arXiv:2302.00983v1 [math.DG] 2 Feb 2023

由几何结构生成的微分算子

Răzvan M. Tudoran

摘要

我们将经典的梯度和拉普拉斯算子概念推广到赋有一般几何结构的流形上，并给出它们的一些自然性质。

2020年数学主题分类：58C06；58J60；58C35。

关键词：几何结构；几何括号；类梯度向量场；类拉普拉斯算子；格林恒等式；狄利克雷能量。

1 引言

本文的主要目的是介绍并研究由一般流形上的几何结构所生成的一些自然微分算子。这里的几何结构是指任意非退化的（0，2）–张量场（例如黎曼度量或半黎曼度量、洛伦兹度量、辛结构）。更确切地说，第一类算子将黎曼几何或半黎曼几何中的梯度向量场概念，以及辛几何中的哈密顿向量场概念推广到赋有几何结构的流形上；第二类算子则将黎曼几何中的拉普拉斯–贝尔特拉米算子，以及洛伦兹几何中的达朗贝尔算子推广到赋有几何结构的流形上。这些算子类最近已在向量空间上引入[5]。

本文结构如下。第二节中，我们介绍一般流形上的几何结构概念、几何同胚（即保持几何结构的微分同胚）的概念，并给出它们的一些自然性质。在此我们还介绍相对于几何结构定义的 $(1,1)$–张量场的左/右伴随概念。第三节致力于研究本文的两个主要对象，即与一般几何结构自然相关的左/右梯度向量场。这些向量场将黎曼几何和半黎曼几何中的梯度向量场概念，以及辛几何中的哈密顿向量场概念推广到了几何流形上。利用这些特殊的向量场，我们证明每个赋有几何结构的流形上都自然存在一个莱布尼茨括号，并重新发现左/右梯度向量场就是由该括号生成的左/右莱布尼茨向量场

此外，我们还给出了具有几何结构的流形上的类梯度向量场与上述莱布尼茨括号的对称部分或反对称部分所关联的莱布尼茨向量场之间的各种关系。第四节中，我们定义由流形上的一般几何结构生成的左/右 Laplace 算子，并研究其一些自然性质。除其他内容外，我们给出这些算子的格林恒等式，并推导出与一般几何结构相关的狄利克雷能量的欧拉–拉格朗日方程。本文最后一节采用动力学方法研究与一般几何结构相关的类梯度向量场。在此，我们讨论这些向量场与赋有几何结构的流形上的莱布尼茨括号的相容性，给出一个自然的输运定理，并证明周期轨道不存在。

在引言的最后，我们提及，本文中所有流形均假设为连通、豪斯多夫、仿紧且光滑。此外，为了保持表述统一并避免繁复的措辞，我们假设所有映射均为光滑映射。

2 流形上的几何结构及其一些自然性质

本节介绍一般流形上的几何结构这一概念，并给出其一些自然性质；这些性质对于本文后续内容至关重要。

2.1 几何结构

我们先来介绍几何结构这一概念，它是本文整个构造的基础。这是对线性框架中类似概念的一种推广；该概念最近由[5]引入。

定义 2.1 我们称流形 M 上的任意非退化 $(0,2)$–张量场 $b\colon \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$ 为几何结构。称偶对 (M,b) 为几何流形，或称带有几何结构的流形。

若 $x=(x^1,\dots,x^n)$ 表示 M 上的一组局部坐标，其中 $n=\dim M$，则几何结构 b 在局部可由非奇异矩阵表示

$$\mathcal{B}_x:=(\mathcal{B}_{ij}(x))_{1\le i,j\le n},\quad \mathcal{B}_{ij}:=b\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right).$$

请注意，黎曼、半黎曼、辛、近辛和洛伦兹结构都是几何结构的特例。当然，为了存在，大多数几何结构都要求底流形具备额外性质（例如，流形上的近辛结构要求该流形可定向且

为偶数维；洛伦兹结构要求该流形要么非紧致，要么是欧拉示性数为零的紧致流形，等等）。

下面指出一种从给定几何结构出发生成更多几何结构的简单方法。更准确地说，在一般的几何流形（M， b）上，任意非退化的 (1, 1)–张量场 T： $\mathfrak{X}$（M） $\to \mathfrak{X}$（M），都会诱导出另外两个几何结构， b_T^L、b_T^R： $\mathfrak{X}$（M） $\times \mathfrak{X}$（M） $\to \mathcal{C}^\infty$（M， $\mathbb{R}$），其定义为

$$b_T^L(X,Y) := b(TX,Y),\ \forall X,Y \in \mathfrak{X}(M);\ b_T^R(X,Y) := b(X,TY),\ \forall X,Y \in \mathfrak{X}(M).$$

回顾一下，非退化的 (1,1)–张量场的具体例子包括近复结构、近乘积结构、近黄金结构等。

反过来，对于定义在流形上的任意一对给定几何结构，都可以自然地关联出各种非退化的 (1,1)–张量场，实质上就是将前面的构造反向进行。一个重要的特殊情形是定义在黎曼流形上的几何结构。

注释 2.2 如果（M， g）是一个黎曼流形，且 b是 M上的一个几何结构，那么 b 的非退化性蕴含着存在唯一确定的非退化 (1, 1)–张量场B_g： $\mathfrak{X}$（M） $\to \mathfrak{X}$（M），其由下述关系定义

$$g(X,Y) = b(X, B_g Y),\ \forall X,Y \in \mathfrak{X}(M).$$

称有序对 (b, B_g) 为与几何结构b相关联的几何对。

如前所述，上述构造可以类似地推广到任意给定的几何流形，并配以一个额外的几何结构b。然而，我们重点讨论这一特定情形，因为黎曼背景提供了丰富的几何性质，从而更容易分析 b 相对于它的几何性质。

现在，我们来给出注释 2.2 中所引入量的局部表示。因此，相对于一组局部坐标，$x = (x^1, \ldots, x^n)$，其中 n =维数 M，度量 g 由如下对称正定矩阵表示

$$G_x := (g_{ij}(x))_{1\le i,j\le n},\ g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right),$$

几何结构 b 由非奇异矩阵表示

$$\mathcal{B}_x := (\mathcal{B}_{ij}(x))_{1\le i,j\le n},\ \mathcal{B}_{ij} = b\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right),$$

而张量场 B_g 由非奇异矩阵表示

$$B_x := (B_j^i(x))_{1\le i,j\le n},\ B_j^i(x) = \sum_{k=1}^n \mathcal{B}^{ik}(x) g_{kj}(x),\ where\ (\mathcal{B}^{ij}(x))_{1\le i,j\le n} := \mathcal{B}_x^{-1}.$$

2.2 几何态射

引入几何流形后，自然而然的下一步是考察这一概念如何通过此类流形之间的映射得到保持。为此，我们定义一类保持几何结构的微分同胚。我们将这些映射称为几何同构；在黎曼、半黎曼或洛伦兹几何结构范畴中，它们就是等距变换；在辛几何结构范畴中，则是辛同胚。

定义 2.3 设 (M, b^M) 和 (N, b^N) 是两个赋有几何结构的流形。从 (M, b^M) 到 (N, b^N) 的几何态射是一个保持几何结构的微分同胚 $\Phi\colon M \to N$，即 $\Phi^\star b^N = b^M$，其中

$$(\Phi^\star b^N)(X, Y) := \Phi^\star(b^N(\Phi_\star X, \Phi_\star Y)),\ \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M),$$

$\Phi_\star X := \mathrm{D}\Phi \circ X \circ \Phi^{-1} \in \mathfrak{X}(N)\ \ \forall X \in \mathfrak{X}(M)$，且 $\Phi^\star F := F \circ \Phi \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})\ \ \forall F \in \mathcal{C}^\infty(N, \mathbb{R})$。

在局部坐标 $x = (x^1, \ldots, x^n)$（其中 $n = \dim M$）下，若 $(\mathcal{B}^M_{ij}(x))_{1\le i,j\le n}$ 和 $(\mathcal{B}^N_{kl}(\Phi(x)))_{1\le k,l\le n}$ 分别表示几何结构 b^M 和 b^N 的局部表示，则几何态射 Φ 的局部表示必须满足

$$\mathcal{B}^M_{ij}(x) = \sum_{1\le k,l\le n} \mathcal{B}^N_{kl}(\Phi(x)) \frac{\partial \Phi^k}{\partial x^i} \frac{\partial \Phi^l}{\partial x^j},\ \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}.$$

接下来，我们证明，给定流形 M 并赋予几何结构 b 后，其所有几何态射构成一个群，称为 (M, b) 的几何同构群。

定理 2.4 设 b 是流形 M 上的一个几何结构。那么，(M, b) 的所有几何态射组成的集合，记作 $\mathcal{G}(M, b) := \{\Phi \in \mathrm{Diff}(M) \mid \Phi^\star b = b\}$，是 M 的微分同胚群的一个子群。

证明。根据几何态射的定义，我们有包含关系 $\mathcal{G}(M, b) \subseteq \mathrm{Diff}(M)$。注意到，恒等映射 Id_M 显然是一个几何态射。接下来，我们证明对于任意 $\Phi, \Psi \in \mathcal{G}(M, b)$，它们的复合 $\Phi \circ \Psi$ 属于 $\mathcal{G}(M, b)$。事实上，由于 $\Phi^\star b = b$ 且 $\Psi^\star b = b$，可得

$$(\Phi \circ \Psi)^\star b = \Psi^\star(\Phi^\star b) = \Psi^\star b = b.$$

为完成证明，我们证明对于任意 $\Phi \in \mathcal{G}(M, b)$，逆映射 $\Phi^{-1} \in \mathrm{Diff}(M)$ 也是 $\mathcal{G}(M, b)$ 的一个元素。这可直接由考虑到 $\Phi^\star b = b$，从而得出

$$(\Phi^{-1})^\star b = (\Phi^{-1})^\star(\Phi^\star b) = (\Phi \circ \Phi^{-1})^\star b = (\mathrm{Id}_M)^\star b = b.$$

■

2.3 (1,1)–张量场的左/右伴随

本小节旨在将黎曼或半黎曼情形中与 (1,1)– 张量场相关联的伴随概念推广到几何流形。

定义 2.5 设 b是流形 M上的一个几何结构，且 A: $\mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ 是一个 (1, 1)–张量场。则存在两个 (1, 1)–张量场，记为 $A^{\star_L}, A^{\star_R}$:$\mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$，分别称为 A 关于几何结构 b的左伴随和右伴随，它们由以下关系唯一确定:

$$b(A^{\star_L}X, Y) = b(X, AY), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M),$$

$$b(AX, Y) = b(X, A^{\star_R}Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

在局部坐标 $x = (x^1, \ldots, x^n)$ 中，其中 $n =$维数为 M，上述张量场可表示为矩阵

$$A_x^{\star_L} = \mathcal{B}_x^{-\top} A_x^\top \mathcal{B}_x^\top, \quad A_x^{\star_R} = \mathcal{B}_x^{-1} A_x^\top \mathcal{B}_x.$$

当 b 是黎曼流形 (M, g) 上的一个几何结构时，由于$G_x = \mathcal{B}_x B_x$，上述局部表达式也可等价地写为

$$A_x^{\star_L} = G_x^{-1} B_x^\top A_x^\top B_x^{-\top} G_x, \quad A_x^{\star_R} = B_x G_x^{-1} A_x^\top G_x B_x^{-1}.$$

注意，关于黎曼度量张量 g，(1,1)–张量场 A的左伴随与右伴随相同，其局部表达式为

$$A_x^{\star_g} = G_x^{-1} A_x^\top G_x, \text{ as in this case } B_x = I_n.$$

现在，我们来给出与几何流形相关的左/右伴随算子的主要性质。

命题 2.6 设 (M, b) 为一个几何流形，A, B: $\mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ 为两个 (1, 1)–张量场，且 $F, G \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$。则有以下等式

