arXiv:2302.01000v2 [cond-mat.str-el] 4 Oct 2023

含多种准粒子的封闭与开放量子多体系统中的级数展开

Lea Lenke, * Andreas Schellenberger, † 以及 Kai Phillip Schmidt‡
Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg,Department of Physics, Staudtstraße 7, 91058 Erlangen, Germany

成熟的微扰连续幺正变换（pCUTs）方法将有效量子多体哈密顿量构造为微扰级数，并使其守恒一种准粒子的数目。我们将 pCUT 方法扩展为相似变换——称为 pcst^{++}——以允许存在多种具有复数能量的准粒子。由此，适用范围扩展至封闭与开放量子多体系统，其未扰动算符对应于任意叠加的梯状能谱。为此，我们将广义计数算符与 Schmiedinghoff 和 Uhrig 最近为开放量子系统引入的准粒子生成元结合起来 [1]。pcst^{++} 进而给出与模型无关的分块对角有效哈密顿量和林德布拉德算符，使其能够像传统 pCUT 方法一样，在热力学极限下进行连通簇展开。我们通过讨论具有代表性的封闭、开放和非厄米量子系统，展示 pcst^{++} 方法的应用。

I. 引言

研究关联量子物质中的集体行为，是凝聚态物质和量子光学领域的活跃研究方向，因为这与功能性量子材料和量子技术的发展息息相关 [2, 3]。从理论上来说，处理此类量子多体系统极具挑战性，因为希尔伯特空间维数会随系统规模呈指数增长。对于由量子主方程描述的开放量子系统，这一点尤为明显，因为算符空间维数随态空间维数的平方增长[4]。例如林德布拉德主方程：与封闭系统中使用的厄米哈密顿量和可观测量不同，其对应的林德布拉德算符是非厄米的，体现了系统的耗散性质 [5, 6]。此外，非厄米哈密顿量本身也具有重要意义，例如在量子磁性中，它们以自旋算符的 Dyson-Maleev 表示形式出现 [7–9]。因此，将现有针对封闭厄米系统的理论工具推广至开放量子多体系统，是一项重要的研究方向。近年来，人们已通过量子轨迹 [10]，、张量网络 [11–14]，、平均场理论的扩展 [15, 16]，以及连续相似变换 [1, 17]等方法对此进行了探索。尤其值得关注的是能够处理大型或无限系统的方法，因为这样便能在热力学极限下提取物理性质。

高阶级数展开是研究封闭量子多体系统的有力工具。通常，人们利用连通簇定理，通过微扰方法确定物理量在热力学极限下的精确表达式，并将计算做到高阶；具体做法是在有限连通簇上进行计算 [18, 19]。最初，这类连通簇展开用于确定高温下的广延热力学量级数，以及广延的零温基态性质，例如基态能量 [20]。相比之下，对于激发能这类非广延量，连通簇展开则更为复杂；直到 1996 年，Gelfand 才为单粒子色散关系建立了真正的连通簇展开 [21]。然而，这种方法违反簇可加性，因此仅适用于基态与目标激发子空间具有不同量子数的情况。2000 年，人们通过对图进行正交变换解决了这一问题，恢复了簇可加性，从而使多粒子激发能的连通簇展开成为可能 [22, 23]。

另一种颇具吸引力的途径，是采用微扰连续幺正变换（pCUTs） [24–26] 对封闭量子多体系统进行连通簇展开；该方法在设计上满足簇加性，并可处理多粒子激发能以及谱密度 [27]。在 pCUT 方法中，可推导出一个以二次量子化形式表示、守恒准粒子数（QP 守恒）且与模型无关的有效哈密顿量；其约束条件是哈密顿量的未微扰部分具有等间距谱，且有下界 [26]。过去二十多年来，pCUT 确实被成功用作连通簇展开，也就是说，人们已实现完整的图分解，以计算各种关联封闭量子多体系统中相关的矩阵元。这些系统包括受挫量子磁体 [28, 29]，、呈现拓扑量子序的模型 [30–32]，，以及具有长程相互作用 [33, 34] 或淬火无序 [35, 36]的系统。后者的应用利用了二次量子化形式的有效哈密顿量这一特点

* lea.lenke@fau.de
† andreas.schellenberger@fau.de
‡ kai.phillip.schmidt@fau.de

采用白图展开 [37]。

守准粒子数的有效 pCUT 哈密顿量由单个 QP计数算符定义，该算符对应于未扰动哈密顿量 [26]的等间距谱。因此，我们希望将 pCUT 方法推广到多种准粒子类型，同时保持方法与模型无关，这与增强型 pCUT [38]等其他推广方法不同。与此同时，为了描述开放量子系统，还需要将 pCUT 方法推广到非厄米哈密顿量和林德布拉德算符。

在这项工作中，我们引入广义微扰连续相似变换——pcst^{++}——以解决这些问题。我们通过将计数算符推广到多种准粒子类型，扩展了 pCUT 形式体系。对于非厄米算符，我们还将其与 Schmiedinghoff 和 Uhrig [1], 提出的开放量子系统广义QP生成元相结合，从而得到相似变换。因此，我们利用 pcst^{++}推导出与模型无关的哈密顿量和林德布拉德算符，并在热力学极限下实现类似于传统 pCUT 方法的连通簇展开。

本文结构安排如下。在第 II 节中，我们介绍 pcst $^{++}$ 方法及其最重要的性质。第 $^{++}$ III 节讨论了 pcst 方法的若干应用，包括厄米和非厄米哈密顿量以及林德布拉德算符。最后，我们在第 IV节总结全文。。

II. 方法

本节介绍与 pcst^{++} 方法相关的所有技术内容。首先，我们介绍连续相似变换（CSTs），将连续幺正变换（CUTs） [24, 39]的方法加以推广。对于 CST，我们采用广义准粒子（QP）生成元 [1], ，从而推导出分块对角的有效算符。随后，pcst^{++} 方法对应于对描述 CST 的底层流方程进行模型无关的微扰求解。

A. 连续相似变换

CST 的目标是将描述系统的算符（例如哈密顿量）映射为更易处理的有效算符。这一过程以连续方式进行。假设我们要将算符 $\mathcal{M}$变换到一个更合适的基底中。为此，我们定义一个相似变换 $\mathcal{S}(\ell)$，它连续依赖于流参数 $\ell \in [0,\infty]$。流动算符

$$\mathcal{M}(\ell) = \mathcal{S}(\ell)\mathcal{M}\mathcal{S}(\ell)^{-1} \tag{1}$$

是流参数 ℓ 的函数，用于将算符 $\mathcal{M} = \mathcal{M}(0)$ 转换为有效算符$\mathcal{M}_{\text{eff}} = \mathcal{M}(\infty)$。因此，有效算符 $\mathcal{M}_{\text{eff}}$ 等于 to $\mathcal{M}$ ，但以更合适的基底表示。由于相似变换 $\mathcal{S}(\ell)$是连续的，因此它具有无穷小生成元 $\eta(\ell)$，即，

$$\partial_\ell \mathcal{S}(\ell) = -\mathcal{S}(\ell)\eta(\ell)\,. \tag{2}$$

我们可以用生成元 $\eta(\ell)$来表示 $\mathcal{M}(\ell)$ 随流参数 ℓ 的演化。这得到流方程

$$\partial_\ell \mathcal{M}(\ell) = [\eta(\ell), \mathcal{M}(\ell)]\,. \tag{3}$$

这个微分方程通常无法精确求解，因为它对应于 $\mathcal{M}(\ell)$ 中各算符系数所满足的无穷多个耦合微分方程。因此，必须使用适当的截断参数来截断流方程，例如依据微扰耦合 [26, 27, 38], 、标度维数 [40, 41], ，或算符 [42, 43]的空间延展进行截断。随后，可以针对特定类别的模型，对得到的有限个微分方程进行数值求解。

显然，得到的 $\mathcal{M}_{\text{eff}}$ 取决于生成元 $\eta(\ell)$ 的选择。对于厄米算符，我们使用如下的 QP生成元 [26, 44]

$$\eta(\ell)_{nm} = \operatorname{sgn}(Q_{nn} - Q_{mm})\mathcal{M}(\ell)_{nm} \tag{4}$$

采用计数算符 Q 的本征基中的矩阵元表示；该计数算符可根据具体模型进行选择。

由此得到的有效算符满足 $[Q, \mathcal{M}_{\text{eff}}] = 0$，因此准粒子数守恒。因此 $\mathcal{M}_{\text{eff}}$ 是分块对角的，也就是说，对应于不同本征值的 Q 本征态彼此解耦。如果算符 Q 不是厄米的，我们通过连续延拓符号函数来使用广义QP生成元 [1] ，其定义如下:

$$\operatorname{sgn}(z) := \begin{cases} 0 & \text{for } z = 0\,, \\ \frac{z^*}{|z|} = e^{-\mathrm{i}\arg(z)} & \text{else}\,. \end{cases} \tag{5}$$

与实符号函数一样，这种延拓满足$z \cdot \operatorname{sgn}(z) = |z|$。

B. 广义微扰连续相似变换——pcst^{++}

在某些情况下，可以在不依赖具体模型的前提下微扰计算有效算符 $\mathcal{M}_{\text{eff}}$ 。进行这些微扰计算时，我们需要将$\mathcal{M}$ 拆分为:

$$\mathcal{M} = Q + \lambda V\,, \tag{6}$$

其中未微扰部分为 Q ，微扰为 V，微扰参数为 λ。推广到多个微扰参数的情形很简单。此外，我们假设

$$Q = \sum_{\alpha=1}^{q} \epsilon^{(\alpha)} Q^{(\alpha)}\,, \qquad \epsilon^{(\alpha)} \in \mathbb{C}\,, \tag{7}$$

