arXiv:2302.00996v1 [math.AP] 2 Feb 2023

具有间接信号产生机制的高维拟线性 Keller–Segel 系统中的临界质量现象

Mario Fuest*[1]、Johannes Lankeit†[1] 和 Yuya Tanaka‡[2]

[1]Lei汉诺威莱布尼茨大学，应用数学研究所，Welfengarten 1，30167 汉诺威，德国 y
[2]Tok东京理科大学，数学系，神乐坂 1-3，新宿区，东京 162-8601，日本 n

摘要

本文研究具有间接信号产生机制的拟线性 Keller–Segel 系统，

$$\begin{cases} u_t = \nabla \cdot ((u+1)^{m-1}\nabla u) - \nabla \cdot (u\nabla v), & x \in \Omega,\ t > 0, \\ 0 = \Delta v - \mu(t) + w, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ w_t + w = u, & x \in \Omega,\ t > 0, \end{cases}$$

辅以齐次诺伊曼边界条件和适当的初始条件，其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ 是一个有界光滑区域，$m \geq 1$ 和

$$\mu(t) \coloneqq \fint_\Omega w(\cdot,t) \qquad \text{for } t > 0.$$

我们证明，在 $m \geq 2 - \frac{2}{n}$ 的情形下，存在 $M_c > 0$，使得若 $m > 2 - \frac{2}{n}$ 或 $\int_\Omega u_0 < M_c$，则解全局存在且保持有界；而在 $m \leq 2 - \frac{2}{n}$ 的情形下，若 $m < 2 - \frac{2}{n}$ 或 $M > 2^{\frac{n}{2}} n^{n-1}\omega_n$，则存在径向对称初始数据，使得 $\int_\Omega u_0 = M$，并且解会在有限时间或无限时间内爆破；当 $m = 2 - \frac{2}{n}$ 时，爆破时间为无限时间。特别地，若 $m = 2 - \frac{2}{n}$，则存在临界质量现象，其意义在于

$$\inf\left\{M > 0 : \exists u_0 \text{ with } \int_\Omega u_0 = M \text{ such that the corresponding solution blows up in infinite time}\right\}$$

是一个有限正数。

关键词： 趋化性；间接信号产生；无限时间爆破

美国数学学会分类（2020）： 35B33（主要）；35B44、35A01、35K55、92C17（次要）

*电子邮箱：fuest@ifam.uni-hannover.de

†电子邮箱：lankeit@ifam.uni-hannover.de

‡电子邮箱：yuya.tns.6308@gmail.com

1 引言

具有直接信号产生的二维 Keller–Segel 系统中的临界质量趋化性是指细胞朝向化学物质浓度较高的区域移动，这种现象是不同生物学背景下发生聚集的重要原因，例如细菌菌落的形成或肿瘤侵袭 [10]。在数学描述中，常使用 Keller–Segel 模型，其简化的抛物-椭圆形式为

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \nabla \cdot (u \nabla v), \\ 0 = \Delta v - v + u. \end{cases} \tag{1.1}$$

这里， u 和 v 分别表示细胞密度和信号物质的浓度，化学信号由细胞直接产生。该系统及其变体已得到广泛研究（例如，参见综述 [11, 1, 15]）。

对于本文而言，特别值得关注的是，(1.1)具有临界质量现象：在二维区域中，质量为$M = \int_\Omega u_0 < 8\pi$ 的径向对称初始数据 u_0 会产生全局有界解；而对于任何更大的质量，都可以找到具有该质量的某些初始数据，使其演化为在有限时间内爆破的解， [22]。在高维情形下，对于任意给定的正初始质量，都可以找到爆破解， [22]。在径向对称情形下，对于(1.1)的其他抛物–椭圆型和完全抛物型版本，也观察到了相同现象，见 [9, 21, 23, 24, 29]。

间接信号产生 较新的研究方向关注信号间接产生的系统，例如

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \nabla \cdot (u \nabla v), & x \in \Omega,\ t > 0, \\ 0 = \Delta v - \mu(t) + w, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ w_t + w = u, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ \nabla u \cdot \nu = \nabla v \cdot \nu = 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad w(x,0) = w_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{1.2}$$

这里，$\Omega := B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ 是一个球，且

$$\mu(t) := \fint_\Omega w \quad \text{for } t > 0;$$

ν 是 $\partial\Omega$的外法向量； $u_0 \in C^0(\Omega)$和 $w_0 \in C^1(\overline{\Omega})$均为非负。这是Strohm、Tyson和Powell [25], 提出的一种趋化模型的简化版本，用于描述山地松甲虫（MPB）的扩散和聚集行为。这里， u， w 分别表示飞行山地松甲虫和筑巢山地松甲虫的密度，而 v 表示甲虫信息素的浓度。对于上述模型，Tao和Winkler [28]在二维情形下证明了有界性和无限时间爆破；更准确地说，在径向情形下，当$\int_\Omega u_0 < 8\pi$时，解保持有界；并且存在这样的初始数据，使得$\int_\Omega u_0 > 8\pi$，且解会在无限时间内爆破。基于Lyapunov泛函，Laurençot [16] 在完全抛物情形和非径向情形下也揭示了同样的现象，此时临界质量降至4π。此外，在一个相关模型中，种群被分为静止的信号产生群体和可运动的趋化活跃群体；研究也观察到了这样一种二分现象：初始质量分别导致所有解全局有界或无界 [18]。根据这些结果，我们认识到，上述具有间接信号产生的二维 Keller–Segel 系统也存在临界质量现象；它与具有直接信号产生的系统之间的区别在于，解总是能在整个时间范围内存在。

总之，即使在间接信号产生的情况下，二维情形仍存在某种临界质量现象，但如今它区分的是整体解的有界性与无界性。
然而，迄今尚不清楚这类结果在高维情形下是否成立。因此，自然会产生以下问题：

具有间接信号产生的高维 *Keller–Segel* 系统中是否会出现临界质量现象？

如下文所示，答案是否定的。事实上，在高维情形下，我们总能得到无界解。

命题 1.1. 设 $\Omega := B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ 为一个球。对每个 $M > 0$，都存在初始数据 (u_0, w_0)，使得 $\int_\Omega u_0 = M$，且相应的 (1.2) 解无界。

我们指出，这与 [6, 7], 中讨论的间接趋化系统形成对比；在该系统中，第三分量也会扩散，而且在四维情形下，质量 $(8\pi)^2$ 被发现具有临界性。

高维情形下的临界质量现象拟线性 **间接信号产生的 Keller–Segel 系统** 拟线性扩散有时与趋化系统的应用相关，例如研究细胞的运动时（如肿瘤侵袭，参见 [19]）。在当前的间接情形下，加入多孔介质型扩散会得到以下系统

$$\begin{cases} u_t = \nabla \cdot ((u+1)^{m-1}\nabla u) - \nabla \cdot (u\nabla v), & x \in \Omega,\ t > 0, \\ 0 = \Delta v - \mu(t) + w, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ w_t + w = u, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ \nabla u \cdot \nu = \nabla v \cdot \nu = 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad w(x,0) = w_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{1.3}$$

其中，$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ 是一个有界光滑区域，$\mu(t) := \fint_\Omega w$ 适用于 $t > 0$；$m \geq 1$；ν 是 $\partial\Omega$ 的外法向量；$u_0 \in C^0(\Omega)$ 和 $w_0 \in C^1(\Omega)$ 均为非负。—

对于相关的直接产生系统

$$\begin{cases} u_t = \nabla \cdot ((u+1)^{m-1}\nabla u) - \nabla \cdot (u\nabla v), \\ v_t = \Delta v - v + u, \end{cases}$$

已知 m 的大小决定了解是保持有界还是发生爆破；较大的扩散指数m 能够抑制爆破；事实上，当 $m > 2 - \frac{2}{n}$ 时，文献 [12, 27] 获得了解的有界性；另一方面，当 $m < 2 - \frac{2}{n}$ 时，文献[3, 4]构造了初始数据，使相应的解在有限时间内爆破。此外，对于将扩散项替换为退化扩散 Δu^m 的系统，也证明了类似结果（文献 [13, 20] 中的有界性，以及文献 [8] 中的有限时爆破）。此外，在临界情形$m = 2 - \frac{2}{n}$下，退化系统中会出现临界质量现象；此时存在一个临界质量 $M_c > 0$，使得若 $\int_\Omega u_0 < M_c$，则解是整体且有界的（[2, 20]）；而若 $\int_\Omega u_0 > M_c$，则在三维或四维情形下，存在导致有限时爆破的初始数据（[17]）。

根据这些结果，自然会产生这样的问题：解的行为是否也由 (1.3) 中关于m 的条件决定？对于某些 m 的取值，是否可能出现临界质量现象？本文旨在对上述关于系统 (1.3) 的问题给出肯定的回答。

主要结果 作为准备——并为了明确我们所讨论的解及可能发生的爆破类型——我们引入以下关于 (1.3) 的解的局部存在性的命题。

命题 1.2 (局部存在性)。 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ 为有界光滑区域，且设 $m \geq 1$。假设 $u_0 \in C^0(\overline{\Omega})$ 和 $w_0 \in C^1(\overline{\Omega})$ 均为非负函数。那么存在 $T_{\max} \in (0, \infty]$ ，且存在唯一确定的非负函数

$$
\begin{aligned}
&u \in C^0(\overline{\Omega} \times [0, T_{\max})) \cap C^{2,1}(\overline{\Omega} \times (0, T_{\max})), \\
&v \in C^{2,0}(\overline{\Omega} \times [0, T_{\max})), \\
&w \in C^{0,1}(\overline{\Omega} \times [0, T_{\max})) := \{w \in C^0(\overline{\Omega} \times [0, T_{\max})) \mid w_t \in C^0(\overline{\Omega} \times [0, T_{\max}))\},
\end{aligned}
$$