(i) $(FA + GB)^{\star_L/\star_R} = FA^{\star_L/\star_R} + GB^{\star_L/\star_R}$, (ii) $(A^{\star_L})^{\star_R} = A$, $(A^{\star_R})^{\star_L} = A$, (iii) $(AB)^{\star_L/\star_R} = B^{\star_L/\star_R} A^{\star_L/\star_R}$, (iv) $(A^{-1})^{\star_L/\star_R} = (A^{\star_L/\star_R})^{-1}$, 若 A 可逆，(v) $A^{\star_L} = A^{\star_R}$，若 b 对称或反对称。

证明。 所有关系均可直接由定义 2.5得出。 ■

对于定义在黎曼流形上的几何结构，下面给出相关伴随算子之间的一些特定相容关系。

注 2.7 设 b 是黎曼流形 (M,g) 上的几何结构，且 (b,B_g) 是相关的几何对。那么 $B_g^{\star_L}=B_g^{\star_g}$，且 $B_g^{\star_R}=B_gB_g^{\star_g}B_g^{-1}$，其中 $B_g^{\star_g}$ 表示相对于黎曼度量 g 的 B_g 的伴随。此外，若 b 是对称（反对称）的，则 $B_g^{\star_g}=B_g$ （$B_g^{\star_g}=-B_g$）。

在局部坐标中，$x=(x^1,\ldots\ldots,x^n)$，其中 $n=$维数 M，备注2.7 中的张量场可表示为矩阵

$$B_x^{\star_L}=G_x^{-1}B_x^{\top}G_x=B_x^{\star_g},\quad B_x^{\star_R}=B_xG_x^{-1}B_x^{\top}G_xB_x^{-1}=B_xB_x^{\star_g}B_x^{-1}.$$

注意到，与 $\mathcal{B}_x=G_xB_x^{-1}$ 一样，以下关系成立

(i) 若 b 对称，则 $\mathcal{B}_x^{\top}=\mathcal{B}_x\Leftrightarrow G_x^{-1}B_x^{\top}=B_xG_x^{-1}$,

(ii) 若 b 反对称，则 $\mathcal{B}_x^{\top}=-\mathcal{B}_x\Leftrightarrow G_x^{-1}B_x^{\top}=-B_xG_x^{-1}$。

3 由几何结构生成的类梯度向量场

本节介绍本文的两个主要研究对象，即与一般几何结构自然相关的左/右梯度向量场。这些向量场将黎曼几何和半黎曼几何中的梯度向量场概念，以及辛几何中的哈密顿向量场概念推广到几何流形上。对于赋有常值几何结构的向量空间，类梯度向量场最近在[5]中被引入。

定义 3.1 设 (M,b) 为一个几何流形，$U\subseteq M$ 为一个开集。那么对于每个 $F\in\mathcal{C}^\infty(U,\mathbb{R})$，$F$的左梯度记为 ∇_b^LF，它是由以下关系唯一确定的向量场

$$b(\nabla_b^LF,X)=\mathrm{d}F\cdot X,\ \forall X\in\mathfrak{X}(U).$$

类似地，F的右梯度记为 ∇_b^RF，它是由以下关系唯一确定的向量场

$$b(X,\nabla_b^RF)=\mathrm{d}F\cdot X,\ \forall X\in\mathfrak{X}(U).$$

请注意，$\mathcal{C}^1$ 是使左/右梯度定义成立所需的充分正则性类。尽管如此，为了使全文采用统一的方法，并避免复杂的表述，我们选择在光滑类中进行研究。

用局部坐标表示，$x=(x^1,\ldots,x^n)$，其中 $n=$维数为 M，左/右梯度向量场可表示为以下矩阵

其中 $(\mathrm{d}F)_x:=\left(\dfrac{\partial F}{\partial x^1}(x)\ \cdots\ \dfrac{\partial F}{\partial x^n}(x)\right)$。采用记号 $(\mathcal{B}^{ij}(x))_{1\le i,\ j\le n}:=\mathcal{B}_x^{-1}$，可得 $(\nabla_b^LF)_x\overline{\mathcal{B}_x^{-\top}}(\mathrm{d}F)_x$，$(\nabla_b^RF)_x=\mathcal{B}_x^{-1}(\mathrm{d}F)_x$,

$$\nabla_b^LF=\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n\mathcal{B}^{ji}\frac{\partial F}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^i},\quad\nabla_b^RF=\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n\mathcal{B}^{ij}\frac{\partial F}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^i}.\tag{3.1}$$

注3.2 注意，若 b 是对称的（即 (M,b) 是黎曼流形或半黎曼流形），则 $\nabla_b^L = \nabla_b^R$。特别地，当 $b = g$ 是黎曼度量时，则有 $\nabla_b^L = \nabla_b^R = \nabla_g$，其中 ∇_g 表示黎曼流形 (M,g) 上的梯度算子，对任意函数 $F \in \mathcal{C}^\infty(U,\mathbb{R})$，由下述关系定义

$$g(\nabla_g F, X) = \mathrm{d}F \cdot X,\ \forall X \in \mathfrak{X}(U).$$

另一方面，若 b 是反对称的（即，(M,b) 是一个近辛流形），则 $\nabla_b^L = -\nabla_b^R$。此外，若 $\mathrm{d}b = 0$（即，(M,b) 是一个辛流形），则对于任意 $H \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$，其对应的哈密顿向量场 X_H（由关系 $\mathbf{i}_{X_H} b = \mathrm{d}H$ 定义）与 $\nabla_b^L H = -\nabla_b^R H$ 重合。

当 b 是黎曼流形 (M,g) 上的一般几何结构时，算子 ∇_b^L, ∇_b^R 之间的关系由以下结果给出；该结果可直接由 ∇_b^L, ∇_b^R 和 ∇_g 的定义推出。

命题 3.3 设 b 是黎曼流形 (M,g) 上的一个几何结构，并设 (b,B_g) 是对应的几何对。则对于任意给定的开集 $U \subseteq M$，以及每个 $F \in \mathcal{C}^\infty(U,\mathbb{R})$，有 $\nabla_b^L F = B_g^{\star_g} \nabla_g F$，$\nabla_b^R F = B_g \nabla_g F$，且 $\nabla_b^L F = B_g^{\star_g} B_g^{-1} \nabla_b^R F$。

在局部坐标中，$x = (x^1, \ldots, x^n)$，其中 $n = \dim M$，当 $G_x = \mathcal{B}_x B_x$ 时，左/右梯度向量场可表示为矩阵

$$(\nabla_b^L F)_x = \mathcal{B}_x^{-\top}(\mathrm{d}F)_x = G_x^{-1} B_x^\top (\mathrm{d}F)_x,\quad (\nabla_b^R F)_x = \mathcal{B}_x^{-1}(\mathrm{d}F)_x = B_x G_x^{-1}(\mathrm{d}F)_x.$$

3.1 类梯度向量场与几何同构

本小节旨在分析左/右梯度向量场与几何同构之间的相容性。

定理 3.4 设 (M,b^M)、(N,b^N) 是两个赋有几何结构的流形，且 $\Phi\colon M \to N$ 是一个几何同构。则下列关系成立

$$\Phi_\star \circ \nabla_{b^M}^{L/R} \circ \Phi^\star = \nabla_{b^N}^{L/R}, \tag{3.2}$$

或明确地说，

$$\Phi_\star(\nabla_{b^M}^{L/R}(\Phi^\star F)) = \nabla_{b^N}^{L/R} F,\ \forall F \in \mathcal{C}^\infty(N,\mathbb{R}).$$

证明。设 $F \in \mathcal{C}^\infty(N,\mathbb{R})$ 为任意固定对象。我们首先证明关于左梯度算子的恒等式。为此，设 $Y \in \mathfrak{X}(N)$ 为任意固定对象。那么，由于 $\Phi\colon M \to N$ 是一个几何同构（即 $\Phi^\star b^N = b^M$），我们有

$$\begin{aligned}
b^N(\Phi_\star(\nabla_{b^M}^L(\Phi^\star F)), Y) &= b^N(\Phi_\star(\nabla_{b^M}^L(\Phi^\star F)), \Phi_\star(\Phi_\star^{-1} Y)) \\
&= (\Phi^\star)^{-1}(\Phi^\star(b^N(\Phi_\star(\nabla_{b^M}^L(\Phi^\star F)), \Phi_\star(\Phi_\star^{-1} Y)))) \\
&= (\Phi^\star)^{-1}((\Phi^\star b^N)(\nabla_{b^M}^L(\Phi^\star F), \Phi_\star^{-1} Y)) \\
&= (\Phi^\star)^{-1}(b^M(\nabla_{b^M}^L(\Phi^\star F), \Phi_\star^{-1} Y)) \\
&= (\Phi^\star)^{-1}(\mathrm{d}(\Phi^\star F) \cdot \Phi_\star^{-1} Y) = (\Phi^\star)^{-1}(\Phi^\star(\mathrm{d}F \cdot Y)) \\
&= \mathrm{d}F \cdot Y = b^N(\nabla_{b^N}^L F, Y).
\end{aligned}$$

因此，我们得到

$$b^N(\Phi_\star(\nabla^L_{b^M}(\Phi^\star F)),Y)=b^N(\nabla^L_{b^N}F,Y),\ \forall Y\in\mathfrak{X}(N),$$

由 b^N 的非退化性，我们得到 $\Phi_\star(\nabla^L_{b^M}(\Phi^\star F))=\nabla^L_{b^N}F$。由于此关系对任意 $F\in\mathcal{C}^\infty(N,\mathbb{R})$ 都成立，我们得出

$$\Phi_\star\circ\nabla^L_{b^M}\circ\Phi^\star=\nabla^L_{b^N}.$$

右梯度算子的恒等式可类似地推出。更确切地说，对于任意$Y\in\mathfrak{X}(N)$，我们有

$$\begin{aligned}
b^N(Y,\Phi_\star(\nabla^R_{b^M}(\Phi^\star F)))&=b^N(\Phi_\star(\Phi_\star^{-1}Y),\Phi_\star(\nabla^R_{b^M}(\Phi^\star F)))\\
&=(\Phi^\star)^{-1}(\Phi^\star(b^N(\Phi_\star(\Phi_\star^{-1}Y),\Phi_\star(\nabla^R_{b^M}(\Phi^\star F)))))\\
&=(\Phi^\star)^{-1}((\Phi^\star b^N)(\Phi_\star^{-1}Y,\nabla^R_{b^M}(\Phi^\star F)))\\
&=(\Phi^\star)^{-1}(b^M(\Phi_\star^{-1}Y,\nabla^R_{b^M}(\Phi^\star F)))\\
&=(\Phi^\star)^{-1}(\mathrm{d}(\Phi^\star F)\cdot\Phi_\star^{-1}Y)=(\Phi^\star)^{-1}(\Phi^\star(\mathrm{d}F\cdot Y))\\
&=\mathrm{d}F\cdot Y=b^N(Y,\nabla^R_{b^N}F),
\end{aligned}$$

由 b^N 的非退化性，我们得到 $\Phi_\star(\nabla^R_{b^M}(\Phi^\star F))=\nabla^R_{b^N}F$。由于此关系对任意 $F\in\mathcal{C}^\infty(N,\mathbb{R})$ 都成立，我们得到

$$\Phi_\star\circ\nabla^R_{b^M}\circ\Phi^\star=\nabla^R_{b^N}.$$

■

定理3.4的一个值得一提的特殊情形出现在（M，b^M）=（N，b^N）时。更确切地说，有如下结论。

推论 3.5 设（M,b）为赋有几何结构的流形，$\mathcal{G}(M,b)$ 为相应的几何同构群。那么

$$\Phi_\star\circ\nabla^{L/R}_b=\nabla^{L/R}_b\circ(\Phi^{-1})^\star,\ \forall\Phi\in\mathcal{G}(M,b),\tag{3.3}$$

或者明确地说，

$$\Phi_\star(\nabla^{L/R}_bF)=\nabla^{L/R}_b((\Phi^{-1})^\star F),\ \forall F\in\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R}),\ \forall\Phi\in\mathcal{G}(M,b).$$

现在指出，对于任意带有几何结构的流形（M，b），几何同构群有两种自然作用：

(i) $\tau(\Phi)\bullet F:=(\Phi^{-1})^\star F,\ \forall F\in\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R}),\ \forall\Phi\in\mathcal{G}(M,b),$

