arXiv:2302.01001v1 [math.PR] 2 Feb 2023

球面上某些随机构型的 QMC 强度

VÍCTOR DE LA TORRE 和 JORDI MARZO

摘要。若序列 $(X_N) \subset \mathbb{S}^d$ 由 d维球面上的 N点集组成，并且对于所有 $d/2 < s < s^*$，它在阶数为 s 的 Sobolev 空间上的最坏情况误差具有最优阶 $N^{s/d}$，而对于 $s > s^*$. 其阶数并非最优，则称该序列的 QMC 强度为 $s^* > d/2$ 。在 [中，BrSaSlWo] 基于数值结果，对球面上若干知名点族的强度提出了猜想值。我们研究若干相关随机构型的平均准蒙特卡罗强度。

1. 引言与主要结果

设 $\mathbb{S}^d = \{x \in \mathbb{R}^{d+1} : \ |x| = 1\}$ 为带有归一化勒贝格测度 σ_d. 的单位球面。给定整数 $\ell \geq 0$，令 $\mathcal{H}_\ell$ 为 ℓ次球谐函数构成的向量空间，也就是拉普拉斯-贝尔特拉米算子 Δ 对应于特征值 $\lambda_\ell = \ell(\ell + d - 1)$ 的特征函数空间，

$$-\Delta Y = \lambda_\ell Y, \quad Y \in \mathcal{H}_\ell.$$

记 $h_\ell = \dim \mathcal{H}_\ell \sim \ell^{d-1}$. 为：次数至多为$L$的球谐函数空间 $\mathbb{S}^d$ ，其为

$$\mathcal{P}_L(\mathbb{S}^d) = \bigoplus_{\ell=0}^{L} \mathcal{H}_\ell,$$

这也是将 $\mathbb{R}^{d+1}$ 中次数至多为 L 的多项式限制到 $\mathbb{S}^d$.上所得的空间。显然， $d(L) := \dim \mathcal{P}_L(\mathbb{S}^d) \sim L^d$.

令 $L^2(\mathbb{S}^d)$ 为 $\mathbb{S}^d$ 上的平方可积实函数的希尔伯特空间，其内积为

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{S}^d} f(x) g(x) \, d\sigma_d(x), \quad f, g \in L^2(\mathbb{S}^d).$$

有 $L^2(\mathbb{S}^d) = \bigoplus_{\ell \geq 0} \mathcal{H}_\ell$ ， 函数$f \in L^2(\mathbb{S}^d)$ 的傅里叶级数展开为

$$f = \sum_{\ell,k} f_{\ell,k} Y_{\ell,k}, \qquad f_{\ell,k} = \langle f, Y_{\ell,k} \rangle = \int_{\mathbb{S}^d} f \, Y_{\ell,k} \, d\sigma,$$

其中 $\{Y_{\ell,k}\}_{k=1}^{h_\ell}$ 是 $\mathcal{H}_\ell$.的正交归一基

作者获得了加泰罗尼亚自治区政府（资助项目 2017 SGR 359）以及西班牙科学、创新与大学部（项目 MTM2017-83499-P）的部分资助。

按照 [BrSaSlWo]，我们定义：对于 $s \geq 0$，基于 $L^2(\mathbb{S}^d)$、阶数为 s 的 Sobolev 空间构成希尔伯特空间

$$\mathbb{H}^s(\mathbb{S}^d) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{S}^d) \ : \ \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^{h_\ell} (1+\lambda_\ell)^s |f_{\ell,k}|^2 < +\infty \right\},$$

其范数为

$$\|f\|_{\mathbb{H}^s(\mathbb{S}^d)} = \left(\sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^{h_\ell} \frac{1}{a_\ell^{(s)}} |f_{\ell,k}|^2 \right)^{1/2},$$

其中 $a_\ell^{(s)} \sim (1+\ell^2)^{-s}$. 众所周知，当 $s > d/2$ 时，$\mathbb{H}^s(\mathbb{S}^d)$ 连续嵌入$\mathcal{C}(\mathbb{S}^d)$，且在此范围内，其再生核为

$$K^{(s)}(x,y) = K^{(s)}(x \cdot y) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{h_\ell} a_\ell^{(s)} Y_{\ell,k}(x) Y_{\ell,k}(y),$$

即，对于所有 $x \in \mathbb{S}^d$ 和 $f \in \mathbb{H}^s(\mathbb{S}^d)$,

$$f(x) = \langle f, K^{(s)}(x,\cdot) \rangle_{\mathbb{H}^s(\mathbb{S}^d)}.$$

定义 1. 给定 $s > d/2$，若存在$C_{d,s} > 0$ 使得对所有 $N \geq 1$，则由 $N-$ 个点构成的配置序列 $X_N \subset \mathbb{S}^d$（X_N）是 $\mathbb{H}^s(\mathbb{S}^d)$ 的 QMC 设计序列（或称 s-QMC 设计）

$$\operatorname{wce}(X_N, \mathbb{H}^s(\mathbb{S}^d)) \leq C_{d,s} N^{-s/d}, \tag{1}$$

其中最坏情况误差定义为

$$\operatorname{wce}(X_N, \mathbb{H}^s(\mathbb{S}^d)) = \sup_{\|f\|_{\mathbb{H}^s(\mathbb{S}^d)} \leq 1} \left\{ \left| \frac{1}{N} \sum_{x \in X_N} f(x) - \int_{\mathbb{S}^d} f(x) d\sigma(x) \right| \ : \ f \in \mathbb{H}^s(\mathbb{S}^d) \right\}.$$

根据 [BrChCoGiSeTr，定理 3.1] 可知，如果 (X_N) 是针对 $\mathbb{H}^s(\mathbb{S}^d)$ 的 QMC 设计序列，那么对于所有 $\mathbb{H}^{s'}(\mathbb{S}^d)$，它也是 QMC 设计，其中 $\frac{d}{2} < s' < s$；另见 [BrSaSlWo，引理 23]。对于所有 $s < s^*$，式 (1) 均成立时的最大 $s^* > \frac{d}{2}$，就是序列 (X_N) 的 QMC 强度, [BrSaSlWo]。强度可以视为序列正则性的一种度量。在上述定义中，(X_N) 可以仅对自然数的一个子序列 N 定义，该子序列收敛于 $+\infty$.