它们在 $\Omega \times [0, T_{\max})$ 中是满足 (1.3) 的经典意义下的解，并且满足

$$
\text{if } T_{\max} < \infty, \quad \text{then } \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \to \infty \quad \text{as } t \nearrow T_{\max}. \tag{1.4}
$$

此外，若 u_0 和 w_0 均为径向对称，则对于任意 $t \in (0, T_{\max})$， $u(\cdot\ t)$ $v(\cdot\ t)$ 和 $w(\cdot\ t)$ 也均为径向对称。

第一个定理讨论了方程 (1.3) 的解的整体存在性与有界性。与[2, 12, 13, 20, 27],类似，当 $m > 2 - \frac{2}{n}$时，解仍保持有界；当 $m = 2 - \frac{2}{n}$时，若初始数据 u_0的大小满足一个小量条件，同样有此结论。此外，我们注意到，当 $m \geq 2 - \frac{2}{n}$时，无论初始数据的大小如何，都能保证整体存在性。

定理 1.3 （整体存在性和有界性）。 设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ （$n \geq 3$） 为有界光滑区域，并设 $m \geq 2 - \frac{2}{n}$。则存在 $M_c > 0$ 满足以下性质：对于所有非负初始数据$u_0 \in C^0$（Ω） 和 $w_0 \in C^1$（Ω） ，方程 （u, v, w） （1.3） 的相应解在时间上整体存在。此外，如果u_0 和 w_0 满足以下任一条件

$$
m > 2 - \frac{2}{n} \quad \text{or} \quad \int_\Omega u_0 < M_c,
$$

那么该解 （u, v, w） （1.3） 的解在$\Omega \times$ （$0, \infty$） 中是有界的，即存在 $C > 0$ 使得

$$
u(x,t) \leq C, \quad v(x,t) \leq C \quad \text{and} \quad w(x,t) \leq C \tag{1.5}
$$

对于所有 $x \in \Omega$ 和 $t \in$ （$0, \infty$）。

下一个定理给出了方程（1.3）的解的无界性。

定理 1.4 （无界性）。 设Ω: $= B_1$: $= B_1$（0） $\subset \mathbb{R}^n$ （$n \geq 3$） 为一个球，并设 $m \in \left[1, 2 - \frac{2}{n}\right]$。如果以下任一条件成立

$$
\left(m \in \left[1, 2 - \frac{2}{n}\right) \text{ and } M > 0\right) \quad \text{or} \quad \left(m = 2 - \frac{2}{n} \text{ and } M > 2^{\frac{n}{2}} n^{n-1} \omega_n\right),
$$

其中 ω_n : $= |\partial B_1(0)|$，则存在 $R \in (0,\ 1)$ 和 $\alpha > 0$ ，使得对于每个 $\eta > 0$ ，都可以找到常数$\Gamma_u > 0$、$\gamma > 0$ 和 $\Gamma_w \geq 0$ ，满足：对于所有非负的径向对称初始数据 $u_0 \in C^0(\overline{\Omega})$和 $w_0 \in C^1(\overline{\Omega})$ ，

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega u_0 = M, \\
&\fint_{B_r} u_0 \geq \Gamma_u \qquad\qquad \text{for all } r \in (0, R),
\end{aligned} \tag{1.6}
$$

$$\fint_{B_1\setminus B_r} u_0 \le \gamma \qquad \text{for all } r\in(R,1), \tag{1.7}$$

$$\fint_{B_r} w_0 \ge \fint_{B_1} w_0 + \Gamma_w \qquad \text{for all } r\in(0,R), \tag{1.8}$$

$$\fint_{B_1\setminus B_r} w_0 \le \fint_{B_1} w_0 - \eta \qquad \text{for all } r\in(R,1), \tag{1.9}$$

方程(1.3)的解(u,v,w)会在有限时间或无限时间内爆破，其意义是 $\big\{\|u(\cdot\ t)\|_{L^\infty(\Omega)} \mid t\in(0,\ T_{\max})\big\}$ 无界。更准确地说，存在 $\alpha>0$ 和 $C>0$，使得对于所有 $t\in(0,\ T_{\max})$，均有$\|u(\cdot\ t)\|_{L^\infty(\Omega)} \ge C\mathrm{e}^{\alpha t}$。

由此定理，我们可以立即证明命题 1.1。

命题 1.1 的证明。设 $m=1$ 和 $M>0$。那么，根据定理 1.4，我们可以找到初始数据 u_0，w_0，其中 $\int_\Omega u_0 = M$，使得相应的解无界。 □

在定理 1.4 中，我们看到，对于如 [3, 4, 8, 17] 中的情形 $m<2-\frac{2}{n}$，系统 (1.3) 会发生爆破。然而，爆破时间是有限还是无限尚不明确。相比之下，在情形 $m=2-\frac{2}{n}$ 中，结合定理 1.3 和定理 1.4，我们可以得到导致无限时间爆破的初始数据。

推论 1.5。 设 $\Omega := B_1(0)\subset\mathbb{R}^n$ $(n\ge 3)$ 是一个球，且 $m=2-\frac{2}{n}$。那么对所有

$$M > 2^{\frac{n}{2}} n^{n-1}\omega_n,$$

存在非负的径向对称初始数据(u_0,w_0)使得 $\int_\Omega u_0 = M$，且解在无限时间内爆破。

注 1.6. 由定理 1.3 和推论 1.5 可知，在高维情形下临界值为 $m=2-\frac{2}{n}$，且解的行为由初始数据的大小决定。这里我们指出，这与具有直接信号产生的 Keller–Segel 系统的结果（例如，参见 [4]）不同，因为爆破时间始终是无限的。

本文的主要思路与安排。 在第 3 节中，我们将证明定理 1.3。通过证明泛函

$$\frac{1}{p}\int_\Omega u^p + \frac{1}{p+1}\int_\Omega w^{p+1}$$

（我们考虑充分大的 p 时）是某个常微分方程的下解，而该方程的解整体存在，并且在一定条件下还有界。相关估计的关键步骤在于注意到第三个方程在时间上（但非空间上）具有正则化作用，这一点尤其体现于恒等式$\frac{1}{p+1}\mathrm{d}\,\mathrm{d}t\int_\Omega w^{p+1}+\int_\Omega w^{p+1}=\int_\Omega uw^p$。若 $m\ge 2-\frac{2}{n}$，则 Gagliardo–Nirenberg不等式允许我们有效地用耗散项控制令人担忧的项；若 $m>2-\frac{2}{n}$ 或 $\int_\Omega u_0$ 充分小，则可以通过这种方式（见引理 3.3 和 3.4）不仅推出解的整体存在性，还能得到其有界性。这个整体存在性的证明基于 [28, 第 3] 节。

[1]第4节旨在证明定理 1.4。为此，我们考虑函数 $U(\xi,t) := \int_0^{\xi\overline{n}} r^{n-1}u(r,t)\,\mathrm{d}r$for $\xi\in[0,1]$ and $t\in[0,T_{\max})$, 该函数在 [14]中引入。与 [28], 一样，我们的目标是构造一个无界次解 $\underline{U}$。这里，我们采用试探形式 $\underline{U}(\xi,t) := {}^{a}(\underline{\quad t\ \xi})()+\xi$for $\xi\in[0,\xi_0]$ and $t\in[0,\infty)$, 其中包含某些 a,b和一个

较小的 $\xi_0 \in (0,1)$，使得 $\underline{U}$ 的导数在原点处无界。与 [28] 相比，新的挑战之一是处理这一项

$$2n^2\left(\frac{na(t)b(t)}{(b(t)+\xi)^2}+1\right)^{m-1}\frac{\xi^{1-\frac{2}{n}}}{b(t)+\xi},$$

将 (4.2) 中定义的抛物型算子 P 作用于 $\underline{U}$ 时会出现该项。显然，令 $m=1$ 可简化此项。不过，若 $m \in \left[1, 2-\frac{2}{n}\right]$，仍可用 $\xi_0^{2-\frac{2}{n}-m}$ 控制此项，接着再将其吸收到一个依赖于 $\int_\Omega u_0$ 的负项中；如果 $m \in \left[1, 2-\frac{2}{n}\right)$ 或 $\int_\Omega u_0$ 足够大，这种方法便可奏效，因此我们确实可以证明 $\underline{U}$，从而 U 无界。

2 预备知识

在本节中，设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) 为具有光滑边界的有界区域，且 $m \geq 1$。首先，我们考虑命题 1.2 的局部存在性结果。