其中每个单独的 $Q^{(\alpha)}$ 都具有等间距阶梯谱，其间距归一化为 1，且有下界；并且微扰可以分解为

$$V = \sum_{m\in\mathcal{E}} T_m\,, \qquad [Q, T_m] = mT_m\,, \tag{8}$$

与 $\mathcal{E}$ 一个有限复数集。指标 m表示在作用于 Q 时，从本征值为 q 的本征空间到本征值为 $q+m$ 的本征空间的映射T_m；它通常不是整数。对于 $q=1$和厄米算符，该变换简化为传统的 pCUT [26]。

流过程中算符最一般的试探形式为

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(\ell) &= Q + \sum_{k=1}^{\infty}\lambda^k \sum_{|\mathbf{m}|=k} F(\ell;\mathbf{m})T_{\mathbf{m}}\,,\\ \mathbf{m} &= (m_1,\ldots,m_k)\,,\\ T_{\mathbf{m}} &= T_{m_1}\cdots T_{m_k}\,,\end{aligned} \tag{9}$$

其中 $m_i\in\mathcal{E}$且复系数函数为 $F(\ell;\,\mathbf{m})$。由式（8）中的对易关系可得

$$[Q, T_{\mathbf{m}}] = M(\mathbf{m})T_{\mathbf{m}}\,, \qquad M(\mathbf{m}) = \sum_{i=1}^{k} m_i\,. \tag{10}$$

因此，$M(\mathbf{m})$表示在作用于 Q 时，从本征值为 q 的本征空间到本征值为$q+M(\mathbf{m})$的本征空间的映射。式（ $T_{\mathbf{m}}$（广义）QP生成元（4）为

$$\eta(\ell) = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda^k \sum_{|\mathbf{m}|=k} \mathrm{sgn}(M(\mathbf{m}))F(\ell;\mathbf{m})T_{\mathbf{m}}\,. \tag{11}$$

于是，流方程（3等价于关于修正后系数函数的递归微分方程组 $f(\ell;\,\mathbf{m}) = e^{|M(\mathbf{m})|\ell}F(\ell;\,\mathbf{m})$，其形式为

$$\begin{aligned}\partial_\ell f(\ell;\mathbf{m}) = &\sum_{(\mathbf{m}_1,\mathbf{m}_2)=\mathbf{m}} e^{(|M(\mathbf{m})|-|M(\mathbf{m}_1)|-|M(\mathbf{m}_2)|)\ell}\\ &\times[\mathrm{sgn}(M(\mathbf{m}_1)) - \mathrm{sgn}(M(\mathbf{m}_2))]f(\ell;\mathbf{m}_1)f(\ell;\mathbf{m}_2)\,,\end{aligned} \tag{12}$$

其中，对应于空元组的函数定义为 $f(\ell;\,())\;=\;0$。这些方程可利用以下初始条件逐阶求解

$$f(0;\mathbf{m}) = \delta_{1,|\mathbf{m}|}\,. \tag{13}$$

由此得到的系数 $C_{\mathbf{m}} := F(\infty;\,\mathbf{m})$，以及有效算符 $\mathcal{M}_{\mathrm{eff}}$，只取决于 $\mathcal{E}$，而不取决于 Q 或 T_m的具体定义。这意味着，我们的广义变换至少与 pCUT 一样具有模型无关性。增强型 pCUT（epCUT）[38], 则不同，它也将 pCUT 推广到了非等间距的未扰动能谱，但并非模型无关。可以将额外的自由度作为变量纳入前因子 $\epsilon^{(\alpha)}$ 和指标 m。

当然，这会带来更多计算方面的挑战，而且可达到的微扰最高阶数低于固定复数 $\epsilon^{(\alpha)}$ 和 m时的情况。因此，若要达到更高的微扰阶数，可以始终将$\epsilon^{(\alpha)}$ 固定为数值，以加快流方程的求解。

有效算符可写为

$$\mathcal{M}_{\mathrm{eff}} = Q + \sum_{k=1}^{\infty}\lambda^k \sum_{M(\mathbf{m})=0} C_{\mathbf{m}}T_{\mathbf{m}}\,. \tag{14}$$

由于求和范围仅限于 $M(\mathbf{m})\;=\;0$, $\mathcal{M}_{\mathrm{eff}}$ 满足 $[Q, \mathcal{M}_{\mathrm{eff}}] = 0$，因此它是分块对角的。流过程中的带对角性、有效算符的分块对角性以及 pcst 的收敛性证明[++] 与 pCUT 的证明基本相同 [26]，详见 附录。

由于 pcst[++] 推广了 pCUT，它也实现了连通簇展开，正如文献 [19, 27, 45]中对 pCUT 的讨论。这使我们只需使用有限簇，就能确定热力学极限下的物理量。为获得物理量，我们在足够大的有限簇上，利用模型特定态 $|s_1\rangle$,$|s_2\rangle$计算形式为 $\langle s_2|\mathcal{M}_{\mathrm{eff}}|s_1\rangle$ 的矩阵元。计算时，我们可以依赖与 pCUT 计算相同的程序，相关说明详见 [26]。因此，在热力学极限下，对于相同类型的晶格和相互作用，我们能够像使用 pCUT 一样高效地确定物理量（例如长程相互作用 [33, 37], 2维系统 [30, 46],三维系统 [31, 32]）。总之，经过裸变换后，后续的连通簇展开以及因相互作用或维度不同而产生的计算差异，对于 pCUT 和 pcst[++]而言是相同的。

对于 $\mathcal{M}_{\mathrm{eff}}$，很容易手动计算系数函数，直到二阶。所得系数为

$$\begin{aligned}C_{(m_1)} &= \begin{cases}1 & \text{for } M((m_1)) = 0\,,\\ 0 & \text{else}\,,\end{cases}\\ C_{(m_1,m_2)} &= \begin{cases}\frac{1}{M((m_1))} & \text{for } M((m_1)) = -M((m_2)) \neq 0\,,\\ 0 & \text{else}\,.\end{cases}\end{aligned} \tag{15}$$

随着阶数的增加，指标 $\mathbf{m}$ 的数量和计算复杂度都会急剧上升。因此，可以像传统的 pCUT 方法 [26]那样，将流方程的求解自动化。我们用于计算该变换的程序可在 GitHub [47] 上免费获取。

此外，若需要在有效基底中表示可观测量、态或本征向量，我们可以使用 pcst[++]，通过代入式（ $\mathcal{S}(\infty)$ 和试探形式，显式计算相似变换11)

$$\mathcal{S}(\ell) = \mathbb{1} + \sum_{k=1}^{\infty}\lambda^k \sum_{|\mathbf{m}|=k} G(\ell;\mathbf{m})T_{\mathbf{m}} \tag{16}$$

代入式（2）并递归求解 $F(\ell;\mathbf{m})$ 和 $G(\ell;\mathbf{m})$。或者，也可以针对给定的可观测量显式构造类似的试探形式。

C. 能级间距较小的子空间耦合

作为一种微扰变换，通过 pcst 得到的级数[++] 受到某个收敛半径的限制，该半径定性地取决于未扰动能级与微扰 λ之间的比值。对于传统的 pCUT 方法，未扰动哈密顿量仅限于单一梯状谱，其能级间距固定，可归一化为 1。因此，当 $\lambda \ll 1$时，微扰方法是合理的。相比之下，式（ Q ）中更一般的7pcst 的结构[++] 允许未扰动哈密顿量具有更多样的能级间距，具体取决于 $\epsilon^{(\alpha)}$的比值，其中包括任意小的间距。如果发生具有这些未扰动能级间距的虚过程，收敛半径便会受到它们的限制。例如，式（$C_{(m_1,m_2)}$ 中的二阶系数15便体现了这一点，它可能是未扰动能量差的倒数。

为了增大能级间距较小的系统中的收敛性半径 Q，我们通过引入宽阶跃符号函数

$$\mathrm{sgn}_D(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } |x| \le D\,, \\ \mathrm{sgn}(x) & \text{else}\,, \end{cases} \tag{17}$$

以防止 pcst[++] 将未扰动能级间距不超过 D的子空间解耦。这样，有效哈密顿量可以包含未扰动能量变化最多达 D 的过程。因此，它不一定与 Q 对易，并且通常会形成更大的块。原始 pcst[++] 所解耦的块现在可能需要额外的后对角化。我们将在第 IIIA节通过示例展示收敛性的提高。

D. 多种准粒子类型的特殊情况

假设一种特殊情况： q 存在不同的准粒子类型，每种类型都由一个独立的数算符 $Q^{(\alpha)}$计数。此外，进一步假设微扰还满足 $[Q^{(\alpha)},T_m]=m^{(\alpha)}T_m$ 其中 $m^{(\alpha)}$ 是一个整数，且对所有$\alpha\in\{1,\dots,q\}$均成立。在这种情况下，我们可以将标签 m 替换为冗余标签 $\underline{m}=(\underline{m^{(1)}},\ \dots\dots,\ \underline{m^{(q)}})$，其中 $m=\sum_{\alpha=1}^{q}\epsilon^{(\alpha)}m^{(\alpha)}$，从而更直观地理解微扰算符。从物理上看，指标 $m^{(\alpha)}$ 表示由 α 创建或湮灭的 T_m型准粒子的数量。在这种记号下，我们可以沿用式（9）中的相同试探形式，得到与式（14）类似的有效算符：

$$\mathcal{M}_{\mathrm{eff}} = Q + \sum_{k=1}^{\infty}\lambda^k \sum_{M(\underline{\mathbf{m}})=0} C_{\underline{\mathbf{m}}}T_{\underline{\mathbf{m}}}\,. \tag{18}$$

在此，我们定义向量 $\mathbf{m}=(m_1,\ \dots\dots,\ m_k)$、算符 $T_{\mathbf{m}}=T_{m_1}\cdots T_{m_k}$以及函数

$$M(\underline{\mathbf{m}}) = \sum_{\alpha=1}^{q}\epsilon^{(\alpha)}\sum_{i=1}^{k} m_i^{(\alpha)} \tag{19}$$

