arXiv:2302.01006v1 [math.LO] 2 Feb 2023

广义贝尔空间中闭集的连续像

¨PHILIPP LUCKE 和 PHILIPP SCHLICHT

Abstract. 设 κ 为一个满足 $\kappa = \kappa^{<\kappa}$的不可数基数。给定一个基数$\mu$，我们在集合 ${}^{\kappa}\mu$ 上赋予如下拓扑：该集合由所有从 κ到 μ 的函数组成，其基本开集是基数小于 κ的部分函数的所有延拓。我们证明了一些结果，这些结果使我们能够区分 ${}^{\kappa}\kappa$ 的若干子集类，这些子集是形如${}^{\kappa}\mu$的空间的闭子集的连续像。以下是这类结果的重要例子：(i) 存在 ${}^{\kappa}\kappa$ 的一个闭子集，它不是 ${}^{\kappa}\kappa$的连续像；(ii) 存在 ${}^{\kappa}\kappa$ 的一个单射连续像，它不是 κ-博雷尔集（即它不属于 ${}^{\kappa}\kappa$ 上包含所有开子集且对 κ-并封闭的最小集合代数）；(iii) 命题“
every continuous image of ${}^{\kappa}\kappa$ is an injective continuous image of a closed subset of ${}^{\kappa}\kappa$”独立于 ZFC 公理；以及 (iv) ZFC 公理不能证明假设“$2^{\kappa} > \kappa^{+}$”蕴含命题“
every closed subset of ${}^{\kappa}\kappa$ is a continuousimage of ${}^{\kappa}(\kappa^{+})$”，也不能证明其否定。

Contents

1. 引言 1
2. 薄集 3
3. ${}^{\kappa}\kappa$的单射像 4
4. 闭集的连续单射像 5
5. 从内模型定义的类 6
6. 更高基数的树 7
7. 完美嵌入 8
8. 问题 参考文献

1
11
14
20
22
24
25
28
29

1. Introduction

设 κ 是一个无限正则基数。给定一个基数 μ，我们赋予由所有函数 $x : \kappa \longrightarrow \mu$ 构成的集合 ${}^{\kappa}\mu$ 如下拓扑，其基本开集具有以下形式

$$N_s = \{x \in {}^{\kappa}\mu \mid s \subseteq x\},$$

其中 s 是集合 ${}^{<\kappa}\mu$ 中所有函数 $t : \alpha \longrightarrow \mu$ 的一个元素，且满足 $\alpha < \kappa$。我们用 $\mathbf{\Sigma}^0_1(\kappa)$ 表示 ${}^{\kappa}\kappa$ 的所有开子集组成的类，并用 $B(\kappa)$ 表示 ${}^{\kappa}\kappa$的所有 κ-博雷尔子集组成的类，即所有包含于

2010 *Mathematics Subject Classification.* 03E05、03E15、03E35、03E47。*Key words and phrases.* 广义贝尔空间、 $\mathbf{\Sigma}^1_1$-可定义性、树、连续像。作者谨向审稿人致谢，感谢其认真审阅稿件。

$^{\kappa}\kappa$ 中包含所有开子集且对κ-并封闭的最小集合代数。若 $^{\kappa}\kappa$ 的一个子集等于 $^{\kappa}\kappa \times {}^{\kappa}\kappa$的某个闭子集在投影下的像，则称其为 $\mathbf{\Sigma}^1_1$-子集；若该集合本身及其补集都是$\mathbf{\Sigma}^1_1$-子集，则称其为 $\mathbf{\Delta}^1_1$-子集。由于连续函数 $f\colon C \longrightarrow {}^{\kappa}\kappa$ （其中 $C \subseteq {}^{\kappa}\kappa$ 为闭集）的图仍是 $^{\kappa}\kappa \times {}^{\kappa}\kappa$ 的一个闭子集，且空间 $^{\kappa}\kappa$ 与 $^{\kappa}\kappa \times {}^{\kappa}\kappa$ 同胚，因此，$^{\kappa}\kappa$ 的子集 A 是 $\mathbf{\Sigma}^1_1$-子集，当且仅当它是 $^{\kappa}\kappa$ 的某个闭子集的连续像（也就是说，存在 $^{\kappa}\kappa$ 的一个闭子集 C 以及一个函数 $f\colon C \longrightarrow {}^{\kappa}\kappa$，使得 $A = \mathrm{ran}(f)$，并且 f 关于 C上的子空间拓扑连续）。

若 κ 是一个满足 $\kappa = \kappa^{<\kappa}$的不可数基数，那么众所周知（例如，参见 [L¨uc12，第 2]节），$\mathbf{\Sigma}^1_1$-子集的类等于 $^{\kappa}\kappa$ 的子集类中那些可由带参数的 Σ_1公式在结构 $(\mathrm{H}(\kappa^+), \in)$ 上定义的子集。这表明，$^{\kappa}\kappa$中许多有趣且重要的子集都是形如 $^{\kappa}\mu$ 的空间中闭子集的连续像。我们给出两个重要的 $\mathbf{\Sigma}^1_1$-子集的例子，它们属于更小的连续像类。

例1.1. 俱乐部滤子

$$\mathrm{Club}_{\kappa} \;=\; \{x \in {}^{\kappa}\kappa \mid \exists C \subseteq \kappa \; club \; \forall \alpha \in C \; x(\alpha) = 0\}$$

是空间 $^{\kappa}\kappa$ 的连续像。令 T 表示$^{\gamma}\kappa \times {}^{\gamma}2$ 中所有有序对 (s,t) 的集合，满足 $\gamma < \kappa$ 是一个极限序数，且对所有$\alpha < \gamma$，若 $t(\alpha) = 0$，则 $s(\alpha) = 0$；并且集合 $\{\alpha < \gamma \mid t(\alpha) = 0\}$ 是 γ的一个闭无界子集。我们按逐分量包含关系对 T 排序。于是 T 是高度为 κ 的一棵树，它在长度小于 κ 的递增序列下封闭，并且 T 中的每个节点都有 κ 个直接后继，因为区间 $(\mathrm{lh}(s), \kappa)$ 中每个具有可数共尾性的极限序数，都会产生节点 (s,t) 在 T 中的一个不同的直接后继。这表明 T 与树 $^{<\kappa}\kappa$同构。若我们赋予集合

$$[T] \;=\; \{(x,y) \in {}^{\kappa}\kappa \times {}^{\kappa}2 \mid \forall \alpha < \kappa \; \exists \alpha < \beta < \kappa \; (x \restriction \beta, y \restriction \beta) \in T\}$$

赋予其拓扑，使基本开集由T中元素的所有延拓构成，则得到一个与 $^{\kappa}\kappa$同胚的拓扑空间。由于投影$p\colon [T] \longrightarrow {}^{\kappa}\kappa$ 到第一坐标是连续的，且 $\mathrm{ran}(p) =$ 闭无界集$_{\kappa}$，我们可以得出，集合闭无界集$_{\kappa}$ 等于 $^{\kappa}\kappa$的一个连续像。

给定一个无限正则基数 κ和基数 μ_0、.....、 μ_n，我们称乘积 $^{<\kappa}\mu_0 \times \ldots \times {}^{<\kappa}\mu_n$ 的子集 T为子树，若 $\mathrm{lh}(t_0) = \ldots = \mathrm{lh}(t_n)$，且只要 $(t_0, ..., t_n) \in T$并且 $\alpha < \mathrm{lh}(t_0)$，元组（$t_0 \restriction \alpha, ..., t_n \restriction \alpha$）就是 T的一个元素。我们用 $\leq$表示此类子树 T上的自然树序；也就是说，若 $s = (s_0, ..., s_n)$和 $t = (t_0, ..., t_n)$是 T中的节点，则记作 $s \leq t$，表示对所有 $i \leq n$， $s_i \subseteq t_i$都成立。

给定 $^{<\kappa}\mu_0 \times \ldots \times {}^{<\kappa}\mu_n$ 的一个子树 T，如果对于每个 $\alpha < \kappa$，都有 $(x_0 \restriction \alpha, \ldots, x_n \restriction \alpha) \in T$，我们就称 $^{\kappa}\mu_0 \times \ldots \times {}^{\kappa}\mu_n$ 的元素 $(x_0, \ldots, x_n)$ 是经过 T 的一条共尾分支。容易看出，$^{\kappa}\mu_0 \times \ldots \times {}^{\kappa}\mu_n$ 的一个子集 A 关于上述引入的拓扑是闭的，当且仅当它等于某个 $^{<\kappa}\mu_0 \times \ldots \times {}^{<\kappa}\mu_n$ 的子树 T 的所有共尾分支组成的集合 $[T]$。