(ii) $\tilde\tau(\Phi)\bullet X:=\Phi_\star X,\ \forall X\in\mathfrak{X}(M),\ \forall\Phi\in\mathcal{G}(M,b),$

由群 Diff($\mathcal{G}(M,b)$ 的相应作用限制到 M 上得到。就上述定义的作用而言，关系 (3.3) 实际上表明，算子∇^L_b,∇^R_b是 $\mathcal{G}(M,\mathbb{R})$–等变的，即

$$\tilde\tau(\Phi)\bullet\nabla^{L/R}_bF=\nabla^{L/R}_b(\tau(\Phi)\bullet F),\ \forall F\in\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R}),\ \forall\Phi\in\mathcal{G}(M,b).\tag{3.4}$$

3.2 与几何结构相关的括号

本小节将引入并研究若干与几何结构自然相关的括号。这些括号揭示了几何流形的另一项特征，并证明几何流形是莱布尼茨流形的特例。此外，每个几何流形都自然地具有三种莱布尼茨结构。这些括号的存在与几何结构生成的类梯度向量场密切相关。关于莱布尼茨流形的详细信息，参见例如 [2]。

现在给出一个简单的结果，它实际上构成了上述构造的出发点。

命题 3.6 设 b 是流形 M 上的一个几何结构，且 $U \subseteq M$ 是一个开集。则下列恒等式成立

$$b(\nabla_b^L F, \nabla_b^L G) = b(\nabla_b^R F, \nabla_b^R G), \ \forall F, G \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}). \tag{3.5}$$

证明。关系式 (3.5) 直接由几何结构 b 所诱导的左/右梯度向量场的定义得出。事实上，对于任意 F， $G \in \mathcal{C}^\infty(U$， $\mathbb{R})$，我们得到

$$b(\nabla_b^L F, \nabla_b^L G) = \mathrm{d}F \cdot \nabla_b^L G = b(\nabla_b^L G, \nabla_b^R F) = \mathrm{d}G \cdot \nabla_b^R F = b(\nabla_b^R F, \nabla_b^R G).$$

■

命题 3.6 蕴含每个几何流形上都存在一个自然的莱布尼茨括号（M， b），该括号 称为 b–括号，由此证明每个几何流形都是莱布尼茨流形的一个实例。以下结果将对此加以形式化。

定理 3.7 设 b 是流形 M 上的一个几何结构。映射 $\{\cdot,\cdot\}_b : \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \times \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty($ $M, \mathbb{R})$，定义为

$$\{F, G\}_b := b(\nabla_b^L F, \nabla_b^L G) = b(\nabla_b^R F, \nabla_b^R G), \ \forall F, G \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}),$$

是一个莱布尼茨括号（即代数 $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ 上的 $\mathbb{R}-$ 双线性映射，且对每个输入项都是导子），因此 $(M, \{\cdot,\cdot\}_b)$ 是一个莱布尼茨流形。

证明。由于 $\mathbb{R}-\{\cdot,\cdot\}_b$ 的双线性是左/右梯度算子的 $\mathbb{R}$–线性直接导致的，因此我们只证明 $\{\cdot,\cdot\}_b$ 在第一个变量上的导子性质；第二个变量上的导子性质可类似得出。事实上，对于任意 F、 G、 $H \in \mathcal{C}^\infty(M$、 $\mathbb{R})$，有

$$\begin{aligned} \{FG, H\}_b &= b(\nabla_b^L(FG), \nabla_b^L H) = b(F\nabla_b^L G + G\nabla_b^L F, \nabla_b^L H) \\ &= Fb(\nabla_b^L G, \nabla_b^L H) + Gb(\nabla_b^L F, \nabla_b^L H) \\ &= F\{G, H\}_b + G\{F, H\}_b. \end{aligned}$$

■

例3.8 回顾注3.2，若 b 是反对称的且 $\mathrm{d}b = 0$ （即 $(M、 b)$ 是一个辛流形），那么对任意 $H \in \mathcal{C}^\infty(M、 \mathbb{R})$，相应的哈密顿向量场 X_H 与 $\nabla_b^L H = -\nabla_b^R H$ 重合。因此，在这种情况下， b–括号与由辛形式 b 诱导的泊松括号一致，即 $\{F, G\}_b = b(X_F、 X_G)$ $\forall F$， $G \in \mathcal{C}^\infty(M、 \mathbb{R})$。回顾一下，代数 $\mathcal{C}^\infty(M、 \mathbb{R})$ 上的泊松括号是一种满足雅可比恒等式的斜对称莱布尼茨括号。有关泊松括号的详细信息，参见例如 [3], [4]。

现在给出 b–括号的局部表示。更确切地说，在局部坐标 $x = (x^1, \ldots, x^n)$ 下，其中 $n = \dim M$， b–括号可写为

$$\{F, G\}_b(x) = (\mathrm{d}F)_x^\top \mathcal{B}_x^{-\top} (\mathrm{d}G)_x,$$

或者等价地

$$\{F, G\}_b = \sum_{1 \le i,j \le n} \mathcal{B}^{ji} \frac{\partial F}{\partial x^i} \frac{\partial G}{\partial x^j},$$

其中 $(\mathcal{B}^{ij}(x))_{1 \le i,j \le n} := \mathcal{B}_x^{-1}$。

在下面的结果中，我们证明由几何结构 b 生成的类梯度向量场实际上与由 b–括号生成的莱布尼茨向量场相同。

命题3.9 设 b 是流形 M 上的一个几何结构， $\{\cdot, \cdot\}_b$ 是其关联的 b– 括号，且 $F \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$。那么，由 F 生成的左莱布尼茨向量场（即 $G \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \mapsto \{G, F\}_b \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$）与 $\nabla_b^L F$ 相同；而由 F 生成的右莱布尼茨向量场（即 $G \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \mapsto \{F, G\}_b \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$）与$\nabla_b^R F$相同。

证明。固定 $F \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$。于是，左莱布尼茨向量场，

$$G \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \mapsto \{G, F\}_b = b(\nabla_b^L G, \nabla_b^L F) \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}),$$

可等价地写为

$$G \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \mapsto \mathrm{d}G \cdot \nabla_b^L F = (\nabla_b^L F)(G) \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}),$$

因此，它与 $\nabla_b^L F$ 重合。

类似地，右莱布尼茨向量场，

$$G \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \mapsto \{F, G\}_b = b(\nabla_b^R F, \nabla_b^R G) \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}),$$

可等价地写为

$$G \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \mapsto \mathrm{d}G \cdot \nabla_b^R F = (\nabla_b^R F)(G) \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}),$$

因此，它恰好是 $\nabla_b^R F$。 ■

现在我们来介绍几何结构与其相关括号之间的另一种相容性，这次是从几何同构的角度来讨论。更确切地说，我们将证明几何同构保持 b– 括号。

定理 3.10 设 (M, b^M)、(N, b^N) 是两个带有几何结构的流形，且 Φ: $M \to N$ 是一个几何同构。那么

$$\Phi^\star\{F, G\}_{b^N} = \{\Phi^\star F, \Phi^\star G\}_{b^M}, \ \forall F, G \in \mathcal{C}^\infty(N, \mathbb{R}),$$

其中 $\{\cdot,\cdot\}_{b^M}$、$\{\cdot,\cdot\}_{b^N}$ 分别表示与几何结构 b^M 和 b^N 相关联的 $b-$ 括号。

证明。由于 $\Phi: M \to N$ 是一个几何同构，且 $(\Phi^{-1})^\star = (\Phi^\star)^{-1}$，由此可得 $b^N = (\Phi^{-1})^\star b^M$。利用这一观察以及定理 3.4，对任意$F$, $G \in \mathcal{C}^\infty(N, \mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
\{\Phi^\star F, \Phi^\star G\}_{b^M} &= b^M(\nabla^{L/R}_{b^M}(\Phi^\star F), \nabla^{L/R}_{b^M}(\Phi^\star G)) = b^M(\Phi_\star^{-1}(\nabla^{L/R}_{b^N} F), \Phi_\star^{-1}(\nabla^{L/R}_{b^N} G)) \\
&= \Phi^\star((\Phi^\star)^{-1}(b^M(\Phi_\star^{-1}(\nabla^{L/R}_{b^N} F), \Phi_\star^{-1}(\nabla^{L/R}_{b^N} G)))) \\
&= \Phi^\star(((\Phi^{-1})^\star b^M)(\nabla^{L/R}_{b^N} F, \nabla^{L/R}_{b^N} G)) = \Phi^\star(b^N(\nabla^{L/R}_{b^N} F, \nabla^{L/R}_{b^N} G)) \\
&= \Phi^\star\{F, G\}_{b^N},
\end{aligned}$$

因此我们得出结论。 ■

值得一提的定理 3.10 的一个特殊情形是，当 $(M, b^M) = (N, b^N)$ 时。更确切地说，有以下结果成立。

推论 3.11 设 (M, b) 是一个赋有几何结构的流形，且$\mathcal{G}(M, b)$ 是相应的几何同构群。则以下关系成立

$$\Phi^\star\{F, G\}_b = \{\Phi^\star F, \Phi^\star G\}_b, \forall F, G \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}), \ \forall \Phi \in \mathcal{G}(M, b),$$

或者等价地，用群作用来表述

$$\tau(\Phi) \bullet \{F, G\}_b = \{\tau(\Phi) \bullet F, \tau(\Phi) \bullet G\}_b, \ \forall F, G \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}), \ \forall \Phi \in \mathcal{G}(M, b),$$

其中 $\tau(\Psi) \bullet H := H \circ \Psi^{-1}$, $\forall H \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ $\forall \Psi \in \mathcal{G}(M, b)$。

接下来，我们证明，几何流形（M, b）上的 $b-$括号在流形 M 上诱导出另外两个自然的括号，即 $b-$括号的对称部分和反对称部分；它们各自在 M 上也是莱布尼茨括号。

我们先给出与 $b-$括号$\{\cdot,\cdot\}_b$相关的对称括号的定义。

定义 3.12 设 b是流形 M上的一个几何结构，$\{\cdot,\cdot\}_b$是与之相关的 $b-$括号。则映射 $\{\cdot,\cdot\}_{b,sym}$: $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \times \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ 定义为

$$\{F, G\}_{b,sym} := \frac{1}{2}\left(\{F, G\}_b + \{G, F\}_b\right), \ \forall F, G \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}),$$

称为与几何结构 b相关的对称 $b-$括号。

注 3.13 若 b 是对称几何结构（即 (M, b) 是黎曼流形或半黎曼流形），则 $\{\cdot,\cdot\}_{b,sym} = \{\cdot,\cdot\}_b$；而若 b 是斜对称的（即 (M, b) 是近辛流形），则 $\{\cdot,\cdot\}_{b,sym} \equiv 0$。

在下述结果中，我们证明对称的 b–括号本身是 M上的莱布尼茨括号。此外，与之相关的左、右莱布尼茨向量场重合，并且等于由几何结构 b生成的左、右梯度向量场的几何平均。

命题 3.14 设 b是流形 M上的一个几何结构，且 $\{\cdot,\cdot\}_{b,\ sym}$是相应的对称 b–括号。则以下断言成立：

(i) $\{\cdot,\cdot\}_{b,\ sym}$是一个对称莱布尼茨括号，因此 $(M,\{\cdot,\cdot\}_{b,\ sym})$ 是一个对称莱布尼茨流形，

(ii) 对任意固定的 $F\in\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$，相应的左、右莱布尼茨向量场重合，且均等于 $\frac{1}{2}\left(\nabla_b^L F+\nabla_b^R F\right)$。

证明。

(i) 这是 $\{\cdot,\cdot\}_b$是 M上的一个莱布尼茨括号这一事实的直接推论。

(ii) 设 $F\in\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$。由括号 $\{\cdot,\cdot\}_{b,\ sym}$的对称性可知，与 F 相关联的左、右莱布尼茨向量场重合，且为

$$G\in\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})\mapsto\{G,F\}_{b,sym}=\frac{1}{2}(b(\nabla_b^L G,\nabla_b^L F)+b(\nabla_b^L F,\nabla_b^L G))\in\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R}).$$

利用命题3.6，上述关系等于

$$G\in\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})\mapsto\{G,F\}_{b,sym}=\frac{1}{2}(b(\nabla_b^L G,\nabla_b^L F)+b(\nabla_b^R F,\nabla_b^R G))\in\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R}),$$

化简后得到

$$G\in\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})\mapsto\{G,F\}_{b,sym}=\frac{1}{2}(\mathrm{d}G\cdot\nabla_b^L F+\mathrm{d}G\cdot\nabla_b^R F)\in\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R}),$$

或等价地

$$G\in\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})\mapsto\{G,F\}_{b,sym}=\frac{1}{2}((\nabla_b^L F)(G)+(\nabla_b^R F)(G))\in\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R}),$$

因此我们得到结论。

■

注意，定理 3.10 以及推论 3.11 在将b–括号替换为其对称部分后仍然成立。

现在给出与b–括号 $\{\cdot,\cdot\}_b$相关联的斜对称括号的定义。

定义 3.15 设 b 是流形 M 上的几何结构， $\{\cdot,\cdot\}_b$ 是其相关联的 b–括号。那么，由下式给出的映射 $\{\cdot,\cdot\}_{b,skew}$: $\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R}) \times \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$

$$\{F,G\}_{b,skew} := \frac{1}{2}\left(\{F,G\}_b - \{G,F\}_b\right), \ \forall F,G \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R}),$$

称为 与该几何结构相关的斜对称 b–括号 b.