确定给定序列的强度似乎相当困难，目前仅在少数情况下确定了其取值。Hesse 和 Sloan [HeSl] 以及 Brauchart 和 Hesse [BrHe] 证明，满足某种正则性条件的最优求积公式序列（尤其是具有正权重的求积公式）对于所有 $s > d/2$，都是 s-QMC 设计，即它们具有 $s^* = +\infty$. 。 [BrSaSlWo] 指出，将这一先前结果与最优球面设计的存在性 [BoRaVi], 结合起来，可推出存在强度为 $s^* = +\infty$. 的球面设计。此外，在 [BrSaSlWo，定理 14],中，作者证明，点对之间欧几里得距离的适当幂次和的最大化者，对于所有 $d/2 < s < d/2 + 1.$，都是 s-QMC 设计。据我们所知，强度已知的情况仅有上述几种。

基于数值结果， [BrSaSlWo] 猜想了一些著名点构型的强度值。在 $\mathbb{S}^2$ 中，特别是，费克特点的猜想为 $s^* = 3/2$，等面积点的猜想为 $s^* = 2$，而最小

对数能量点的猜想为 $s^* = 3$，定义见下一节。 [BrSaSlWo]还研究了一些随机构型的预期最坏情况误差。

定义 2. 设 (X_N) 是球面 $\mathbb{S}^d$ 上遵循某种分布的一列随机 $N-$ 点构型，并设 $s > d/2.$ 。与确定性情形一样，我们允许下标 N 沿着一个收敛至 $+\infty.$ 的子序列变化。若存在 $C_{d,s} > 0$ 使得……，则称 (X_N) 是 $\mathbb{H}^s(\mathbb{S}^d)$ 上的 QMC 设计序列（或平均意义下的 s-QMC 设计序列）。

$$\sqrt{\mathbb{E}[\mathrm{wce}(X_N, \mathbb{H}^s(\mathbb{S}^d))^2]} \leq C_{d,s} N^{-s/d}. \tag{2}$$

对 [BrSaSlWo], 中引理 23 的证明作显而易见的修改后，以下性质表明：若一列随机点构型是某个 s-QMC 设计的平均序列，其中 $s > d/2$，那么它也是 s'-QMC 设计的序列，其中 $d/2 < s' < s.$。

命题 1. 给定 $s > d/2$，若 $\mathbb{E}[$最坏情况误差$(X_N, \mathbb{H}^s(\mathbb{S}^d))^2] \leq 1$，则存在一个常数 $C_{d,s',s} > 0$，使得……

$$\mathbb{E}[\mathrm{wce}(X_N, \mathbb{H}^{s'}(\mathbb{S}^d))^2] \leq C_{d,s',s} \left(\mathbb{E}[\mathrm{wce}(X_N, \mathbb{H}^s(\mathbb{S}^d))^2]\right)^{s'/s}, \quad \frac{d}{2} < s' < s.$$

这一最后结果使我们能够像在确定性情形中那样，将平均 QMC 强度定义为使（2）成立的 $s > d/2$ 的最大值。

文献 [BrSaSlWo, 定理 7] 证明，对于任意 $s > d/2.$，球面上的均匀独立同分布点平均而言都不是 s-QMC 设计。另一方面， [BrSaSlWo, 定理 21, 定理 22] 表明，抖动采样得到的点（即相对于面积正则划分抽取的均匀独立同分布点）具有平均强度$d/2+1.$。请注意，在后一种情形中，平均强度与文献 [BrSaSlWo] 中针对相关等面积点的数值猜想一致 $\mathbb{S}^2$。

1.1. **调和系综**。 我们的第一个结果表明，调和系综中的点具有平均强度 $\frac{d+1}{2}.$ 。这一分布的众数对应于费克特点，见下一节；对于费克特点，人们在 [BrSaSlWo] 中猜想其强度为3/2。此前，文献 [Hi]研究过这一过程的期望最坏情形误差。

定理 1。 设(X_N)是一个序列，其中 X_N是从 $\mathbb{S}^d.$ 中的调和系综抽取的 $N-$点集。注意， N 必为 $d(L)$ 的形式，其中某个自然数$L.$ 。那么，(X_N) 构成一个关于 $\frac{d}{2} < s < \frac{d+1}{2}.$ 的平均 *QMC* 设计序列。此外

$$\lim_{N \to +\infty} N^{\frac{d+1}{d}} \mathbb{E}[\mathrm{wce}(X_N; \mathbb{H}^{\frac{d+1}{2}}(\mathbb{S}^2))^2] = +\infty, \tag{3}$$

因此，若 $s > \frac{d+1}{2}$，则(X_N) 不是平均 *QMC* 设计，且其平均准蒙特卡罗强度为 $\frac{d+1}{2}.$

对于调和系综，我们可以根据 [BrSaSlWo,BeMaOr], 中的结果（另见 [Be], ），推得最坏情况误差在一个对数因子以内几乎必然最优。

推论 1. 对于每个 $M > 0$ 和 $\frac{d}{2} < s < \frac{d+1}{2}$，都存在 $C_{d,\ s,\ M} > 0$ 使得

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{wce}(X_N; \mathbb{H}^s(\mathbb{S}^d)) \leq C_{d,s,M} \frac{(\log N)^{\frac{2s}{d+1}}}{N^{\frac{s}{d}}}\right) \geq 1 - \frac{1}{N^M}, \tag{4}$$

其中 X_N 是从调和系综中抽取的一个 N点集。因此，对于固定的 $\frac{d}{2} < s < \frac{d+1}{2}$，存在 $C_{d,\ s} > 0$，使得以概率 *1*，当 N足够大时，

$$\mathrm{wce}(X_N; \mathbb{H}^s(\mathbb{S}^d)) \leq C_{d,s} \frac{(\log N)^{\frac{2s}{d+1}}}{N^{\frac{s}{d}}}.$$

1.2. **球面系综**。 球面系综也是球面 $\mathbb{S}^2$. 上的一种行列式点过程。应用 [AlZa] 中的结果， [Hi] 表明，球面系综中的点平均而言是 s-QMC 设计，其强度为 $1 < s < 2$. 很容易看出，2 确实是平均强度。注意，该分布的众数是椭圆 Fekete 点集，即对数能量的极小化点。在这种情况下，它与 [BrSaSlWo]，所猜测的强度 3 并不一致。

定理 2。 设 (X_N) 是一个序列，其中 X_N 是从球面系综中抽取的一个行列式点集。则 (X_N) 是一个平均而言为 *QMC* 设计的序列，对于 $1 < s < 2$， 并且对于 $s \in (2,3)$ 存在一个常数 $C > 0$，使得

$$N^2 \mathbb{E}\left[\mathrm{wce}(X_N; \mathbb{H}^s(\mathbb{S}^2))^2\right] \geq C,$$

即平均强度为 $s^* = 2$。

1.3. **椭圆多项式的零点**。 在最后一个结果中，我们利用 [DeMa] 中的期望能量展开，证明椭圆多项式的零点的平均强度优于上述所有先前的随机过程，并且与 [BrSaSlWo] 中关于对数能量极小化点的猜想强度一致。