命题 1.2 的证明。该命题通过与 [26] 中相同的标准不动点论证得以证明。 □

接下来，我们总结方程 (1.3) 的解的一个基本性质。

引理 2.1。设 $m \geq 1$，并设 $u_0 \in C^0(\Omega)$ 和 $\overline{w}_0 \in C^1(\Omega)$ 均为非负的。那么，由命题 *1.2* 给出的(1.3) 的解(u, v, w)，其最大存在时间为 $T_{\max}$，满足

$$\int_\Omega u(\cdot,t) = \int_\Omega u_0 \tag{2.1}$$

and

$$\mu(t) = \fint_\Omega w(\cdot,t) \geq 0 \tag{2.2}$$

对所有 $t \in (0, T_{\max})$，均成立。

证明。对方程 (1.3) 的第一个方程积分即可立即得到 (2.1)，而由 w 的非负性可得 (2.2)。

□

3 整体存在性与有界性

在本节中，我们固定一个光滑的有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$)、参数 $m \geq 1$ 和 $M > 0$，以及非负初始数据 $u_0 \in C^0(\Omega)$、$w_0 \in C^1(\Omega)$，其中 $M = \int_\Omega u_0$。此外，我们将命题 1.2 给出的方程 (1.3) 的解记为 $(u,\ v,\ w)$，并将其最大存在时间记为 $T_{\max}$。

为了证明整体存在性和有界性，我们将为 u 建立 L^p估计，并为w建立 L^{p+1}估计。为此，我们首先为$\frac{1}{p}\int_\Omega u^p + \frac{1}{p+1}\int_\Omega w^{p+1}$准备一个估计。

引理 3.1. 对于所有 $p > 1$ 和 $k > 0$，方程 (1.3) 的解 (u, v, w) 满足

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{1}{p}\int_\Omega u^p + \frac{1}{p+1}\int_\Omega w^{p+1}\right\} + \frac{4(p-1)}{(p+m-1)^2}\int_\Omega |\nabla u^{\frac{p+m-1}{2}}|^2 + \int_\Omega w^{p+1} \\ &\quad \leq 2k\int_\Omega u^{p+1} + (k^{-p} + k^{-\frac{1}{p}})\int_\Omega w^{p+1} \qquad in\ (0, T_{\max}).\end{aligned} \tag{3.1}$$

证明. 对于此后固定的 $p>1$，我们将 (1.3) 中的第一个方程乘以 u^{p-1}，在 Ω 上积分，并使用分部积分，得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u^p &= \int_\Omega u^{p-1}\nabla\cdot((u+1)^{m-1}\nabla u) - \int_\Omega u^{p-1}\nabla\cdot(u\nabla v)\\ &= -(p-1)\int_\Omega u^{p-2}(u+1)^{m-1}|\nabla u|^2 + (p-1)\int_\Omega u^{p-1}\nabla u\cdot\nabla v\\ &\le -\frac{4(p-1)}{(p+m-1)^2}\int_\Omega |\nabla u^{\frac{p+m-1}{2}}|^2 - \frac{p-1}{p}\int_\Omega u^p\Delta v \qquad \text{in } (0,T_{\max}).\end{aligned}$$

此处，根据 (1.3) 中的第二个方程和 (2.2)，我们有 $\Delta v = \mu(t) - w \ge -w$，因此可得 t

$$\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u^p \le -\frac{4(p-1)}{(p+m-1)^2}\int_\Omega |\nabla u^{\frac{p+m-1}{2}}|^2 + \frac{p-1}{p}\int_\Omega u^p w \qquad \text{in } (0,T_{\max}). \tag{3.2}$$

Next，将 (1.3) 中的第三个方程乘以 w^p，并在 Ω 上积分，可观察到

$$\frac{1}{p+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega w^{p+1} + \int_\Omega w^{p+1} = \int_\Omega u w^p,$$

结合 (3.2)，可推出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{1}{p}\int_\Omega u^p + \frac{1}{p+1}\int_\Omega w^{p+1}\right\} + \frac{4(p-1)}{(p+m-1)^2}\int_\Omega |\nabla u^{\frac{p+m-1}{2}}|^2 + \int_\Omega w^{p+1} \le \frac{p-1}{p}\int_\Omega u^p w + \int_\Omega u w^p$$

在 $(0,T_{\max})$ 内。最后，我们对该不等式右端的两项应用 Young不等式，从而推导出 (3.1)。

□

为估计 (3.1) 右端的第一项，下面陈述 Gagliardo–Nirenberg不等式的一个推论。

引理 3.2。 对于所有 $p>\max\{1,\frac{n}{2}(2-\frac{2}{n}-m)\}$，存在 $C>0$，使得对于任意 $\varphi\in C^1(\Omega)$，

$$\int_\Omega \varphi^{p+1} \le C\|\nabla\varphi^{\frac{p+m-1}{2}}\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{2(p+1)}{p+m-1}\theta}\|\varphi\|_{L^1(\Omega)}^{(p+1)(1-\theta)} + C\|\varphi\|_{L^1(\Omega)}^{p+1}, \tag{3.3}$$

其中 $\theta := \dfrac{\frac{p+m-1}{2}-\frac{1}{2}}{\frac{p+m-1}{2}+\frac{1}{n}-\frac{1}{2}} \in (0,1)$。

证明。应用 Gagliardo–Nirenberg不等式（例如采用 [19, 引理 2.3], 中允许可积指数低于 1 的变体），取某个 $C>0$，我们可以估计

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varphi^{p+1} = \|\varphi^{\frac{p+m-1}{2}}\|_{L^{\frac{2(p+1)}{p+m-1}}(\Omega)}^{\frac{2(p+1)}{p+m-1}} &\le C\|\nabla\varphi^{\frac{p+m-1}{2}}\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{2(p+1)}{p+m-1}\theta}\|\varphi^{\frac{p+m-1}{2}}\|_{L^{\frac{2}{p+m-1}}(\Omega)}^{\frac{2(p+1)}{p+m-1}(1-\theta)} + C\|\varphi^{\frac{p+m-1}{2}}\|_{L^{\frac{2}{p+m-1}}(\Omega)}^{\frac{2(p+1)}{p+m-1}}\\ &= C\|\nabla\varphi^{\frac{p+m-1}{2}}\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{2(p+1)}{p+m-1}\theta}\|\varphi\|_{L^1(\Omega)}^{(p+1)(1-\theta)} + C\|\varphi\|_{L^1(\Omega)}^{p+1}\end{aligned}$$

对于所有 $\varphi\in\overline{C}^1(\Omega)$，由此证明得证。 □

接下来，在 $m\ge 2-\frac{2}{n}$成立的条件下，我们证明 L^p-估计以及 L^{p+1}-估计。

引理 3.3. 假设 $p>1$。

(i) 如果 $m = 2 - \frac{2}{n}$ 并且

$$M = \int_\Omega u_0 < M_c(p) := \left[\frac{1}{4 \cdot 2^p c_1} \cdot \frac{4(p-1)}{(p+m-1)^2}\right]^{\frac{1}{(1-\theta)(p+1)}} \tag{3.4}$$

由引理 *3.2* 可知，存在 $C > 0$，使得

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} \le C \quad and \quad \|w(\cdot,t)\|_{L^{p+1}(\Omega)} \le C \tag{3.5}$$

对所有 $t \in (0, T_{\max})$，均成立。

(ii) 在 $m > 2 - \frac{2}{n}$ 的情况下，存在 $C > 0$，使得 (3.5) 成立。

证明。固定 $k := 2 \cdot 2^p > 2^p$，使得 $k^{-p} + k^{-\frac{1}{p}} < 1$。先考虑情形 (i)。条件$m = 2 - \frac{2}{n}$确保引理 3.2 中定义的 θ 满足 $^{2}{}_{(p+1)\frac{}{p+m-1}}\theta = 2$。因此，利用引理 3.2 和 (2.1)，可得存在 $c_1 > 0$，使得当 $M = \int_\Omega u_0$

$$\int_\Omega u^{p+1} \le c_1 M^{(p+1)(1-\theta)} \|\nabla u^{\frac{p+m-1}{2}}\|^2_{L^2(\Omega)} + c_1 M^{p+1} \qquad \text{in } (0, T_{\max}). \tag{3.6}$$

若 $M < M_c(p)$，我们可以选取足够小的 $\eta \in (0,1)$，使得

$$M \le \left[\frac{1}{2(k+\eta)c_1} \cdot \frac{4(p-1)}{(p+m-1)^2}\right]^{\frac{1}{(1-\theta)(p+1)}}. \tag{3.7}$$

由 (3.6)、(3.7) 以及 Young不等式，在 $(0, T_{\max})$ 中有

$$\begin{aligned} 2k \int_\Omega u^{p+1} &= (2k+\eta) \int_\Omega u^{p+1} - \eta \int_\Omega u^{p+1} \\ &\le (2k+\eta) c_1 M^{(p+1)(1-\theta)} \|\nabla u^{\frac{p+m-1}{2}}\|^2_{L^2(\Omega)} + (2k+\eta) c_1 M^{p+1} - \eta \int_\Omega u^{p+1} \\ &\le \frac{4(p-1)}{(p+m-1)^2} \|\nabla u^{\frac{p+m-1}{2}}\|^2_{L^2(\Omega)} + c_2 - c_3 \int_\Omega u^p, \end{aligned}$$

其中 $c_2 := (2k+\eta) c_1 M^{p+1} + \frac{\eta}{p}|\Omega|$ 且 $c_3 := \frac{p+1}{p}\eta$。由 (3.1) 和上述不等式可推得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{1}{p}\int_\Omega u^p + \frac{1}{p+1}\int_\Omega w^{p+1}\right\} + c_3 \int_\Omega u^p + (1 - (k^{-p} + k^{-\frac{1}{p}})) \int_\Omega w^{p+1} \le c_2, \tag{3.8}$$