注 3.16 若 b 是反对称几何结构（即 (M,b) 是近辛流形），则 $\{\cdot,\cdot\}_{b,\ skew} = \{\cdot,\cdot\}_b$; 而若 b 是对称的（即 (M,b) 是黎曼或半黎曼流形），则 $\{\cdot,\cdot\}_{b,\ skew} \equiv 0$。

接下来，我们证明斜对称 b–括号是 M 上的几乎泊松括号。此外，相关的哈密顿–泊松向量场等于由该几何结构b生成的左梯度向量场与右梯度向量场之差的一半。

命题 3.17 设 b 是流形 M 上的一个几何结构，且 $\{\cdot,\cdot\}_{b,\ skew}$ 是相关的斜对称 b–括号。则

(i) $\{\cdot,\cdot\}_{b,\ skew}$ 是一个几乎泊松括号（即斜对称莱布尼茨括号），因此 $(M,\{\cdot,\cdot\}_{b,\ skew})$ 是一个几乎泊松流形,

(ii) 对任意固定的 $F \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$, 相应的哈密顿–泊松向量场 $X_F := \{\cdot,F\}_{b,\ skew}$ 由 $\frac{1}{2}\left(\nabla_b^L F - \nabla_b^R F\right)$ 给出。

证明。

(i) 此项的证明直接由以下事实得出： $\{\cdot,\cdot\}_b$ 是 M 上的莱布尼茨括号。

(ii) 设 $F \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$。由括号 $\{\cdot,\cdot\}_{b,\ skew}$ 的反对称性可知， F 所对应的左、右莱布尼茨向量场彼此相反。与 F 对应的哈密顿–泊松向量场（按定义即左莱布尼茨向量场）为

$$G \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R}) \mapsto \{G,F\}_{b,skew} = \frac{1}{2}(b(\nabla_b^L G, \nabla_b^L F) - b(\nabla_b^L F, \nabla_b^L G)) \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R}).$$

利用命题3.6, 上述关系等于

$$G \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R}) \mapsto \{G,F\}_{b,skew} = \frac{1}{2}(b(\nabla_b^L G, \nabla_b^L F) - b(\nabla_b^R F, \nabla_b^R G)) \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R}),$$

这变为

$$G \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R}) \mapsto \{G,F\}_{b,skew} = \frac{1}{2}(\mathrm{d}G \cdot \nabla_b^L F - \mathrm{d}G \cdot \nabla_b^R F) \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R}),$$

或者等价地

$$G \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R}) \mapsto \{G,F\}_{b,skew} = \frac{1}{2}((\nabla_b^L F)(G) - (\nabla_b^R F)(G)) \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R}),$$

因此我们得出结论。

■

注 3.18 当 b 是 $\mathbb{R}^n$ 上的常值几何结构时（即对于任意一对线性函数 F、$G \in \mathcal{C}^\infty$（$\mathbb{R}^n$、$\mathbb{R}$），它们的 $b-$ 括号 $\{F,G\}_b$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上是常值函数），相应的斜对称 $b-$括号也是常值的，因此是泊松括号（即满足雅可比恒等式的斜对称莱布尼茨括号）。因此我们得到，($\mathbb{R}^n$、$\{\cdot,\cdot\}_{b,\ skew}$) 实际上是一个泊松流形。

本节最后指出，定理 3.10 和推论3.11 在将括号替换为其 $b-$反对称部分后仍然成立。

4 几何结构生成的类拉普拉斯算子

本节旨在引入并研究自然关联于几何结构的类拉普拉斯算子。为此，除了几何结构之外，还需要在流形上赋予体积形式，以便定义性质良好的散度算子。因此，我们所需的自然背景是赋有几何结构的体积流形 (M,μ)（即带有固定体积形式μ的光滑可定向流形）。

给定体积流形 (M,μ) 和向量场 X，由关系 $\mathcal{L}_X\mu = (\mathrm{div}_\mu X)\mu$ 唯一定义的标量函数 $\mathrm{div}_\mu X$ 称为 X 关于体积形式 μ 的散度，其中 $\mathcal{L}_X$ 表示沿向量场X的李导数。由于 $\mathcal{L}_X\mu = \mathrm{d}(\mathrm{i}_X\mu) + \mathrm{i}_X(\mathrm{d}\mu)$ 和 $\mathrm{d}\mu = 0$，关系 $\mathcal{L}_X\mu = (\mathrm{div}_\mu X)\mu$ 等价于 $\mathrm{d}(\mathrm{i}_X\mu) = (\mathrm{div}_\mu X)\mu$。回忆一下，$\mathrm{i}_X\mu$表示向量场 X 与体积形式 μ 的内积，即 $(\mathrm{i}_X\mu)(X_1,\ldots,X_{n-1}) := \mu(X,X_1,\ldots,X_{n-1})$ $\forall X_1,\ldots,X_{n-1} \in \mathfrak{X}(M)$，其中 $n = \dim M$。

现在，我们已具备所有必要要素，可以定义流形上与几何结构相关的类拉普拉斯算子。这些算子将线性情形中的类拉普拉斯算子推广到流形上；这类算子最近在[5]中引入。

定义 4.1 设 b 是体积流形（M,μ）上的一个几何结构，且 $U \subseteq M$是一个开集。那么对于 $F \in \mathcal{C}^\infty(U,\mathbb{R})$，$F$的左拉普拉斯算子定义为$\Delta^L_{b,\ \mu}F := \mathrm{div}_\mu(\nabla^L_b F)$；类似地，$F$的右拉普拉斯算子定义为$\Delta^R_{b,\ \mu}F := \mathrm{div}_\mu(\nabla^R_b F)$。
请注意，$\mathcal{C}^2$ 是使左/右拉普拉斯算子的定义成立所需的充分正则性类。尽管如此，为了在全文采用统一的方法，并避免复杂的表述，我们选择在光滑类中进行讨论。

现在来分析同一流形上与两种不同体积形式相关联的类拉普拉斯算子之间的关系。更确切地说，给定体积流形 (M,μ) 上的另一种体积形式 ω，存在函数 $f \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$，满足 $f(m) \neq 0$, $\forall m \in M$，使得 $\omega = f\mu$。于是，利用向量场 $X = \nabla^{L/R}_b F$ 的公式 $\mathrm{div}_{f\mu}(X) = \mathrm{div}_\mu(X) + \frac{1}{f}\mathrm{d}f \cdot X$，可得 $\Delta^{L/R}_{b,\ f\mu}F = \Delta^{L/R}_{b,\ \mu}F + \frac{1}{f}\mathrm{d}f \cdot \nabla^{L/R}_b F$。

更准确地说，在定义 4.1 的假设下，我们有

$$\Delta^L_{b,f\mu}F = \Delta^L_{b,\mu}F + \frac{1}{f}\, b(\nabla^L_b f, \nabla^L_b F), \qquad \Delta^R_{b,f\mu}F = \Delta^R_{b,\mu}F + \frac{1}{f}\, b(\nabla^R_b F, \nabla^R_b f),$$

或者等价地（参见命题3.6）

$$\Delta^L_{b,f\mu}F = \Delta^L_{b,\mu}F + \frac{1}{f}\, \{f, F\}_b, \qquad \Delta^R_{b,f\mu}F = \Delta^R_{b,\mu}F + \frac{1}{f}\, \{F, f\}_b.$$

因此，我们证明了以下结果。

命题 4.2 设 b 是体积流形 (M,μ) 上的一个几何结构，并设 ω 是 M 上的另一体积形式。那么以下关系成立

$$\Delta^L_{b,\omega} = \Delta^L_{b,\mu} + \frac{1}{f}\, \{f, \cdot\}_b, \qquad \Delta^R_{b,\omega} = \Delta^R_{b,\mu} + \frac{1}{f}\, \{\cdot, f\}_b,$$

其中，$f \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$ 是由 $\omega = f\mu$ 给出的处处非零函数 .

由于我们研究的是体积流形 (M,μ) 上的几何结构 b，其定义中明确提到了体积形式 μ，因此从现在起，每当体积形式可由上下文明确时，我们将使用简写记号 $\Delta^{L/R}_{b,\mu} =: \Delta^{L/R}_b$。

接下来，我们介绍一些由黎曼流形上的几何结构定义的类拉普拉斯算子的具体例子。这种情形的特殊之处在于存在一个自然的散度算子，它与由黎曼度量诱导的典范体积形式相关联。

注 4.3 若 b 是可定向黎曼流形 (M,g) 上的几何结构，且 $U \subseteq M$ 是一个开集，那么对于 $F \in \mathcal{C}^\infty(U,\mathbb{R})$，$F$ 的左拉普拉斯算子由 $\Delta^L_b F = \mathrm{div}_g(\nabla^L_b F)$ 给出，而 F 的右拉普拉斯算子由 $\Delta^R_b F = \mathrm{div}_g(\nabla^R_b F)$ 给出，其中 $\mathrm{div}_g X$ 是由 g 诱导的经典散度算子，即由关系式 $\mathcal{L}_X \mu_g = (\mathrm{div}_g X)\mu_g$ 唯一确定；μ_g 是由 g 诱导的M 上的典范黎曼体积形式。

现在我们用局部坐标来表示注4.3 中的主要量，$x = (x^1, \ldots, x^n)$，其中 $n =$维数 M。更确切地说，度量 g在局部可表示为如下对称正定矩阵

$$(g_{ij}(x))_{1\le i,j\le n},\ g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right),$$

其行列式记为 $|g| :=\det(g_{ij})$。

对于任意局部表示为 $X = X^1\dfrac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + X^n\dfrac{\partial}{\partial x^n}$的向量场，$\mathrm{div}_g X$ 的表达式为

$$\mathrm{div}_g X = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{|g|}\, X^i). \tag{4.1}$$

因此，将上述等式与左/右梯度向量场的表达式（3.1）结合起来，可得 b–标量函数 $\mathcal{C}^\infty$ F的拉普拉斯算子的局部表示：

$$\Delta_b^L F = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sum_{j=1}^n \mathcal{B}^{ji} \sqrt{|g|} \, \frac{\partial F}{\partial x^j} \right),$$

$$\Delta_b^R F = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sum_{j=1}^n \mathcal{B}^{ij} \sqrt{|g|} \, \frac{\partial F}{\partial x^j} \right),$$

其中，几何结构 b 在局部由矩阵给出

$$\mathcal{B}_x := (\mathcal{B}_{ij}(x))_{1\le i,j\le n}, \ \mathcal{B}_{ij} = b\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right),$$