例 1.2. 假设 $f\colon {}^{<\kappa}\kappa \longrightarrow \kappa$ 是一个双射。令 T_{κ} 表示所有满足以下条件的 $x \in {}^{\kappa}2$ 的集合：$x \circ f$ 是 $^{<\kappa}\kappa$ 的一个子树 T 的特征函数，且$[T] \neq \emptyset$。MV93 第 2] 节的结果表明，T_{κ} 是一个 $\mathbf{\Sigma}^1_1$-完备子集

${}^{\kappa}\kappa$，也就是说，若 A 是 ${}^{\kappa}\kappa$ 的一个非空 $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 子集，那么存在一个连续函数 $f\colon {}^{\kappa}\kappa \longrightarrow {}^{\kappa}\kappa$，使得 $A = f^{-1}[T_\kappa]$。

集合 T_κ 也等于 ${}^{\kappa}\kappa$ 的一个连续像。为此，令 S 表示 ${}^{\gamma}2 \times {}^{\gamma}\kappa$ 中所有满足 $\gamma < \kappa$ 的有序对 (t, u) 所构成的集合，使得集合

$$T(t) \;=\; \{s \in {}^{<\kappa}\kappa \mid f(s) < \gamma,\ (t \circ f)(s) = 1\}$$

是 ${}^{<\kappa}\kappa$ 的一个子树，其中对每个 $\bar{\gamma} < \gamma$ 都有 $u \restriction \bar{\gamma} \in T(t)$。若按逐分量包含关系对集合 S 排序，则得到的树与 ${}^{<\kappa}\kappa$ 同构。与上文一样，我们赋予集合

$$[S] \;=\; \{(x, y) \in {}^{\kappa}2 \times {}^{\kappa}\kappa \mid \forall \alpha < \kappa\ \exists \alpha < \beta < \kappa\ (x \restriction \beta, y \restriction \beta) \in S\}$$

以由 S 诱导的拓扑，从而得到一个与 ${}^{\kappa}\kappa$ 同胚的空间。由于 T_κ 等于 $[S]$ 的投影，因此该集合等于 ${}^{\kappa}\kappa$ 的一个连续像。

本文研究在 κ 是具有 $\kappa = \kappa^{<\kappa}$ 的不可数基数时，关于这类连续像的不同类之间关系的可证明陈述和相对一致性陈述。我们将考察以下几类子集。

- 由 ${}^{\kappa}\kappa$ 的连续像构成的类 C^κ。
- 由 ${}^{\kappa}\kappa$ 的闭子集的连续像构成的类 $\mathbf{\Sigma}^1_1(\kappa)$。
- 由 ${}^{\kappa}\kappa$ 的连续单射像构成的类 I^κ。
- 由 ${}^{\kappa}\kappa$ 的闭子集的连续单射像构成的类 I^κ_{cl}。

事实证明，以下这个类对于本分析也很重要。

- 令 M 为集合论的一个内模型，并且 $n < \omega$。我们将 $S^{M,}{}_{n}{}^{\kappa}$定义为满足以下条件的 ${}^{\kappa}\kappa$ 的所有子集 A 所构成的类：

  $$A \;=\; \{x \in {}^{\kappa}\kappa \mid M[x, y] \models \varphi(x, y)\}$$

  存在某个 $y \in {}^{\kappa}\kappa$ 以及一个关于 Σ^1_n的公式 $\varphi(u, v)$，其中 $M[x, y] = \bigcup_{z \in M} \mathrm{L}[x, y, z]$是包含 $M \cup \{x, y\}$的最小传递模型。

为说明我们的工作，我们首先简要回顾经典情形“$\kappa = \omega$”中这些类之间的关系。

- 类 $B(\omega)$ 与 I^ω_{cl} 重合（参见 [Kec95，15.3]）。
- 由于 I^ω 中的每个集合都没有孤立点，类 I^ω 是 $B(x)$ 的一个真子类，并且包含每个非空开集。此外，${}^{\omega}\omega$ 的每个博雷尔子集都等于 I^ω 中的一个元素与一个可数集的并集（这可由 [Kec95，6.4]和 [Kec95，13.1]推出）。
- 当且仅当一个非空子集属于 $\mathbf{\Sigma}^1_1(\omega)$时，它才属于 C^ω （参见 [Kec95，2.8]）。
- 给定一个 ZFC 的内模型 M，类 $S^{M,}{}_{1}{}^{\omega}$ 与所有 $\mathbf{\Sigma}^1_2$-子集 ${}^{\omega}\omega$构成的类相同，即与 $\mathbf{\Sigma}^1_1$-子集 ${}^{\kappa}\kappa \times {}^{\kappa}\kappa$ 补集的投影所构成的类相同（这可由 [Jec03, 引理 25.20] 和 [Jec03, 引理 25.25]推出）。

$$\mathbf{\Sigma}^0_1(\omega) \longrightarrow I^\omega \longrightarrow B(\omega) \;=\!=\; I^\omega_{cl} \longrightarrow \mathbf{\Sigma}^1_1(\omega) \;=\!=\; C^\omega \longrightarrow S^{M,\omega}_1$$

FIGURE 1. 在“$\kappa = \omega$”情形下，所考虑的各类之间可证明的相容关系。

我们借助一幅展示可证关系和相容关系的完整图示，总结上述关系，如图1所示。给定两个由子集构成的类 C 和 D，我们用从 A 指向 B 的实线箭头 $A \longrightarrow B$ 表示：每个非空子集若属于 A，则它是 B 的一个元素，这一结论可由 ZFC 公理推出；用虚线箭头 $A \dashrightarrow B$ 表示：这一包含关系与这些公理相对相容。如果所示蕴含关系的传递闭包包含所有可能的蕴含关系，则称该图示是完整的。

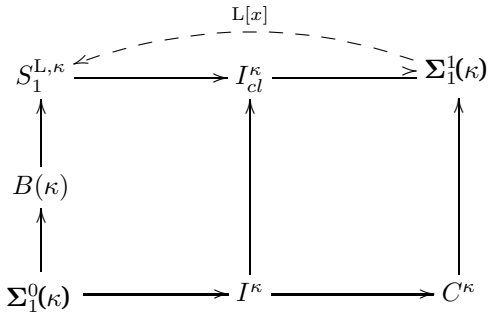

FIGURE 2. 当κ 是满足 $\kappa = \kappa^{<\kappa}$ 的不可数基数时，可证明且相容的关系。

本文的结果将表明，当 κ 是满足 $\kappa = \kappa^{<\kappa}$ 的不可数基数时，上述各类之间的关系会以根本不同的方式呈现。这些结果由图 2 概括，并将表明该图也是完备的。

上述分析中的一项重要结果是，我们观察到，${}^{\kappa}\kappa$ 的连续像这一类并不包含 ${}^{\kappa}\kappa$ 的每个非空闭子集。我们将证明，在该结果的证明中构造的闭子集等于空间 ${}^{\kappa}(\kappa^+)$ 的一个连续像。受此事实启发，我们还将在 μ 是满足 $\kappa < \mu < 2^{\kappa}$ 的基数时考察以下各类。

- ${}^{\kappa}\mu$的连续像类 $C^{\kappa,\ \mu}$。
- ${}^{\kappa}\mu$的闭子集的连续像类 $C^{\kappa,\ {}_{cl}\ \mu}$。

如上所述，我们首先讨论可数情形下这些类之间关系的已知结果。

- ${}^{\kappa}\kappa$ 的非空子集属于 $C^{\omega,\ \mu}$，当且仅当它属于 $C^{\omega,\ {}_{cl}\ \mu}$（参见 [Kec95, 2.8]）。

- ${}^{\omega}\omega$ 的每个 $\mathbf{\Sigma}^1_2$-子集都等于 ${}^{\omega}\omega \times {}^{\omega}\omega_1$的某个子树的投影（参见 [Kec95, 38.9]）。特别地，$\mathbf{\Sigma}^1_1(\omega)$是 $C^{\omega,\ \omega_1}$的真子类。
- 如果 ${}^{\omega}\omega$ 的每个不可数 $\mathbf{\Sigma}^1_2$-子集都包含一个完美子集，那么 $C^{\omega,\ \omega_1}$ 中存在一个集合，它不是 $\mathbf{\Sigma}^1_2$-子集。
- 如果 ${}^{\omega}\omega$ 中每个基数为 ω_1 的子集都是 $\mathbf{\Sigma}^1_2$-子集，那么类 C^{ω,ω_1} 中的每个集合都是 $\mathbf{\Sigma}^1_2$-子集（类似论证见命题 1.20 的证明）。通过使用几乎不交编码（见 [JS70] 和 [Har77，第 1] 节），可以看出上述假设在每个 MA $_{\omega_1}$ + ¬(CH) + “$\omega_1 = \omega_{L1}$”模型中都成立（见 [MS70，第 3.2] 节）。