满足 $[Q,T_{\mathbf{m}}]=M(\mathbf{m})T_{\underline{\mathbf{m}}}$。对于式（10），该函数可以理解为：作用 $T_{\mathbf{m}}$时，将 Q 的本征空间（本征值为 q ）映射$q+M(\mathbf{m})T_{\mathbf{m}}$到本征值为$q+M(\mathbf{m})$ 的本征空间 $T_{\mathbf{m}}$。同样，关系式 $[Q^{(\alpha)},T_{\mathbf{m}}]=\sum_{i=1}^{k} m_i^{(\alpha)}$ 描述了作用 $T_{\mathbf{m}}$时会生成多少个类型为 α 的准粒子。

由于对易子消失，有效算符再次呈分块对角形式 $[Q,\mathcal{M}_{\mathrm{eff}}]=0$，这是因为 $M(\mathbf{m})=0$在方程（18）中。相比之下，各个$[Q^{(\alpha)},\mathcal{M}_{\mathrm{eff}}]$可能非零，因为 $M(\mathbf{m})=0$并不意味着 $\sum_{i=1}^{k} m_i^{(\alpha)}=0$。这可能导致准粒子类型转换，具体取决于模型；我们将在第III节举例讨论。

根据雅可比恒等式

$$[Q^{(\alpha)},[Q^{(\beta)},*]]-[Q^{(\beta)},[Q^{(\alpha)},*]]=[[Q^{(\alpha)},Q^{(\beta)}],*]\,, \tag{20}$$

当且仅当对所有 $\alpha,\beta\in\{1,\dots,q\}$，$[[Q^{(\alpha)},Q^{(\beta)}],V]=0$ 时，我们才能采用多种准粒子类型的记法。这意味着 V 处于 $[Q^{(\alpha)},*]$与 $[Q^{(\beta)},*]$对易的子空间中，而这又使我们能够同时求解所有$\alpha\in\{1,\dots,q\}$的本征方程 $[Q^{(\alpha)},T_m]=m^{(\alpha)}T_m$。在该本征方程中，算符 T_m是算符 $[Q^{(\alpha)},*]$对应于本征值 $m^{(\alpha)}$的本征向量。

在可能的情况下，我们使用这种记法，因为它更接近原始 pCUT 方法。

III. 应用

在介绍 pcst[++]之后，本节旨在展示可用广义变换处理的多种模型。这些模型包括：在独立希尔伯特空间和共同希尔伯特空间中含有不同类型准粒子的模型（分别见第III A 节和IIIC节）、非厄米哈密顿量（见第IIIB节），以及由林德布拉德算符而非哈密顿量描述的开放系统（见第IIID节）。我们对各个模型的物理讨论从简，以便着重介绍 pcst[++] 的技术细节及其能力。由于式（14）中的项数会随着微扰阶数迅速增加，我们使用计算机程序计算有效算符对特定状态的作用。

A. 交错横场伊辛模型

作为第一个模型，我们考虑交错磁场横向场伊辛链（STFIM），并围绕



图 1. 处于交错磁场中的横场伊辛链。磁场强度交替为 h_+ 和 h_-，分别以蓝色和红色圆圈表示。最近邻自旋之间通过强度为 J 的伊辛相互作用耦合，并以灰色标示。

$m^{(1)}$	$m^{(2)}$	T_m中的项 _
$+1$	$+1$	$b^\dagger_{i,+}b^\dagger_{j,-}$
$+1$	-1	$b^\dagger_{i,+}b_{j,-}$
-1	$+1$	$b_{i,+}b^\dagger_{j,-}$
-1	-1	$b_{i,+}b_{j,-}$

表 I. STFIM 方程（22）的微扰算符。T-算符满足关系 $T^\dagger{}_{(m_{(1)}m_{(2)})} = T_{(-m^{(1)},-m_{(2)})}$，因为该模型是厄米的。

高场极限展开，其中有两种交替的磁场强度$h_\pm = h \pm \delta_h/2$，且 h，$\delta_h \in \mathbb{R}$，其哈密顿量为

$$\mathcal{H}_{\text{STFIM}} = h_+ \sum_{j\in+} \sigma^z_j + h_- \sum_{j\in-} \sigma^z_j - J \sum_{\langle i,j\rangle} \sigma^x_i \sigma^x_j \,. \quad (21)$$

不失一般性，我们考虑这种情况$h > \delta_h \geq 0$ 且铁磁伊辛相互作用 $J \geq 0$。在高场极限 $h_\pm > J$下，交替分布的格点集合上存在两种类型的准粒子，记作 $\pm$（见图 1）。由于不同类型的准粒子仅存在于彼此分离的格点上，它们处于不同的希尔伯特空间中，只有通过伊辛相互作用所引入的微扰才会发生耦合。

通过应用 Matsubara-Matsuda变换[48]，我们可以用两种准粒子类型的硬核玻色子产生算符和湮灭算符来表示 $\mathcal{H}_{\text{STFIM}}$：

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\text{STFIM}} = E_0 + 2h_+Q^{(1)} + 2h_-Q^{(2)} \\ - J\left[T_{(+1,+1)} + T_{(+1,-1)} + \text{h.c.}\right],\end{aligned} \quad (22)$$

其中裸基态能量为 $E_0 = -Nh$，N 为偶数个格点，数算符

$$Q^{(1)} = \sum_{j\in+} b^\dagger_{j,+}b_{j,+}, \qquad Q^{(2)} = \sum_{j\in-} b^\dagger_{j,-}b_{j,-} \quad (23)$$

对应两种准粒子类型，而 T算符见表 I。数算符彼此对易，因此我们可以按照第 $T_{(m_1,m_2)}$ 节的讨论，将微扰算符的指标$T_{(m_1,m_2)}$ 按两种准粒子类型进行拆分。式（23）中各个梯状能谱的能量量子为 $\epsilon^{(1)} = 2h_+$ 和 $\epsilon^{(2)} = 2h_-$。

情形 $\delta_h = 0$ 可通过传统的 pCUT 求解，因为未扰动哈密顿量是等间距的。我们因此，我们将重点放在情形 $\delta_h > 0$，并使用 pcst^{++} 计算基态能量以及两个单准粒子扇区的激发能。由于该模型具有平移不变性，我们可以在热力学极限下，利用傅里叶变换以及 pcst^{++} 是一种连通簇展开这一性质，在动量空间中精确地进行微扰计算，求得单准粒子的色散关系 [9]。

两种准粒子类型在零动量处的激发能隙 $\Delta_\pm$ 以及截至 6 阶的 $\delta_h > 0$ 为

$$\Delta_\pm = 2h_\pm \pm 2\frac{J^2}{\delta_h} \mp 2\frac{J^4}{\delta_h^3} \pm 4\frac{J^6}{\delta_h^5}\,. \quad (24)$$

微扰随未微扰能量差 δ_h 的倒数幂变化（参见式（15）以作比较），这决定了收敛的尺度。对于 $\delta_h \to 0$，由于 J中 $\Delta_\pm$ 在 $\delta_h = 0$处发散，其收敛半径会任意小。

为了增大收敛半径，我们使用宽阶跃符号函数 sgn $_D$，该函数在第 IIC 节中引入。由于 pcst^{++} 不再使这两个单准粒子通道彼此解耦，我们在动量空间的热力学极限下，对合并后的 2×2 区块进行后对角化。

图 2 中绘出了固定 $h/\delta_h = 7/2$ 比值时两个单准粒子通道的能隙：一组采用原始 pcst^{++}（虚线），另一组采用调整后的生成元（实线），并令 $D = 2\delta_h$ 以耦合两个单准粒子扇区的子空间。两种准粒子类型之间的杂化以颜色编码表示，并在插图中展示，以直观呈现杂化随微扰增大而增强的情况。可以看出，原始 pcst^{++} 的发散直接对应于两种准粒子类型之间杂化的增强，而这种杂化在原始方法中受到抑制。因此，使用宽阶跃符号函数可增大收敛半径；否则，收敛半径会受到未扰动能量差$2\delta_h$的限制。

B. 非厄米交错横场伊辛模型

借助广义QP生成元 [1],，可以处理非厄米哈密顿量。作为示例，我们考虑与上一节相同的模型，但令 $\delta_h \in \mathrm{i}\mathbb{R}$ 为纯虚数，即施加非厄米交错场。除去一个无关紧要的常数后，这与 [9, 49] 中讨论的模型相同。为便于与这些研究进行比较，我们选择参数 $h = \eta$ 和 $\delta_h = 2\,\mathrm{i}\xi$。与 pCUT 不同，采用 pcst^{++} 可以在高场极限下处理这一问题，其中 $|\eta \pm \mathrm{i}\xi| > |J|$。我们求解每格点基态能量

$$e_0 = -\frac{J^2}{4\eta} - \frac{J^4}{64\eta^3}\frac{\eta^2 - 3\xi^2}{\eta^2+\xi^2} - \frac{\eta^2+5\xi^2}{\eta^2+\xi^2}\frac{J^6}{1024\eta^5} \quad (25)$$