且 $(\mathcal{B}^{ij}(x))_{1\le i,\ j\le n} = \mathcal{B}_x^{-1}$。

现在让我们回到赋有几何结构的体积流形上类拉普拉斯算子的一般情形，并考察当几何结构为对称、反对称或常数时会发生什么。

Rem注 4.4 以下断言是定义 *4.* 的直接推论 *1.*

(i) 如果 b 是对称的（即，b 是黎曼或半黎曼结构），那么$\Delta_b^L = \Delta_b^R$，从而诱导出一个几何 b–拉普拉斯算子，记为 Δ_b。特别地，如果 $b = g$ 是 M 上的黎曼度量且 $\mu = \mu_g$，那么 $\Delta_b = \Delta_g$，其中Δ_g 是黎曼流形 (M, g) 上的拉普拉斯–贝尔特拉米算子；如果 $b = h$，其中 h 是 M 上的洛伦兹度量且 $\mu = \mu_h$，那么 $\Delta_b = \Box_h$，其中 $\Box_h$ 是洛伦兹流形 (M, h) 上的达朗贝尔算子。

(ii) 若 b 反对称（即 b 是一种近辛结构），则 $\Delta_b^L = -\Delta_b^R$。请注意，要使 M 上存在近辛结构，其维数必须为偶数（$\dim M = 2n$）。回顾注3.2，若进一步有 $\mathrm{d}b = 0$（即 (M, b) 是一个辛流形），那么对于任意 $H \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$，相应的哈密顿向量场 X_H 等于 $\nabla_b^L H = -\nabla_b^R H$。由于 $\mathcal{L}_{X_H} b = \mathrm{d}(\mathrm{i}_{X_H} b) + \mathrm{i}_{X_H}(\mathrm{d}b) = \mathrm{d}(\mathrm{d}H) + \mathrm{i}_{X_H}(0) = 0$，我们得到 $\mathcal{L}_{X_H}\Lambda = 0$（其中 $\Lambda := (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} b^n$ 是刘维尔体积形式，且 $b^n := \underbrace{b \wedge \cdots \wedge b}_{n\text{-times}}$），因此 $\mathrm{div}_\Lambda X_H = 0$, $\forall H \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$。由此，对于任意 $H \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$，有 $\Delta_{b,\Lambda}^L H = \mathrm{div}_\Lambda(\nabla_b^L H) = \mathrm{div}_\Lambda X_H = 0$；又由于 $\Delta_{b,\Lambda}^R = -\Delta_{b,\Lambda}^L$，可知 $\Delta_{b,\Lambda}^R H =$ 也为 0。因此，在辛流形上，相对于刘维尔体积形式定义的类拉普拉斯算子恒等于零。另一方面，由例3.8和命题 4.2 可知，若 ω 是辛流形 (M, b) 上任意给定的体积形式，则 $\Delta_{b,\omega}^R = \frac{1}{f}\mathcal{L}_{X_f} = -\Delta_{b,\omega}^L$，其中 $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ 是由 $\omega = f\Lambda$ 给出的处处非零函数。

（iii）如果 b 是常值几何结构，定义在 $\mathbb{R}^n$ 上，并赋有典范体积形式，则近期在 *[5]* 中已证明$\Delta_b^L = \Delta_b^R$，无论 b的类对称性质如何。

4.1 类拉普拉斯算子的基本性质 s

本小节将介绍赋有几何结构的一般体积流形上的类拉普拉斯算子的一些基本性质。

命题 4.5 设 b 是体积流形 (M,μ) 上的一个几何结构，且 $U\subseteq M$ 是一个开集。则对于任意 $F,G\in\mathcal{C}^\infty(U,\mathbb{R})$ 和 $s,t\in\mathbb{R}$，以下恒等式成立

(i) $\Delta_b^{L/R}(sF+tG)=s\Delta_b^{L/R}F+t\Delta_b^{L/R}G$, (ii) $\Delta_b^{L/R}(FG)$ $=F\Delta_b^{L/R}G+G\Delta_b^{L/R}F+b(\nabla_b^{L/R}F,\nabla_b^{L/R}G)+b(\nabla_b^{L/R}G,\nabla_b^{L/R}F)$, (iii) $\Delta_b^L(FG)$ $-F\Delta_b^LG-G\Delta_b^LF=\Delta_b^R(FG)-F\Delta_b^RG-G\Delta_b^RF$.

证明. (i) 对于任意 $F,G\in\mathcal{C}^\infty(U,\mathbb{R})$ 和 $s,t\in\mathbb{R}$，有

$$\begin{aligned}\Delta_b^{L/R}(sF+tG)&=\Delta_b^{L/R}(sF+tG)=\operatorname{div}_\mu(\nabla_b^{L/R}(sF+tG))=\operatorname{div}_\mu(s\nabla_b^{L/R}F+t\nabla_b^{L/R}G)\\&=s\operatorname{div}_\mu(\nabla_b^{L/R}F)+t\operatorname{div}_\mu(\nabla_b^{L/R}G)=s\Delta_b^{L/R}F+t\Delta_b^{L/R}G.\end{aligned}$$

(ii) 我们只证明左拉普拉斯算子的所需恒等式，因为右拉普拉斯算子的证明思路类似。因此，对于任意 $F,G\in\mathcal{C}^\infty(U,\mathbb{R})$，依次可得

$$\begin{aligned}\Delta_b^L(FG)&=\operatorname{div}_\mu(\nabla_b^L(FG))=\operatorname{div}_\mu(G\nabla_g^LF)+\operatorname{div}_\mu(F\nabla_g^LG)=G\operatorname{div}_\mu(\nabla_b^LF)+(\nabla_b^LF)(G)\\&\quad+F\operatorname{div}_\mu(\nabla_b^LG)+(\nabla_b^LG)(F)=(\nabla_b^LF)(G)+(\nabla_b^LG)(F)+F\operatorname{div}_\mu(\nabla_b^LG)\\&\quad+G\operatorname{div}_\mu(\nabla_b^LF)=\mathrm{d}G\cdot\nabla_b^LF+\mathrm{d}F\cdot\nabla_b^LG+F\Delta_b^LG+G\Delta_b^LF\\&=b(\nabla_b^LG,\nabla_b^LF)+b(\nabla_b^LF,\nabla_b^LG)+F\Delta_b^LG+G\Delta_b^LF.\end{aligned}$$

(iii) 利用前一个恒等式和命题 3.6，可知对于任意 F，$G\in\mathcal{C}^\infty(U,\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}\Delta_b^L(FG)-F\Delta_b^LG-G\Delta_b^LF&=b(\nabla_b^LF,\nabla_b^LG)+b(\nabla_b^LG,\nabla_b^LF)\\&=b(\nabla_b^RF,\nabla_b^RG)+b(\nabla_b^RG,\nabla_b^LR)=\Delta_b^R(FG)-F\Delta_b^RG-G\Delta_b^RF,\end{aligned}$$

由此便得到了所需的恒等式。 ■

现在回顾备注 4.4 中的结论：在辛流形 (M,b) 上，与任意给定体积形式 ω 相关的类拉普拉斯算子可表示为 $\Delta_{b,\,\omega}^R=\frac{1}{f}\mathcal{L}_{X_f}=-\Delta_{b,\,\omega}^L$，其中 $f\in\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$ 是由等式 $\omega=f\Lambda$ 定义的处处非零函数，而 Λ 是刘维尔体积形式。因此，两个类拉普拉斯算子都满足莱布尼茨恒等式，因为李导数 $\mathcal{L}_{X_f}:\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})\to\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$ 也满足该恒等式。

显然，对于由任意几何结构 b 生成的类拉普拉斯算子，这种情况通常不会发生；这一点可从拉普拉斯–贝尔特拉米算子的经典性质（若 b 是黎曼度量）或达朗贝尔算子的经典性质（若 b 是洛伦兹度量）得知。

以下结果给出了对称 b–括号的一种解析解释：它衡量了类拉普拉斯算子不满足莱布尼茨恒等式的程度。

定理 4.6 设 b 为体积流形（M、 μ）上的一个几何结构，且 $\{\cdot,\cdot\}_b$、$\{\cdot,\cdot\}_{b,\ sym}$ 分别为其关联的 b–括号和对称 b–括号。则

(i) $\{F,G\}_{b,sym}=\frac{1}{2}\left(\Delta_b^{L/R}(FG)\ -F\Delta_b^{L/R}G-G\Delta_b^{L/R}F\right),\ \forall F,G\in\mathcal{C}^\infty(M,$ $\mathbb{R})$, (ii) $\Delta_b^{L/R}\phi(F)\ =\phi'(F)\Delta_b^{L/R}F+\phi''(F)\{F,F\}_b,\ \forall F\in\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})\ \ \forall\phi\in\mathcal{C}^\infty($ $\mathbb{R},\mathbb{R})$.

证明。

(i) 由命题 4.5、定义 3.12和命题3.6可直接得出。

(ii) 对任意 $F\in\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$ 和 $\phi\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$，依次可得

$$\begin{aligned}\Delta_b^{L/R}\phi(F)&=\mathrm{div}_\mu(\nabla_b^{L/R}\phi(F))=\mathrm{div}_\mu(\phi'(F)\nabla_b^{L/R}F)=\phi'(F)\,\mathrm{div}_\mu(\nabla_b^{L/R}F)\\&+(\nabla_b^{L/R}F)(\phi'(F))=\phi'(F)\Delta_b^{L/R}F+\mathrm{d}(\phi'(F))\cdot\nabla_b^{L/R}F\\&=\phi'(F)\Delta_b^{L/R}F+\phi''(F)\mathrm{d}F\cdot\nabla_b^{L/R}F=\phi'(F)\Delta_b^{L/R}F\\&+\phi''(F)b(\nabla_b^{L/R}F,\nabla_b^{L/R}F)=\phi'(F)\Delta_b^{L/R}F+\phi''(F)\{F,F\}_b.\end{aligned}$$

■

由于 b–括号，因此对称 b–括号也与体积形式无关，定理 4.6 表明，对于体积流形 ω 上的任意体积形式（M， μ），相应的类拉普拉斯算子满足以下恒等式

(i) $\{F,G\}_{b,sym}=\frac{1}{2}\left(\Delta_{b,\omega}^{L/R}(FG)-F\Delta_{b,\omega}^{L/R}G-G\Delta_{b,\omega}^{L/R}F\right),\ \forall F,G\in\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R}),$

(ii) $\Delta_{b,\omega}^{L/R}\phi(F)=\phi'(F)\Delta_{b,\omega}^{L/R}F+\phi''(F)\{F,F\}_b,\ \forall F\in\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R}),\ \forall\phi\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}).$

因此，以下关系也成立

(i) $\Delta_{b,\mu}^{L/R}(FG)-F\Delta_{b,\mu}^{L/R}G-G\Delta_{b,\mu}^{L/R}F=\Delta_{b,\omega}^{L/R}(FG)-F\Delta_{b,\omega}^{L/R}G-G\Delta_{b,\omega}^{L/R}F,\ \forall F,G\in\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R}),$

(ii) $\Delta_{b,\mu}^{L/R}\phi(F)-\phi'(F)\Delta_{b,\mu}^{L/R}F=\Delta_{b,\omega}^{L/R}\phi(F)-\phi'(F)\Delta_{b,\omega}^{L/R}F,\ \forall F\in\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R}),\ \forall\phi\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}).$

4.2 类拉普拉斯算子与几何态射

本小节旨在分析左/右 Laplace 算子与几何同构之间的相容性。为此，我们首先需要回顾一个关于散度算子与保体积微分同胚之间相容性的经典结果。为了给出自洽的论述，我们也将证明这一结果。

命题 4.7 设 (M,μ^M)、(N,μ^N) 为两个体积流形，且 $\Phi\colon M\to N$ 为一个满足 $\Phi^\star\mu^N=\mu^M$ 的微分同胚。则以下关系成立

$$\Phi^\star\circ\operatorname{div}_{\mu^N}\circ\Phi_\star=\operatorname{div}_{\mu^M},$$