图 3 所示的完整示意图总结了这些结果。

与上述结果类似，当 κ 是一个带有 $\kappa = \kappa^{<\kappa}$ 的不可数基数，而 μ 是一个带有

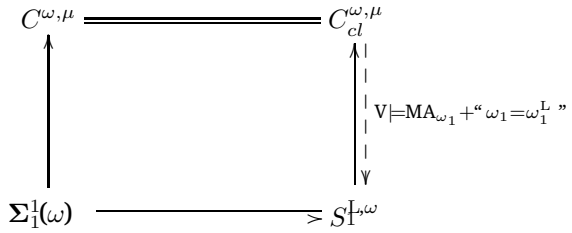

FIGURE 3. 在“$\kappa=\omega$”且 μ 为满足$\omega<\mu<2^{\omega}$的基数时，所考虑的各类之间可证明的相容关系。

$\kappa<\mu<2^{\kappa}$ 的基数时，这些类的表现会截然不同。本文的结果将证明图4所示的图是完备的。

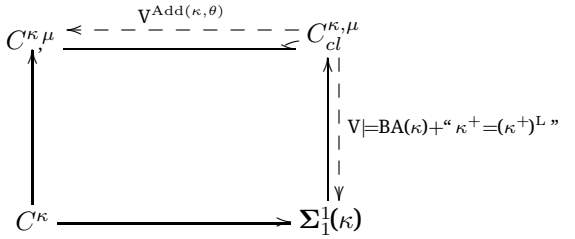

FIGURE 4. 在 κ 为满足$\kappa=\kappa^{<\kappa}$ 的不可数基数且 μ 为满足 $\kappa<\mu<2^{\kappa}$的基数时，所考虑的各类之间可证明的相容关系。

在本节余下部分，我们将给出相关结果，说明上述图示包含所有可证明且一致的蕴含关系。

1.1. C^{κ} 的连续像类。形如 ${}^{\omega}\mu$ 的空间有一项重要的拓扑性质：非空闭子集是整个空间的收缩（见 [Kec95, 2.8]）；也就是说，给定 ${}^{\omega}\mu$ 的一个闭子集 A，存在连续（甚至是 Lipschitz）满射 $f\colon {}^{\omega}\mu\longrightarrow A$，使得 $f\restriction A=\mathrm{id}_A$。这一陈述的证明可推广到更高基数，适用于某一类闭子集。

给定一个无限正则基数 κ 以及基数 $\mu_0,\dots,\mu_n,\nu$，若子树 $T\subseteq {}^{<\kappa}\mu_0\times\ldots\times{}^{<\kappa}\mu_n$ 满足：对于每个 $\lambda<\nu$ 以及每个 $\leq$-递增序列 $\langle(t_0^{\alpha},\dots,t_n^{\alpha})\mid\alpha<\lambda\rangle$，只要该序列属于 T，元组 $(\bigcup_{\alpha<\lambda}t_0^{\alpha},\dots,\bigcup_{\alpha<\lambda}t_n^{\alpha})$ 就是 T 的元素，则称该子树为 $<\nu$-闭。对于这样一棵树 T，若节点 t 在逐分量序下是 T 中的极大元，则称其为端节点。

命题 1.3. 设 κ 是一个无限正则基数，μ_0、.....、μ_n 是基数，且 T 是 ${}^{<\kappa}\mu_0\times\ldots\times{}^{<\kappa}\mu_n$ 的子树。若 T 是一棵 $<\kappa$-闭且没有末端节点的树，则闭集 $[T]$ 是 ${}^{\kappa}\mu_0\times\ldots\times{}^{\kappa}\mu_n$ 的收缩。

证明. 注意，我们的假设意味着每个 T 节点都有一条经过它的共尾分支。我们将 ∂T 定义为集合

$$\{(s_0,\dots,s_n)\in({}^{\gamma}\mu_0\times\cdots\times{}^{\gamma}\mu_n)\setminus T\mid \gamma<\kappa,\forall\alpha<\gamma(s_0\restriction\alpha,\dots,s_n\restriction\alpha)\in T\}. \quad (1)$$

那么，我们的假设意味着，s 中的每个元素都是 ∂T 中某个元素的直接后继，并且存在一条穿过 T 的共尾分支 x_s，满足 $t_s\subseteq x_s$。如果$y=(y_0,\dots,y_n)\in({}^{\kappa}\mu_0\times\cdots\times{}^{\kappa}\mu_n)\setminus[T]$，那么存在唯一的 $\alpha<\kappa$ 使得$(y_0\restriction\alpha,\dots,y_n\restriction\alpha)\in\partial T$，我们将这个元组记为 s_y。由此，我们可以定义一个满射 $f\colon {}^{\kappa}\mu_0\times\cdots\times{}^{\kappa}\mu_n\longrightarrow[T]$，规定当 $x\in[T]$ 时 $f(x)=x$，否则 $f(y)=x_{s_y}$。容易看出，f 是连续的。□

下面的观察表明，如果 κ 是正则且不可数的，那么上述拓扑性质并不适用于 ${}^{\kappa}\mu$ 的所有闭子集。

命题 1.4. 设 κ 是一个不可数正则基数，$\mu>1$ 是一个基数。令 A 表示 ${}^{\kappa}\mu$ 中所有满足仅对有限多个 $\alpha<\kappa$ 有 $x(\alpha)=0$ 的 x 所构成的集合。那么，A 是 ${}^{\kappa}\mu$ 的一个闭子集，但不是 ${}^{\kappa}\mu$ 的收缩。

证明. 令 T 表示 ${}^{<\kappa}\mu$ 的子树，它由所有满足仅对有限多个 $\alpha\in dom$ 有 $t(\alpha)=0(t)$ 的 $t\in{}^{<\kappa}\mu$ 构成。由于 $\mathrm{cof}(\kappa)>\omega$，我们有 $A=[T]$，这表明 A 是 ${}^{\kappa}\mu$ 的一个闭子集。

假设 $f\colon {}^{\kappa}\mu\longrightarrow A$ 是到 A 上的一个收缩映射。我们归纳地构造序列 $\langle x_n\in A\mid n<\omega\rangle$ 和 $\langle\gamma_n<\kappa\mid n<\omega\rangle$，使得对所有 $n<\omega$，$x_n(\gamma_n)=0$、$\gamma_n<\gamma_{n+1}$ 且 $x_n\restriction\gamma_{n+1}=x_{n+1}\restriction\gamma_{n+1}$。令 $\gamma_0=0$ 和 x_0 为 A 中满足 $x_0(0)=0$ 的任意元素。现在假设 x_n 和 γ_n 已经构造出来。那么我们找到满足 $f[N_{x_n\restriction\gamma_{n+1}}]\subseteq N_{x_n\restriction(\gamma_n+1)}$ 的 $\gamma_n<\gamma_{n+1}<\kappa$。取满足 $x_{n+1}\restriction\gamma_{n+1}=x_n\restriction\gamma_{n+1}$ 且 $x_{n+1}(\gamma_{n+1})=0$ 的 $x_{n+1}\in A$。

现在取 $x_\omega\in{}^{\kappa}\mu$，使得对所有 $n<\omega$ 都有 $x_n\restriction\gamma_{n+1}\subseteq x_\omega$，并令 $\gamma_\omega=\sup_{n<\omega}\gamma_n$。给定 $n<\omega$，我们有 $f(x_\omega)\in N_{x_n\restriction\gamma_n+1}$，因此 $f(x_\omega)(\gamma_n)=x_n(\gamma_n)=0$。所以 $f(x_\omega)\notin A$，这与我们关于 f的假设矛盾。□

由于贝尔空间 ${}^{\omega}\omega$ 的每个非空闭子集都是 ${}^{\omega}\omega$的收缩，因此 ${}^{\omega}\omega$ 的每个闭子集都是 ${}^{\omega}\omega$ 的连续像，这意味着类 C^{ω} 等于 ${}^{\omega}\omega$所有 $\mathbf{\Sigma}^1_1$-子集所成的类。自然会问，当 κ 是不可数正则基数时，这些类是否也相同。在第 2 节中，我们将通过证明以下结果，对此问题给出否定回答。

定理 1.5. 设 κ 是一个满足 $\kappa=\kappa^{<\kappa}$的不可数基数。那么，存在 ${}^{\kappa}\kappa$ 的一个非空闭子集，它不是 ${}^{\kappa}\kappa$的连续像。