定理 3. 设 (X_N) 是一个序列，其中 X_N 是从椭圆多项式的零点经立体投影映射到球面上得到的 $N-$ 点集。那么，(X_N) 是一个平均意义下的 s-*QMC* 设计序列，对于 $1 < s < 3$，并且对于 $s \in (3,4)$，存在一个常数 $C > 0$，使得

$$N^3 \mathbb{E}\left[\mathrm{wce}(X_N; \mathbb{H}^s(\mathbb{S}^2))^2\right] \geq C,$$

即平均强度为 $s^* = 3$。

注 1. 对于由行列式点过程给出的构型，也可以证明与推论 1 类似的结果，例如抖动采样 [BrGrKuZi] 和球面系综 [AlZa], ; 证明中用到了 [PePe] 中关于行列式点过程的集中性结果。这些界远非最优。对于球面系综，利用该系综特有的测度集中不等式，已证明了一个近乎最优的界，见 [Be]。

2. 背景

2.1. **Riesz 能量与最坏情况误差**。 单位球面 $\mathbb{S}^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$ 上一组 N 个不同点 x_1，...，x_N 的 Riesz 能量或对数能量为

$$E_s(x_1, \ldots, x_N) = \sum_{i \neq j} f_s(|x_i - x_j|),$$

其中， $f_s(r) = r^{-s}$ 对于 $s \neq 0$，以及 $f_0(r) = -\log r$ 分别是黎曼势和对数势。下文为简化记号，当点集可由上下文明确时，我们将 E_s 记作$E_s(x_1, \ldots, x_N)$。该量具有

一个适用于测度的连续版本；对于归一化表面测度 σ_d 和$0 \neq s < d$，它为

$$V_s(\mathbb{S}^d) = \int_{\mathbb{S}^d} \int_{\mathbb{S}^d} f_s(|x-y|)\, d\sigma(x) d\sigma(y) = 2^{d-s-1} \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d-s}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\, \Gamma\left(d - \frac{s}{2}\right)}.$$

在 [BrSaSlWo]，中，作者给出了一个 N 点集的最坏情况误差关于黎斯能量的公式，前提是 s 不是正整数。当 $d/2 < s < d/2+1$ 时，表达式为

$$\operatorname{wce}(X_N, \mathbb{H}^s(\mathbb{S}^d))^2 = -\frac{1}{N^2}\left(E_{d-2s} - V_{d-2s}(\mathbb{S}^d) N^2\right), \tag{5}$$

而对于 $d/2 + M < s < d/2 + M + 1$，其中 M 为正整数，

(6)

$$\operatorname{wce}(X_N, \mathbb{H}^s(\mathbb{S}^d))^2 = \frac{1}{N^2}\left[\sum_{j,i=1}^{N} \mathcal{Q}_M(x_j \cdot x_i) + (-1)^{M+1}(E_{d-2s} - V_{d-2s}(\mathbb{S}^d) N^2)\right],$$

其中

$$\mathcal{Q}_M(x_j \cdot x_i) := \sum_{l=1}^{M} \left((-1)^{M+1-l} - 1\right) \alpha_l^{(s)} h_l P_l^{(d)}(x_j \cdot x_i),$$

其中 $P_l^{(d)}(x)$ 是盖根鲍尔多项式，其归一化方式为 $P_{(d)\,l}(1) = 1$，

$$\alpha_l^{(s)} = V_{d-2s}(\mathbb{S}^d) \frac{(-1)^{M+1}(1-s)_l}{(1+s)_l}, \tag{7}$$

而 $(\cdot)_n$ 对于 $n \in \mathbb{N}$，是波赫哈默符号；当 $x \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$ 时，其定义为 $(x)_0 = 1$，并且

$$(x)_n = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)}, \quad n \geq 1.$$

衡量有限点集 $X_N = \{x_1, \ldots, x_N\} \subset \mathbb{S}^d$ 的均匀性的一种方法是考察偏差。特别地，我们将考察 L^∞ 球冠差异度

$$\mathbb{D}_\infty(X_N) = \sup_{x \in \mathbb{S}^d, r>0} \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \chi_{D(x,r)}(x_i) - \sigma_d(D(x,r)) \right|,$$

以及其 L^2 平均版本

$$\mathbb{D}_2(X_N) = \left(\int_0^\pi \int_{\mathbb{S}^d} \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \chi_{D(x,r)}(x_i) - \sigma_d(D(x,r)) \right|^2 d\sigma_d(x) \sin r dr \right)^{1/2}.$$

众所周知，点集序列 $(X_{N_k})_k$ 渐近均匀分布，当且仅当 $\lim_{k\to+\infty} \mathbb{D}_p(X_{N_k}) = 0$，其中 $p = \infty$ 或 $p = 2$，[BoHaSa，第 6.1] 节。

注意，由 (5) 可知，对于 $s=(d+1)/2$，能量、差异度与最坏情况误差之间存在直接关系

$$\begin{aligned}\operatorname{wce}(X_N;\mathbb{H}^{\frac{d+1}{2}}(\mathbb{S}^d)) &= \left(V_{-1}(\mathbb{S}^d)-\frac{1}{N^2}\sum_{i,j=0}^{N}|x_i-x_j|\right)^{1/2}\\ &= \sqrt{\frac{d\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{d}{2})}{\Gamma(\frac{d+1}{2})}}\mathbb{D}_2(X_N),\end{aligned} \tag{8}$$

其中最后一个等式由 Stolarsky 不变性原理得出，参见 [BrDi, BrSaSlWo]。

2.2. **点过程**。球面 $\mathbb{S}^d$ 上的点过程 $\mathcal{X}$ 是定义在 $\mathbb{S}^d$ 上的随机整数值正 Radon测度，且几乎必然对单点集赋予的测度至多为 1。一般定义及更多背景信息，参见 [HoKrPeVi,AnGuZe]。$\mathbb{S}^d$ 中的随机点过程可以与 $\mathbb{S}^d$.的随机离散子集等同。描述随机点过程的一种方法是，指定过程在 D中各 Borel集 $D\subset\mathbb{S}^d$内所含点数的随机变量。我们将这个随机变量记为 $\mathcal{X}(D)$。对于我们考虑的所有点过程，其分布由所谓的联合强度函数刻画。相对于 $\mathbb{S}^d$ 中某个背景测度 μ 的联合强度是函数 $\rho_k(x_1,\dots,x_k)$，对于任意一族两两不相交的子集 $D_1,\dots,D_k\subset\mathbb{S}^d$，满足

$$\mathbb{E}\left[\mathcal{X}(D_1)\cdots\mathcal{X}(D_k)\right]=\int_{D_1\times\cdots\times D_k}\rho_k(x_1,\dots,x_k)d\mu(x_1)\dots d\mu(x_k).$$