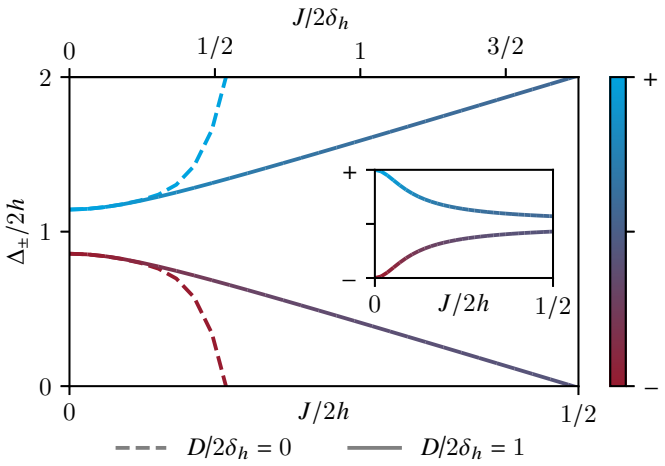

图 2. 两个单准粒子通道的归一化能隙 $\Delta_\pm/2h$ 随 $J/2h$ 和 $J/2\delta_h$变化的关系。未微扰能量设为 $h/\delta_h = 7/2$。采用原始 pcst⁺⁺ 计算的能隙以虚线表示；采用宽步长符号函数耦合两个单准粒子通道后计算的能隙以实线表示，其中设定 $D = 2\delta_h = 2h_+ - 2h_-$。对于耦合通道，两种类型之间的杂化程度显示在插图中，并用颜色区分：蓝色（红色）表示位于 +（−）格点上的 1 型（2 型）准粒子。插图还用相同的颜色标示两种模式中两类准粒子的占比（±）。因此，极限 + （−）表示纯 1 型（2 型）准粒子。

以及零动量处元激发的能隙 $\Delta_\pm$，计算至六阶

$$\Delta_\pm = 2(\eta \pm \mathrm{i}\xi) \pm \frac{J^2}{\mathrm{i}\xi} \pm \frac{J^4}{4\mathrm{i}\xi^3} \pm \frac{J^6}{8\mathrm{i}\xi^5}\,, \tag{26}$$

与式（24）的结果相同，只是用新的变量表示。我们精确重现了此前工作中的结果 [9]，现在采用 pcst⁺⁺ 方法，而非高桥微扰理论 [50]。采用后者时，需要在傅里叶变换后对所得的 2×2块进行额外的对角化；而 pcst⁺⁺ 则从设计上便可直接对角化这两条能带。

C. 具有单离子各向异性的自旋-1横场伊辛模型

不同的准粒子类型不必局限于彼此独立的希尔伯特空间，也可以共享同一个希尔伯特空间。这使我们能够研究未扰动哈密顿量局域结构更为复杂的模型。作为示例，我们考察具有单离子各向异性的自旋-1横场伊辛模型（ATFIM）。

$$\mathcal{H}_{\mathrm{ATFIM}} = \sum_j \left[D\left(S_j^z\right)^2 + hS_j^z\right] - J\sum_{\langle i,j\rangle} S_i^x S_j^x\,, \tag{27}$$

如图 3(a)所示。下文中，我们将伊辛相互作用视为微扰。通过调节

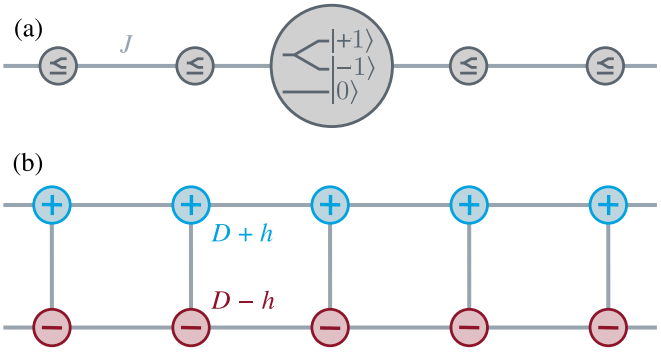

图 3. (a) ATFIM，其局域态为 $|0\rangle$，$|+1\rangle$，$|-1\rangle$，未微扰能量分别为 0、$D+h$，$D-h$，微扰伊辛耦合的强度为 J。(b) 根据式（34）得到的梯子上的有效自旋-1/2 模型。(a) 中自旋-1模型的激发态$|+1\rangle$，$|-1\rangle$ 被映射为硬核玻色子，从而实现两种不同的准粒子类型，分别以蓝色和红色表示。伊辛耦合由有效四粒子相互作用实现，如表II所示。

实参数 D，$h \in \mathbb{R}$，我们可以对任意能级间距的局域三能级系统进行建模，其未扰动哈密顿量为 $\mathcal{H}_{\mathrm{ATFIM}}($ $J = 0$)。我们将算符 S^z 的本征态用作基底，即局域地有$S^z|0\rangle = 0$ 和 $S^z|\pm1\rangle = \pm|\pm1\rangle$。在这个基底中，

$$S_j^x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle\langle+1|_j + |0\rangle\langle-1|_j + \mathrm{h.c.}\right). \tag{28}$$

在讨论中，我们将范围限制在参数区域 $D > h > 0$，其他参数子空间也可以用类似的方法处理。在此区域内，未受微扰的局域基态为 $|0\rangle$，两个激发态为 $|\pm1\rangle$。我们将它们的湮灭算符定义为

$$a_{j,\pm} = |0\rangle\langle\pm1|_j \tag{29}$$

相应的产生算符则定义为它们的伴随算符。我们将两种准粒子类型的计数算符写作

$$Q^{(1)} = \sum_j a_{j,+}^\dagger a_{j,+}, \qquad Q^{(2)} = \sum_j a_{j,-}^\dagger a_{j,-}\,. \tag{30}$$

与第 IIIA 节不同，同一格点上不同准粒子类型的产生算符和湮灭算符不对易

$$[a_{j,\alpha}, a_{j,\beta}^\dagger] = \delta_{\alpha,\beta} - a_{j,\beta}^\dagger a_{j,\alpha} - \delta_{\alpha,\beta}\sum_\gamma a_{j,\gamma}^\dagger a_{j,\gamma}\,. \tag{31}$$

相反，它们满足相互的硬核玻色统计。尽管如此，算符 $Q^{(1)}$ 和 $Q^{(2)}$ 彼此对易，因此我们可以按照两种准粒子类型拆分微扰算符的指标$T_{(m_1,m_2)}$，如第 IID 节所述。

我们再次利用模型的平移不变性，在动量空间中微扰计算单准粒子色散关系。所得的激发能隙 $\Delta_\pm$ 对应于

$D>h>0$ 和 $J>0$ 在动量 $k=0$ 处截至 4 阶的结果为

$$\begin{aligned}\Delta_{\pm}|_{D\neq\pm 2h} &= D\pm h-J\pm J^2\frac{2D^2-h^2}{4Dh(D\mp h)}\\ &\pm J^3\frac{8D^4\mp 8D^3h\pm Dh^3+h^4}{16D^2h\,(D\mp h)^2\,(D\pm h)}\\ &\mp J^4\big[8D^9\mp 24D^8h\pm 32D^6h^3+34D^5h^4\\ &\qquad\mp 72D^4h^5+27D^3h^6-7Dh^8\pm 6h^9\big]\\ &\quad\times\big[64D^3h^3\,(D\mp h)^3\,(D\pm h)^2\,(D\mp 2h)\big]^{-1}\end{aligned}\tag{32}$$

$$\Delta_{+}|_{D=2h} = 3h-J+\frac{7J^2}{8h}+\frac{67J^3}{192h^2}-\frac{133J^4}{4608h^3}\,.\tag{33}$$

不过，尽管我们已计算出截至 6 阶的一般表达式，为使表达式简洁，能隙仅给出至较低阶。对于固定的D，h比值，更高阶的结果可以轻松计算；而如本文所示，一般解析结果在更高阶时则难以计算。同样，微扰项按未微扰能量差的幂次缩放，对应于微扰理论中的虚过程。因此，对于 D，h的特殊参数配置，例如 $D=2h$从 4 阶开始，我们再次得到被人为发散包围的准粒子转换，这些发散可用式（17）中的宽阶跃符号函数消除。

除了直接处理自旋-1模型，我们还可以建立从链上的自旋-1模型到两个有效自旋-1/2自由度的映射，并将其分布在一个梯子上，如图 3(b)所示，其中每个梯级对应于一个格点上的两种准粒子类型。因此，两种准粒子类型仍定义在不同的希尔伯特空间上。这实际上将该模型归入第 IIIA节讨论的系统类别。每个自旋-1/2自由度记作 $|\uparrow\rangle$，$|\downarrow\rangle$ 每个梯级上的局域态为 $|\downarrow\downarrow\rangle:=|0\rangle$ 表示局域基态，而 $|\uparrow\downarrow\rangle:=|+1\rangle$ 和 $|\downarrow\uparrow\rangle:=|-1\rangle$ 表示两个相应的激发态。为将局域四维希尔伯特空间限制在自旋-1的三维子空间内，我们使用投影算符。哈密顿量为

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\mathrm{ATFIM}} &= (D+h)Q^{(1)}+(D-h)Q^{(2)}\\ &\quad-\frac{J}{2}\left(T_{(2,0)}+T_{(0,2)}+T_{(1,1)}+T_{(1,-1)}+\mathrm{h.c.}\right)\end{aligned}\tag{34}$$

其中 $Q^{(1)}=\sum_j n_{j,+}$, $Q^{(2)}=\sum_j n_{j,-}$ ——使用数算符 $n_{j,\pm}=b^\dagger_{j,\pm}b_{j,\pm}$ ——以及表II中给出的 T-算符，其中 $b_{j,\pm}$ ($b^\dagger_{j,\pm}$) 分别是梯级 j上自旋-1/2 子的湮灭（产生）算符。注意，为了保持在局域三维子空间内，伊辛耦合的双位点相互作用借助投影算符 $(1-n_{j,\pm})$ 被建模为有效的四位点相互作用。

总而言之，这个例子拓展了可研究系统的范围，使其涵盖具有任意局域能谱、此前无法通过 pCUT 处理的

$m^{(1)}$	$m^{(2)}$	中的项
2	0	$b^\dagger_{i,+}b^\dagger_{j,+}(1-n_{i,-})(1-n_{j,-})$ $b^\dagger_{i,-}b^\dagger_{j,-}(1-n_{i,+})(1-n_{j,+})$
0	2	
1	1	$b^\dagger_{i,+}b^\dagger_{j,-}(1-n_{i,-})(1-n_{j,+})$ $+\,b^\dagger_{i,-}b^\dagger_{j,+}(1-n_{i,+})(1-n_{j,-})$
1	−1	$(1-n_{i,-})+b$ $b^\dagger_{i,+}b_{j,}$ $_{i,-}b^\dagger_{j,+}(1-n_{j,-})$
0	0	$b^\dagger_{i,+}b_{j,+}(1-n_{i,-})+b^\dagger_{i,-}b_{j,-}(1-n_{i,+})$

