的关联函数。每列中的各面板共用同一 y 轴。

于是我们可以得到关联函数,

$$C_{-+} = s^*, \tag{S8}$$
$$C_{+-} = s, \tag{S9}$$
$$C_{++} = r, \tag{S10}$$
$$C_{--} = r^*, \tag{S11}$$
$$C_{xx} = r + s + s^* + r^* = 2(\mathrm{Re}[s] + \mathrm{Re}[r]), \tag{S12}$$
$$C_{yy} = -r + s + s^* - r^* = 2(\mathrm{Re}[s] - \mathrm{Re}[r]), \tag{S13}$$
$$C_{xy} = i(-r + s - s^* + r^*) = 2(\mathrm{Im}[r] - \mathrm{Im}[s]), \tag{S14}$$
$$C_{yx} = i(-r - s + s^* + r^*) = 2(\mathrm{Im}[r] + \mathrm{Im}[s]), \tag{S15}$$

因此，我们只考虑关联函数 $\{C_{++}, C_{--}, C_{+-}, C_{-+}\}$，因为关联函数$\{C_{xx}, C_{xy}, C_{yx}, C_{yy}\}$ 包含相同的信息。图S1 展示了使用与正文图 1(b-c) 相同参数得到的这些关联函数的数值结果。图S1(a-d) 中，所有曲线在长演化时间下都趋于零，从而验证了禁戒定理。如图S1(e-h) 所示，当量子比特没有相同的极限环时，实线最终会偏离零，这说明禁戒定理不再成立。

III. 正文公式 (6) 的推导

为推导正文中的公式 (6)，我们首先回顾单个耗散量子比特的量子同步测度[49, 50]。这里我们遵循 [49, 55, 56] ，采用 Husimi-Q 函数来可视化相空间中的密度矩阵,

$$Q(\theta, \phi) = \frac{1}{2\pi}\langle\theta, \phi|\hat{\rho}|\theta, \phi\rangle \tag{S16}$$

其中 $|\theta, \phi\rangle = e^{-i\frac{\phi}{2}\hat{\sigma}^z} e^{-i\frac{\theta}{2}\hat{\sigma}^y}|\uparrow\rangle = e^{-i\frac{\phi}{2}}\cos(\frac{\theta}{2})|\uparrow\rangle + e^{i\frac{\phi}{2}}\sin(\frac{\theta}{2})|\downarrow\rangle$ 为自旋相干态。因此，对于处于自旋相干态 $|\theta, \phi\rangle$ 中的单个量子比特，角度 θ 与其能量相关，而角度 ϕ 是两个自旋态之间的相对相位。因此，在量子同步中，角度 ϕ 是用于相位锁定的自由相位。Husimi-Q 函数 $Q(\theta, \phi)$ 描述了布洛赫球上的准概率分布，其中量子比特 $\vec{m} =$ 的布洛赫矢量 (m_x, m_y, m_z) 与密度矩阵 $\rho = \frac{1}{2}(I + \vec{m}\cdot\vec{\sigma})$ 相关。随后对式 (S16) 进行直接计算可得,

$$Q(\theta, \phi) = \frac{1}{4\pi}(1 + \vec{m}\cdot\vec{n}), \tag{S17}$$

其中 $\vec{n}=$（sin $\theta\cos\phi$，$\sin\theta\sin\phi$，$\cos\theta$）是指向布洛赫球上自旋相干态 $|\theta$的方向 $\phi\rangle$。为了测量量子同步的强度，我们可以对 Husimi- θ 函数Q 函数 Q（θ，ϕ）进行积分，并定义如下同步度量 S 函数 [49]:

$$\begin{aligned} S(\phi) =& -\frac{1}{2\pi}+\int_0^{\pi} Q(\theta,\phi)\sin\theta \mathrm{d}\theta, \\ =& \frac{1}{8}(m_x\cos\phi+m_y\sin\phi), \\ =& \frac{1}{4}\left(\mathrm{Re}\langle\sigma^+\rangle\cos\phi+\mathrm{Im}\langle\sigma^+\rangle\sin\phi\right). \end{aligned} \tag{S18}$$

单个量子比特的同步度量 S 函数可直接推广至两个量子比特，如下所示（式S18） [56],

$$S_{\mathrm{rel}}(\phi) = -\frac{1}{2\pi}+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi_2\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta_1\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta_2\cdot\sin\theta_1\sin\theta_2 Q_{12}(\theta_1,\theta_2,\phi+\phi_2,\phi_2), \tag{S19}$$

其中，$\phi=\phi_1-\phi_2$ 为相对相位。

$$Q_{12}(\theta_1,\theta_2,\phi+\phi_2,\phi_2)=\frac{1}{(2\pi)^2}\langle\theta_1,\theta_2,\phi_1,\phi_2|\hat{\rho}_{12}|\theta_1,\theta_2,\phi_1,\phi_2\rangle \tag{S20}$$