我们假设当 $x_i=x_j$ 对于 $i\neq j$ 时，$\rho_k(x_1,\dots,x_k)=0$。注意，如果该过程的分布由联合密度 $p(x_1,\dots,x_N)$ 给出，那么

$$\rho_k(x_1,\dots,x_k)=\frac{N!}{(N-k)!}\int_{\mathbb{R}^{N-k}}p(x_1,\dots,x_N)dx_{k+1}\dots dx_N,$$

参见 [HoKrPeVi，第 10] 页。

一种特殊类型的随机点过程是所谓的行列式点过程（DPP），由 Macchi 在 1975, [Ma] 中引入。若球面上的随机点过程的核为 $K\colon\mathbb{S}^d\times\mathbb{S}^d\to\mathbb{C}$，且其相对于背景测度 μ 的联合强度由下式给出，则称其为行列式点过程

$$\rho_k(x_1,\dots,x_k)=\det(K(x_i,x_j))_{1\leq i,j\leq k},$$

对于每个 $k\geq 1$ 和 $x_1,...,x_k\in\mathbb{S}^d$。要使行列式点过程存在，只需核函数 $K\colon\mathbb{S}^d\times\mathbb{S}^d\to\mathbb{C}$ 在 $L^2(\mathbb{S}^d)$ 中确定一个局部为迹类的自伴积分算子，[HoKrPeVi，定理 4.5。5]。

2.3. **调和系综**。调和系综是由空间$\mathcal{P}_L(\mathbb{S}^d)$的再生核诱导的行列式点过程，其中的多项式属于 $\mathbb{R}^{d+1}$，次数至多为 L，且几乎必然有 $d(L)$个点位于 $\mathbb{S}^d$ 中，

$$K_L(x,y)=\frac{d(L)}{\binom{L+\frac{d}{2}}{L}}P_L^{(1+\lambda,\lambda)}(\langle x,y\rangle),\quad x,y\in\mathbb{S}^d,$$

其中 $\lambda=\frac{d-2}{2}$ 和 Jacobi 多项式 $P_L^{(1+\lambda,\lambda)}(t)$ 经过归一化，使其满足$P_L^{(1+\lambda,\lambda)}(1)=\binom{L+\frac{d}{2}}{L}$.

请注意，从某种意义上说，分布的众数是在从该行列式点过程中抽取的一组数据值中出现频率最高的值，它就是联合密度的最大值。

$$p(x_1,\dots,x_{d(L)}) = (1/d(L)!)\det(K_L(x_i,x_j))_{1\le i,j\le d(L)},$$

对于 $x_1,\dots,x_{d(L)} \in \mathbb{S}^d.$，因此众数点就是使行列式绝对值达到最大值的费克特点

$$V_L(x_1,\dots,x_{d(L)}) = \left|\det(\phi_i(x_j))_{1\le i,j\le d(L)}\right|,$$

对于 $\phi_1,\dots,\phi_{d(L)}$，它们是空间 $\mathcal{P}_L(\mathbb{S}^d)$ 的一组基。费克特点也称为极值基本系统，[Re]。Sloan 和 Womersley 猜想，它们的求积权重全为正 [SlWo]，并已证明它们在 [MaOr, BeBoNy] 中渐近均匀分布。

2.4. 球面系综。 给定 A, B 个相互独立的 $n\times n$ 随机矩阵，其元素为独立同分布的复标准元素，$A^{-1}B$ 的特征值 $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ 在 $\mathbb{C}$中构成一个行列式点过程，其核为 $(1+z\overline{w})^{n-1}$，相对于背景测度 $\pi^{-n}(1+|z|^2)^{n+1}dm(z)$,[Kr]。通过立体投影 $g(x_i) = \lambda_i$ 映射到球面 $\mathbb{S}^2$ 后，这些点的密度为

$$C\prod_{i\neq j}|x_i-x_j|^2,$$

关于 $\mathbb{S}^2$. 上的面积测度。这表明，该球面点过程的众数由对数能量的极小化点给出

$$E_0(x_1,\dots,x_N) = \sum_{i\neq j}\log\frac{1}{|x_i-x_j|},$$

也就是说，椭圆费克特点，[BoHaSa]。

在 [AlZa] 中，作者得到了该点过程中点的预期 Riesz 能量和对数能量，以及其他结果。特别是，他们证明，对于从球面系综中抽取的x_1，....., $x_N \in \mathbb{S}^2$ 个点，若 $s<4$, $s\neq 0$, 2,

$$\mathbb{E}[E_s] = \frac{2^{1-s}}{2-s}N^2 - \frac{\Gamma(N)\Gamma(1-s/2)}{2^s\Gamma(N+1-s/2)}N^2. \tag{9}$$

2.5. 椭圆多项式的零点。 我们考虑的最后一种点过程，是由椭圆多项式（也称为 Kostlan-Shub-Smale 或 $SU(2)$ 多项式）的零点经立体投影映射到 $\mathbb{S}^2$ 上所得到的点构成的

$$\sum_{n=0}^{N} a_n\sqrt{\binom{N}{n}}z^n,$$

其中 a_n 是服从标准复高斯分布的独立同分布随机变量。这些多项式零点的研究始于量子混沌动力学[BeBoLe92,BeBoLe96]。由于它们与球面上的最小对数能量点有关，这一联系由 [SmSh], 揭示，因此研究期望对数能量是很自然的。 [ArBeSh] 完成了这项研究，作者得到了期望对数能量的如下闭式表达式

$$\mathbb{E}[E_0] = \left(\frac{1}{2}-\log 2\right)N^2 - \frac{1}{2}N\log N - \left(\frac{1}{2}-\log 2\right)N. \tag{10}$$

这一结果推广到 $s < 4$ 的 Riesz s-能量的形式，最近已由 [DeMa]得到。为了研究期望 QMC 强度，我们将利用以下结果：对于从椭圆多项式的零点经立体投影映射到球面上得到的 x_1、.....、 $x_N \in \mathbb{S}^2$ 个点，以及 $s < 4, s \neq 0, 2$,

$$\mathbb{E}[E_s] = \frac{2^{1-s}}{2-s} N^2 + C(s) N^{1+s/2} + o_{N\to\infty}(N^{1+s/2}), \tag{11}$$

其中

$$C(s) = \frac{1}{2^s}\frac{s}{2}\left(1+\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)\zeta\left(1-\frac{s}{2}\right).$$

在特定情形 $s = -2$ 下,

$$\mathbb{E}[E_{-2}] = 2N^2 - 8\frac{\zeta(3)}{N} + o_{N\to\infty}\left(\frac{1}{N}\right). \tag{12}$$