表 II. ATFIM 的微扰算符（34）。省略的 T-算符由上述表达式的厄米共轭给出。

系统。通过将单个局域激发映射为彼此遵循硬核玻色统计的不同准粒子类型（如式（31）所示），我们可以建立一种通用方法，用于围绕这些局域能谱计算级数展开。

D. 耗散横场伊辛模型

为了展示 pcst⁺⁺ 的多功能性，我们考虑具有局部衰减的横场伊辛模型的 Lindblad 算符。动力学的相干部分由哈密顿量支配

$$\mathcal{H}=h\sum_j\sigma^z_j-J\sum_{\langle i,j\rangle}\sigma^x_i\sigma^x_j\tag{35}$$

耗散部分则由局域跳跃算符

$$L_j=\sigma^-_j\,,\tag{36}$$

分别作用于每个自旋上 j，耗散率为Γ。这两个部分均示于图4(a)。综合起来，密度矩阵的时间演化由林德布拉德方程给出

$$\mathrm{i}\dot\rho=[\mathcal{H},\rho]+\frac{\mathrm{i}\Gamma}{2}\sum_j\Big[2L^\dagger_j\rho L_j-\{L^\dagger_jL_j,\rho\}\Big]\,.\tag{37}$$

为了纯化该方程，我们用刘维尔空间中的基矢 $|\varphi,\psi\rangle\!\rangle:=|\varphi\rangle\otimes|\psi\rangle^*$ 表示算符空间中的基矢$|\varphi\rangle\langle\psi|$ 。算符 $\mathcal{M}$ 的纯化定义为$|\mathcal{M}\rangle\!\rangle:=\sum_{|\varphi\rangle,|\psi\rangle}\langle\varphi|\,\mathcal{M}\,|\psi\rangle\,|\varphi,\psi\rangle\!\rangle$。刘维尔空间中的林德布拉德算符可通过 $|\mathrm{i}\,\dot\rho\rangle\!\rangle=\mathcal{L}\,|\rho\rangle\!\rangle$ 求得，其形式为

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= h\sum_j(\sigma^z_j\otimes\mathbb{1}-\mathbb{1}\otimes\sigma^z_j)\\ &\quad-J\sum_{\langle i,j\rangle}(\sigma^x_i\sigma^x_j\otimes\mathbb{1}-\mathbb{1}\otimes\sigma^x_i\sigma^x_j)\\ &\quad+\frac{\mathrm{i}\Gamma}{2}\sum_j(2\sigma^-_j\otimes\sigma^-_j-\sigma^+_j\sigma^-_j\otimes\mathbb{1}-\mathbb{1}\otimes\sigma^+_j\sigma^-_j).\end{aligned}\tag{38}$$

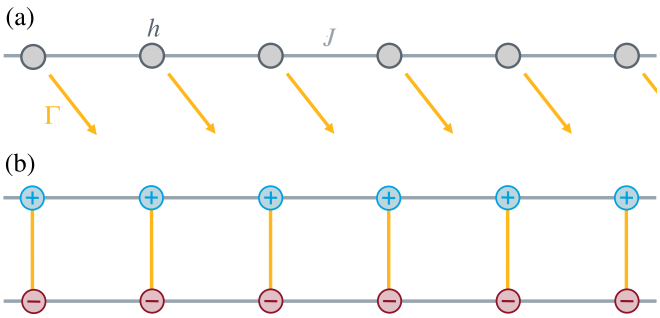

图 4. (a) 耗散横场伊辛模型。相邻的自旋-1/2粒子之间通过强度为 J 的伊辛相互作用耦合，并受到强度为 h 的横向磁场作用，以及速率为 Γ的局域耗散。(b) 根据式（38）中的纯化林德布拉德算符得到的等效梯子模型。蓝色（+）格点对应 $\sigma_j \otimes \mathbb{1}$，红色（–）格点对应 $\mathbb{1} \otimes \sigma_j$。

$m^{(1)}$	$m^{(2)}$	T_m中的项 _
−2	−2	$\sigma_i^- \sigma_j^- \otimes \mathbb{1} - \sigma_i^- \sigma_j^- \otimes \sigma_i^z \sigma_j^z$
+2	−2	$-\mathbb{1} \otimes \sigma_i^- \sigma_j^- + \sigma_i^z \sigma_j^z \otimes \sigma_i^- \sigma_j^-$
+2	+2	$\sigma_i^+ \sigma_j^+ \otimes \mathbb{1} + \sigma_i^z \sigma_j^+ \otimes \sigma_i^- + \sigma_i^+ \sigma_j^z \otimes \sigma_j^-$ $+\sigma_i^z \sigma_j^z \otimes \sigma_i^- \sigma_j^-$
−2	+2	$-\mathbb{1} \otimes \sigma_i^+ \sigma_j^+ - \sigma_i^- \otimes \sigma_i^z \sigma_j^+ - \sigma_j^- \otimes \sigma_i^+ \sigma_j^z$ $-\sigma_i^- \sigma_j^- \otimes \sigma_i^z \sigma_j^z$
0	0	$\sigma_i^+ \sigma_j^- \otimes \mathbb{1} + \sigma_i^- \sigma_j^+ \otimes \mathbb{1} + \sigma_i^z \sigma_j^- \otimes \sigma_i^-$ $+\sigma_i^- \sigma_j^z \otimes \sigma_j^- - \mathbb{1} \otimes \sigma_i^+ \sigma_j^- - \mathbb{1} \otimes \sigma_i^- \sigma_j^+$ $-\sigma_i^- \otimes \sigma_i^z \sigma_j^- - \sigma_j^- \otimes \sigma_i^- \sigma_j^z$
0	−2	$-\sigma_i^z \sigma_j^- \otimes \sigma_i^- - \sigma_i^- \sigma_j^z \otimes \sigma_j^- + \sigma_i^- \otimes \sigma_i^z \sigma_j^-$ $+\sigma_j^- \otimes \sigma_i^- \sigma_j^z$
+2	0	$-\sigma_i^z \sigma_j^+ \otimes \sigma_i^- - \sigma_i^+ \sigma_j^z \otimes \sigma_j^- - 2\sigma_i^z \sigma_j^z \otimes \sigma_i^- \sigma_j^-$
−2	0	$\sigma_i^- \otimes \sigma_i^z \sigma_j^+ + \sigma_j^- \otimes \sigma_i^+ \sigma_j^z + 2\sigma_i^- \sigma_j^- \otimes \sigma_i^z \sigma_j^z$

表 III. 林德布拉德算符（38）的微扰算符。

该模型如图 4(b)所示，其中蓝色格点（+） [红色格点（–）] 分别对应张量积左侧 [右侧] 的希尔伯特空间。

接下来，我们使用 pcst⁺⁺ 来研究极限$|J| \ll |h|, |\Gamma|$。未微扰部分中的两项带有前因子 h 和 Γ 的项彼此对易，因此我们可以选择

$$Q^{(1)} = \frac{1}{2}\sum_j (\sigma_j^z \otimes \mathbb{1} - \mathbb{1} \otimes \sigma_j^z),$$
$$Q^{(2)} = \sum_j (\sigma_j^+ \sigma_j^- \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \sigma_j^+ \sigma_j^- - 2\sigma_j^- \otimes \sigma_j^-), \tag{39}$$

其中 $\epsilon^{(1)} = 2h$ 和 $\epsilon^{(2)} = -i\Gamma/2$，并将微扰算符 T_m 写作带有两个指标的形式。无法将 Q 进一步拆分为更多求和项，因为 $Q^{(1)}$是唯一一个与 $\sigma_j^- \otimes \sigma_j^-$ 对易的算符。微扰——按照第 T_m II D节所述，分解为本征基算符 ——列于表 III 中。

尽管微扰是厄米的，但我们有 $T^\dagger_{(m_1,\, m_2)} \neq T_{(-m_1,-m_2)}$，这与前面的模型不同。

我们可以在 $Q^{(1)}$ 和 $Q^{(2)}$的共同局部双正交本征基底中进行计算，该基底按它们在格点 j上的相应本征值 $q^{(1)}$、 $q^{(2)}$ 标记。右本征向量 $|q^{(1)},\ q^{(2)}\rangle$ 以及相应的左本征向量$\langle q^{(1)},\ q^{(2)}|^{\mathrm{L}}$ 为

$$\begin{aligned} |0,0\rangle &:= |{\downarrow\downarrow}\rangle\!\rangle, & |{-1},1\rangle &:= |{\downarrow\uparrow}\rangle\!\rangle, \\ \langle 0,0|^{\mathrm{L}} &:= \langle\!\langle{\downarrow\downarrow}| + \langle\!\langle{\uparrow\uparrow}|, & \langle {-1},1|^{\mathrm{L}} &:= \langle\!\langle{\downarrow\uparrow}|, \\ |0,2\rangle &:= |{\uparrow\uparrow}\rangle\!\rangle - |{\downarrow\downarrow}\rangle\!\rangle, & |{+1},1\rangle &:= |{\uparrow\downarrow}\rangle\!\rangle, \\ \langle 0,2|^{\mathrm{L}} &:= \langle\!\langle{\uparrow\uparrow}|, & \langle {+1},1|^{\mathrm{L}} &:= \langle\!\langle{\uparrow\downarrow}|. \end{aligned} \tag{40}$$