或者明确地说

$$\Phi^\star\operatorname{div}_{\mu^N}(\Phi_\star X)=\operatorname{div}_{\mu^M}X,\ \forall X\in\mathfrak{X}(M).$$

证明。对于任意固定的 $X\in\mathfrak{X}(M)$，有

$$\begin{aligned}(\Phi^\star\operatorname{div}_{\mu^N}(\Phi_\star X))\mu^M&=(\Phi^\star\operatorname{div}_{\mu^N}(\Phi_\star X))\Phi^\star\mu^N=\Phi^\star(\operatorname{div}_{\mu^N}(\Phi_\star X)\mu^N)=\Phi^\star(\mathrm{d}(\mathbf{i}_{\Phi_\star X}\mu^N))\\&=\mathrm{d}(\Phi^\star(\mathbf{i}_{\Phi_\star X}\mu^N))=\mathrm{d}(\mathbf{i}_X(\Phi^\star\mu^N))=\mathrm{d}(\mathbf{i}_X\mu^M)=(\operatorname{div}_{\mu^M}X)\mu^M,\end{aligned}$$

因此

$$\Phi^\star\operatorname{div}_{\mu^N}(\Phi_\star X)=\operatorname{div}_{\mu^M}X.$$

■

命题 4.7的一个重要特例出现在（M，μ^M）=（N，μ^N）时。更准确地说，有如下结果。

推论 4.8 设 (M,μ) 是一个体积流形，且 $\mathrm{Diff}_\mu(M):=\{\Phi\in\mathrm{Diff}(M)\mid\Phi^\star\mu=\mu\}$ 是与之关联的保体积微分同胚群。那么

$$\operatorname{div}_\mu\circ\Phi_\star=(\Phi^{-1})^\star\circ\operatorname{div}_\mu,\ \forall\Phi\in\mathrm{Diff}_\mu(M),$$

或者，明确地用群作用表示，

$$\operatorname{div}_\mu(\tilde\tau(\Phi)\bullet X)=\tau(\Phi)\bullet\operatorname{div}_\mu X,\ \forall X\in\mathfrak{X}(M),\ \forall\Phi\in\mathrm{Diff}_\mu(M),\tag{4.2}$$

其中 $\mathrm{Diff}(M)$（因此也包括其任意子群，例如 $\mathrm{Diff}_\mu(M)$）在$\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$ 和 $\mathfrak{X}(M)$ 上的作用由下式给出

(i) $\tau(\Phi)\bullet F:=(\Phi^{-1})^\star F,\ \forall F\in\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R}),\ \forall\Phi\in\mathrm{Diff}(M),$

(ii) $\tilde\tau(\Phi)\bullet X:=\Phi_\star X,\ \forall X\in\mathfrak{X}(M)\ \ \forall\Phi\in\mathrm{Diff}(M).$

关系 (4.2) 实际上说明算子 div_μ 是 $\mathrm{Diff}_\mu(M)$–等变的。

下面的结果给出了定义在赋有几何结构的体积流形上的左/右 Laplace 算子与保体积几何同构之间的一种自然相容性。

定理 4.9 设 (M,μ^M,b^M)、(N,μ^N,b^N) 是两个赋有几何结构的体积流形，且 $\Phi:M\to N$ 是一个满足 $\Phi^\star\mu^N=\mu^M$ 的几何同构。那么下列关系成立:

$$\Delta^{L/R}_{b^M}\circ\Phi^\star=\Phi^\star\circ\Delta^{L/R}_{b^N},$$

或者明确地

$$\Delta^{L/R}_{b^M}(\Phi^\star F)=\Phi^\star(\Delta^{L/R}_{b^N}F),\ \forall F\in\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R}).$$

证明。 利用定理 3.4、命题 4.7 以及 b–拉普拉斯算子的定义可知

$$\begin{aligned}\Delta_{b^M}^{L/R}\circ\Phi^\star=\mathrm{div}_{\mu^M}\circ\nabla_{b^M}^{L/R}\circ\Phi^\star&=\Phi^\star\circ(\Phi^\star)^{-1}\circ\mathrm{div}_{\mu^M}\circ\Phi_\star^{-1}\circ\Phi_\star\circ\nabla_{b^M}^{L/R}\circ\Phi^\star\\&=\Phi^\star\circ((\Phi^\star)^{-1}\circ\mathrm{div}_{\mu^M}\circ\Phi_\star^{-1})\circ(\Phi_\star\circ\nabla_{b^M}^{L/R}\circ\Phi^\star)\\&=\Phi^\star\circ\mathrm{div}_{\mu^N}\circ\nabla_{b^N}^{L/R}=\Phi^\star\circ\Delta_{b^N}^{L/R},\end{aligned}$$

因此，我们得出了结论。 ■

现在来看看，当（M、 μ^M、 b^M） =（N、 μ^N、 b^N）时，定理 4.9 在特殊情况下会变成什么样。

推论 4.10 设（M， μ， b）是一个带有几何结构的体积流形，且 $\mathbf{Diff}_\mu(M,b):=\mathbf{Diff}_\mu(M)\cap\mathcal{G}(M,b)$ 是相应的保体积几何变换群。则

$$\Delta_b^{L/R}\circ\Phi^\star=\Phi^\star\circ\Delta_b^{L/R},\ \forall\Phi\in\mathrm{Diff}_\mu(M,b),$$

或者，明确地用群作用表示，

$$\Delta_b^{L/R}(\tau(\Phi)\bullet F)=\tau(\Phi)\bullet(\Delta_b^{L/R}F),\ \forall F\in\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R}),\ \forall\Phi\in\mathrm{Diff}_\mu(M,b),$$

也就是说，算子 Δ_b^L,Δ_b^R 都是 $\mathbf{Diff}_\mu(M,b)$– 等变的。

5 类拉普拉斯算子的格林恒等式

本节给出由一般几何结构 b 生成的类拉普拉斯算子所满足的格林恒等式的等价形式。当 b 是黎曼度量时，我们便得到黎曼流形上的经典格林恒等式；而当 b 是辛结构时，我们便得到一些众所周知的恒等式，这些恒等式涉及对紧支撑光滑函数的泊松括号进行积分（积分所依据的是刘维尔体积形式）。

现在陈述本节的主要结果，它给出了一般几何流形上左/右 Laplace 算子的类格林恒等式。

定理 5.1 设 M 为带边界的定向流形， μ 为M上的体积形式。设 b为 M上的几何结构， $\{\cdot,\cdot\}_b$为相应的 b–括号。那么对于任意 $F,G\in\mathcal{C}_c^\infty(M,\mathbb{R})$，以下恒等式成立：

(i)
$$\int_M F\Delta_b^L G\ \mu=-\int_M\{F,G\}_b\ \mu+\int_{\partial M}F\ \mathbf{i}_{\nabla_b^L G}\ \mu,$$

(ii)
$$\int_M F\Delta_b^R G\ \mu=-\int_M\{G,F\}_b\ \mu+\int_{\partial M}F\ \mathbf{i}_{\nabla_b^R G}\ \mu,$$

(iii)

$$\int_M (F\Delta_b^L G - G\Delta_b^R F)\ \mu = \int_{\partial M} \mathbf{i}_{F\nabla_b^L G - G\nabla_b^R F}\ \mu.$$

证明。

(i) 证明的关键是对体积流形 (M,μ) 上定义的向量场 $F\nabla_b^L G$应用散度定理。为此，我们首先计算

$$\begin{aligned}\operatorname{div}_\mu(F\nabla_b^L G) &= F\operatorname{div}_\mu(\nabla_b^L G) + (\nabla_b^L G)(F) = F\Delta_b^L G + \mathrm{d}F\cdot\nabla_b^L G\\ &= F\Delta_b^L G + b(\nabla_b^L F, \nabla_b^L G) = F\Delta_b^L G + \{F,G\}_b.\end{aligned}$$

由上述关系结合散度定理可得

$$\begin{aligned}\int_M F\Delta_b^L G\ \mu &= -\int_M \{F,G\}_b\ \mu + \int_M \operatorname{div}_\mu(F\nabla_b^L G)\ \mu\\ &= -\int_M \{F,G\}_b\ \mu + \int_{\partial M} \mathbf{i}_{F\nabla_b^L G}\ \mu\\ &= -\int_M \{F,G\}_b\ \mu + \int_{\partial M} F\ \mathbf{i}_{\nabla_b^L G}\ \mu,\end{aligned}$$

从而得到所需的恒等式。

(ii) 对于这一项，我们使用向量场 $F\nabla_b^R G$ 的散度定理。与前面一样，我们首先计算

$$\begin{aligned}\operatorname{div}_\mu(F\nabla_b^R G) &= F\operatorname{div}_\mu(\nabla_b^R G) + (\nabla_b^R G)(F) = F\Delta_b^R G + \mathrm{d}F\cdot\nabla_b^R G\\ &= F\Delta_b^R G + b(\nabla_b^R G, \nabla_b^R F) = F\Delta_b^R G + \{G,F\}_b.\end{aligned}$$

应用散度定理可得

$$\begin{aligned}\int_M F\Delta_b^R G\ \mu &= -\int_M \{G,F\}_b\ \mu + \int_M \operatorname{div}_\mu(F\nabla_b^R G)\ \mu\\ &= -\int_M \{G,F\}_b\ \mu + \int_{\partial M} \mathbf{i}_{F\nabla_b^R G}\ \mu\\ &= -\int_M \{G,F\}_b\ \mu + \int_{\partial M} F\ \mathbf{i}_{\nabla_b^R G}\ \mu.\end{aligned}$$

(iii) 利用关系式 (i) 和 (ii)，依次可得

$$\begin{aligned}\int_M (F\Delta_b^L G - G\Delta_b^R F)\ \mu &= \int_M F\Delta_b^L G\ \mu - \int_M G\Delta_b^R F\ \mu = -\int_M \{F,G\}_b\ \mu\\ &\quad + \int_{\partial M} F\ \mathbf{i}_{\nabla_b^L G}\ \mu - \left(-\int_M \{F,G\}_b\ \mu + \int_{\partial M} G\ \mathbf{i}_{\nabla_b^R F}\ \mu\right)\\ &= \int_{\partial M}\left(F\ \mathbf{i}_{\nabla_b^L G}\ \mu - G\ \mathbf{i}_{\nabla_b^R F}\ \mu\right) = \int_{\partial M} \mathbf{i}_{F\nabla_b^L G - G\nabla_b^R F}\ \mu.\end{aligned}$$

■

在陈述下一个结果之前，我们先回顾黎斯表示定理：给定一个定向流形 M 及其固定的体积形式 μ，存在一个唯一的测度 m_μ，定义在 M 上的博雷尔 σ–代数上，使得对于每个连续紧支撑标量函数 $F \in \mathcal{C}_c(M,\mathbb{R})$,

$$\int_M F \mathrm{d}m_\mu = \int_M F\mu.$$

关于上述备注的详细内容，参见例如 [1]。

以下结果是定理 5.1 在流形M 无边界时的重述。

定理 5.2 设 M 为无边界定向流形， μ 为 M上的体积形式。设 b为 M上的几何结构，$\{\cdot,\cdot\}_b$为相应的 b–括号。那么对于任意F,$G \in \mathcal{C}_c^\infty(M,\mathbb{R})$，以下恒等式成立：

(i)

$$\int_M F\Delta_b^L G \ \mathrm{d}m_\mu = -\int_M \{F,G\}_b \ \mathrm{d}m_\mu,$$

(ii)

$$\int_M F\Delta_b^R G \ \mathrm{d}m_\mu = -\int_M \{G,F\}_b \ \mathrm{d}m_\mu,$$

(iii)

$$(\Delta_b^L G, F) = \int_M F\Delta_b^L G \ \mathrm{d}m_\mu = \int_M G\Delta_b^R F \ \mathrm{d}m_\mu = (G, \Delta_b^R F),$$