在 $(0,\ T_{\max})$ 中，这意味着

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{1}{p}\int_\Omega u^p + \frac{1}{p+1}\int_\Omega w^{p+1}\right\} + c_4 \left\{\frac{1}{p}\int_\Omega u^p + \frac{1}{p+1}\int_\Omega w^{p+1}\right\} \le c_2 \qquad \text{in } (0, T_{\max}),$$

其中 $c_4 := \min\{c_3 p,\ (1 - (k^{-p} + k^{-\frac{1}{p}}))(p+1)\} > 0$。由此微分不等式可得到 (3.5)。

接下来，我们讨论情形 (ii)。条件 $m > 2 - \frac{2}{n}$ 意味着 $_{(p+1)\frac{}{p+m-1}}\theta < 1$，其中 θ 仍如引理 3.2 中所定义。因此，对 (3.3) 右端的第一项应用 Young不等式，我们可知存在$c_5 > 0$ 使得

$$\int_\Omega u^{p+1} \le \frac{1}{2k+1} \cdot \frac{4(p-1)}{(p+m-1)^2} \|\nabla u^{\frac{p+m-1}{2}}\|^2_{L^2(\Omega)} + c_5 \qquad \text{in } (0, T_{\max})$$

将其代入 (3.1)，我们再次得到 (3.8)（但常数不同），并完全按照情形 (i) 得出 (3.5)。

□

对于引理 3.3 中的情形 (i)，通过对初始数据的大小施加小性条件，得到了关于 u 的与时间无关的 L^p 估计。另一方面，在没有此类小性条件时，我们可以推导出关于 u 的依赖于时间的 L^p 估计，从而无论初始数据的大小如何，都能在情形 $m = 2 - \frac{2}{n}$ 下建立整体存在性。

引理 3.4. 若 $m \geq 2 - \frac{2}{n}$，则对于所有 $p > 1$ 和 $T \in (0, T_{\max}] \cap (0, \infty)$，存在 $C > 0$ 使得

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} \leq C \quad and \quad \|w(\cdot,t)\|_{L^{p+1}(\Omega)} \leq C$$

对于所有 $t \in (0, T)$。

证明。$m > 2 - \frac{2}{n}$ 的情形已由引理 3.3 覆盖，因此我们假设 $m = 2 - \frac{2}{n}$，并注意到该条件保证 $\frac{2(p+1)}{p+m-1}\theta = 2$，其中 θ 如引理 3.2 所述。由引理 3.2 和 Hölder 不等式可知，存在 $c_1 > 0$ 使得

$$\begin{aligned}\int_\Omega u^{p+1} &\leq c_1 M^{(p+1)(1-\theta)} \|\nabla u^{\frac{p+m-1}{2}}\|^2_{L^2(\Omega)} + c_1 M \left(\int_\Omega u\right)^p \\ &\leq c_1 M^{(p+1)(1-\theta)} \|\nabla u^{\frac{p+m-1}{2}}\|^2_{L^2(\Omega)} + c_1 M |\Omega|^{p-1} \int_\Omega u^p \qquad \text{in } (0, T_{\max}),\end{aligned}$$

结合 (3.1)，这意味着对于任意 $k > 0$,

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{1}{p}\int_\Omega u^p + \frac{1}{p+1}\int_\Omega w^{p+1}\right\} + \frac{4(p-1)}{(p+m-1)^2}\int_\Omega |\nabla u^{\frac{p+m-1}{2}}|^2 + \int_\Omega w^{p+1} \\ &\quad \leq 2kc_1 M^{(p+1)(1-\theta)} \int_\Omega |\nabla u^{\frac{p+m-1}{2}}|^2 + 2kc_1 M|\Omega|^{p-1}\int_\Omega u^p + (k^{-p} + k^{-\frac{1}{p}})\int_\Omega w^{p+1} \qquad \text{in } (0, T_{\max}).\end{aligned}$$

这里，取 $k = \frac{1}{2c_1 M^{(p+1)(1-\theta)}} \cdot \frac{4}{(p-1)(p+m-1)^2}$，我们可以看出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{1}{p}\int_\Omega u^p + \frac{1}{p+1}\int_\Omega w^{p+1}\right\} \leq c_2\left\{\frac{1}{p}\int_\Omega u^p + \frac{1}{p+1}\int_\Omega w^{p+1}\right\} \qquad \text{in } (0, T_{\max})$$

其中 $c_2 := \max\{2kc_1 M|\Omega|^{p-1} p,\ (k^{-p} + k^{-\frac{1}{p}})(p+1)\}$。因此，对于任意 $T \in (0, T_{\max}] \cap (0, \infty)$，我们得到 $c_3(T) > 0$，使得对于所有 $t \in (0, T)$，均有 $\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} \leq c_3(T)$ 且 $\|w(\cdot,t)\|_{L^{p+1}(\Omega)} \leq c_3(T)$。 □

现在，我们通过应用引理 3.3 和引理 3.4，证明方程 (1.3) 的解的整体存在性和有界性。

定理 1.3 的证明。设 $p > n + 2$。我们首先证明 $T_{\max} = \infty$。固定 $T \in (0, T_{\max}] \cap (0, \infty)$。根据引理 3.4，存在 $c_1(p,T) > 0$，满足对于所有 $t \in (0,T)$，均有 $\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} \leq c_1(p,T)$ 且 $\|w(\cdot,t)\|_{L^{p+1}(\Omega)} \leq c_1(p,T)$。因此，根据椭圆正则性理论（参见 [5, 定理 I.19.1]），存在$c_2(p,T) > 0$，使得对于所有 $t \in (0,T)$，均有 $\|v(\cdot,t)\|_{W^{2,p+1}(\Omega)} \leq c_2(p,T)$；随后，Sobolev 嵌入定理表明，对于所有 $t \in (0,T)$，均有 $\|\nabla v(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_3(p,T)$，其中某个 $c_3(p,T) > 0$。因此，应用 [27, 引理 A.1], 中的 Moser 型迭代，我们可以得到 $c_4(p,T) > 0$，使得

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_4(p,T)$$

对所有 $t \in (0,T)$ 均成立。结合 (1.4) 可得 $T_{\max} = \infty$。

在 $m > 2 - \frac{2}{n}$的情况下，或者如果 $M < M_c := M_c(n+3)$（其中 $M_c(n+3)$ 如 (3.4) 所示，且关键在于它不依赖于 M或解 (u, v, w)），在 $m = 2 - \frac{2}{n}$的情况下，利用引理 3.3、椭圆正则性理论和 Sobolev 嵌入定理，可以类似地验证，对于所有 $t \in (0, T_{\max})$，都有 $\|\nabla v(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_5$，其中某个 $c_5 > 0$ 满足条件，且 c_5 与时间无关。因此，通过 Moser 型迭代可知，对于所有 $t \in (0, T_{\max})$，都有 $\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_6$，其中某个 $c_6 > 0$ 满足条件，从而 (1.5) 成立。

□

4 无界性

下文中，令 $\Omega := B_1(0) \subset \mathbb{R}^n (n \geq 3)$、$m \in [1, 2 - \frac{2}{n}]$ 和 $M > 0$。为简便起见，我们还固定非负径向对称初始数据 $u_0 \in C^0(\Omega)$ 和 $w_0 \in C^1(\Omega)$，以及由命题 1.2 给出的 (1.3) 的解 (u, v, w)，并将其最大存在时间记为 $T_{\max}$。不过，我们强调，以下所有常数仅依赖于 Ω、m 和 M，而不显式依赖于初始数据或解。此外，命题 1.2 中的唯一性结论表明 (u, v, w) 是径向对称的，因此下文我们记作$u(|x|, t)$，而不再写作 $u(x, t)$ 等。

为了证明定理 1.4，参照 [28], ，我们定义函数 U 如下：

$$U(\xi, t) := \int_0^{\xi^{\frac{1}{n}}} r^{n-1} u(r, t)\, \mathrm{d}r \quad \text{for } \xi \in [0, 1] \text{ and } t \in [0, T_{\max}), \tag{4.1}$$

其属于 $C^{1, 0}([0, 1] \times [0, T_{\max})) \cap C^{2, 1}([0, 1] \times (0, T_{\max}))$，并引入抛物型算子 P 如下：

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\widetilde{U}(\xi, t) := \widetilde{U}_t(\xi, t) - n^2 \xi^{2-\frac{2}{n}} (n\widetilde{U}_\xi(\xi, t) + 1)^{m-1} \widetilde{U}_{\xi\xi}(\xi, t) - n \left\{ \int_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)} \left(\widetilde{U}(\xi, s) - \frac{M}{\omega_n} \xi \right) \mathrm{d}s \right\} \widetilde{U}_\xi(\xi, t) \\ - n(W_0(\xi) - K_0 \xi) \mathrm{e}^{-t} \widetilde{U}_\xi(\xi, t) \end{aligned} \tag{4.2}$$

对于 $\xi \in (0, 1)$、$t \in (0, T)$ 和 $\widetilde{U} \in C^1((0, 1) \times (0, T)) \cap C^0((0, T); W^{2, \infty}((0, 1)))$，$T > 0$，其中

$$W_0(\xi) := \int_0^{\xi^{\frac{1}{n}}} r^{n-1} w_0(r)\, \mathrm{d}r \quad \text{for } \xi \in [0, 1] \quad \text{and} \quad K_0 := W_0(1), \tag{4.3}$$