没有微扰时，向量 $|\mathrm{ss}\rangle := \otimes_j |0,\ 0\rangle$ 由 $|0,\ 0\rangle$ 在每个梯级上的乘积给出，是 Lindblad 算符的稳态，同时也是$Q^{(1)}$ 和 $Q^{(2)}$ 中对应于本征值 0 的唯一本征向量。因此，我们将其视为参考态，并引入硬核玻色子的湮灭算符和产生算符

$$\begin{aligned} a_{j,*} &:= |0,0\rangle\langle 0,2|_j^{\mathrm{L}}, & a_{j,\pm} &:= |0,0\rangle\langle \pm 1,1|_j^{\mathrm{L}}, \\ a_{j,*}^\ddagger &:= |0,2\rangle\langle 0,0|_j^{\mathrm{L}}, & a_{j,\pm}^\ddagger &:= |\pm 1,1\rangle\langle 0,0|_j^{\mathrm{L}}. \end{aligned} \tag{41}$$

注意 ‡ 这并不表示伴随，因为有些左本征矢并非各自对应右本征矢的伴随 [例如，参见 $|0,\ 0\rangle$ 以及 $\langle 0,\ 0|^{\mathrm{L}}$ 见方程（40）]。现在，我们可以将计数算符（39）改写为这些硬核玻色子的形式：

$$Q^{(1)} = \sum_j (a_{j,+}^\ddagger a_{j,+} - a_{j,-}^\ddagger a_{j,-}),$$
$$Q^{(2)} = \sum_j (2a_{j,*}^\ddagger a_{j,*} + a_{j,+}^\ddagger a_{j,+} + a_{j,-}^\ddagger a_{j,-}), \tag{42}$$

以及表IV中列出的微扰算符。

我们已计算出有效林德布拉德算符至 6 阶。这里明确给出 pcst⁺⁺ 变换后的林德布拉德算符，其正规序形式截至 2 阶

$$\mathcal{L}_{\mathrm{eff}}^{(2,J)} = \mathcal{L}_{\mathrm{eff},+}^{(2,J)} + \mathcal{L}_{\mathrm{eff},-}^{(2,J)}, \tag{43}$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{(2,J)}_{\mathrm{eff},\pm} = {} & \pm 2h \sum_j a^\ddagger_{j,\pm} a_{j,\pm} - \frac{\mathrm{i}\Gamma}{2} \sum_j (a^\ddagger_{j,*} a_{j,*} + a^\ddagger_{j,\pm} a_{j,\pm}) \mp J \sum_{\langle i,j\rangle} \Big[(a^\ddagger_{i,\pm} + a^\ddagger_{i,*} a_{i,\mp})(a_{j,\pm} + a^\ddagger_{j,\mp} a_{j,*}) + (i \leftrightarrow j) \Big] \\
& + \left(\mp \frac{J^2}{2h} \pm \frac{16hJ^2}{16h^2 - \Gamma^2} - \frac{4\mathrm{i}\Gamma J^2}{16h^2 - \Gamma^2} \right) \sum_j a^\ddagger_{j,\pm} a_{j,\pm} + \left(\pm \frac{J^2}{h} \mp \frac{16hJ^2}{16h^2 - \Gamma^2} \right) \sum_{\langle i,j\rangle} a^\ddagger_{i,\pm} a_{i,\pm} a^\ddagger_{j,\pm} a_{j,\pm} \\
& + \frac{4\mathrm{i}\Gamma J^2}{16h^2 - \Gamma^2} \sum_{\langle i,j\rangle} \Big[a^\ddagger_{i,*} a_{i,*} a^\ddagger_{j,\pm} a_{j,\pm} + (i \leftrightarrow j) \Big] + \frac{2\mathrm{i}\Gamma J^2}{16h^2 - \Gamma^2} \sum_{\langle i,j\rangle} (a^\ddagger_{i,+} a_{i,+} + a^\ddagger_{i,-} a_{i,-})(a^\ddagger_{j,+} a_{j,+} + a^\ddagger_{j,-} a_{j,-}) \\
& \pm \frac{J^2}{4h} \sum_{\langle\langle i,j,k\rangle\rangle} \Big[(a_{i,\mp} \mp a^\ddagger_{i,\pm} a_{i,*})(a^\ddagger_{k,\mp} \pm a^\ddagger_{k,*} a_{k,\pm}) + (i \leftrightarrow k) \Big] (\mathbb{1} - 2a^\ddagger_{j,+} a_{j,+} - 2a^\ddagger_{j,-} a_{j,-}) \\
& \pm \frac{2J^2}{4h \mp \mathrm{i}\Gamma} \sum_{\langle\langle i,j,k\rangle\rangle} \Big[(a^\ddagger_{i,\pm} + a^\ddagger_{i,*} a_{i,\mp}) a_{k,\pm} + (i \leftrightarrow k) \Big] (a^\ddagger_{j,*} a_{j,*} - a^\ddagger_{j,\mp} a_{j,\mp}) \\
& \mp \frac{2J^2}{4h \mp \mathrm{i}\Gamma} \sum_{\langle\langle i,j,k\rangle\rangle} \Big[(a^\ddagger_{i,\pm} + a^\ddagger_{i,*} a_{i,\mp}) a^\ddagger_{k,\mp} a_{k,*} + (i \leftrightarrow k) \Big] (\mathbb{1} - 2a^\ddagger_{j,\pm} a_{j,\pm} - a^\ddagger_{j,\mp} a_{j,\mp} - a^\ddagger_{j,*} a_{j,*}),
\end{aligned}
\tag{44}
$$

$m^{(1)}$	$m^{(2)}$	项 in $T_{\underline{m}}$
± 2	-2	$\mp 2a^\ddagger_{i,\pm} a_{i,*} a_{j,\mp} \mp 2a_{i,\mp} a^\ddagger_{j,\pm} a_{j,*}$
± 2	$+2$	$\pm (a^\ddagger_{i,\pm} + a^\ddagger_{i,*} a_{i,\mp})(a^\ddagger_{j,\pm} + a^\ddagger_{j,*} a_{j,\mp})$
0	0	$(a^\ddagger_{i,+} + a^\ddagger_{i,*} a_{i,-})(a_{j,+} + a^\ddagger_{j,-} a_{j,*})$ $+(a_{i,+} + a^\ddagger_{i,-} a_{i,*})(a^\ddagger_{j,+} + a^\ddagger_{j,*} a_{j,-})$ $-(a^\ddagger_{i,-} + a^\ddagger_{i,*} a_{i,+})(a_{j,-} + a^\ddagger_{j,+} a_{j,*})$ $-(a_{i,-} + a^\ddagger_{i,+} a_{i,*})(a^\ddagger_{j,-} + a^\ddagger_{j,*} a_{j,+})$
0	-2	$2a^\ddagger_{i,-} a_{i,*} a_{j,-} + 2a_{i,-} a^\ddagger_{j,-} a_{j,*}$ $-2a^\ddagger_{i,+} a_{i,*} a_{j,+} - 2a_{i,+} a^\ddagger_{j,+} a_{j,*}$
± 2	0	$\pm (a_{i,\mp} - a^\ddagger_{i,\pm} a_{i,*})(a^\ddagger_{j,\pm} + a^\ddagger_{j,*} a_{j,\mp})$ $\pm (a^\ddagger_{i,\pm} + a^\ddagger_{i,*} a_{i,\mp})(a_{j,\mp} - a^\ddagger_{j,\pm} a_{j,*})$

表 IV. 林德布拉德算符（38）的微扰算符，以式（40）中的本征基表示。这些算符由若干特定项组合定义，从而确保总的 正确，即可通过 $,\ \pm$ 或 $a^\ddagger_{j,*} a_{j,\mp}$ 实现 $m = (\pm 1,\ +1)$ 的变化，并通过 $a_{j,\mp}$ 或 $a^\ddagger_{j,\pm} a_{j,*}$ 实现 $\overline{m} = (\pm 1,\ -1)$ 的变化。

其中 $\langle\langle i,\ j,\ k\rangle\rangle$ 表示三个相邻格点，其中 j是中间的格点。由于有效林德布拉德算符相对于$Q^{(1)}$ 和 $Q^{(2)}$的本征值是分块对角的，我们可以分别讨论不同的子空间。在此例中，我们选取虚部最小的子空间，因为相应的密度矩阵衰变最慢，因此在大时间尺度上最为重要。这对应于 $Q^{(2)}$的低准粒子数，因为其中包含衰变过程。

$\mathcal{L}$ 唯一的稳态是 $|\mathrm{ss}\rangle$，其对应的本征值为 0，因为所有其他本征态的本征值均非零。因此，稳态子空间对应于 $\mathcal{L}_{\mathrm{eff}}$的一个 1×1 块。若不进行进一步计算，我们可以看出

$$
\mathcal{L}^{(2,J)}_{(0,0)} = 0\,. \tag{45}
$$

这实际上对任意阶数都成立，因为对于所有 $\mathbf{m}$，$\langle \mathrm{ss}|^{\mathrm{L}} T_{\mathbf{m}} |\mathrm{ss}\rangle = 0$，其中 $\langle \mathrm{ss}|^{\mathrm{L}} := \otimes_j \langle 0,\ 0|^{\mathrm{L}}$。有趣的是，这个左本征向量由向量化恒等算符 $\langle\langle \mathbb{1}| = \sum_{|\varphi\rangle} \langle\langle \varphi,\ \varphi|$ 给出，对其进行作用等价于执行迹运算。这很好地结合了以下事实：左、右本征值构成双正交基底，而稳态的迹为 1，因此是一个有效的密度算符。这还意味着，林德布拉德算符的所有其他本征向量的迹都为 0，因而不是有效的密度算符。不过，它们可以与稳态组合，形成其他密度算符。