3. Proofs

3.1. 调和系综（定理 1）。为了证明定理 1，我们先介绍一些预备知识。

设 $\frac{d}{2} < s < \frac{d}{2}+1$。由公式 (5)，对于从球面上的调和系综中抽取的 $N = d(L) \sim L^d$ 个点，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\mathrm{wce}(X_N; \mathbb{H}^s(\mathbb{S}^d))^2] &= \frac{1}{N^2}\int_{\mathbb{S}^d}\int_{\mathbb{S}^d} K_L(x,y)^2 |x-y|^{2s-d} d\sigma(x) d\sigma(y) \\
&= \frac{d(L)^2}{P_L^{(1+\lambda,\lambda)}(1)^2 N^2}\int_{\mathbb{S}^d}\int_{\mathbb{S}^d} P_L^{(1+\lambda,\lambda)}(\langle x,y\rangle)^2 |x-y|^{2s-d} d\sigma(x) d\sigma(y) \\
&= \frac{C_d}{P_L^{(1+\lambda,\lambda)}(1)^2}\int_{\mathbb{S}^d} P_L^{(1+\lambda,\lambda)}(\langle x,\mathbf{n}\rangle)^2 |x-\mathbf{n}|^{2s-d} d\sigma(x) \\
&= \frac{C_d}{P_L^{(1+\lambda,\lambda)}(1)^2}\int_{-1}^{1} P_L^{(1+\lambda,\lambda)}(t)^2 (1-t)^{s-1}(1+t)^{\frac{d}{2}-1} dt,
\end{aligned}$$

其中 n 表示 $\mathbb{S}^d$. 的北极

根据伽马函数的渐近性质

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n)n^\alpha} = 1, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

我们得到

$$P_L^{(1+\lambda,\lambda)}(1) = \binom{L+\frac{d}{2}}{L} \sim \frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)} L^{d/2}.$$

因此，对于某个常数 $C_{d,\ s} > 0$，我们有

$$\mathbb{E}[\mathrm{wce}(X_N; \mathbb{H}^s(\mathbb{S}^d))^2] = \frac{C_{d,s}}{L^d}\int_{-1}^{1} P_L^{(1+\lambda,\lambda)}(t)^2 (1-t)^{s-1}(1+t)^{\frac{d}{2}-1} dt. \tag{13}$$

以下引理将 $-1 < a < d$ 推广到了[BeMaOr] 中针对 $0 < a < d$.证明的一个结果

命题 2. 给定 $-1 < a < d$,

$$\lim_{L\to\infty}\frac{1}{L^a}\int_{-1}^{1} P_L^{(1+\lambda,\lambda)}(t)^2 (1-t)^{\lambda-\frac{a}{2}}(1+t)^\lambda \, dt = 2^{\frac{a}{2}+d}\int_0^\infty \frac{J_{1+\lambda}(t)^2}{t^{1+a}} dt$$

并且最后一个积分收敛。

证明。 证明与 [BeMaOr 中的命题 6] 基本相同，只是在最后几步估计中略有改动。我们将积分拆分为

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1} L^{-a} P_L^{(1+\lambda,\lambda)}(t)^2 (1-t)^{\lambda-\frac{a}{2}} (1+t)^{\lambda}\, dt \\ &= \left[\int_{-1}^{-\cos\frac{c}{L}} + \int_{-\cos\frac{c}{L}}^{\cos\frac{c}{L}} + \int_{\cos\frac{c}{L}}^{1}\right] L^{-a} P_L^{(1+\lambda,\lambda)}(t)^2 (1-t)^{\lambda-\frac{a}{2}} (1+t)^{\lambda}\, dt \\ &= A(c,L) + B(c,L) + C(c,L),\end{aligned}$$

其中 $c>0$ 为固定值，且 $c<\pi L$。对于边界部分，我们作变量替换t =cos(x/L)，得到

$$\begin{aligned}&C(c,L) \\ &= 2^{a/2} \int_0^c L^{-2-2\lambda} P_L^{(1+\lambda,\lambda)} \left(\cos\frac{x}{L}\right)^2 \left(\frac{\sin\frac{x}{L}}{\frac{x}{L}}\right)^{2\lambda+1} \left(\frac{1-\cos\frac{x}{L}}{\frac{1}{2}\left(\frac{x}{L}\right)^2}\right)^{-a/2} x^{2\lambda+1-a}\, dx.\end{aligned}$$

利用 Mehler-Heine 渐近公式 [Sz，第 192] 页以及基本极限

$$\lim_{L\to\infty} \frac{\sin\frac{x}{L}}{\frac{x}{L}} = 1, \quad \lim_{L\to\infty} \frac{1-\cos\frac{x}{L}}{\frac{1}{2}\left(\frac{x}{L}\right)^2} = 1,$$

我们得到:

$$\lim_{L\to\infty} C(c,L) = 2^{\frac{a}{2}+d} \int_0^c \frac{J_{1+\lambda}(x)^2}{x^{1+a}} dx.$$

对于区间的另一端，利用变量替换 $t=-$cos(x/L)，得到

$$A(c,L) = \int_0^c L^{-2-2\lambda} P_L^{(1+\lambda,\lambda)} \left(-\cos\frac{x}{L}\right)^2 \left(\frac{\sin\frac{x}{L}}{\frac{x}{L}}\right)^{2\lambda+1} \left(\frac{1+\cos\frac{x}{L}}{\left(\frac{x}{L}\right)^2}\right)^{-a/2} x^{2\lambda+1} dx,$$

再次利用 Mehler-Heine 渐近公式，当 $L\to\infty$ 时，该表达式趋于零。对于中间项，我们使用 Jacobi 多项式的经典渐近估计 [Sz，定理 8.21。13]

$$P_L^{(1+\lambda,\lambda)}(\cos\theta) = \frac{k(\theta)}{\sqrt{L}} \left\{\cos\left((L+\lambda+1)\theta+\gamma\right) + \frac{O(1)}{L\sin\theta}\right\},$$

如果 $c/L\le\theta\le\pi-$(c/L)

$$k(\theta) = \pi^{-1/2} \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{-\lambda-3/2} \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-\lambda-1/2}, \quad \text{and} \quad \gamma = -\left(\lambda+\frac{3}{2}\right)\frac{\pi}{2}.$$