其中 $(\cdot,\cdot)$ 表示 $L^2(M,m_\mu)$内积。

显然，当 M 为带边界流形时，定理5.2 中的恒等式对于任意在 ∂M 上消失的紧支撑光滑函数也成立。

备注 5.3 注意，定理 *5.1* 和 *5.2* 中的恒等式在以下情况下仍然成立：若光滑函数 F、G 中至少有一个是紧支撑的。因此：

（i）若 $F \equiv 1$，定理 *5.1* 给出的恒等式化为

$$\int_M \Delta_b^{L/R} G \ \mu = \int_{\partial M} \mathbf{i}_{\nabla_b^{L/R} G} \ \mu, \ \forall G \in \mathcal{C}_c^\infty(M,\mathbb{R}),$$

(ii) 若 $F \equiv 1$，定理 *5.2* 给出的恒等式可化为

$$\int_M \Delta_b^{L/R} G \ \mathrm{d}m_\mu = 0, \ \forall G \in \mathcal{C}_c^\infty(M,\mathbb{R}).$$

5.1 黎曼流形上类拉普拉斯算子的格林恒等式

本小节将介绍定义在黎曼流形（M， g）上的几何结构 b所对应的左/右 Laplace 算子的格林恒等式。对于 $b = g$，这是一个特殊情形，此时可得到拉普拉斯–贝尔特拉米算子的经典格林恒等式。在陈述主要结果之前，我们先回顾：若（M， g）是带边界 ∂M的定向黎曼流形，则沿 ∂M存在唯一的外指单位法向量场 ν。此时，定理 5.1 可表述为：

推论 5.4 设 (M, g) 是一个带边界 ∂M 的定向黎曼流形，且μ_M，$\mu_{\partial M}$分别是 M 和 ∂M 上的典范黎曼体积形式。设 b 是 M 上的一个几何结构， $\{\cdot,\cdot\}_b$ 是与之相关的 $b-$ 括号。则对任意$F, G \in \mathcal{C}_c^\infty(M, \mathbb{R})$，以下恒等式成立：

(i)

$$\int_M F\Delta_b^L G \, \mathrm{d}m_{\mu_M} = -\int_M \{F, G\}_b \, \mathrm{d}m_{\mu_M} + \int_{\partial M} Fg(\nabla_b^L G, \nu) \, \mathrm{d}m_{\mu_{\partial M}},$$

(ii)

$$\int_M F\Delta_b^R G \, \mathrm{d}m_{\mu_M} = -\int_M \{G, F\}_b \, \mathrm{d}m_{\mu_M} + \int_{\partial M} Fg(\nabla_b^R G, \nu) \, \mathrm{d}m_{\mu_{\partial M}},$$

(iii)

$$\int_M (F\Delta_b^L G - G\Delta_b^R F) \, \mathrm{d}m_{\mu_M} = \int_{\partial M} g(F\nabla_b^L G - G\nabla_b^R F, \nu) \, \mathrm{d}m_{\mu_{\partial M}},$$

其中， ν 是沿 ∂M 的向外单位法向量场。

对于 $b = g$，我们得到 $\Delta_b^L = \Delta_b^R = \Delta_g$ （其中 Δ_g 是经典的拉普拉斯–贝尔特拉米算子），因此上述关系成为黎曼流形上的格林恒等式。

注 5.5 注意，与一般情形相同，推论 5.4 中的恒等式在至少一个光滑函数 F， G 为紧支撑时仍然成立。因此，若 $F \equiv 1$ 则推论 5.4 给出的恒等式化为

$$\int_M \Delta_b^{L/R} G \, \mathrm{d}m_{\mu_M} = \int_{\partial M} g(\nabla_b^{L/R} G, \nu) \, \mathrm{d}m_{\mu_{\partial M}}, \ \forall G \in \mathcal{C}_c^\infty(M, \mathbb{R}).$$

5.2 辛流形上类拉普拉斯算子的格林恒等式

在本小节中，我们给出辛流形上左/右 Laplace 算子的格林恒等式。在陈述结果之前，我们先回顾备注 4.4 指出，若（M， b）是一个 $2n$–维辛流形流形，那么对于任意 $H \in \mathcal{C}^\infty$（M， $\mathbb{R}$），相应的

相关的哈密顿向量场 X_H 等于 $\nabla_b^L H = -\nabla_b^R H$。此外，如果 $\Lambda = (-1)^{[n/2]} n! \, b^n$

表示 (M,b) 的刘维尔体积形式，则对任意 $H\in\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$，$\mathbf{div}_\Lambda X_H=0$。因此，与 Λ 相关的 b–拉普拉斯算子恒等于零，即$\Delta^R_{b,\Lambda}H=\Delta^L_{b,\Lambda}H\equiv 0$, $\forall H\in\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$。若 ω_1 是 M 上任意给定的体积形式，则相应的类拉普拉斯算子为 $\Delta^R_{b,\omega}=\frac{1}{f}\mathcal{L}_{X_f}=-\Delta^L_{b,\omega}$，其中 $f\in\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$ 表示由 $\omega=f\Lambda$ 给出的处处非零函数。

因此，结合上述说明以及 b–括号的反对称性，可知定理 5.1可表述为:

推论 5.6 设 (M,b) 是一个辛流形，$\{\cdot,\cdot\}_b$是与辛结构 b 相联系的泊松括号。若 ω 是 M 上任意给定的体积形式，则对任意 $F,G\in\mathcal{C}^\infty_c(M,\mathbb{R})$

$$\int_M\{F,G\}_b\,\omega=-\int_M\frac{F}{f}\{f,G\}_b\,\omega+\int_{\partial M}F\,\mathbf{i}_{X_G}\omega=-\int_M\{F,f\}_b\frac{G}{f}\,\omega-\int_{\partial M}G\,\mathbf{i}_{X_F}\omega,$$

其中，$f\in\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$ 是由 $\omega=f\Lambda$ 给出的处处非零函数，Λ 是辛流形 (M,b) 的刘维尔体积形式。

请注意，与一般情形一样，只要这些光滑函数中至少一个 F、G 具有紧支撑，上述恒等式依然成立。因此，若 $F\equiv 1$ 推论 5.6中的恒等式可化为

$$\int_M\frac{1}{f}\{f,G\}_b\,\omega=\int_{\partial M}\mathbf{i}_{X_G}\omega,\ \forall G\in\mathcal{C}^\infty_c(M,\mathbb{R}).$$

我们指出推论 5.6的一个重要特例。更确切地说，若 $\omega=\Lambda$，则 $\{\cdot,f\}_b=\{f,\cdot\}_b\equiv 0$（因为 $f\equiv 1$），因此推论 5.6 可化为众所周知的结果:

推论 5.7 ([3]) 设 (M,b) 是一个辛流形，且 $\{\cdot,\cdot\}_b$是与辛结构相关联的泊松括号 b。若 Λ 是 (M,b)的刘维尔体积形式，则对任意 $F,G\in\mathcal{C}^\infty_c(M,\mathbb{R})$

$$\int_M\{F,G\}_b\,\Lambda=\int_{\partial M}F\,\mathbf{i}_{X_G}\Lambda=-\int_{\partial M}G\,\mathbf{i}_{X_F}\Lambda.$$

若 $F|_{\partial M}=0$ 或 $G|_{\partial M}=0$ 则

$$\int_M\{F,G\}_b\,\Lambda=0. \tag{5.1}$$

显然，若 $\partial M=\emptyset$，则关系 (5.1) 对任意 $F,G\in\mathcal{C}^\infty_c(M,\mathbb{R})$ 均成立。

5.3 T与几何结构相关的狄利克雷能量 re

本小节旨在介绍一般几何结构背景下与狄利克雷能量相关的欧拉–拉格朗日方程。当几何结构为黎曼度量时，我们得到经典的狄利克雷能量，其欧拉–拉格朗日方程恰好是与拉普拉斯–贝尔特拉米算子相关的拉普拉斯方程；而当几何结构为洛伦兹度量时，狄利克雷能量对应的欧拉–拉格朗日方程恰好是与达朗贝尔算子相关的波动方程。

由于我们将分析一般几何结构的情形，为了定义非平凡的狄利克雷能量泛函，该几何结构不能是反对称的。更准确地说，有以下结果。

定理 5.8 设 M 是无边界定向流形， μ 是 M 上的体积形式。设 b 是 M 上一个非反对称的几何结构， $\{\cdot,\cdot\}_b$ 是其关联的 $b-$ 括号。对于 $F\in\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$，定义其关联的狄利克雷能量为

$$\mathcal{E}(F):=\frac{1}{2}\int_M\{F,F\}_b\,\mathrm{d}m_\mu.$$

那么， $\mathcal{E}$ 的欧拉–拉格朗日方程为

$$\frac{1}{2}(\Delta_b^LF+\Delta_b^RF)=0.$$

证明。设 $F\in\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$ 是 $\mathcal{E}$ 的一个临界点。那么

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\mathcal{E}(F+\lambda\delta F)\mid_{\lambda=0}=0,\ \forall\delta F\in\mathcal{C}_c^\infty(M,\mathbb{R}).\tag{5.2}$$

利用 $b-$ 括号的性质，对于任意 $\delta F\in\mathcal{C}_c^\infty(M,\mathbb{R})$ 和任意 $\lambda\in\mathbb{R}$，可得

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(F+\lambda\delta F)=&\frac{1}{2}\int_M\{F+\lambda\delta F,F+\lambda\delta F\}_b\,\mathrm{d}m_\mu=\frac{1}{2}\int_M\{F,F\}_b\,\mathrm{d}m_\mu\\&+\lambda\left(\frac{1}{2}\int_M\{F,\delta F\}_b\,\mathrm{d}m_\mu+\frac{1}{2}\int_M\{\delta F,F\}_b\,\mathrm{d}m_\mu\right)+\frac{\lambda^2}{2}\int_M\{\delta F,\delta F\}_b\,\mathrm{d}m_\mu.\end{aligned}$$

由上述关系结合定理5.2 可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\mathcal{E}(F+\lambda\delta F)\mid_{\lambda=0}&=\frac{1}{2}\int_M\{F,\delta F\}_b\,\mathrm{d}m_\mu+\frac{1}{2}\int_M\{\delta F,F\}_b\,\mathrm{d}m_\mu\\&=-\frac{1}{2}\int_M\Delta_b^RF\cdot\delta F\,\mathrm{d}m_\mu-\frac{1}{2}\int_M\Delta_b^LF\cdot\delta F\,\mathrm{d}m_\mu\\&=-\int_M\frac{1}{2}\left(\Delta_b^LF+\Delta_b^RF\right)\delta F\,\mathrm{d}m_\mu.\end{aligned}$$

因此，等式（5.2）等价于

$$\int_M\frac{1}{2}\left(\Delta_b^LF+\Delta_b^RF\right)\delta F\,\mathrm{d}m_\mu=0,\ \forall\delta F\in\mathcal{C}_c^\infty(M,\mathbb{R}),$$

由此可得

$$\frac{1}{2}(\Delta_b^L F + \Delta_b^R F) = 0.$$

■

在定理5.8的假设下，若 b 是对称几何结构（即，(M, b) 是黎曼或半黎曼流形），则 $\Delta_b^L = \Delta_b^R =: \Delta_b$ 因此， $\mathcal{E}$ 的欧拉–拉格朗日方程为 $\Delta_b F = 0$。在这种情况下，欧拉–拉格朗日方程的解是 b–调和函数。

注意，若 (M, b) 是黎曼流形，则方程 $\Delta_b F = 0$ 恰好是与拉普拉斯–贝尔特拉米算子相关的经典拉普拉斯方程；而若 (M, b) 是洛伦兹流形，则方程 $\Delta_b F = 0$ 恰好是与达朗贝尔算子相关的波动方程，即 $\Box_b F = 0$。

6 Dyn类梯度向量场的动力学性质 s

本节介绍与流形上的一般几何结构相关的左/右梯度向量场的一些重要动力学性质。对于几何结构的具体例子（如黎曼或半黎曼度量、辛结构），我们可以得到各种向量场类（如梯度向量场、哈密顿向量场）的一些众所周知的性质。

6.1 左/右梯度与 b–括号的流

首先给出一个相容性结果，它涉及由一般几何结构 b 生成的左/右梯度向量场的流，以及与之相关的 b–括号。这是几何流形上与辛流形上哈密顿向量场相关类似结果的对应形式，参见例如 [3], [4]。