两个单准粒子子空间对应于虚部最小的非零本征值，即 $(q^{(1)}, q^{(2)}) = (\pm 1, 1)$。该子空间上的有效林德布拉德算符为

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{(2,J)}_{(\pm 1,1)} |1_{j,\pm}\rangle = {} & \pm \left(2h \mp \frac{\mathrm{i}\Gamma}{2} - \frac{J^2}{2h} + \frac{4J^2}{4h \pm \mathrm{i}\Gamma} \right) |1_{j,\pm}\rangle \\
& \mp J(|1_{j-1,\pm}\rangle + |1_{j+1,\pm}\rangle) \\
& \mp \frac{J^2}{4h} (|1_{j-2,\pm}\rangle + |1_{j+2,\pm}\rangle).
\end{aligned}
\tag{46}
$$

对应于虚部更大的本征值的更高准粒子数区块——因此衰减更快——包含不同产生算符和湮灭算符的混合形式，这里不再讨论。

通过这个例子，我们证明了 pcst⁺⁺ 能够处理林德布拉德算符形式的耗散系统。具体做法是对林德布拉德方程及其密度矩阵进行纯化，并将耗散部分和哈密顿量部分的一部分表示为梯状能谱之和。

二阶结果展现了以微扰方式讨论耗散动力学的可能性，重点关注缓慢衰减的通道，并将其表述为准粒子激发。

IV. 结论

本文介绍了 pcst⁺⁺，它将成熟的 pCUT 方法推广到两个方向，使其能够通过高阶连通簇展开研究量子多体系统。首先，现在可以处理多种准粒子类型，因此不再局限于具有等间距谱、对应单一准粒子计数算符的未扰动哈密顿量。其次，我们将其应用范围扩展到了由非厄米哈密顿量或林德布拉德算符描述的开放量子系统。与传统的 pCUT 方法一样，这使得我们能够推导出与未微扰部分对易的、与具体模型无关的有效哈密顿量和林德布拉德算符；该未微扰部分由任意复值叠加的梯状能谱构成。因此，有效算符呈分块对角形式，更易于处理。由此，该方法在设计上仍可在热力学极限下进行连通簇展开，尤其包括白图展开 [37]。由于 pCUT 和 pcst⁺⁺ 的连通簇展开可以依托相同的程序，我们预计该方法能够直接应用于范围广泛的模型，包括长程模型或高维模型。小的未扰动能量差可能导致发散，而采用可调节的生成元可避免这一潜在限制；该生成元不会将这些子空间解耦。

在计算方面，与原始 pCUT 相比，新的挑战在于梯子谱间距的任意比值引入了额外的自由度，因此需要系数的解析表达式。虽然我们计算了高阶系数，但若能更深入地了解系数的实际形式，pcst⁺⁺ 仍可进一步优化，从而加快解析计算。

我们预计，pcst⁺⁺ 将在未来研究关联封闭与开放量子系统的多个方向上发挥作用。一个自然相关的领域是涉及光与物质自由度的协同量子现象，其中通常会出现多种准粒子类型以及耗散和驱动。

致谢

我们感谢德国研究联合会（DFG）通过项目编号 429529648 和 TRR 306 QuCoLiMa（“光与物质的量子协同性”）提供支持。KPS 感谢慕尼黑量子谷的支持。慕尼黑量子谷由巴伐利亚州政府利用巴伐利亚高科技议程 Plus的资金提供支持。

补充数据 [51]以及用于计算 pcst⁺⁺ 的源代码 [47]可在线获取。

附录：变换证明

在本附录中，我们证明 pcst⁺⁺ 是收敛的，有效算符 $\mathcal{M}_{\text{eff}}$ [见式（14）] 是分块对角的，并且对于厄米算符 $\mathcal{M}$ 流动算符 $\mathcal{M}(\ell)$ 是带状对角的。为此，我们紧密遵循 pCUT 的证明 [26]。

收敛性 收敛性是一项必要性质，因为它使 pcst⁺⁺ 定义良好。当系数 $C_{\mathbf{m}} = \lim_{\ell\to\infty} F(\ell;\mathbf{m})$ 唯一且有限时，就满足该性质。下面的证明仅针对$M(\mathbf{m}) = 0$进行，而 $M(\mathbf{m}) \neq 0$将在下一段中讨论。只需考虑函数 $f(\ell;\mathbf{m}) = e^{|M(\mathbf{m})|\ell}F(\ell;\mathbf{m})$ 的极限，因为当 $M(\mathbf{m}) = 0$时二者相同。

令$\mathbf{m}$ 为任意值，其中 $M(\mathbf{m}) = 0$，且 $(\mathbf{m}_1,\mathbf{m}_2) = \mathbf{m}$ 为任意一个分解。利用$M(\mathbf{m}_1) + M(\mathbf{m}_2) = M(\mathbf{m}) = 0$，我们得出$M(\mathbf{m}_1) = -M(\mathbf{m}_2)$。根据系数函数的表达式

$$f(\ell;\mathbf{m}) = \sum_{(\mathbf{m}_1,\mathbf{m}_2)=\mathbf{m}} \int e^{-2|M(\mathbf{m}_1)|\ell} \times 2\,\mathrm{sgn}(M(\mathbf{m}_1)) f(\ell;\mathbf{m}_1) f(\ell;\mathbf{m}_2)\mathrm{d}\ell\,, \tag{A.1}$$

该和式中的每一项要么在$M(\mathbf{m}_1) = 0$ 时为零，要么在 $M(\mathbf{m}_1) \neq 0$时包含一个指数衰减项。因此，对$C_{\mathbf{m}}$ 的唯一非零贡献是积分常数。

块对角性 有效算符 $\mathcal{M}_{\text{eff}}$ 为分块对角，即满足 $[Q,\mathcal{M}_{\text{eff}}] = 0$，是 pcst 的一个重要方面⁺⁺。根据方程（10）、（14），我们通过证明 $M(\mathbf{m}) \neq 0$ 蕴含 $C_{\mathbf{m}} = 0$来证明这一点。只需通过归纳法证明函数 f 具有如下形式

$$\sum_{\mu\geq 0} P_\mu(\ell;\mathbf{m}) e^{-\mu\ell} \tag{A.2}$$

其中 μ 为非负整数， $P_\mu(\ell;\mathbf{m})$ 为多项式。根据定义，这意味着函数$F(\ell;\mathbf{m}) = e^{-|M(\mathbf{m})|\ell} f(\ell;\mathbf{m})$ 对于 $M(\mathbf{m}) \neq 0$ 呈指数衰减。

一阶结果为 $f(\ell;(m_1)) = 1$，因此具有如下形式（A.2）。作为归纳法假设，我们假定该命题对所有满足 $\mathbf{m}$ 的$|\mathbf{m}| < k$均成立。现在，任取满足$\mathbf{m}$ 的 $|\mathbf{m}| = k$。根据式（12），系数函数为

$$f(\ell;\mathbf{m}) = \sum_{(\mathbf{m}_1,\mathbf{m}_2)=\mathbf{m}} \int e^{(|M(\mathbf{m})|-|M(\mathbf{m}_1)|-|M(\mathbf{m}_2)|)\ell} \times \left[\mathrm{sgn}(M(\mathbf{m}_1)) - \mathrm{sgn}(M(\mathbf{m}_2))\right] f(\ell;\mathbf{m}_1) f(\ell;\mathbf{m}_2)\mathrm{d}\ell\,. \tag{A.3}$$

项 $|M(\mathbf{m})| - |M(\mathbf{m}_1)| - |M(\mathbf{m}_2)|$ 始终非正，因此结合归纳假设，被积函数具有上文讨论的形式。再结合初始条件，系数函数具有如下形式

$$f(\ell;\mathbf{m}) = P_0(\ell;\mathbf{m}) + \sum_{\mu\geq 1} P_\mu(\ell;\mathbf{m}) e^{-\mu\ell}\,. \tag{A.4}$$

带对角性若流动算符$\mathcal{M}(\ell$在流动过程中是带对角的，意味着$|M(\mathbf{m})| > \epsilon_{\max}$蕴含 $F(\ell;\ \mathbf{m}) = 0$。该阈值 $\epsilon_{\max}$ 必须与 ℓ或阶数无关。满足这一性质并非必要，但从计算角度来说是理想的，因为它能减少非零系数函数的数量。这里，我们对厄米算符证明了这一点，其中阈值 $\epsilon_{\max}$ 是 $\mathcal{E}$中的最大元素。使用复符号函数（5）时，带对角性并不成立；这里不再展示证明。

只需通过归纳法证明，$M(\mathbf{m}) > \epsilon_{\max}$意味着 $f(\ell;\mathbf{m}) = 0$，根据定义，这意味着 $F(\ell;\mathbf{m}) = 0$。一阶贡献显然是带对角的，这就是我们的归纳基础情形。作为归纳假设，我们假设该命题对所有满足 $|\mathbf{m}| < k$ 的 $\mathbf{m}$ 都成立。现在任取满足 $|\mathbf{m}| = k$ 且 $M(\mathbf{m}) > \epsilon_{\max}$ 为正的 $\mathbf{m}$。根据归纳假设，对于公式（12），只有满足$|M(\mathbf{m}_1)|$、$|M(\mathbf{m}_2)| \leq \epsilon_{\max}$ 的项会有贡献，因为 $|\mathbf{m}_1|, |\mathbf{m}_2| < k$。因此，由于 $\epsilon_{\max} < M(\mathbf{m}) = M(\mathbf{m}_1) + M(\mathbf{m}_2)$，我们知道 $M(\mathbf{m}_1)$ 和 $M(\mathbf{m}_2)$ 为正。因此，由于前因子中包含 $\mathrm{sgn}(M(\mathbf{m}_1)) - \mathrm{sgn}(M(\mathbf{m}_2)) = 0$，该项完全没有贡献。由公式（12）可得 $\partial_\ell f(\ell;\mathbf{m}) = 0$，结合初始条件，还可得 $f(\ell;\mathbf{m}) = 0$ 和 $F(\ell;\mathbf{m}) = 0$。对于满足 $|\mathbf{m}| = k$ 且 $M(\mathbf{m}) < -\epsilon_{\max}$ 为负的任意 $\mathbf{m}$，同理也成立。