我们得到

$$\begin{aligned}0 \le & B(c,L) \lesssim \frac{1}{L^{a+1}} \int_{\frac{c}{L}}^{\pi-\frac{c}{L}} \frac{1}{(\sin\frac{\theta}{2})^{a+2}} d\theta \lesssim \frac{1}{L^{a+1}} \int_{\frac{c}{L}}^{\pi-\frac{c}{L}} \frac{1}{\theta^{a+2}} d\theta \\ &\le \frac{1}{L^{a+1}} \int_{\frac{c}{L}}^{\pi} \frac{1}{\theta^{a+2}} d\theta = \frac{1}{L^{a+1}(a+1)} \left[\frac{L^{a+1}}{c^{a+1}} - \frac{1}{\pi^{a+1}}\right] = \frac{1}{c^{a+1}(a+1)} + o(L).\end{aligned}$$

最后注意，当 $J_{1+\lambda}(x)\sim x^{1+\lambda}$ 和 $J_{1+\lambda}(x)\lesssim x^{-1/2}$ 在x足够大时趋于零，因此上面的积分恰好在 $-1<a<d$.时收敛

□

证明。 (定理 1) 现在，对于任意 $\frac{d}{2} < s < \frac{d+1}{2}$，我们将上面的命题应用于 $-1 < t = d - 2s < 0$，由 (13) 可得存在一个（不同的）常数$C_{d,\ s} > 0$ 使得

$$\lim_{L\to+\infty} L^{2s}\mathbb{E}[\mathrm{wce}(X_N;\mathbb{H}^s(\mathbb{S}^d))^2] = C_{d,s}.$$

这表明，从调和系综中抽取的点平均而言构成一个 s-QMC 设计，其中 $\frac{d}{2} < s < \frac{d+1}{2}$.

为得到 (3)，我们再次对 $s = \frac{d+1}{2}$ 使用 (13)，并利用广义超几何函数 [的积分表示，见 ErMaObTr，第 288] 页

$$\mathbb{E}[\mathrm{wce}(X_N;\mathbb{H}^s(\mathbb{S}^d))^2] \sim L^{-d}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+L\right)\Gamma\left(\frac{d}{2}+L\right)\Gamma\left(\frac{d}{2}+L+1\right)}{\Gamma(L+1)^2\Gamma\left(d+\frac{1}{2}+L\right)^2}$$
$$\times\ {}_4F_3\left(-L, d+L, \frac{d+1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{d}{2}+1, d+\frac{1}{2}+L, -L+\frac{1}{2}; 1\right),$$

其中所有常数仅依赖于 d.

容易看出（通过归纳法），该商

$$\frac{(-L)_n(d+L)_n}{(d+\frac{1}{2}+L)_n(-L+\frac{1}{2})_n},$$

是 $0 \le n \le L$ 的增函数，因此

$$N^{\frac{d+1}{d}}\mathbb{E}[\mathrm{wce}(X_N;\mathbb{H}^s(\mathbb{S}^d))^2] \gtrsim \sum_{n=0}^{L}\frac{\left(\frac{d+1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{2}\right)_n}{\left(\frac{d}{2}+1\right)_n}\frac{1}{n!}.$$

最后，取 $L\to\infty$，根据高斯判别法可知这个级数发散，其中 $a =(d+1)/2$、$b = 1/2$ 和 $c = a + b$，因为

$$\frac{\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!}}{\frac{(a)_{n+1}(b)_{n+1}}{(c)_{n+1}(n+1)!}} = \frac{(c+n)(n+1)}{(a+n)(b+n)} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{C_n}{n^2},$$

其中 C_n 是一个有界序列。 □

证明。 （推论 1）回顾一下，衡量有限点集均匀性的一种指标是 L^∞球冠差异度 $\mathbb{D}_\infty(X_N)$，其中 $X_N = \{x_1,\dots,x_N\} \subset \mathbb{S}^d$.。BeMaOr] 中证明了，对于每个 $M > 0$，都存在 $C_M > 0$，使得

$$\mathbb{P}\left(\mathbb{D}_\infty(X_N) \le C_M\frac{\log N}{N^{\frac{d+1}{2d}}}\right) \ge 1 - \frac{1}{N^M},$$

其中 X_N 是从调和系综中抽取的一个 N 点集。

现在，由上述结果、公式 (8) 和 $\mathbb{D}_2(X_N) \lesssim \mathbb{D}_\infty(X_N)$ 可知，存在另一个 $C_M > 0$，使得

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{wce}(X_N;\mathbb{H}^{\frac{d+1}{2}}(\mathbb{S}^d)) \le C_M\frac{\log N}{N^{\frac{d+1}{2d}}}\right) \ge 1 - \frac{1}{N^M}.$$

要得到 (4)，只需应用 [BrSaSlWo 的插值结果23], 引理 $d/2 < s <$，由此对于 $d + 1(/2)C_d$，可得一个常数 , $_s > 0$ 使得 wce$(X_N;\ \mathbb{H}^s(\mathbb{S}^d))^{\frac{d+1}{2s}} \le C_{d,\ s}wce(X_N;\ \mathbb{H}^{\frac{d+1}{2}}(\mathbb{S}^d))$，如果 wce$(X_N;\ \mathbb{H}^{\frac{d+1}{2}}(\mathbb{S}^d)) \le 1$，参见 [Be，第 1 节。5]

最后，如果我们（例如）在 (4) 中取 $M = 2$，就得到

$$\sum_N \mathbb{P}\left(\mathrm{wce}(X_N;\mathbb{H}^s(\mathbb{S}^d)) > C_{d,s}\frac{(\log N)^{\frac{2s}{d+1}}}{N^{\frac{s}{d}}}\right) < \infty,$$

并由 Borel–Cantelli 引理

$$P\left(\limsup_{N\to+\infty}\left\{\mathrm{wce}(X_N;\mathbb{H}^s(\mathbb{S}^d)) > C_{d,s}\frac{(\log N)^{\frac{2s}{d+1}}}{N^{\frac{s}{d}}}\right\}\right) = 0.$$

□

3.2. **球面系综（定理 2）**。

证明。（定理 2）第一部分归功于 [Hi]。为完整起见，我们将其列出。设 $s \in (1, 2)$。那么最坏情况误差由（5）给出。取期望，并利用（9）及 $s' = 2 - 2s$,

$$\begin{aligned} N^s\mathbb{E}\left[\mathrm{wce}(X_N,\mathbb{H}^s(\mathbb{S}^2))^2\right] &= -\frac{N^s}{N^2}\left(\mathbb{E}\left[E_{2-2s}\right] - V_{2-2s}(\mathbb{S}^2)N^2\right) \\ &= \frac{2^{2s}\Gamma(s)}{4}\frac{\Gamma(N)}{\Gamma(N+s)}N^s \\ &\xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{2^{2s}\Gamma(s)}{4}, \end{aligned}$$