与$|\theta_1,\theta_2,\phi_1,\phi_2\rangle=|\theta_1,\phi_1\rangle\otimes|\theta_2,\phi_2\rangle$
对于任意状态 $\hat{}\rho_{12}$，我们可以将其写为

$$\hat{\rho}_{12}=\sum_{p_j}p_j|\psi^j\rangle\langle\psi^j|, \tag{S21}$$

其中，p_j 是纯态 $|\psi^j\rangle$的系数，其施密特分解为

$$|\psi\rangle=\sum_k\lambda_k|u_k\rangle_1\otimes|v_k\rangle_2, \tag{S22}$$

其中施密特系数 ..... λ_k。因此，我们可以将任意两个量子比特态 $\hat{}\rho_{12}$ 分解为张量积之和 ，

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{12} =& \sum_{p_j,\lambda_k,\lambda_l} p_j\lambda_k\lambda_l\left(|u_k^j\rangle_1\otimes|v_k^j\rangle_2\right)\left(\langle u_l^j|_1\otimes\langle v_l^j|_2\right), \\ =& \sum_{p_j,\lambda_k,\lambda_l} p_j\lambda_k\lambda_l\left(|u_k^j\rangle_1\langle u_l^j|_1\right)\otimes\left(|v_k^j\rangle_2\langle v_l^j|_2\right), \\ =& \sum_{p_j,\lambda_k,\lambda_l} p_j\lambda_j\lambda_l\cdot\hat{\rho}_{1,kl}^j\otimes\hat{\rho}_{2,kl}^j, \\ =& \sum_w C_w\cdot\hat{\rho}_{1,w}\otimes\hat{\rho}_{2,w}, \end{aligned} \tag{S23}$$

其中 $w=\{p_i,\lambda_k,\lambda_l\}$，$C_w=p_i\lambda_k\lambda_l$。注意，$\hat{}\rho_{j,\ w}$ 是一个一般算符，未必是密度矩阵。我们将其对应的一般 Husimi-Q 函数定义为 $Q_{jw}(\theta_j,\ \phi_j)=\langle\theta_1,\phi_1|\hat{}\rho_{1,\ w}|\theta_1,\ \phi_1\rangle/2\pi$。那么相关的一般 S 函数为

$$\begin{aligned} S_{jw}(\phi) =& -\frac{\mathrm{Tr}[\rho_{j,w}]}{2\pi}+\int_0^{\pi}Q_{jw}(\theta,\phi)\sin\theta\mathrm{d}\theta, \\ =& \frac{1}{8}\left(\langle\sigma_j^x\rangle_w\cos\phi+\langle\sigma_j^y\rangle_w\sin\phi\right). \end{aligned} \tag{S24}$$

然后将式（S23）代入式（Q 中的 Husimi 函数（S20），得到

$$Q_{12}(\theta_1,\theta_2,\phi+\phi_2,\phi_2)=\sum_w C_w Q_{1w}(\theta_1,\phi+\phi_2)Q_{2w}(\theta_2,\phi_2). \tag{S25}$$

将上面的 Q_{12} 代入式 $S_{\rm rel}(\phi)$ 中的式（S19），得到

$$\begin{aligned}
S_{\rm rel}(\phi) =& -\frac{1}{2\pi}+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi_2\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta_1\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta_2\cdot\sin\theta_1\sin\theta_2\sum_w C_w Q_{1w}(\theta_1,\phi+\phi_2)Q_{2w}(\theta_2,\phi_2),\\
=& -\frac{1}{2\pi}+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi_2\cdot\sum_w C_w\left[\frac{\mathrm{Tr}[\rho_{1,w}]}{2\pi}+S_{1w}(\phi+\phi_2)\right]\left[\frac{\mathrm{Tr}[\rho_{2,w}]}{2\pi}+S_{2w}(\phi_2)\right],\\
=&\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi_2\cdot\sum_w C_w S_{1w}(\phi+\phi_2)S_{2w}(\phi_2),\\
=&\frac{1}{64}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi_2\cdot\sum_w C_w\left[\langle\sigma_1^x\rangle_w\cos(\phi+\phi_2)+\langle\sigma_1^y\rangle_w\sin(\phi+\phi_2)\right]\left[\langle\sigma_2^x\rangle_w\cos\phi_2+\langle\sigma_2^y\rangle_w\sin\phi_2\right],\\
=&\frac{\pi}{64}\sum_w C_w\left[(\langle\sigma_1^x\rangle_w\langle\sigma_2^x\rangle_w+\langle\sigma_1^y\rangle_w\langle\sigma_2^y\rangle_w)\cos\phi+(\langle\sigma_1^y\rangle_w\langle\sigma_2^x\rangle_w-\langle\sigma_1^x\rangle_w\langle\sigma_2^y\rangle_w)\sin\phi\right],\\
=&\frac{\pi}{64}\sum_w C_w\left[\langle\sigma_1^x\sigma_2^x+\sigma_1^y\sigma_2^y\rangle_w\cos\phi+\langle\sigma_1^y\sigma_2^x-\sigma_1^x\sigma_2^y\rangle_w)\sin\phi\right],\\
=&\frac{\pi}{64}\left[\langle\sigma_1^x\sigma_2^x+\sigma_1^y\sigma_2^y\rangle\cos\phi+\langle\sigma_1^y\sigma_2^x-\sigma_1^x\sigma_2^y\rangle)\sin\phi\right],\\
=&\frac{\pi}{16}\left(\mathrm{Re}\langle\sigma_1^+\sigma_2^-\rangle\cos\phi+\mathrm{Im}\langle\sigma_1^+\sigma_2^-\rangle\sin\phi\right),\\
=&\frac{\pi}{16}|\langle\hat{\sigma}_1^+\hat{\sigma}_2^-\rangle|\cos(\phi-\phi^{(0)}),
\end{aligned}\tag{S26}$$