其中 $\omega_n = |\partial B_1(0)| = n|B_1(0)|$。现在我们首先归纳 U 的性质。

引理 4.1. 函数 U 满足

$$U(0, t) = 0 \quad \textit{and} \quad U(1, t) = \frac{M}{\omega_n} \tag{4.4}$$

对所有 $t \in [0, T_{\max})$ 以及

$$U_\xi(\xi, t) = \frac{1}{n} u(\xi^{\frac{1}{n}}, t) \geq 0 \tag{4.5}$$

对所有 $\xi \in (0,1)$ 和 $t \in (0, T_{\max})$。此外，

$$\mathcal{P}U(\xi, t) = 0 \tag{4.6}$$

对所有 $\xi \in (0,1)$ 和 $t \in (0, T_{\max})$。

证明。由 U 的定义和 (2.1)，我们立即可知 (4.4) 成立；通过直接计算并利用 u 的非负性，可得 (4.5)。此外，按照 [28, 引理 4.1] 中完全相同的方式变换系统 (1.3)（该引理仅适用于二维情形和线性扩散），即可得到 (4.6)。 □

为证明定理 1.4 做准备，我们先证明一个比较原理。在陈述结果之前，我们引入函数 A, B, D，使得对于任意 $T > 0$，

$$A \in C^0((0, 1) \times [0, T) \times [0, \infty)),\ B \in C^0((0, 1) \times [0, T)),\ D \in C^0([0, 1] \times [0, T] \times [0, T]) \tag{4.7}$$

以及算子 Q，使得

$$\mathcal{Q}\widetilde{U}(\xi,t) \coloneqq \widetilde{U}_t(\xi,t) - A(\xi,t,\widetilde{U}_\xi)\widetilde{U}_{\xi\xi}(\xi,t) - \left\{B(\xi,t) + \int_0^t D(\xi,t,s)\widetilde{U}(\xi,s)\,\mathrm{d}s\right\}\widetilde{U}_\xi(\xi,t) \tag{4.8}$$

~对于 $\xi \in (0,\ 1)$, $t \in [0,T)$ 以及充分正则的 $U\colon (0,\ 1) \times (0,\ T) \to \mathbb{R}$。注意，算子 Q 与 [28, (4.9)]，中的定义略有不同，其中 A 仅依赖于 ξ 和 t。

引理 4.2。设 $t_1 \geq 0$ 和 $T > t_1$。假设 A、B 和 D 满足 (4.7)，

$$A \geq 0 \quad in\ (0,1)\times(t_1,T)\times[0,\infty) \quad and \quad D \geq 0 \quad in\ [0,1]\times[0,T]\times[0,T].$$

此外，假设

$$\underline{U}, \overline{U} \in C^0([0,1]\times[0,T]) \cap C^1((0,1)\times(t_1,T)) \cap C^0((t_1,T); W^{2,\infty}((0,1)))$$

非负且满足

$$0 \leq \underline{U}_\xi(\xi,t) \leq L \quad for\ all\ \xi \in (0,1)\ and\ t \in (t_1,T)$$

其中某个 $L > 0$，且满足

$$\mathcal{Q}\underline{U}(\xi,t) \leq \mathcal{Q}\overline{U}(\xi,t) \quad for\ a.e.\ \xi \in (0,1)\ and\ all\ t \in (t_1,T),$$

其中$\mathcal{Q}$ 如 (4.8) 中所定义。若

$$\underline{U}(\xi,t) \leq \overline{U}(\xi,t) \quad for\ all\ \xi \in [0,1]\ and\ t \in [0,t_1] \tag{4.9}$$

and

$$\underline{U}(0,t) \leq \overline{U}(0,t) \quad for\ all\ t \in [t_1,T], \quad \underline{U}(1,t) \leq \overline{U}(1,t) \quad for\ all\ t \in [t_1,T], \tag{4.10}$$

then

$$\underline{U}(\xi,t) \leq \overline{U}(\xi,t) \quad for\ all\ \xi \in [0,1]\ and\ t \in [0,T].$$

证明。该结论可按照 [28, 引理 42], 的证明进行证明，唯一的区别在于，在我们的设定中，$\sim A$ 还依赖于 U_ξ。主要思路是证明，对于任意的 $\varepsilon > 0$ 和某些 $\beta > 0$，函数

$$d(\xi,t) \coloneqq \underline{U}(\xi,t) - \overline{U}(\xi,t) - \varepsilon \mathrm{e}^{\beta t} \quad \text{for } \xi \in [0,1] \text{ and } t \in [0,T)$$

为负。如果情况并非如此，那么（4.9）和（4.10）将确保存在（$\xi_\star, t_\star$）$\in (0,1)\times(t_1,T)$，使得 $d(\xi_\star, t_\star) = 0$。由于我们还可以假设 $t_\star$ 取最小值，$d(\cdot\ t_\star)$将在 $\xi_\star$处取得最大值，因此 $d_\xi(\xi_\star, t_\star) = 0$。于是，由于 $A(\xi_\star, t_\star, \underline{U}_\xi(\xi_\star, t_\star)) = A(\xi_\star, t_\star, \overline{U}_\xi(\xi_\star, t_\star))$，并且鉴于对$\sim A$、$\underline{U}$和 $\overline{U}$所要求的正则性，A 依赖于 U_ξ 这一事实不会造成额外困难，我们可以像 [28, 引理 42]的证明中那样得到矛盾。 □

为证明爆破，我们将为（4.6）构造一个空间导数无界的下解。参见 [28,(6.1)]，我们令函数 $\underline{U}$ 为

$$\underline{U}(\xi,t) \coloneqq \begin{cases} \dfrac{a(t)\xi}{b(t)+\xi} & \text{if } \xi \in [0,\xi_0] \text{ and } t \in [0,\infty), \\ \dfrac{a(t)b(t)\xi + a(t)\xi_0^2}{(b(t)+\xi_0)^2} & \text{if } \xi \in (\xi_0,1] \text{ and } t \in [0,\infty), \end{cases} \tag{4.11}$$

其中 $\xi_0 \in (0,1)$，函数 a 和 b 定义为

$$a(t) \coloneqq \frac{M}{\omega_n} \cdot \frac{(b(t)+\xi_0)^2}{b(t)+\xi_0^2} \quad \text{and} \quad b(t) \coloneqq b_0 \mathrm{e}^{-\alpha t} \qquad \text{for } t \in [0,\infty) \tag{4.12}$$

其中 $b_0 > 0$ 和 $\alpha > 0$。那么函数 $\underline{U}$ 满足（参见 [28, 引理 6.1]）

$$\underline{U} \in C^1([0,1]\times[0,\infty)) \cap C^0([0,\infty); W^{2,\infty}((0,1))) \cap C^0([0,\infty); C^2_{\mathrm{loc}}([0,1]\setminus\{\xi_0\})).$$

此外，通过计算 $\mathrm{P}\underline{U}$，我们得到以下引理。

引理 4.3。设 $\alpha, b_0 > 0$, $\xi_0 \in (0,1)$ 和 a, b 如(4.12)中所定义。那么(4.11)中定义的函数 $\underline{U}$ 满足

$$\begin{aligned}\frac{(b(t)+\xi)^2}{a(t)b(t)\xi}\mathcal{P}\underline{U}(\xi,t) = {}& \frac{a'(t)(b(t)+\xi)}{a(t)b(t)} - \frac{b'(t)}{b(t)} + 2n^2\left(\frac{na(t)b(t)}{(b(t)+\xi)^2}+1\right)^{m-1}\frac{\xi^{1-\frac{2}{n}}}{b(t)+\xi} \\ & - n\int_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)}\left(\frac{a(s)}{b(s)+\xi} - \frac{M}{\omega_n}\right)\mathrm{d}s - n\left(\frac{W_0(\xi)}{\xi} - K_0\right)\mathrm{e}^{-t}\end{aligned} \tag{4.13}$$

对所有 $\xi \in (0,\xi_0)$ 和 $t \in (0,\infty)$，以及

$$\begin{aligned}\frac{(b(t)+\xi_0)^2}{a(t)b(t)}\mathcal{P}\underline{U}(\xi,t) = {}& \frac{a'(t)\xi}{a(t)} + \frac{b'(t)\xi}{b(t)} + \frac{a'(t)\xi_0^2}{a(t)b(t)} - 2\frac{b'(t)\xi + \frac{b'(t)}{b(t)}\xi_0^2}{b(t)+\xi_0} \\ & - n\int_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)}\left(\frac{a(s)b(s)\xi + a(s)\xi_0^2}{(b(s)+\xi_0)^2} - \frac{M}{\omega_n}\xi\right)\mathrm{d}s \\ & - n(W_0(\xi) - K_0\xi)\mathrm{e}^{-t}\end{aligned} \tag{4.14}$$

对所有 $\xi \in (\xi_0,1)$ 和 $t \in (0,\infty)$。

证明。由直接计算可得；详情参见 [28, 引理 6.1], ，其中右侧 (4.13) 中只有第三项与 [28, (6.2)] 中的略有不同。□

我们的目标是确保 $\mathrm{P}\underline{U} \le 0$ 属于 $(0,1)\times(0,\infty)$。由于函数 $\underline{U}$ 在 $(\xi_0,1)\times(0,\infty)$ 上满足 (4.14)，这与 [28, (6.3)], 类似，因此我们可以立即得到以下引理。