由于 $\frac{\Gamma(N)}{\Gamma(N+s)} \sim N^{-s}$，根据伽马函数的渐近性质。于是$N^s\mathbb{E}\left[\text{最坏情况误差}(X_N,\mathbb{H}^s(\mathbb{S}^2))^2\right]$ 有界，且 (X_N) 是平均意义下的 s-QMC 设计序列，其中 $s \in (1,2)$。

现在我们证明 $s^* = 2$。设 $s \in (2, 3)$。最坏情况误差的表达式为（6），其中 $M = 1$:

$$\mathrm{wce}(X_N;\mathbb{H}^s(\mathbb{S}^2))^2 = \frac{1}{N^2}\left[\sum_{j,i=1}^N \mathcal{Q}_1(x_j\cdot x_i) + E_{2-2s} - V_{2-2s}(\mathbb{S}^2)N^2\right],$$

with

$$\mathcal{Q}_1(x_j\cdot x_i) = -6\alpha_1^{(s)}x_j\cdot x_i,$$

其中我们用到了 $P_1^{(2)}(x) = x$。接下来

(14)

$$\begin{aligned} \mathrm{wce}(X_N;\mathbb{H}^s(\mathbb{S}^2))^2 &= \frac{1}{N^2}\left[-6\alpha_1^{(s)}\sum_{j,i=1}^N x_j\cdot x_i + E_{2-2s} - V_{2-2s}(\mathbb{S}^2)N^2\right] \\ &= \frac{1}{N^2}\left[-6\alpha_1^{(s)}\sum_{j,i=1}^N\left(1 - \frac{|x_j - x_i|^2}{2}\right) + E_{2-2s} - V_{2-2s}(\mathbb{S}^2)N^2\right] \\ &= \frac{1}{N^2}\left[3\alpha_1^{(s)}\left(E_{-2} - 2N^2\right) + E_{2-2s} - V_{2-2s}(\mathbb{S}^2)N^2\right] \end{aligned}$$

取期望，并利用 (9) 及 $s=-2$ 和 $s'=2-2s$,

$$\begin{aligned}N^2\mathbb{E}\left[\mathrm{wce}(X_N;\mathbb{H}^s(\mathbb{S}^2))^2\right] &= \left[3\alpha_1^{(s)}\left(\mathbb{E}\left[E_{-2}\right]-2N^2\right)+\mathbb{E}\left[E_{2-2s}\right]-V_{2-2s}(\mathbb{S}^2)N^2\right]\\ &= -12\alpha_1^{(s)}\frac{N}{N+1}-\frac{2^{2s}\Gamma(s)}{4}\frac{\Gamma(N)}{\Gamma(N+s)}N^2\\ &\xrightarrow[N\to\infty]{} -12\alpha_1^{(s)}>0,\end{aligned}$$

因为 $\frac{\Gamma(N)\Gamma(N+s)}{}N^2\sim N^{2-s}$。因此，$N^2\mathbb{E}\left[\mathrm{wce}(X_N;\mathbb{H}^s(\mathbb{S}^2))^2\right]$ 有一个正的下界常数。□

3.3. **椭圆多项式（定理 3）**。

证明。（定理 3）设 $s\in(2,3)$。我们已在 (14) 中看到，最坏情况误差的表达式为

$$\mathrm{wce}(X_N;\mathbb{H}^s(\mathbb{S}^2))^2=\frac{1}{N^2}\left[3\alpha_1^{(s)}\left(E_{-2}-2N^2\right)+E_{2-2s}-V_{2-2s}(\mathbb{S}^2)N^2\right].$$

取期望，并对 $\mathbb{E}[E_{-2}]$ 使用 (12)，对带有 $s'=2-2s$ 的情形使用 (11),

$$\begin{aligned}N^s\mathbb{E}\left[\mathrm{wce}(X_N;\mathbb{H}^s(\mathbb{S}^2))^2\right] &= \frac{N^s}{N^2}\left[3\alpha_1^{(s)}\left(\mathbb{E}\left[E_{-2}\right]-2N^2\right)+\mathbb{E}\left[E_{2-2s}\right]-V_{2-2s}(\mathbb{S}^2)N^2\right]\\ &= N^{s-2}\left[3\alpha_1^{(s)}\left(-8\zeta(3)\frac{1}{N}+o\left(\frac{1}{N}\right)\right)\right.\\ &\quad\left.+C(2-2s)N^{2-s}+o(N^{2-s})\right]\\ &= 3\alpha_1^{(s)}\left(-8\zeta(3)N^{s-3}+o\left(N^{s-3}\right)\right)+C(2-2s)+o(1)\\ &\xrightarrow[N\to\infty]{} C(2-2s).\end{aligned}$$

那么，对于 $s\in(2,3)$，$N^s\mathbb{E}\left[wce(Q[X_L];\mathbb{H}^s(\mathbb{S}^2))^2\right]$ 有界。对于 $1<s\le 2$，结论由命题 1 自动成立。

现在我们看到强度为 $s^*=3$。令 $s\in(3,4)$。根据式 (6)，取 $M=2$，最坏情况误差的平方为

$$\mathrm{wce}(X_N;\mathbb{H}^s(\mathbb{S}^2))^2=\frac{1}{N^2}\left[\sum_{j,i=1}^{N}\mathcal{Q}_2(x_j\cdot x_i)-(E_{2-2s}-V_{2-2s}(\mathbb{S}^2)N^2)\right],$$

其中，利用 $P_{(2)\,2}(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$,

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_2(x_j\cdot x_i) &= -5\alpha_2^{(s)}[3(x_j\cdot x_i)^2-1]\\ &= -5\alpha_2^{(s)}\left[2-3|x_j-x_i|^2+\frac{3}{4}|x_j-x_i|^4\right].\end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned}\mathrm{wce}(X_N;\mathbb{H}^s(\mathbb{S}^2))^2 =&\frac{1}{N^2}\Big[-5\alpha_2^{(s)}\Big(2N^2-3E_{-2}+\frac{3}{4}E_{-4}\Big)\\ &-(E_{2-2s}-V_{2-2s}(\mathbb{S}^2)N^2)\Big].\end{aligned}$$