这个结果有如下推论，表明类 C^{κ} 缺少重要的闭包性质。

推论 1.6. 类 C^{κ} 在有限交下不封闭。

证明。设 $A=[T]$ 是定理 1.5 给出的闭子集。按照命题 1.3 证明中的（1）定义 ∂T。给定 $i<2$，定义 T_i 为 T 与以下集合的并：将 ∂T 中元素用长度小于 κ 的 i 个字符串进行延拓所得的所有元素，即我们定义

$$T_i=T\cup\{t\in{}^{<\kappa}\kappa\mid\exists\alpha\leq\mathrm{lh}(t)\ [t\restriction\alpha\in\partial T\wedge\forall\alpha\leq\beta<\mathrm{lh}(t)\ t(\beta)=i]\}.$$

那么 T_i 是 ${}^{\kappa}\kappa$ 的一个 $<\kappa$-闭子树，且没有端节点。根据命题 1.3，子集 $[T_i]$ 是 C^{κ} 的一个元素。我们的构造确保交集 $[T_0] \cap [T_1]$ 等于集合 A，因此不是 C^{κ} 的元素。□

1.2. I^{κ} ： ${}^{\kappa}\kappa$的连续单射像类。我们讨论区分 I^{κ} 与上述其他类的结果。由于 ${}^{\kappa}\kappa$ 在连续单射映射下的每个像都没有孤立点，因此 C^{κ} 和 I^{κ}_{cl} 这两个类都不包含于 I^{κ} 中。

命题 1.7. 若 κ 是一个满足 $\kappa = \kappa^{<\kappa}$的不可数基数，则 ${}^{\kappa}\kappa$ 的每个非空开子集都等于 ${}^{\kappa}\kappa$ 的一个单射连续像。
证明。我们可以将每个开子集 A 写成基本开集的不交并 $A = \bigcup_{\alpha<\kappa} N_{s_\alpha}$，其中 $s_\alpha \in {}^{<\kappa}\kappa$ 对 $\alpha < \kappa$成立。接着，我们选取同胚$f_\alpha : N_{s_\alpha} \longrightarrow {}^{\kappa}\kappa$，并将它们组合成一个同胚 $f : {}^{\kappa}\kappa \longrightarrow A$。□

为了将 I^{κ} 与 ${}^{\kappa}\kappa$的所有 κ-博雷尔子集组成的类区分开来，我们需要引入 ${}^{\kappa}\kappa$的子集的一种重要正则性。若存在 ${}^{\kappa}\kappa$ 的一个开子集 U 以及 ${}^{\kappa}\kappa$ 的一个无处稠密子集序列 $\langle N_\alpha \mid \alpha < \kappa\rangle$，使得对称差 $A_\Delta U$ 是 $\bigcup_{\alpha<\kappa} N_\alpha$的子集，我们就称 ${}^{\kappa}\kappa$ 的子集 A 具有 κ-贝尔性质。 ${}^{\kappa}\kappa$ 的每个 κ-博雷尔子集都具有 κ-贝尔性质（参见 [HS01]）。与以下说法相容：每个 $\mathbf{\Delta}^1_1$-子集都具有此性质；同时，也与以下说法相容：存在一个不具有 κ-贝尔性质的 ${}^{\kappa}\kappa$ 的 $\mathbf{\Delta}^1_1$-子集（参见 [FHK，定理 49]）。我们将在第 3 节证明以下结果。

定理 1.8. 若 κ 是一个满足 $\kappa = \kappa^{<\kappa}$的不可数基数，则存在一个序列 $\langle A_\gamma \subseteq {}^{\kappa}\kappa \mid \gamma < 2^{\kappa}\rangle$，由 ${}^{\kappa}\kappa$的两两不交的单射连续像组成，并且对于所有 $\gamma < \delta < 2^{\kappa}$， A_γ 与 A_δ 无法由具有 κ-贝尔性质的集合分离。

推论 1.9. 如果 κ 是一个具有 $\kappa = \kappa^{<\kappa}$ 的不可数基数，那么存在 ${}^{\kappa}\kappa$ 的一个连续单射像，它不是 κ-博雷尔子集 ${}^{\kappa}\kappa$。□

在第 3 节中，我们将给出上述定理的一个证明变体，从而可以证明以下令人惊讶的推论。

定理 1.10. 设 ν 是一个具有 $\nu = \nu^{<\nu}$ 和 $\kappa = \nu^+ = 2^{\nu}$ 的无限基数。假设每个不包含 κ-苏斯林子树的 κ-阿伦斯赞树 T 都是特殊的。[1] 那么，存在 ${}^{\kappa}\kappa$ 的一个 $\mathbf{\Delta}^1_1$-子集，它不具有 κ-贝尔性质。

已知上述定理的假设在“$\nu = \omega$”的情形下是一致的（见 [AS85，定理 4.1]）。如果 ν 不可数，那么该假设意味着 □(κ) 不成立，且 κ 在 L 中是弱紧的（见 [Tod07，推论 6.3.3] 和 [Tod89，定理 3]）。

[1]设 κ 是一个不可数正则基数。 κ-*Aronszajn tree* 是一个高度为 κ 、没有κ-分支，且每一层的基数都小于 κ 的树。若一个 κ-阿伦斯赞树的每个反链的基数都小于 κ，则该树是κ-*Souslin tree* 。如果 ν 是一个无限基数，那么一个高度为 ν^+ 的树 T 是 *special* ，当且仅当存在一个函数 s : $T \longrightarrow \nu$，它在 T 的链上是单射的。

1.3. ${}^{\kappa}\kappa$ 的闭子集的连续单射像类 I^{κ}_{cl}。根据上述结果，类 I^{κ}_{cl} 既不包含于类 $B(\kappa)$，也不包含于 C^{κ} 中的非空集合类。我们给出一些结果，它们推出图 2 的示意图中所示的其余蕴含关系。

引理 1.11。每个 κ- ${}^{\kappa}\kappa$ 的博雷尔子集都是 ${}^{\kappa}\kappa$中某个闭集的连续单射像。

证明。我们可以用一棵良基树 $T \subseteq {}^{<\omega}\kappa$ 来编码博雷尔集 $B \subseteq {}^{\kappa}\kappa$：在末端节点 t 上附加基本开集 N_{s_t}，并在每个非末端节点 t 上标记 $l_t \in \{c, u\}$（表示补集和并集），使得每个标记为 c的节点在 T中都有唯一的后继。

固定 T的一个良序 $\prec$。如果满足以下条件，我们就称一对 (y, z) 是正确的。

(i) $y\colon T \longrightarrow 2$ 是一个函数，若 $y(\emptyset) = 1$，则 $l_{t_0} = c$ 蕴含 $y(t_0) = 1 - y(t_1)$；当 t_1 是 T中 t_0 的唯一后继时，且 $l_{t_0} = u$ 蕴含 $y(t_0) = 1$ 成立，当且仅当 T 中存在 t_0 的直接后继 t_1，使得$y(t_1) = 1$。(ii) $z\colon T \longrightarrow T$ 是一个函数，使得当 $l_t = u$ 且 $y(t) = 1$ 时，$z(t)$ 是 t中满足 $y(t') = 1$ 的、按 $\prec$良序取最小的后继 t'；否则 $z(t) = t$。

令 End_T 表示 T的末端节点集合。定义 C 为集合

$$\{(x, y, z) \in {}^{\kappa}\kappa \times {}^{T}2 \times {}^{T}T \mid (y, z) \text{ is correct } \wedge\ \forall t \in \mathrm{End}_T\ [y(t) = 1 \iff x \in N_{s_t}]\}.$$

若赋予集合 C 初始段拓扑，则所得拓扑空间与空间 ${}^{\kappa}\kappa$ 的一个闭子集同胚，且投影$p\colon C \longrightarrow {}^{\kappa}\kappa$ 到第一坐标是连续的。此外，$B = p[C]$，并且该投影是单射，因为对于每个三元组$(x, y, z) \in C$，有序对(y, z)由 x 唯一确定。□

借助上述引理，我们将证明以下结果，它将使我们能够说明：与 ZFC 公理相容的是，每个 $\mathbf{\Sigma}^1_1$-集都等于空间 ${}^{\kappa}\kappa$的某个闭子集的连续单射像。

定理 1.12. 设 κ 是一个满足 $\kappa = \kappa^{<\kappa}$的不可数基数。那么，类 $S^{\mathrm{L}, \kappa}_{1}$ 中的每个子集都等于空间 ${}^{\kappa}\kappa$的某个闭子集的单射连续像。