引理 4.4。假设 $\xi_0 \in (0,1)$ 和 $\eta_0 > 0$ 满足

$$\frac{W_0(\xi) - K_0\xi}{1-\xi} \ge \eta_0$$

对所有 $\xi \in (\xi_0,1)$均成立。则对所有 $\alpha_\star > 0$，存在 $\alpha \in (0,\alpha_\star)$，使得对于任意选取的 $b_0 \in (0,\xi_0^2)$，*(4.11)* 中的函数 $\underline{U}$ 满足

$$\mathcal{P}\underline{U}(\xi,t) \le 0$$

对所有 $\xi \in (\xi_0,1)$ 以及 $t \in (0,\infty)$均成立。

证明。与 [28] 中考虑的算子相比，(4.2) 中引入的算子 P 的主要区别在于 $U_{\xi\xi}$ 前的因子，这显然不会影响 $\underline{U}_{\xi\xi}$ 为零的区域。因此，本引理可仿照 [28, 引理 6.2 和引理 6.3], 证明，只需根据 n 对 η_0 作略微不同的选择。

□

在估计 (4.13) 右端之前，我们先回顾一下对其中第一项的估计。

引理 4.5. 设 $\alpha, b_0 > 0$, $\xi_0 \in (0,1)$ 和 a, b 如 (4.12) 中所定义。函数 a 满足

$$\frac{a'(t)(b(t)+\xi)}{a(t)b(t)} \leq \frac{\alpha}{\xi_0}$$

对所有 $\xi \in (0, \xi_0)$ 以及 $t \in (0, \infty)$。

证明。这是由 根据 (4.12) 中 a 和 b 的定义推导得出，具体计算见 [28, 引理 6.4]。 □

现在我们证明对于某个 $\xi_0 \in (0,1)$，有估计 $\mathrm{P}\underline{U} \leq 0$ 在 $(0, \xi_0) \times (0, \infty)$。我们先考虑时间足够大时的这一估计。当 $m = 2 - \frac{2}{n}$时，需要对 M施加一个充分大的条件；而当 $m \in \left[1, 2 - \frac{2}{n}\right)$,时，对于任意 $M > 0$，估计 $\mathrm{P}\underline{U} \leq 0$ 都成立。

引理 4.6。假设

$$W_0(\xi) - K_0 \xi \geq 0 \tag{4.15}$$

对所有 $\xi \in (0,1)$。

(i) 若 $m = 2 - \frac{2}{n}$ 且

$$M > 2^{\frac{n}{2}} n^{n-1} \omega_n, \tag{4.16}$$

(ii) 若 $m \in \left[1, 2 - \frac{2}{n}\right)$ 且 $M > 0$, *or*

则存在 $\xi_0 \in (0,1)$ 以及 $\alpha_\star > 0$，使得对于所有 $\alpha \in (0, \alpha_\star)$，都可以找到 $b_0 \in (0, \xi_0^2)$ 和$t_0 \in (0, \infty)$，使得函数 $\underline{U}$ 在 (4.11) 中满足

$$\mathcal{P}\underline{U}(\xi, t) \leq 0$$

对于所有 $\xi \in (0, \xi_0)$ 以及 $t \in [t_0, \infty)$。

证明。在某些方面，这个证明与 [28, 引理 6.5] 相似。不过，我们仍然选择给出完整证明，原因有二：首先，这里是关于 m 和 M 的条件起关键作用之处。其次，与上面某些证明不同，我们在这里需要引入新的思路来处理 (1.3)（因此也包括 (4.2)）中存在的非线性扩散，针对 $m > 1$。

假 设 m 和 M 满足条件 (i) 或 (ii)，并取满足下列条件的 $\varepsilon \in (0,1)$ 和 $\xi_0 \in (0,1)$

$$\xi_0 \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.17}$$

并且在 (ii) 的情况下，还满足

$$\xi_0^{2-\frac{2}{n}-m} \leq \frac{(1-\varepsilon)^3 nM}{(1+\varepsilon)\omega_n} \cdot \frac{1}{2n^2} \left((\varepsilon+1)^2 \frac{nM}{\omega_n} + \frac{\varepsilon}{2} \right)^{-(m-1)}, \tag{4.18}$$

因此，在这两种情况下，

$$c_1 := \frac{(1-\varepsilon)^3 nM}{(1+\varepsilon)\omega_n} - 2n^2 \left((\varepsilon+1)^2 \frac{nM}{\omega_n} + \frac{\varepsilon}{2} \right)^{m-1} \xi_0^{2-\frac{2}{n}-m} > 0,$$

要么由 (4.16) 以及充分小的 ε 取值推出，要么由 (4.18) 推出。令

$$\alpha_\star = \min\left\{\frac{\log\frac{1}{1-\varepsilon}}{\log\frac{1}{\varepsilon}}, \frac{c_1}{4}\right\}. \tag{4.19}$$

此外，给定 $\alpha \in (0, \alpha_\star)$，我们选取满足以下条件的 $b_0 > 0$ 和 $t_0 > 0$

$$b_0 \le \varepsilon\xi_0^2 \le \xi_0^2 \le \xi_0 \tag{4.20}$$

and

$$t_0 \ge \frac{1}{\alpha}\log\frac{1}{1-\varepsilon}. \tag{4.21}$$

条件 (4.15) 和恒等式 (4.13) 表明

$$\begin{aligned}\frac{(b(t)+\xi)^2}{a(t)b(t)\xi}\mathcal{P}\underline{U}(\xi,t) \le{}& \frac{a'(t)(b(t)+\xi)}{a(t)b(t)} - \frac{b'(t)}{b(t)} + 2n^2\left(\frac{na(t)b(t)}{(b(t)+\xi)^2}+1\right)^{m-1}\frac{\xi^{1-\frac{2}{n}}}{b(t)+\xi}\\ &- n\int_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)}\left(\frac{a(s)}{b(s)+\xi} - \frac{M}{\omega_n}\right)\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{4.22}$$

对于所有 $\xi \in (0, \xi_0)$ 和 $t \in (0, \infty)$ 均成立。由引理 4.5 以及 (4.12) 中 b 的定义可得

$$J_1(t) \coloneqq \frac{a'(t)(b(t)+\xi)}{a(t)b(t)} - \frac{b'(t)}{b(t)} \le \frac{\alpha}{\xi_0} + \alpha \le \frac{2}{\xi_0}\alpha \tag{4.23}$$

并且由 (4.12) 和 (4.17)（以及 (4.20)）中 a 的定义可得

$$\varepsilon\frac{a(t)}{b(t)+\xi} = \frac{M}{\omega_n}\cdot\frac{(b(t)+\xi_0)^2\varepsilon}{(b(t)+\xi)(b(t)+\xi_0^2)} \ge \frac{M}{\omega_n}\cdot\frac{(b(t)+\xi_0)\varepsilon}{b(t)+\xi_0^2} \ge \frac{M}{\omega_n}\cdot\frac{\xi_0\cdot 2\xi_0}{\xi_0^2+\xi_0^2} = \frac{M}{\omega_n} \tag{4.24}$$

此外，由 (4.12) 和 (4.20) 可得

$$a(t) = \frac{M}{\omega_n}\cdot\frac{(b+\xi_0)^2}{b(t)+\xi_0^2} \ge \frac{M}{\omega_n}\cdot\frac{\xi_0^2}{b_0+\xi_0^2} \ge \frac{M}{(1+\varepsilon)\omega_n}$$

对于所有 $\xi \in (0, \xi_0)$ 和 $t \in (0, \infty)$ 均成立（另见 [28, 第 3671] 页）。此外，如 [28, 第 3671–3672] 页所述，条件 (4.19) 和 (4.21) 确保

$$\int_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)}\frac{1}{b(s)+\xi}\,\mathrm{d}s \ge \frac{(1-\varepsilon)^2}{b(t)+\xi} \tag{4.25}$$

对所有 $\xi \in (0, \xi_0)$ 和 $t \in [t_0, \infty)$ 均成立。因此，根据 (4.24)–(4.25)，我们得到

$$\begin{aligned}-n\int_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)}\left(\frac{a(s)}{b(s)+\xi} - \frac{M}{\omega_n}\right)\mathrm{d}s &\le -(1-\varepsilon)n\int_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)}\frac{a(s)}{b(s)+\xi}\,\mathrm{d}s\\ &\le -\frac{(1-\varepsilon)nM}{(1+\varepsilon)\omega_n}\int_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)}\frac{1}{b(s)+\xi}\,\mathrm{d}s\\ &\le -\frac{(1-\varepsilon)^3 nM}{(1+\varepsilon)\omega_n}\cdot\frac{1}{b(t)+\xi}\end{aligned} \tag{4.26}$$

对所有 $\xi\in(0,\xi_0)$ 和 $t\in[t_0,\infty)$ 均成立。此外，由 (4.12)、(4.20) 及关系式 $\xi_0<1$ 可得

$$a(t)\leq\frac{M}{\omega_n}\cdot\frac{(\varepsilon\xi_0^2+\xi_0)^2}{\xi_0^2}\leq(\varepsilon+1)^2\cdot\frac{M}{\omega_n}$$