取期望，并对 $\mathbb{E}[E_{-2}]$ 使用 (12)，以及对 $s' = 2 - 2s$使用 (11)，

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\mathrm{wce}(X_N; \mathbb{H}^s(\mathbb{S}^2))^2\right] =& \frac{1}{N^2}\Big[-5\alpha_2^{(s)}\Big(2N^2 - 3\mathbb{E}[E_{-2}] + \frac{3}{4}\mathbb{E}[E_{-4}]\Big) \\
& - \left(\mathbb{E}[E_{2-2s}] - V_{2-2s}(\mathbb{S}^2)N^2\right)\Big] \\
=& \frac{1}{N^2}\Bigg\{ -5\alpha_2^{(s)}\left[2N^2 - 3\left(2N^2 - 8\zeta(3)\frac{1}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right)\right)\right. \\
& \left. + \frac{3}{4}\left(\frac{32}{6}N^2 + 64\zeta(3)\frac{1}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right)\right)\right] \\
& - \left(C(2-2s)N^{2-s} + o\left(N^{2-s}\right)\right)\Bigg\} \\
=& \frac{1}{N^2}\left\{ -5\alpha_2^{(s)}\left[72\zeta(3)\frac{1}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right)\right] - C(2-2s)N^{2-s}\right\}.
\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}
N^3\mathbb{E}\left[\mathrm{wce}(X_N; \mathbb{H}^s(\mathbb{S}^2))^2\right] &= -5\alpha_2^{(s)}\left[72\zeta(3) + o(1)\right] - C(2-2s)N^{3-s} \\
&\xrightarrow[N\to\infty]{} -360\zeta(3)\alpha_2^{(s)} > 0.
\end{aligned}$$

那么存在一个常数 $B > 0$，使得

$$N^3\mathbb{E}\left[\mathrm{wce}(X_N; \mathbb{H}^s(\mathbb{S}^2))^2\right] \geq B.$$

□

参考文献

[AlZa] K. Alishashi、K. Zamani、M. S.：球面系综与球面上点的均匀分布。《电子概率学杂志》20，第23号（2015）。[AnGuZe] G. W. Anderson、A. Guionnet、O. Zeitouni：随机矩阵导论。剑桥高等数学研究丛书，第118卷。剑桥大学出版社，剑桥（2010）。[ArBeSh] D. Armentano、C. Beltrán、M. Shub：球面上的离散对数能量最小化：随机多项式的作用。《美国数学会汇刊》363(6)，2955–2965（2011）。[BeMaOr] C. Beltrán、J. Marzo、J. Ortega-Cerdà：高维球面上旋转不变行列式点过程的能量与差异度。《复分析杂志》37，76–109（2016）。[Be] R. Berman：球面系综与准蒙特卡洛设计，arXiv:

1906 08533 2 。v

[ ] 2021

math.PR ()。[BeBoNy] R. Berman、S. Boucksom、D. W. Nyström：复流形上的费克特点及其向平衡测度的收敛，《数学学报》207，1–27（2011）。[BeBoLe92] E. Bogomolny、O. Bohigas、P. Leboeuf：随机多项式的根的分布。《物理评论快报》68，2726–2729（1992）。[BeBoLe96] E. Bogomolny、O. Bohigas、P. Leboeuf：量子混沌动力学与随机多项式。《统计物理学杂志》85(5)，639–679（1996）。[BoRaVi] A. Bondarenko、D. Radchenko、M. Viazovska：球面设计的最优渐近界。《数学年刊》178(2)，443–452（2013）。[BoHaSa] S. Borodachov、D. Hardin、E. Saff：可求长集合上的离散能量，施普林格纽约（2019）。[BrChCoGiSeTr] L. Brandolini、C. Choirat、L. Colzani、G. Gigante、R. Seri、G. Travaglini：流形上的求积公式与点的分布。《比萨高等师范学校科学类年刊》（5），889–923（2014）。

[BrDi] J. S. Brauchart、J. Dick：球面上 Sobolev 空间的刻画，以及 Stolarsky 不变性原理向任意光滑度的推广。《Constr. Approx.》38(3)，397–445（2013）。[BrHe] J. S. Brauchart、K. Hesse：任意维数球面上的数值积分，《Constr. Approx.》25，第1号，41–71（2007）。[BrSaSlWo] J. S. Brauchart、E. B. Saff、I. H. Sloan、R. S. Womersley：QMC 设计：球面上的最优阶准蒙特卡洛积分方案。《Math. Comp.》83，第290号，2821–2851（2014）。[BrGrKuZi] J. S. Brauchart、P. J. Grabner、W. Kusner、J. Ziefle：球面上的超均匀点集：概率方面。《Monatsh Math》192，763–781（2020）。[DeMa] V. de la Torre、J. Marzo：椭圆多项式零点的期望能量，arXiv:2211.07599（2022）。[DL] NIST 数学函数数字图书馆。http://DL.nist.gov/，2022-06-30 发布的1.1.6版。[ErMaObTr] A. Erdélyi、W. Magnus、F. Oberhettinger、F. G. Tricomi：积分变换表。第二卷。McGraw-Hill 图书公司，纽约—多伦多—伦敦（1954）。[He] K. Hesse：任意维数球面上最坏情形求积误差的一个下界，《Numer. Math.》103，第3号，413–433（2006）。[HeSl] K. Hesse、I. H. Sloan：球面上求积误差的最优下界 $\mathbb{S}^2$，《J. Complexity》21，第6号，790–803（2005）。[Hi] M. Hirao：QMC 设计与行列式点过程，《蒙特卡洛与准蒙特卡洛方法》，331–343，Springer Proc. Math. Stat.，241，施普林格，Cham（2018）。[HoKrPeVi] J. Ben Hough、M. Krishnapur、Y. Peres、V. Virág：高斯解析函数的零点与行列式点过程。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州（2009）。[Kr] M. Krishnapur：从随机矩阵到随机解析函数。《概率年刊》37(1)：314–346（2009）。[Ma] O. Macchi：随机点过程的重合方法。《Advances in Appl. Probability》7：83–122（1975）。[MaOr] J. Marzo、J. Ortega-Cerdà：球面上费克特点的均匀分布，《Constr. Approx.》32，3，513–521（2010）。[PePe] R. Pemantle、Y. Peres：行列式测度及其他强 Rayleigh 测度的 Lipschitz 泛函的集中。《Combinatorics, Probability and Computing》23(1)，140–160（2014）。[Re] M. Reimer：多元多项式逼近，第144卷，施普林格（2003）。[SlWo] I. H. Sloan、R. S. Womersley：球面上的多项式插值究竟能有多好？《Advances in Computational Mathematics》14，195–226（2001）。[SmSh] S. Smale、M. Shub：贝祖定理的复杂性 III：条件数与装填。《J. Complexity》9，第1号，4–14。Joseph F. Traub 纪念文集，第一部分（1993）。[Sz] G. Szegö：正交多项式，美国数学会大学丛书，第23卷（1939）。巴塞罗那大学数学与计算机科学系，Gran Via 585，08007 巴塞罗那，西班牙。电子邮箱：delatorre@ub.edu 巴塞罗那大学数学与计算机科学系，Gran Via 585，08007 巴塞罗那，西班牙。数学研究中心，C大楼，Bellaterra 校区，08193 Bellaterra，西班牙。电子邮箱：jmarzo@ub.edu