上述结论现在可由以下观察得出。

命题 1.13. 假设 $V = \mathrm{L}[x]$ 且 $x \subseteq \kappa$，其中 κ是满足 $\kappa = \kappa^{<\kappa}$的某个不可数基数。那么类 $S^{\mathrm{L}, \kappa}_{1}$ 和 $\mathbf{\Sigma}^1_1(\kappa)$ 相同。

证明. 根据上述评论，${}^{\kappa}\kappa$ 的一个子集是 $\mathbf{\Sigma}^1_1$-可定义的，当且仅当它可由结构 $(\mathrm{H}(\kappa^+), \in)$ 上带参数的一个 Σ_1-公式定义。由于 $\mathrm{H}(\kappa^+) = \mathrm{L}_{\kappa^+}[x]$，这些公式在 V 与 $\mathrm{H}(\kappa^+)$ 之间是绝对的。□

推论 1.14. 设 κ 是满足 $\kappa = \kappa^{<\kappa}$的一个不可数基数。假设对于某个 $x \subseteq \kappa$，$\mathrm{V} = \mathrm{L}[x]$。那么 ${}^{\kappa}\kappa$ 的每个 $\mathbf{\Sigma}^1_1$-子集都等于 ${}^{\kappa}\kappa$的某个闭子集的单射连续像。□

反过来，我们将证明，C^{κ} 不是 I^{κ}_{cl}的子类这一命题也是相容的。

定理 1.15. 设 κ 是一个满足 $\kappa = \kappa^{<\kappa}$ 的不可数基数，并设 G 要么是 V 上的 Add(κ, κ^{+})-泛型，要么是 V 上针对某个不可达基数 $\lambda > \kappa$ 的 Col($\kappa, <\lambda$)-泛型。在 V[G] 中，俱乐部滤子 Club_{κ} 不等于 ${}^{\kappa}\kappa$ 的某个闭子集的单射连续像。

我们还将证明，在任意一个 $Col(\kappa, <\lambda)$-泛型扩张中，类 I^{κ}_{cl} 和 $S^{\mathrm{L}, {}^{\kappa}_{1}}$ 并不相同，其中 $\lambda > \kappa$ 是不可达基数。

定理 1.16。设 κ 是一个不可数基数，$\kappa = \kappa^{<\kappa}$是 Col($\kappa, <\lambda$)-泛型的，且在 V 上泛型，其中 $\lambda > \kappa$ 是某个不可达基数；设 M 是 V[G] 的一个内模型，且 $M \subseteq$ V。在 V[G] 中，包含于类 $S^{M, {}^{\kappa}_{n}}$中的每个集合，对于某个 $n < \omega$，都具有 κ-贝尔性质。

以下推论是上述结果与定理 1.8 结合的直接结果。

推论 1.17. 设 κ 是一个满足 $\kappa = \kappa^{<\kappa}$ 的不可数基数，且 G 是相对于 V 的 Col($\kappa, <\lambda$)-泛型，其中 $\lambda > \kappa$是某个不可达基数。在 V[G]中，类 I^{κ} 中存在一个元素，它不属于类 $S^{\mathrm{L}, {}^{\kappa}_{n}}$，对任意 $n < \omega$皆如此。□

1.4. $C^{\kappa, {}^{\mu}}$ 的连续像类。我们将考察任意基数 μ下连续函数 $f\colon {}^{\kappa}\mu \longrightarrow {}^{\kappa}\kappa$ 的像。

首先考虑 μ 是满足 $1 < \mu < \kappa$ 的基数的情形。若 κ 不是弱紧基数，则根据[HN73]的结果，空间 ${}^{\kappa}\mu$ 和 ${}^{\kappa}\kappa$ 同胚。因此，我们可以假设 κ 是弱紧基数。此时，连续函数 $f\colon {}^{\kappa}\mu \longrightarrow {}^{\kappa}\kappa$ 将 ${}^{\kappa}\mu$ 的闭子集映射所得的像类 $C^{\kappa}{}_{,cl}{}^{\mu}$ 由闭子集构成，其元素恰为形如 [T]的集合，其中 T 是 ${}^{<\kappa}\kappa$ 的一个子树，并具有如下性质：对每个 $\alpha < \kappa$，第 α 层 $T(\alpha)$的基数都小于κ 。定理 1.5 表明，在这种情况下，连续函数 $f\colon {}^{\kappa}\mu \longrightarrow {}^{\kappa}\kappa$ 将 ${}^{\kappa}\mu$ 映射所得的像类 $C^{\kappa,\mu}$ 是 $C^{\kappa}{}_{,cl}{}^{\mu}$ 的真子类。单射连续函数 $f\colon {}^{\kappa}\mu \longrightarrow {}^{\kappa}\kappa$ 将 ${}^{\kappa}\mu$ 映射所得的像恰为形如 [T]的集合，其中 T 是 ${}^{<\kappa}\kappa \times {}^{<\kappa}\kappa$ 的一个完美子树，并具有如下性质：对每个 $\alpha < \kappa$，层 $T(\alpha)$的基数都小于 κ 。

接下来，我们考虑基数 $\mu > \kappa$。稍后我们将证明（见引理 6.1），定理 1.5 的证明中构造的闭集等于 ${}^{\kappa}(\kappa^{+})$ 的连续像。由于 ${}^{\kappa}\kappa$ 的每个子集显然都等于 ${}^{\kappa}(2^{\kappa})$ 的连续像，因此这意味着

$c(\kappa) = \min\{\mu \in \text{序数类} \mid {}^{\kappa}\kappa \text{ 的每个非空闭子集都是 } C^{\kappa, {}^{\mu}}\}$

是满足 $\kappa = \kappa^{<\kappa}$ 的每个不可数基数 κ 的一个定义良好的基数特征。根据定理 1.5 和上述说明，我们有 $\kappa < c(\kappa) \leq 2^{\kappa}$。在第 6 节和第 7 节中，我们将证明以下结果，该结果表明我们可以通过力迫操控这一基数特征的值。

定理 1.18。设 κ 是满足 $\kappa = \kappa^{<\kappa}$ 的不可数基数，$\mu \geq 2^{\kappa}$ 是满足 $\mu = \mu^{\kappa}$ 的基数，且 $\theta \geq \mu$ 是满足 $\theta = \theta^{\kappa}$ 的基数。那么，在基模型 V 的保持共尾性的力迫扩张 V[G] 中，以下陈述成立。

(i) $2^{\kappa} = \theta$。（ii） ${}^{\kappa}\mu$ 的每个闭子集都等于 ${}^{\kappa}\mu$的一个连续像。

[2] T的子树 ${}^{<\kappa}\kappa \times {}^{<\kappa}\kappa$ 当且仅当它是 $<\kappa$-闭的，且其分裂节点是共尾的。

(iii）存在 ${}^{\kappa}\kappa$ 的一个闭子集 A，它不等于任何满足 $\bar{\mu}^{<\kappa} < \mu$的 $\bar{\mu} < \mu$ 的连续像 ${}^{\kappa}\bar{\mu}$。

特别是，这一结果表明，在某些情况下，$C^{\kappa,\mu}$ 中的非空集合类与类 $C^{\kappa}_{,cl}{}^{\mu}$ 可以重合（见引理 6.2），但这一陈述无法从 ZFC 公理推出。以下结果将是证明定理 1.18 的关键要素之一。

定理 1.19. 设 c 在 V 上是 Add(ω, 1)-泛型。在 V[c]中，若 κ 是不可数正则基数，则存在 ${}^{\kappa}\kappa$ 的一个闭子集 A，使得对于每个满足 $\mu^{<\kappa} < 2^{\kappa}$的基数 μ，A 都不是 ${}^{\kappa}\mu$ 的连续像。

给定一个基数 μ，接下来我们考虑类 $C^{\kappa}_{,cl}{}^{\mu}$，它由 ${}^{\kappa}\mu$的所有闭子集的连续像组成。此类包含所有 $\mathbf{\Sigma}^1_1$-子集。我们将讨论表明这些类在某些一致性条件下可以相等的结果。令 $\prec\alpha,\beta\succ$ 表示 $\alpha,\beta \in$ On 的 G¨odel 对。给定 $x \in {}^{\kappa}\mu$ 和 $\alpha < \kappa$，令 $(x)_\alpha$ 表示 ${}^{\kappa}\mu$ 中由 $(x)_\alpha(\beta) = x(\prec\alpha,\beta\succ)$ 对所有 $\beta < \kappa$定义的元素。