对所有 $t\in[0,\infty)$，由该不等式、 $^{b_{(t)}\,b(t)+\xi}\leq 1$ 这一事实以及 (4.17)，可推得

$$\begin{aligned}2n^2\left(\frac{na(t)b(t)}{(b(t)+\xi)^2}+1\right)^{m-1}\frac{\xi^{1-\frac{2}{n}}}{b(t)+\xi}&\leq 2n^2\left((\varepsilon+1)^2\cdot\frac{nM}{\omega_n}\cdot\frac{1}{b(t)+\xi}+1\right)^{m-1}\frac{\xi^{1-\frac{2}{n}}}{b(t)+\xi}\\&\leq 2n^2\left((\varepsilon+1)^2\cdot\frac{nM}{\omega_n}\cdot\frac{1}{\xi}+1\right)^{m-1}\frac{\xi^{1-\frac{2}{n}}}{b(t)+\xi}\\&=2n^2\left((\varepsilon+1)^2\cdot\frac{nM}{\omega_n}+\xi\right)^{m-1}\frac{\xi^{2-\frac{2}{n}-m}}{b(t)+\xi}\\&\leq 2n^2\left((\varepsilon+1)^2\cdot\frac{nM}{\omega_n}+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{m-1}\frac{\xi_0^{2-\frac{2}{n}-m}}{b(t)+\xi}\end{aligned}$$

对所有 $\xi\in(0,\xi_0)$ 和 $t\in[0,\infty)$，结合 (4.26) 可得

$$\begin{aligned}J_2(t)&\coloneqq 2n^2\left(\frac{na(t)b(t)}{(b(t)+\xi)^2}+1\right)^{m-1}\frac{\xi^{1-\frac{2}{n}}}{b(t)+\xi}-n\int_0^t\mathrm{e}^{-(t-s)}\left(\frac{a(s)}{b(s)+\xi}-\frac{M}{\omega_n}\right)\mathrm{d}s\\&\leq\left[2n^2\left((\varepsilon+1)^2\cdot\frac{nM}{\omega_n}+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{m-1}\xi_0^{2-\frac{2}{n}-m}-\frac{(1-\varepsilon)^3nM}{(1+\varepsilon)\omega_n}\right]\cdot\frac{1}{b(t)+\xi}=-\frac{c_1}{b(t)+\xi}\end{aligned}\tag{4.27}$$

对所有 $\xi\in(0,\xi_0)$ 和 $\mathrm{d}\ t\in[t_0,\infty)$。注意到由 (4.20) 可知 $b(t)+\xi\leq\varepsilon\xi_0^2+\xi_0\leq 2\xi_0$，由 (4.22)、(4.23) 以及 (4.27)，可得

$$\frac{(b(t)+\xi)^2}{a(t)b(t)\xi}\mathcal{P}\underline{U}(\xi,t)\leq\frac{2}{\xi_0}\alpha-\frac{c_1}{b(t)+\xi}\leq\frac{2}{\xi_0}\alpha-\frac{c_1}{2\xi_0}=\frac{2}{\xi_0}\left(\alpha-\frac{c_1}{4}\right)\leq 0$$

对所有 $\xi\in(0,\xi_0)$ 和 $t\in[t_0,T_{\max})$。 □

接下来，我们推导原点附近的估计 $\mathrm{P}\underline{U}\leq 0$ 。

引理 4.7。设 α、$b_0>0$ 和 $\xi_0\in(0,1)$。那么，对于所有 $t_0\in(0,T_{\max})$，存在 $\Gamma_0>0$，使得只要 W_0 和 K_0 满足

$$\frac{W_0(\xi)}{\xi}-K_0\geq\Gamma_0$$

对于所有 $\xi\in(0,\xi_0)$，函数 $\underline{U}$ 在 (4.11) 中满足

$$\mathcal{P}\underline{U}(\xi,t)\leq 0$$

对于所有 $\xi\in(0,\xi_0)$ 和 $t\in(0,t_0)$。

证明。在估计 (4.13) 右端的各项时，我们遵循 [28, 引理 6.6]。下文中，我们主要指出其中的差异。由 (4.12) 可知

$$\frac{b(t)}{(b(t)+\xi)^2}\leq\frac{1}{b(t)}=\frac{\mathrm{e}^{\alpha t}}{b_0}\quad\text{and}\quad a(t)\leq\frac{M}{\omega_n}\cdot\frac{(b_0+1)^2}{b(t)}=\frac{M}{\omega_n}\cdot\frac{(b_0+1)^2}{b_0}\mathrm{e}^{\alpha t},$$

由此可得

$$\frac{na(t)b(t)}{(b(t)+\xi)^2} \le \frac{nM}{\omega_n}\cdot\frac{(b_0+1)^2}{b_0^2}\mathrm{e}^{2\alpha t_0} =: c_1$$

对所有 $\xi\in(0,\ \xi_0)$ 和 $t\in(0,\ t_0)$，因此我们可以估计

$$\begin{aligned}2n^2\left(\frac{na(t)b(t)}{(b(t)+\xi)^2}+1\right)^{m-1}\frac{\xi^{1-\frac{2}{n}}}{b(t)+\xi} &\le 2n^2(c_1+1)^{m-1}\cdot\frac{\xi^{1-\frac{2}{n}}}{b(t)+\xi}\\ &\le 2n^2(c_1+1)^{m-1}\cdot\frac{\xi_0^{1-\frac{2}{n}}}{b_0}\mathrm{e}^{\alpha t_0} =: c_2\end{aligned}$$

对所有 $\xi\in(0,\ \xi_0)$ 和 $t\in(0,\ t_0)$。因此，由引理 4.5 和 (4.12)

$$\frac{(b+\xi)^2}{ab\xi}\mathcal{P}\underline{U} \le \frac{\alpha}{\xi_0}+\alpha+c_2-n\int_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)}\left(\frac{a(s)}{b(s)+\xi}-\frac{M}{\omega_n}\right)\mathrm{d}s - n\left(\frac{W_0}{\xi}-K_0\right)\mathrm{e}^{-t}.$$

如 $[28,$引理 6.6$]$, $-n\int_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)}\big(\frac{a}{b+\xi}-\frac{M}{\omega_n}\big)\,\mathrm{d}s\le 0$ 中所述，因此，如果我们设定 $\mathrm{P}\underline{U}\le 0$，则对所有 $\xi\in(0,\ \xi_0)$ 和 $t\in(0,\ t_0)$

$$\Gamma_0 := \frac{1}{n}\left(\left(\frac{1}{\xi_0}+1\right)\alpha+c_2\right)\mathrm{e}^{t_0}.$$ □

最后，我们构造一组初始数据来证明定理 1.4。

引理 4.8。令 $_1t\ \alpha, b_0, \eta, \Gamma_0>0$, $\xi_0\in(0、1)$ 和 a, b 如(4.12)中所定义。设 $R:=\xi_0^{\overline{n}}$, $\eta_0:=\frac{\eta}{n}$，以及 s

$$\Gamma_u := \frac{na(0)}{b(0)} = \frac{nM}{\omega_n}\cdot\frac{(b_0+\xi_0)^2}{b_0+\xi_0^2}\cdot\frac{1}{b_0},\quad \gamma := \frac{nM}{\omega_n}\cdot\frac{b_0}{b_0+\xi_0^2}\quad and\quad \Gamma_w := n\Gamma_0. \tag{4.28}$$

如果 u_0 和 w_0 满足 (1.6)–(1.9)，则

$$\frac{W_0(\xi)-K_0\xi}{1-\xi}\ge\eta_0\quad for\ all\ \xi\in(\xi_0,1)\quad and\quad \frac{W_0(\xi)}{\xi}-K_0\ge\Gamma_0\quad for\ all\ \xi\in(0,\xi_0), \tag{4.29}$$

此外，(4.11) 中定义的函数 $\underline{U}$ 满足

$$\underline{U}(\xi,0)\le U(\xi,0)\quad for\ all\ \xi\in(0,1). \tag{4.30}$$

证明。与 $[28,$第3674$]$, 页中由(4.3)和(1.9)所得的论证相同，我们可以确认，对于所有 $\xi\in(\xi_0,1)$, $W_0(\xi)-K_0\xi=(1-\xi)\big(K_0-\frac{1}{n}\mathrm{ffl}_{B_1\setminus B_\perp}w_0\big)\ge(1-\xi)\frac{\eta}{n}=(1-\xi)\eta_0$，即(4.29)中的第一个不等式$_{\xi\,n}$成立。此外，条件(1.8)意味着对于所有 $\xi\in(0,\xi_0)$, $^{W_0}(\ _\xi\ -\cancel{K_0}\ge\frac{1}{n}\Gamma_w=\Gamma_0)$，另见 $[28,$(6.43)$]$。最后，如 $[28,$第3675$]$, 页中所述，将(4.11)和(4.12)的定义与条件(1.6)结合，我们得到对于所有 $\xi\in(0,\xi_0)$, $\underline{U}(\xi,0)\le\frac{1}{n}\Gamma_u\xi\le U(\xi,0)$；根据(4.11)、(4.12)、(1.7)以及 γ的定义，对于所有 $\xi\in(\xi_0,1)$，有$\underline{U}(\xi,0)\le\frac{M}{\omega_n}-\frac{M}{\omega_n}\cdot\frac{b_0}{b_0+\xi_0^2}(1-\xi)\le U(\xi,0)$。 □