定理 6.1 设 b 是流形 M 上的一个几何结构， $\{\cdot,\cdot\}_b$ 是相应的 b–括号。设 $F \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ 是一个光滑函数， $\nabla_b^{L/R} F \in \mathfrak{X}(M)$ 是相应的梯度。若 $\Phi_t^{L/R}$ 表示 $\nabla_b^{L/R} F$ 的流，则对任意 $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Phi_t^L)^\star f = (\Phi_t^L)^\star \{f, F\}_b, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Phi_t^R)^\star f = (\Phi_t^R)^\star \{F, f\}_b,$$

其中 $(\Phi_t^{L/R})^\star g := g \circ \Phi_t^{L/R}$，对任意 $g \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$。

证明。我们首先证明关于左梯度流的等式。为此，对于任意固定的 $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$，我们有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Phi_t^L)^\star f &= (\Phi_t^L)^\star(\mathrm{d}f \cdot \nabla_b^L F) = (\Phi_t^L)^\star(b(\nabla_b^L f, \nabla_b^L F)) \\ &= (\Phi_t^L)^\star \{f, F\}_b.\end{aligned}$$

关于右梯度流的等式可仿照上述方法得出。更确切地说，对于任意固定的 $f \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$，我们有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Phi_t^R)^\star f &= (\Phi_t^R)^\star(\mathrm{d}f \cdot \nabla_b^R F) = (\Phi_t^R)^\star(b(\nabla_b^R F, \nabla_b^R f)) \\ &= (\Phi_t^R)^\star\{F,f\}_b,\end{aligned}$$

因此我们得出结论。 ■

推论 6.2 设 b 是流形 M 上的一个几何结构，$\{\cdot,\cdot\}_b$ 是其关联的 $b-$ 括号，且 F、$G \in \mathcal{C}^\infty$（M、$\mathbb{R}$）。那么以下三个断言等价：

(i) $\{F,G\}_b = 0$,

(ii) F 是 $\nabla_b^L G$ 的一个运动常数,

(ii) G 是 $\nabla_b^R F$ 的一个运动常数。

当 b 为对称时（即（M、b）是一个黎曼或半黎曼流形），或者为反对称时（即（M、b）是一个近辛流形），我们便得到众所周知的等价关系（参见，例如，[3], [4]）：

(i) $\{F,G\}_b = 0$, (ii) 如果 b 是对称的，则 F 是 $\nabla_b G$ 的运动常数（如果 b 是反对称的，则 F 是 X_G 的运动常数）；(ii) 如果 b 是对称的，则 G 是 $\nabla_b F$ 的运动常数（如果 b 是反对称的，则 G 是 X_F 的运动常数），

其中，如果 b 是对称的，则 $\nabla_b^L = \nabla_b^R =: \nabla_b$；而如果 b 是反对称的，则 $\nabla_b^L = -\nabla_b^R =: X_\bullet = \{\cdot,\bullet\}_b$。

6.2 输运定理

在本小节中，我们简要介绍一个输运定理，它与由一般几何结构生成的左/右梯度向量场的流相关。该结果还赋予了类拉普拉斯算子一种动力学解释。

定理 6.3 设 b 是定向流形 M 上的一个几何结构，该流形配备了体积形式 μ，且 $F \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$。若 $\Phi_t^{L/R}$ 表示向量场 $\nabla_b^{L/R} F$ 的左/右梯度流，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m_\mu\left(\Phi_t^{L/R}(U)\right) = \int_{\Phi_t^{L/R}(U)} \Delta_b^{L/R} F \, \mathrm{d}m_\mu,$$

其中 U 是一个 包含在流的定义域中的紧正则区域 .

证明。对于包含在流的定义域中的任意紧正则区域 U，我们有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m_\mu\left(\Phi_t^{L/R}(U)\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Phi_t^{L/R}(U)}\mathrm{d}m_\mu = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_U(\Phi_t^{L/R})^\star\mathrm{d}m_\mu = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_U(\Phi_t^{L/R})^\star\mu\\ &= \int_U\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Phi_t^{L/R})^\star\mu = \int_U(\Phi_t^{L/R})^\star\mathcal{L}_{\nabla_b^{L/R}F}\mu = \int_U(\Phi_t^{L/R})^\star\,\mathrm{div}_\mu(\nabla_b^{L/R}F)\mu\\ &= \int_U(\Phi_t^{L/R})^\star\Delta_b^{L/R}F\ \mu = \int_U(\Phi_t^{L/R})^\star\Delta_b^{L/R}F\ \mathrm{d}m_\mu\\ &= \int_{\Phi_t^{L/R}(U)}\Delta_b^{L/R}F\ \mathrm{d}m_\mu,\end{aligned}$$

因此我们得出了结论。 ■

推论 6.4 在定理 *6.3*的假设下，以下断言成立。

(i) 若 F 是左/右–b– 次调和函数（即 $\Delta_b^{L/R}F \geq 0$ 在 M 上），则函数 $t \mapsto m_\mu\left(\Phi_t^{L/R}(U)\right)$ 单调递增。因此，当 $\Phi_0^{L/R}(U) = U$ 时，对于 $t \geq 0$，有 $m_\mu\left(\Phi_t^{L/R}(U)\right) \geq m_\mu(U)$。

(ii) 若 F 是左/右–b– 调和函数（即 $\Delta_b^{L/R}F = 0$ 在 M 上），则函数 $t \mapsto m_\mu\left(\Phi_t^{L/R}(U)\right)$ 为常数，因此，对于$t \geq 0$，有 $m_\mu\left(\Phi_t^{L/R}(U)\right) = m_\mu(U)$。

(回顾注 4.4：如果 b 是 M上的辛形式，那么相对于刘维尔体积形式 $\mu = \Lambda$ 定义的 b–拉普拉斯算子=$(-1)^n$! b^n（其中 $n = \frac{1}{2}$维数为 M）恒等于零，即在 M上有 $\Delta_b^{L/R}F = 0$，对任意 $F \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$ 均如此。因此，在这种情况下，任意 $F \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$ 都是左/右–b–调和的。)

(iii) 如果 F 是左/右–b–超调和的（即在 M上有 $\Delta_b^{L/R}F \leq 0$ ），那么函数 $t \mapsto m_\mu\left(\Phi_t^{L/R}(U)\right)$ 单调递减，因此可得，对于 $t \geq 0$，有 $m_\mu\left(\Phi_t^{L/R}(U)\right) \leq m_\mu(U)$。

6.3 左/右梯度向量场的周期轨道

本小节旨在给出一个关于左/右梯度向量场不存在周期轨道的结果，并将经典梯度的这一著名结果推广到类梯度向量场。为此，我们首先需要引入一些术语。

定义 6.5 设 b 是流形 M 上的一个几何结构，且 $\{\cdot,\cdot\}_b$ 是其关联的 b– 括号。若 $\{F,F\}_b(m) > 0$，$\forall F \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$，$\forall m \in M \setminus \mathrm{Crit}(F)$，则称 $\{\cdot,\cdot\}_b$ 为正定，其中 $\mathrm{Crit}(F) = \{m \in M \mid \mathrm{d}F_m = 0\}$。类似地，若 $\{F,F\}_b(m) < 0$，$\forall F \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$，$\forall m \in M \setminus \mathrm{Crit}(F)$，则称 $\{\cdot,\cdot\}_b$ 为负定。

回顾定义 3.12 可知 $\{F,F\}_b = \{F,F\}_{b,\ sym},\ \forall F \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$。因此，当且仅当关联的对称 $b-$ 括号为正定/负定时，$b-$ 括号才是正定/负定。

接下来，我们给出正定/负定几何结构的定义。

定义 6.6 设 b 是流形 M 上的一个几何结构。那么，如果对于所有满足 $X(m) \neq 0$ 的向量场 X 和 $m \in M$，都有 $(b(X,X))(m) > 0$，则称 b 正定。类似地，如果对于所有满足 $X(m) \neq 0$ 的向量场 X 和 $m \in M$，都有 $(b(X,X))(m) < 0$，则称 b 负定。

回顾一下，给定流形 M 上的几何结构 b，其对称部分 b_{sym} 由 $b_{sym} := \frac{1}{2}(b + b^{op})$ 给出，其中 $b^{op}: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$ 是由 $b^{op}(X,Y) := b(Y,X)\ \forall X,Y \in \mathfrak{X}(M)$ 给出的非退化 $(0,2)-$ 张量场。注意，如果 b_{sym} 非退化（即 b_{sym} 也是 M 上的一个几何结构），那么 b 是正定/负定几何结构，当且仅当 b_{sym} 也是如此。

注 6.7 如果 b 是流形 M 上的正/负几何结构，那么相应的 $b-$括号是正定/负定的，因为

$$\{F,F\}_b = b(\nabla_b^{L/R}F, \nabla_b^{L/R}F),\ \forall F \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R}).$$

现在陈述本小节的主要结果。

定理 6.8 设 b 是流形 M 上的几何结构，且相应的 $b-$括号是正定或负定的。那么对于任意 $F \in \mathcal{C}^\infty(M,\ \mathbb{R})$，向量场 $\nabla_b^L F$ 和 $\nabla_b^R F$ 均不具有非平凡的周期轨道。

证明。假设 $\gamma: [0,T] \to M$ 是向量场 $\nabla_b^{L/R}F$ 的一个非平凡 $T-$周期解（即，γ 不是常值周期函数）。于是得到

$$\begin{aligned}
0 = F(\gamma(T)) - F(\gamma(0)) &= \int_0^T \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(\gamma(t))\mathrm{d}t = \int_0^T \mathrm{d}F_{\gamma(t)} \cdot \dot{\gamma}(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^T \mathrm{d}F_{\gamma(t)} \cdot \nabla_b^{L/R}F(\gamma(t))\mathrm{d}t = \int_0^T b_{\gamma(t)}(\nabla_b^{L/R}F(\gamma(t)), \nabla_b^{L/R}F(\gamma(t)))\mathrm{d}t \\
&= \int_0^T (b(\nabla_b^{L/R}F, \nabla_b^{L/R}F))(\gamma(t))\mathrm{d}t = \int_0^T \{F,F\}_b(\gamma(t))\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

这与 $\{\cdot,\cdot\}_b$ 是正定或负定的事实相矛盾。因此，向量场 $\nabla_b^L f$ 和 $\nabla_b^R f$ 均不具有非平凡的周期轨道。 ■

推论 6.9 当 b 是 M上的黎曼度量时，定理 *6.8* 便归结为经典结果：对于任意 $F \in \mathcal{C}^\infty(M,\ \mathbb{R})$ 相应的梯度向量场 $\nabla_b F = \nabla_b^L F = \nabla_b^R F$不存在非平凡的周期轨道。

参考文献

[1] R. Abraham, J.E. Marsden and T.S. Ratiu，《流形、张量分析与应用》。应用数学科学第 75 卷，Springer–Verlag，1988 年。[2] J.-P. Ortega and V. Planas–Bielsa，莱布尼茨流形上的动力学，《几何与物理学杂志》，52(1)(2004年)，1–27。[3] J.E. Marsden and T.S. Ratiu，《力学与对称性导论》，第二版。应用数学丛书第 17 卷，Springer–Verlag，1999年。
[4] T.S. Ratiu, R.M. Tudoran, L. Sbano, E. Sousa Dias, G. Terra，几何力学速成课程，载于：《几何力学与对称性：佩雷斯克讲座》，伦敦数学学会讲义系列第 306 卷，剑桥大学出版社，2005年，第 23–156 页。[5] R.M. Tudoran，关于与 $\mathbb{R}^n$ 上几何结构相关的自然微分算子的不变性质，《数学分析与应用杂志》，518(2023年)，126790。

R.M. Tudoran
蒂米什瓦拉西部大学数学与计算机科学学院数学系瓦西里·帕尔万大道4号，邮编300223，罗马尼亚蒂米什瓦拉。电子邮箱：
razvan.tudoran@e-uvt.ro