命题 1.20. 设 κ 是一个不可数正则基数，μ 是一个满足 $\mu = \mu^{<\kappa} < 2^{\kappa}$ 的基数。假设 ${}^{\kappa}\kappa$ 的每个基数为 μ 的子集都是一个 $\mathbf{\Sigma}^1_1$- 子集。那么 $C^{\kappa}_{,cl}{}^{\mu}$ 中的每个集合都是一个 $\mathbf{\Sigma}^1_1$- 子集。

证明. 设 A 是 ${}^{\kappa}\mu$ 的一个闭子集，且 $f\colon A \longrightarrow {}^{\kappa}\kappa$ 是一个连续函数。那么 f 的图是 ${}^{\kappa}\mu \times {}^{\kappa}\kappa$ 的一个闭子集，并且 ran(f) $= p[T]$，其中 T 是 ${}^{<\kappa}\kappa \times {}^{<\kappa}\mu$ 的某个子树。固定一个由 ${}^{\kappa}\kappa$ 中两两不同的元素组成的族 $\langle y_t \mid t \in {}^{<\kappa}\mu\rangle$。根据我们的假设，集合

$$B = \{(x, y_t) \in {}^{\kappa}\kappa \times {}^{\kappa}\kappa \mid t \in {}^{<\kappa}\mu,\ (x \restriction \mathrm{lh}(t), t) \in T,\ \mathrm{supp}(x) \subseteq \mathrm{lh}(t)\}$$

以及 $C = \{(y_s, y_t) \mid s, t \in {}^{<\kappa}\mu,\ s \subsetneq t\}$ 都是 ${}^{\kappa}\kappa$ 的 $\mathbf{\Sigma}^1_1$-子集。于是

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{ran}(f) \iff \exists y\ [&\forall \alpha < \beta < \kappa\ ((y)_\alpha, (y)_\beta) \in C \\ &\wedge\ \forall \alpha < \kappa\ \exists (\bar{x}, \bar{y}) \in B\ [x \restriction \alpha = \bar{x} \restriction \alpha \wedge (y)_\alpha = \bar{y}]] \end{aligned}$$

而这个等价关系表明，ran(f) 可由一个带参数的 Σ_1 公式在 (H(κ^+), $\in$) 中定义。根据上述说明，这表明 ran(f) 是 ${}^{\kappa}\kappa$ 的一个 $\mathbf{\Sigma}^1_1$-子集。□

我们证明，在满足 Baumgartner 公理 BA(κ) 的 L 的典范强迫扩张中，上述假设成立；也就是说，对于每个 κ-链、$<\kappa$-闭且良遇的偏序 $\mathbb{P}$，以及由 κ^+ 个稠密子集组成的每个集合 $\mathcal{D}$，其中这些稠密子集是 $\mathbb{P}$ 的子集，都存在一个 $\mathbb{P}$ 的 $\mathcal{D}$-泛型滤子（见 [Bau83，第 4] 节和 [Tal94]）。注意，对于某个满足 $\kappa = \kappa^{<\kappa}$ 的不可数基数 κ，迫使 BA(κ) 成立的典范偏序是 $<\kappa$-闭的，并满足 κ^+-链条件（见 [Bau83，定理 4.2] 和 [Tal94，定理 0.3]）。下面的证明直接推广了 [MS70，第 3.2] 节中的论证，适用于更高基数。

引理 1.21. 设 κ 是一个满足 $\kappa = \kappa^{<\kappa}$ 且 $\kappa^+ = (\kappa^+)^{\mathrm{L}}$ 的不可数基数。假设 BA(κ) 成立。那么，${}^{\kappa}\kappa$ 的每个基数为 κ^+ 的子集都包含于类 $S^{\mathrm{L}}_{,1}{}^{\kappa}$ 中。特别地，每个这样的集合都是一个 $\mathbf{\Sigma}^1_1$-子集。

证明。固定一个基数为 κ^+ 的 ${}^{\kappa}\kappa$ 的子集 $A = \{y_\gamma \mid \gamma < \kappa^+\}$。那么存在一个集合 $W = \{x_\gamma \mid \gamma < \kappa^+\} \in \mathrm{L}$，使得

$$(x_\gamma)_\alpha = (x_\delta)_\beta \iff \alpha = \beta \ \wedge\ \gamma = \delta$$

对所有 α、$\beta<\kappa$ 和 γ、$\delta<\kappa^+$ 都成立。定义

$$B = \{(x_\gamma)_{\prec\alpha,y_\gamma(\alpha)\succ} \mid \alpha<\kappa,\ \gamma<\kappa^+\} \subseteq \mathrm{L}.$$

令 $\mathbb{Q}(B)$ 表示几乎不相交编码力迫到基数 κ 的相应推广（例如，参见 [L¨uc12，第 4] 节）。由于 $\mathbb{Q}(B)$ 是κ-链的、 $<\kappa$-闭且良遇的，公理 BA(κ) 蕴含存在一个枚举 $\langle s_\alpha \mid \alpha<\kappa\rangle$ 和一个函数 $c\in {}^\kappa 2$，使得该等式

$$z\in B \iff \exists\alpha<\kappa\ \forall\alpha\le\beta<\kappa\ [s_\beta\subseteq z \longrightarrow c(\beta)=1]$$

对每个 $z\in({}^\kappa\kappa)^{\mathrm{L}}$ 都成立。由于

$$y\in A \iff \exists x\in B\ \forall\alpha,\beta<\kappa\ [y(\alpha)=\beta \longleftrightarrow (x)_{\prec\alpha,\beta\succ}\in B]$$

对每个 $y\in{}^\kappa\kappa$ 都成立，且 B 是 $({}^\kappa\kappa)^{\mathrm{L}}$ 的子集，参数 c 证明集合 A 包含于类 $S^{\mathrm{L}}_{cl,1}{}^{\kappa}$。□

推论1.22. 设 κ 是一个不可数基数，且 $\kappa=\kappa^{<\kappa}$ 和 $\kappa^+=(\kappa^+)^{\mathrm{L}}$。若 BA($\kappa$) 成立，则类 $C^\kappa_{cl}{}^{\kappa^+}$ 和 $\mathbf{\Sigma}^1_1(\kappa)$ 相等。 □

反过来，GCH 在 κ 处失效且 $C^\kappa_{cl}{}^{\kappa^+}$ 不是 $\mathbf{\Sigma}^1_1(\kappa)$的子类，这也是相容的。

命题1.23. 设 κ 是一个不可数正则基数， $\theta>\kappa$ 是一个不可达基数，且 $G*H$是 V 上的 (Col($\kappa,<\theta$) $*$Add($\check\kappa,\check\kappa^{++}$))-泛型。在 V$[G,H]$中，存在一个 ${}^\kappa(\kappa^+)$ 的连续像，它不是 $\mathbf{\Sigma}^1_1$的子集 ${}^\kappa\kappa$。

证明. 根据 [L¨uc12，命题9.9]，，V$[G,H]$ 中每个 $\mathbf{\Sigma}^1_1$的子集 ${}^\kappa\kappa$ 若基数大于 κ，则其基数至少为 κ^{++}。由于 ${}^\kappa\kappa$ 的每个基数为κ^+ 的子集都是 ${}^\kappa(\kappa^+)$的连续像，上述结论直接成立。□

2. Thin sets

从现在起，除非另有说明，我们令 κ 表示满足 $\kappa=\kappa^{<\kappa}$的一个不可数基数。本节的目标是证明，存在一个闭子集 ${}^\kappa\kappa$ 不属于类 C^κ。

定义 2.1. 设 $\mu\le\kappa$ 是一个基数。若对于每个不含端节点的 $<\mu$-闭子树 T（其中 T是 ${}^{<\kappa}\kappa\times{}^{<\kappa}\kappa$ 的子树），都有 $A\ne p[T]$，则集合 $A\subseteq{}^\kappa\kappa$ 称为 μ- 薄的。

我们将构造 ${}^\kappa\kappa$的一个 κ-薄闭子集。下文中，若子集 D 包含于 ${}^{<\kappa}\mu_0\times{}^{<\kappa}\mu_1$，且 D 由长度相同的函数有序对组成，并且对所有 $\gamma<\kappa$， D 在长度为 γ 的递增并下封闭，则称 D 为树 ${}^{<\kappa}\mu_0\times{}^{<\kappa}\mu_1$ 的 $<\kappa$-闭子集。给定这样一个子集 D，我们令 $[D]$ 表示所有满足以下条件的 $(x,y)\in{}^\kappa\mu_0\times{}^\kappa\mu_1$的集合：集合 $\{\alpha<\kappa \mid (x\restriction\alpha,\ y\restriction\alpha)\in D\}$ 在 κ 中无界；并定义 $p[D]$为 $[D]$ 在第一坐标上的投影。