现在我们可以证明定理 1.4。

定理 1.4 的证明。该定理可参照 $[28,$ 定理 1.3$]$ 类似地证明。因此，我们仅给出证明概要。首先，可以假设 $T_{\max}=\infty$，因为命题 1.2_1 已涵盖 $T_{\max}<\infty$ 的情形。接着，取引理 4.6 给出的 $\xi_0\in(0,1)$、$\alpha_\star>0$、$b_0\in(0,\xi_0^2)$ 和 $t_0\in(0,\infty)$，然后令 $R:=\xi_0^{\overline{n}}$。此外，

我们令 $\eta_0 := \frac{\eta}{n}$，并选取引理 4.4 中给出的 $\alpha \in (0, \alpha_\star)$。此外，我们按照 (4.28) 定义 $\Gamma_{u,\gamma}$ 和 Γ_w。我们的目标是证明

$$u(0,t) = nU_\xi(0,t) \geq n\underline{U}_\xi(0,t) \quad \text{for all } t \in (0,\infty). \tag{4.31}$$

由于根据 b 在 (4.12) 中的定义以及不等式 $b(t) \leq b_0 < \xi_0^2$，$\underline{U}_\xi(0,\ t)$ 至少呈指数增长，因此

$$\underline{U}_\xi(0,t) = \lim_{\xi \searrow 0} \frac{\underline{U}(\xi,t)}{\xi} = \frac{M}{\omega_n} \cdot \frac{(b(t)+\xi_0)^2}{b(t)+\xi_0^2} \cdot \frac{1}{b(t)} \geq \frac{M}{\omega_n} \cdot \frac{\xi_0^2}{2\xi_0^2} \cdot \frac{1}{b_0} \mathrm{e}^{\alpha t} = \frac{M}{2\omega_n b_0} \mathrm{e}^{\alpha t}$$

对所有 $t \in (0,\ \infty)$，(4.31) 表明 $u(0,\ \cdot)$ 也至少呈指数增长。为了得到 (4.31)，我们证明

$$U(\xi,t) \geq \underline{U}(\xi,t) \quad \text{for all } \xi \in [0,1] \text{ and } t \in [0,\infty). \tag{4.32}$$

由引　　理 4.8，可知 (4.29) 成立。因此，根据引理 4.4、4.6 和 4.7 可得　　t

$$\mathcal{P}\underline{U}(\xi,t) \leq 0 \quad \text{for all } \xi \in (0,1) \setminus \{\xi_0\} \text{ and } t \in (0,\infty), \tag{4.33}$$

此外，根据 (4.1) 和 (4.11)，我们可以立即观察到，对于所有 $t \in (0,\ \infty)$，$\underline{U}(0,\ t) = U(0,\ t) = 0$，且 $\underline{U}(1,\ t) = U(1,\ t) = \frac{M}{\omega_n}$。结合这些恒等式以及 (4.30) 和 (4.33)，我们应用引理 4.2 中的比较原理，推出 (4.32)。由此可见

$$u(0,t) = nU_\xi(0,t) = \lim_{\xi \searrow 0} \frac{nU(\xi,t)}{\xi} \geq \lim_{\xi \searrow 0} \frac{n\underline{U}(\xi,t)}{\xi} = n\underline{U}_\xi(0,t) \quad \text{for all } t \in (0,\infty),$$

这表明了（4.31），从而完成了证明。 □

致谢

第三作者受到日本学术振兴会科学研究费助成事业项目编号 JP22J11193 的资助。

参考文献

[1] *Bellomo, N., Bellouquid, A., Tao, Y., and Winkler, M.*：关于生物组织中图案形成的 *Keller–Segel* 模型数学理论的探索。数学模型与方法应用科学，*25(9)*：*1663–1763*，*2015*。[2] *Blanchet, A. and Laurençot, Ph.*：具有临界扩散的抛物–抛物型 *Keller–Segel* 系统作为 $\mathbb{R}^d$、 $d \geq 3$ 中的梯度流。偏微分方程通讯，*38(4)*：*658–686*，*2013*。[3] *Cieślak, T. and Stinner, Ch.*：高维中抛物–抛物型拟线性 *Keller–Segel* 系统的有限时爆破与全局无界解。微分方程杂志，*252(10)*：*5832–5851*，*2012*。[4] *Cieślak, T. and Stinner, Ch.*：全抛物型拟线性 *Keller–Segel* 系统中的新临界指数及其在体积填充模型中的应用。微分方程杂志，*258(6)*：*2080–2113*，*2015*。[5] *Friedman, A.*：偏微分方程。霍尔特、莱因哈特和温斯顿公司，纽约-蒙特利尔，魁北克-伦敦，*1969*。[6] *Fujie, K. and Senba, T.*：*Adams* 型不等式在双化学物质趋化系统中的应用。微分方程杂志，*263(1)*：*88–148*，*2017*。[7] *Fujie, K. and Senba, T.*：临界维数下双化学物质趋化系统解的爆破。微分方程杂志，*266(2-3)*：*942–976*，*2019*。[8] *Hashira, T., Ishida, S., and Yokota, T.*：抛物–抛物型拟线性退化 *Keller–Segel* 系统的有限时爆破。微分方程杂志，*264(10)*：*6459–6485*，*2018*。[9] *Herrero, M. A. and Velázquez, J. J. L.*：一种趋化模型的爆破解机制。比萨高等师范学校科学类年刊 *(4)*，*24(4)*：*633–683 (1998)*，*1997*。[10] *Hillen, T. and Painter, K. J.*：趋化偏微分方程模型使用指南。数学生物学杂志，*58(1-2)*：*183–217*，*2009*。

[11] *Horstmann, D.*：从*1970*年至今：趋化性中的 *Keller–Segel* 模型及其影响。*I.* 德国数学家协会年报，*105(3)*：*103–165*，*2003*。[12] *Ishida, S., Seki, K., and Yokota, T.*：非凸有界域上抛物–抛物型拟线性 *Keller–Segel* 系统的有界性。微分方程杂志，*256(8)*：*2993–3010*，*2014*。[13] *Ishida, S. and Yokota, T.*：抛物–抛物型拟线性退化 *Keller–Segel* 系统弱解的整体存在性。微分方程杂志，*252(2)*：*1421–1440*，*2012*。[14] *Jäger, W. and Luckhaus, S.*：关于模拟趋化作用的偏微分方程组解的爆破。美国数学会汇刊，*329(2)*：*819–824*，*1992*。[15] *Lankeit, J. and Winkler, M.*：应对趋化系统中的低正则性。德国数学家协会年报，*122 64*，*2020 1 35( )*：–。[16] *Laurençot, Ph.*：具有间接信号产生的趋化系统的整体有界解与无界解。离散与连续动力系统*B*辑，*24(12)*：*6419–6444*，*2019*。[17] *Laurençot, Ph. and Mizoguchi, N.*：具有临界扩散的抛物–抛物型 *Keller–Segel* 系统的有限时爆破。昂利·庞加莱研究所分析非线性*C*辑年刊，*34(1)*：*197–220*，*2017*。[18] *Laurençot, Ph. and Stinner, Ch.*：具有分裂种群的趋化模型发生无限时间爆破的质量阈值。*SIAM*数学分析杂志，*53(3)*：*3385–3419*，*2021*。[19] *Li, Y. and Lankeit, J.*：具有非线性扩散的趋化-触觉趋性模型的有界性。非线性，*29(5)*：*1564–1595*，*2016*。[20] *Mimura, Y.*：具有退化扩散的全抛物型 *Keller–Segel* 系统的变分形式。微分方程杂志，*263(2)*：*1477–1521*，*2017*。[21] *Mizoguchi, N. and Winkler, M.*：二维抛物型 *Keller–Segel* 系统中的爆破。预印本。[22] *Nagai, T.*：趋化系统径向对称解的爆破。应用数学科学进展，*5(2)*：*581–601*，*1995*。[23] *Nagai, T., Senba, T., and Yoshida, K.*：*Trudinger–Moser*不等式在趋化抛物系统中的应用。函数方程，*40(3)*：*411–433*，*1997*。[24] *Senba, T.*：高维域中 *Jäger-Luckhaus*系统径向解的爆破行为。函数方程，*48(2)*：*247–271*，*2005*。[25] *Strohm, S., Tyson, R. C., and Powell, J. A.*：山松甲虫扩散模型中的图案形成：将模型预测与数据联系起来。数学生物学通报，*75(10)*：*1778–1797*，*2013*。[26] *Tao, Y. and Winkler, M.*：趋化-触觉趋性模型：非线性扩散与逻辑斯蒂源项的作用。*SIAM*数学分析杂志，*43(2)*：*685–704*，*2011*。[27] *Tao, Y. and Winkler, M.*：具有亚临界敏感性的拟线性抛物–抛物型 *Keller–Segel* 系统的有界性。微分方程杂志，*252(1)*：*692–715*，*2012*。[28] *Tao, Y. and Winkler, M.*：具有间接信号产生的趋化模型发生无限时间聚集的临界质量。欧洲数学会杂志，*19(12)*：*3641–3678*，*2017*。[29] *Winkler, M.*：高维抛物–抛物型 *Keller–Segel* 系统中的有限时爆破。纯粹与应用数学杂志 *(9)*，*100(5)*：*748–767*，*2013*。