宽阶跃符号函数上述证明针对由式（5）中的广义符号函数定义的生成元。对于第D节中介绍的宽阶跃符号函数 sgn_D，证明也可以用类似的方法进行。结果表明，收敛性仍得以保持，但块对角性不再成立，因为 $[Q, \mathcal{M}_{\mathrm{eff}}] \neq 0$一般而言。取而代之的是，我们可以证明这一弱化性质：$C_{\mathbf{m}} = 0$对于 $|M(\mathbf{m})| > D$，这再次表明本征值相距足够远的子空间会发生解耦。最后，带对角性同样不成立，因此所需计算量也会增加，这与非厄米情形类似。

[1] G. Schmiedinghoff 和 G. S. Uhrig，耗散系统的高效流方程，《SciPost物理》13，122（2022）。[2] J. P. Dowling 和 G. J. Milburn，量子技术：第二次量子革命，Phil. Trans. R. Soc. A 361，1655（2003）。[3] A. Ac´ın，I. Bloch，H. Buhrman，T. Calarco，C. Eichler，J. Eisert，D. Esteve，N. Gisin，S. J. Glaser，F. Jelezko，S. Kuhr，M. Lewenstein，M. F. Riedel，P. O. Schmidt，R. Thew，A. Wallraff，I. Walmsley 和 F. K. Wilhelm，量子技术路线图：欧洲共同体的观点，New J. Phys. 20，080201（2018年）。[4] S. Banerjee，*Open Quantum Systems*（Springer Singapore，2018年）。[5] H.-P. Breuer 和 F. Petruccione，*The Theory ofOpen Quantum Systems*（牛津大学出版社Oxford，2007）。[6] R. Cleve 和 C. Wang，《用于模拟Lindblad演化的高效量子算法》，载于 *ICALP 2017*，LIPIcs，第 80 卷（Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik，德国 Dagstuhl，2017），第 17:1–17:14 页。[7] R. El-Ganainy，K. G. Makris，M. Khajavikhan，Z. H. Musslimani，S. Rotter 和 D. N. Christodoulides，非厄米物理与 PT对称性，Nat. Phys. 14，11（2018年）。[8] H. Y. Ling 和 B. Kain，蜂窝晶格中具有守恒磁化强度的赝自旋-1/2 玻色子的 Bogoliubov–de Gennes 系统的拓扑研究，Phys. Rev. A 105，023319（2022）。[9] L. Lenke，M. M¨uhlhauser 和 K. P. Schmidt，非厄米量子自旋模型的高阶级数展开，Phys. Rev. B 104，195137（2021）。[10] A. J. Daley，《量子轨迹与开放多体量子系统》，Adv. Phys. 63, 77 (2014)。[11] S. R. White 和 A. E. Feiguin，《使用密度矩阵重整化群进行实时演化》，Phys. Rev. Lett. 93, 076401 (2004)。[12] F. Verstraete、J. J. Garc´ıa-Ripoll 和 J. I. Cirac，《矩阵乘积密度算符：有限温度与耗散系统的模拟》，Phys. Rev. Lett. 93, 207204 (2004)。[13] M. Zwolak 和 G. Vidal，《一维量子晶格系统中的混态动力学：一种时变超算符重整化算法》，Phys. Rev. Lett. 93, 207205 (2004)。[14] A. Kshetrimayum、H. Weimer 和 R. Or´us，《一种简单的二维稳态张量网络算法》，Nat. Commun. 8 (2017)。[15] J. Jin、A. Biella、O. Viyuela、L. Mazza、J. Keeling、R. Fazio 和 D. Rossini，《耗散自旋系统稳态相图的簇平均场方法》，Phys. Rev. X 6, 031011 (2016)。[16] H. Landa、M. Schir´o 和 G. Misguich，《驱动耗散量子自旋的多稳态性》，《物理评论快报》124, 043601 (2020)。[17] L. Rosso、F. Iemini、M. Schir`o 和 L. Mazza，《耗散流方程》，《SciPost物理》9, 091 (2020)。[18] R. R. P. Singh、M. P. Gelfand 和 D. A. Huse，《低维量子反铁磁体的基态》，《物理评论快报》61, 2484 (1988)。[19] M. Gelfand、R. Singh 和 D. Huse，《量子多体系统的微扰展开》，J. Stat. Phys. 59, 1093 (1990)。

[20] M. L
´
Phase Transitions Cargèse 1980 1982
evy、J.-C. L. Guillou 和 J. Zinn-Justin 编，（Springer US，）。[21] M. P. Gelfand，《量子晶格模型激发态的级数展开》，《固体物理通讯》98, 11 (1996)。[22] S. Trebst、H. Monien、C. J. Hamer、Z. Weihong 和 R. R. P. Singh，《多粒子激发的强耦合展开：连续谱与束缚态》，《物理评论快报》85, 4373 (2000)。[23] W. Zheng、C. J. Hamer、R. R. P. Singh、S. Trebst 和 H. Monien，《双粒子束缚态的连通簇级数展开》，Phys. Rev. B 63, 144410 (2001)。[24] F. Wegner，《哈密顿量的流方程》，《物理年鉴》（柏林）506, 77 (1994)。[25] J. Oitmaa、C. Hamer 和 W. Zheng，*Series Expansion Methods for Strongly Interacting Lattice Models*（剑桥大学出版社，2006）。[26] C. Knetter 和 G. Uhrig，《通过流方程进行微扰理论：二聚化且受挫的 $S = 1/2$ 链》，《欧洲物理学杂志B辑》13, 209 (2000)。[27] C. Knetter、K. P. Schmidt 和 G. S. Uhrig，《有效粒子数守恒模型中的算符结构》，《物理学杂志A》36, 7889 (2003)。[28] K. Coester、W. Malitz、S. Fey 和 K. P. Schmidt，《菱形链上全受挫横场伊辛模型的量子无序与局域模》，Phys. Rev. B 88 (2013)。[29] E. Wagner 和 W. Brenig，《Kitaev-Heisenberg双层中的双三重态激发》，Phys. Rev. B 104, 115123 (2021)。[30] J. Vidal、R. Thomale、K. P. Schmidt 和 S. Dusuel，《横场环面码模型的自对偶性与束缚态》，Phys. Rev. B 80, 081104 (2009)。[31] M. M¨uhlhauser、M. R. Walther、D. A. Reiss 和 K. P. Schmidt，《分形子相的量子鲁棒性》，Phys. Rev. B 101 (2020)。[32] M. M¨uhlhauser、K. P. Schmidt、J. Vidal 和 M. R. Walther，《三维中的竞争拓扑序》，《SciPost物理》12, 069 (2022)。[33] S. Fey、S. C. Kapfer 和 K. P. Schmidt，《长程相互作用二维量子磁体的量子临界性》，《物理评论快报》122 (2019)。[34] P. Adelhardt、J. A. Koziol、A. Schellenberger 和 K. P. Schmidt，《横场中长程各向异性 XY 链的量子临界性与激发》，Phys. Rev. B 102, 174424 (2020)。

[35] M. H¨ormann、P. Wunderlich 和 K. Schmidt，《无序量子自旋梯的动态结构因子》，《物理评论快报》121, 167201（2018年）。[36] M. H¨ormann 和 K. P. Schmidt，《存在淬火无序和受挫时海森堡双层二聚体相的动态结构因子》，Phys. Rev. B 102（2020）。[37] K. Coester 和 K. P. Schmidt，《利用白图优化连通簇展开》，《物理评论E》92（2015年）。[38] H. Krull、N. A. Drescher 和 G. S. Uhrig，《增强的微扰连续幺正变换》，Phys. Rev. B 86，125113（2012年）。[39] S. D. G-lazek 和 K. G. Wilson，《哈密顿量重整化》，Phys. Rev. D 48，5863（1993年）。[40] M. Powalski、G. S. Uhrig 和 K. P. Schmidt，《旋子极小值：有序量子反铁磁体中磁振子-希格斯散射的特征》，《物理评论快报》115，207202 2015（）。[41] M. Powalski、K. P. Schmidt 和 G. Uhrig，《正方晶格量子反铁磁体中相互吸引的自旋波》，《SciPost物理》4（2018年）。[42] T. Fischer、S. Duffe 和 G. S. Uhrig，《用于处理具有有限寿命准粒子的系统的适配连续幺正变换》，New J. Phys. 12，033048（2010年）。[43] N. A. Drescher、T. Fischer 和 G. S. Uhrig，《自相似连续幺正变换中的截断误差》，《欧洲物理学杂志B辑》79，225（2010年）。[44] A. Mielke，《带状矩阵的流方程》，《欧洲物理学杂志B辑》5，605（1998年）。[45] C. Knetter，*Perturbative Continuous Unitary Transformations: Spectral Properties of Low Dimensional Spin Systems* ¨ ¨ 2003，博士论文，科隆大学（）。[46] J. Dorier、K. P. Schmidt 和 F. Mila，《Shastry-Sutherland模型中磁化平台的理论》，《物理评论快报》101，250402（2008年）。[47] L. Lenke、A. Schellenberger 和 K. P. Schmidt，《Faukpslab/pcstpp系数生成器：v1.0.0》（2023年）。[48] T. Matsubara 和 H. Matsuda，《液氦晶格模型》，《理论物理进展》16，416（1956年）。[49] C. Li、G. Zhang、X. Z. Zhang 和 Z. Song，《非厄米 $\mathcal{PT}$ –对称伊辛模型中由复参数驱动的常规量子相变》，Phys. Rev. A 90，012103（2014年）。[50] M. Takahashi，《低温下的半填充哈伯德模型》，《物理学杂志C：固体物理》10，1289（1977年）。[51] L. Lenke、A. Schellenberger 和 K. P. Schmidt，《“含多种准粒子的封闭与开放量子多体系统中的级数展开”的原始数据》，10.5281/zenodo.7801684（2023年）。