引理 2.2. 设 μ 和 λ 为基数，且 $\mu=\mu^{<\kappa}$ 和 $\lambda=\lambda^{<\kappa}$。假设 $f:{}^\kappa\lambda\longrightarrow{}^\kappa\mu$ 是连续的。那么，树${}^{<\kappa}\mu\times{}^{<\kappa}\lambda$ 中存在一个 $<\kappa$-闭子集 D，它没有末端节点，并且 $p[D]=\mathrm{ran}(f)$。

证明。我们定义

$$D = \{(s,t)\in{}^\gamma\lambda\times{}^\gamma\mu \mid \gamma<\kappa,\ f[N_s]\subseteq N_t\}.$$

注意， D 是 $<\kappa$-闭的。

断言。对于所有 $x \in {}^{\kappa}\lambda$、 $s_0 \subsetneq x$,和 $t_0 \subsetneq f(x)$，在 D中存在一对（s、 t），使得$s_0 \subseteq s \subseteq x$ 且 $t_0 \subseteq t \subseteq f(x)$。

断言的证明。我们构造严格递增序列 $\langle s_n \in {}^{<\kappa}\lambda \mid n < \omega\rangle$和 $\langle t_n \in {}^{<\kappa}\mu \mid n < \omega\rangle$，使得 $s_n \subseteq x$, $t_n \subseteq f(x)$, $f[N_{s_n}] \subseteq N_{t_n}$ 且

$$\mathrm{lh}(t_{n+1}) \geq \mathrm{lh}(s_{n+1}) \geq \mathrm{lh}(t_n)$$

对所有 $n < \omega$，利用 f 的连续性。令 $(s,t) = (\bigcup_{n\in\omega} s_n, \bigcup_{n\in\omega} t_n) \in D$。 □

由此可知， D没有末端节点，并且对所有 $x \in {}^{\kappa}\mu$，$(x, f(x)) \in [D]$。

Claim. $[D] = \{(x, f(x)) \mid x \in {}^{\kappa}\lambda\}$.

断言的证明。假设 $(x,y) \in [D]$ 且 $f(x) \neq y$。令 $t \in {}^{<\kappa}\lambda$，使得$y \in N_t$ 且 $f(x) \notin N_t$。找出 $(u,v) \in D$，使得 $u \subseteq x$, $v \subseteq y$, 且 $\mathrm{lh}(v) \geq \mathrm{lh}(t)$。那么 $t \subseteq v$ 且 $f(x) \in f[N_u] \subseteq N_v \subseteq N_t$，这与假设$f(x) \notin N_t$矛盾。□

这表明 $p[D] = \mathrm{ran}(f)$，从而完成了引理的证明。 □

给定如上所述的集合 D，我们希望找到一棵没有末端节点的 $<\kappa$-闭树 T，使得 $p[T] = p[D]$。注意， $<\kappa$-闭子集 D的向下闭包，其投影未必与该子集本身的投影相同。例如，考虑集合

$$D = \{(s,t) \in {}^{\gamma}2 \times {}^{\gamma}2 \mid \gamma < \kappa,\ \exists \alpha < \gamma\ s(\alpha) = 1\},$$

那么，以 κ 为定义域且恒取值 0 的函数不是 $p[D]$的元素，但它属于 D的向下闭包的投影。

引理 2.3. 设 $\lambda \leq \mu$ 是满足 $\mu = \mu^{<\kappa}$的基数。设 D是没有末端节点的树 ${}^{<\kappa}\lambda \times {}^{<\kappa}\mu$ 的 $<\kappa$-闭子集。则存在 ${}^{<\kappa}\lambda \times {}^{<\kappa}\mu$ 的一个没有末端节点的$<\kappa$-闭子树 T，使得 $p[D] = p[T]$。

¯证明。令 $\langle d_\alpha \mid \alpha < \mu\rangle$ 为 D的一个（不一定是单射的）枚举。令 T表示 ${}^{<\kappa}\lambda \times {}^{<\kappa}\mu \times {}^{<\kappa}\mu$的子树，它由所有满足 $\gamma < \kappa$ 且符合以下条件的 $(s,t,u) \in {}^{\gamma}\lambda \times {}^{\gamma}\mu \times {}^{\gamma}\mu$ 组成。

- $\langle d_{u\,(\alpha)} \mid \alpha < \gamma\rangle$ 是 D 中的弱递增序列。
- $(s \restriction \alpha,\ t \restriction \alpha)$ 是 ${}^{<\kappa}\lambda \times {}^{<\kappa}\mu$ 中一个等于或低于 $u(\alpha)$ 的节点，因为 所有 $\alpha < \gamma$。

¯断言。 T 是 $<\kappa$-闭的。 □

¯断言。 T 没有末端节点。

¯断言的证明。假设 $(s,t,u) \in T$ 的长度为 $\gamma < \kappa$。由于 D 是 $<\kappa$-闭的且没有末端节点，因此存在一个 $\beta < \mu$，使得 d_β 的长度大于γ，并且对于每个 $\alpha < \gamma$， $d_{u(\alpha)}$ 在 ${}^{<\kappa}\lambda \times {}^{<\kappa}\mu$ 中都低于 d_β。令 $d_\beta = (s_*, t_*)$，并定义$u_* \colon \gamma + 1 \longrightarrow \kappa$，使得 $u_* \restriction \gamma = u \restriction \gamma$ 且 $u_*(\gamma) = \beta$。那么这个元组

$$(s_* \restriction (\gamma+1),\ t_* \restriction (\gamma+1),\ u_*)$$

¯是 T中（s、 t、 u）的直接后继。 □

¯由于 $p[D] = p(p[T])$，存在一个 $<\kappa$-闭子树 T，它是 ${}^{<\kappa}\lambda \times {}^{<\kappa}\mu$ 的子树且没有终端¯节点，使得 $p[T] = p(p[T]) = p[D]$。□

接下来，我们构造 ${}^{\kappa}\kappa$ 的一个 κ-薄闭子集。给定在 G¨odel 配对下封闭的 $\gamma \leq \kappa$ 和 $s:\ \gamma \longrightarrow 2$，我们定义

$$R_s \ = \ \{(\alpha,\beta) \in \gamma \times \gamma \mid s(\prec\alpha,\beta\succ) = 1\}.$$

Set

$$W \ = \ \{x \in {}^{\kappa}2 \mid (\kappa, R_x) \ is \ a \ well\text{-}order\} \tag{2}$$

那么， W 是 ${}^{\kappa}\kappa$ 的一个闭子集，且具有 $W = [S]$，其中 $S = \{x \restriction \alpha \mid x \in W,\ \alpha < \kappa\}$。给定 $x \in W$ 和 $\alpha < \kappa$，令 $\mathrm{rnk}_x(\alpha)$表示 α 在(κ, R_x)中的秩。下文中，我们用 $\alpha <_x \beta$ 代替$(\alpha,\beta) \in R_x$。

引理 2.4。不存在 ${}^{<\kappa}\kappa \times {}^{<\kappa}\kappa$ 的 ω-闭树子树 T，使得每个节点都有经过它的共尾分支，且 $W = p[T]$。

证明。反设 T 是这样一棵树，以导出矛盾。给定$(s,t) \in T$和$\alpha < \kappa^+$，我们定义

$$T_{s,t} \ = \ \{(u,v) \in T \mid (s \subseteq u \vee u \subseteq s) \wedge (t \subseteq v \vee v \subseteq t)\}$$

为由节点（s,t）诱导的 T 的子树，并且

$$r(s,t,\alpha) \ = \ \sup\{\mathrm{rnk}_x(\alpha) \mid x \in p[T_{s,t}]\} \ \leq \ \kappa^+$$

为 α 在（κ, R_x）中且满足 $x \in p[T_{s,t}]$ 的秩的上确界。因此，对于所有 $\alpha < \kappa$，我们有r（$\emptyset,\emptyset,\alpha$）$= \kappa^+$。

断言。设（s,t）$\in T$，且 $\alpha < \kappa$ 满足 r（s,t,α）$= \kappa^+$。若 $\gamma < \kappa^+$，则存在（u,v）$\in T$，它扩张（s,t）且满足 $\beta < \kappa$，使得 dom（u）在 G¨odel 配对下封闭，$\alpha < \beta <$ lh（u），$\beta <_u \alpha$，并且 r（u,v,β）$\geq \gamma$。