其中 $\langle\hat{O}\rangle_w=\mathrm{Tr}[\hat{\rho}_{1,w}\otimes\hat{\rho}_{2,w}\hat{O}]$，并且我们在积分过程中利用了 $\int\mathrm{d}\phi S_{jw}(\phi)=0$ 这一事实。因此，我们得到正文中的公式 (6)，其中 $\phi_0=\arctan(\mathrm{Im}\langle\hat{\sigma}_1^+\hat{\sigma}_2^-\rangle/\mathrm{Re}\langle\hat{\sigma}_1^+\hat{\sigma}_2^-\rangle)$ 是由自旋翻转-翻转关联 $\langle\hat{\sigma}_1^+\hat{\sigma}_2^-\rangle$ 定义的同步相位。

IV. 自旋-1系统中禁戒定理的缺失

本节将说明，[55, 56] 中研究的自旋-1系统并不具有正文中针对量子比特讨论的禁戒定理。对于单个自旋-1系统，我们将三个能级标记为 $|1,\ 1\rangle$、$|1,\ 0\rangle$ 和 $|1,\ -1\rangle$。[55, 56] 中的自旋会从两个边态 $|1,\ \pm1\rangle$ 非相干地跃迁至目标态 $|1,\ 0\rangle$。这一耗散方案会将每个自旋驱动至以下稳态

$$\rho_{\rm LC}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\tag{S27}$$

这只是一个纯态 $|1,\ 0\rangle$。该态是自旋-1系统 [55, 56] 的极限环态。

现在我们考虑如下的海森堡XYZ相互作用

$$\hat{U}=U^x\hat{J}_1^x\hat{J}_2^x+U^y\hat{J}_1^y\hat{J}_2^y+U^z\hat{J}_1^z\hat{J}_2^z,\tag{S28}$$

其中 $\hat{J}^{\alpha=x,y,z}_{j=1,2}$、、是满足对易关系 $[\hat{J}_j^\alpha,\ \hat{J}_j^\beta]=\mathrm{i}\epsilon_{\alpha,\beta,\gamma}\hat{J}_j^\gamma$ 的角动量算符。两个自旋-1的林德布拉德主方程（$\hbar=1$）为

$$\frac{d\hat{\rho}_{12}}{dt}=-i\left[\sum_{j=1,2}\frac{\omega_j}{2}\hat{J}_j^z+\sum_{\alpha=x,y,z}U^\alpha\hat{J}_1^\alpha\hat{J}_2^\alpha,\hat{\rho}_{12}\right]+\frac{1}{2}\sum_{j=1,2}\left(\gamma_j^g\mathcal{D}[\hat{J}_j^+]+\gamma_j^d\mathcal{D}[\hat{J}_j^-]\right)\hat{\rho}_{12}.\tag{S29}$$

与正文研究的量子比特系统类似，公式（S29）的稳态是每个自旋-1系统在关闭相互作用时的极限环态 $\rho_{\rm LC}$ 的乘积态。利用 Evans [45] 和 Frigeiro[46] 在第 节中提到的定理，可以直接证明自旋-1系统中的稳态是唯一的。接下来我们

按照正文中公式（5）所示的分析，计算下面的对易子，

$$[U,\rho_{1,\mathrm{LC}}\otimes\rho_{2,\mathrm{LC}}]=\begin{pmatrix}0&0&0&0&U^y-U^x&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&-U^x-U^y&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\U^x-U^y&0&U^x+U^y&0&0&0&U^x+U^y&0&U^x-U^y\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&-U^x-U^y&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&U^y-U^x&0&0&0&0\end{pmatrix}. \tag{S30}$$

显然，方程（S30）不可能为零，除非 $U_y=U_x=0$。这意味着，正文中研究的禁戒定理在 [55, 56]中的自旋-1系统不成立。