断言的证明。假设 r（s,t,α）$= \kappa^+$，这使我们能够找到（x,y）$\in [T]$，满足 $s \subseteq x, t \subseteq y$，且 rnk_x（α）$\geq \gamma + \kappa$。这意味着存在一个 β，满足 $\alpha < \beta < \kappa$，且 $\gamma \leq \mathrm{rnk}_x$（$\beta$）$< \gamma + \kappa$。取 $\delta > \max\{\alpha, \beta, \mathrm{lh}$（$s$），使其在 G¨odel 配对下封闭，并将（$u,v$）定义为扩张（$s,t$）的节点（$x \restriction \delta, y \restriction \delta$）。由于 R_u 是 lh（u）上的良序，我们有 $\beta <_u \alpha$。最后，（x,y）证明了 r（u,v,β）$\geq \gamma$。□

断言。如果 $(s,t) \in T$and $\alpha < \kappa$with $r(s,t,\alpha) = \kappa^+$，那么存在节点 (u,v) in$T$，其延伸 (s,t) and $\alpha < \beta <$ lh(u)，使得 lh(u) 在 G¨odel 配对下封闭，$\beta <_u \alpha$and $r(u,v,\beta) = \kappa^+$。

断言的证明。给定 $\gamma < \kappa^+$，令 $(u_\gamma, v_\gamma) \in T$and $\beta_\gamma < \kappa$ 表示应用前述断言得到的对象。于是我们可以找到 $(u,v) \in T$,$\beta < \kappa$and $X \in [\kappa^+]^{\kappa^+}$，使得 $(u,v) = (u_\gamma, v_\gamma)$ and $\beta = \beta_\gamma$ 对每个 $\gamma \in X$ 都成立。这意味着 $r(u,v,\beta) = \kappa^+$。□

这些断言意味着存在严格递增序列 $\langle (s_n,t_n) \mid n < \omega\rangle$，其中元素是 T 中的节点，以及 $\langle \beta_n \mid n < \omega\rangle$ 中 κ 的元素，并且对所有 $n < \omega$，lh(s_n) 在 G¨odel 配对下封闭且 $\beta_{n+1} <_{s_{n+1}} \beta_n$。令 $s = \bigcup_{n<\omega} s_n$ and $t = \bigcup_{n<\omega} t_n$。于是 lh$(s)$ 在 G¨odel 配对下封闭，并且 R_s 是非良基的，因此 $s \notin S$。但是 $(s,t) \in T$，因为 T 是 ω-封闭的。根据我们关于 T 的假设，在 $[T]$ 中存在一条经过 (s,t) 的共尾分支 (x,y)，这意味着 $s = x \restriction \mathrm{lh}(s) \in S$，产生矛盾。□

特别地，闭子集 W 不是 κ-稀疏的。

定理 1.5 的证明。设 κ 是一个满足 $\kappa = \kappa^{<\kappa}$ 的不可数基数，并令 W为式 (2) 中定义的 ${}^{\kappa}\kappa$ 的闭子集。为导出矛盾，假设存在一个连续函数 $f\colon {}^{\kappa}\kappa \longrightarrow {}^{\kappa}\kappa$，使得 $W = \mathrm{ran}(f)$。根据引理 2.2 和 2.3，存在一个没有末端节点的 $<\kappa$-闭子树 T，它是 ${}^{<\kappa}\kappa \times {}^{<\kappa}\kappa$ 的子树，并且满足 $W = p[T]$。这与引理 2.4 矛盾。□

根据以下说明，在引理 2.4 中，我们不能省略关于存在经过 T的共尾分支这一假设。

命题 2.5. 假设 $\mu < \kappa$。那么，${}^{\kappa}\kappa$ 的每个闭子集都是一个没有末端节点的 $<\mu$-闭树的投影。

证明. 假设 $S \subseteq {}^{<\kappa}\kappa$ 是一棵树。我们在 S 的边界 ∂S 中的每个节点 t 处添加一棵高度为 μ的完全分枝树（见 (1)），也就是说，我们考虑树

$$T = S \cup \{t \in {}^{<\kappa}\kappa \mid \exists \alpha \leq \mathrm{lh}(t)\ [t \restriction \alpha \in \partial S \wedge \mathrm{lh}(t) < \alpha + \mu]\}.$$

那么，T是一棵没有末端节点的 $<\mu$-闭树，并且 $[S] = [T]$。 □

3. Injective images of ${}^{\kappa}\kappa$

现在我们转向研究在连续单射映射下 ${}^{\kappa}\kappa$ 的像这一类 I^{κ}。注意，${}^{\kappa}\kappa$ 中存在不属于 I^{κ} 的 κ-博雷尔子集，因为 I^{κ} 中的每个集合都没有孤立点。

在证明引言中提到的关于此类的更一般结果（定理 1.8 和推论 1.9）之前，我们先说明这些证明的动机：在对 κ 作出某些基数算术假设的条件下，众所周知的组合对象给出了 I^{κ} 中不具有 κ-贝尔性质、因而不是 ${}^{\kappa}\kappa$ 的 κ-博雷尔子集的集合。该集合由平凡的ν-相干 C-序列构成，其中 $\kappa = \nu^{+} = 2^{\nu}$，且 ν 正则。

定义 3.1. 设 ν 是一个无限正则基数。

(i) 给定 $\gamma \in \mathrm{On}$，若序列 $\langle C_\alpha \mid \alpha < \gamma\rangle$ 对所有 $\alpha < \gamma$ 都满足以下条件，则称其为 C-序列。

- 若 α 是一个极限序数，则 C_α 是 α的闭无界子集。
- 若 $\alpha = \bar{\alpha} + 1$，则 $C_\alpha = \{\bar{\alpha}\}$。(ii) 若存在 C 这个 γ 的闭无界子集，使得对每个 $\alpha < \gamma$，都存在一个 $\alpha \leq \beta < \gamma$满足 $C \cap \alpha \subseteq C_\beta$，则具有 $\gamma \in \mathrm{Lim}$ 的 C-序列 $\langle C_\alpha \mid \alpha < \gamma\rangle$ 是平凡的。(iii) 若对所有 $\beta < \gamma$ 以及满足 $\mathrm{cof}(\alpha) = \nu$的 $\alpha \in \mathrm{Lim}(C_\beta)$，都有 $C_\alpha = C_\beta \cap \alpha$，则 C-序列 $\langle C_\alpha \mid \alpha < \gamma\rangle$ 是 ν- 相干的。(iv) 给定一个具有 $\gamma \in \mathrm{Lim}$ 的 ν- 相干 C- 序列 $\vec{C} = \langle C_\alpha \mid \alpha < \gamma\rangle$，我们称 C_γ 这个 γ 的闭无界子集是穿过 C 的 ν-贯穿，当且仅当序列 $\langle C_\alpha \mid \alpha \leq \gamma\rangle$ 也是一个 ν-相干 C-序列。

很容易看出，ν-相干 C-序列对于每个大于 ν的正则基数也都是相干的。这表明，ω-相干 C-序列是方序列（其含义见 [Tod07，定义 7.1.1]）。

命题 3.2. 设 ν 是一个无限正则基数，λ 是一个满足 $\mathrm{cof}(\lambda) > \nu$ 的极限序数，且 $\vec{C} = \langle C_\alpha \mid \alpha < \lambda\rangle$ 是一个 ν-相干的 C-序列。那么，当且仅当存在一条贯穿 C 的 ν-贯穿时，$\vec{C}$ 才是平凡的。

证明。假设 $C \subseteq \gamma$ 证明了 C 是平凡的。令 D 表示所有满足 $\mathrm{cof}(\alpha) = \nu$ 的 $\alpha \in \mathrm{Lim}(C)$ 的集合。取满足 $\bar{\alpha} < \alpha$ 的 α、$\bar{\alpha} \in D$。那么存在一个 $\alpha \leq \beta < \gamma$ 使得 $C \cap \alpha \subseteq C_\beta$。这表明 α 是 C_β 的一个极限点，而 ν-相干性蕴含 $C \cap \alpha \subseteq C_\beta \cap \alpha = C_\alpha$。我们可以得出 $\bar{\alpha} \in \mathrm{Lim}(C_\alpha)$ 且 $C_{\bar{\alpha}} = C_\alpha \cap \bar{\alpha}$。定义 $C_\lambda = \bigcup\{C_\alpha \mid \alpha \in D\}$。根据上述计算，对于所有 $\alpha \in D$，都有 $C_\lambda \cap \alpha = C_\alpha$；而 $\mathrm{cof}(\lambda) > \nu$ 蕴含 C_λ 是一条贯穿 $\vec{C}$ 的 ν-贯穿。

现在，设 C_λ 是穿过 $\vec{C}$ 的一个 ν-贯穿。给定 $\alpha < \lambda$，假设 $\mathrm{cof}(\lambda) > \nu$，这表明存在一个 $\beta \in \mathrm{Lim}(C_\lambda) \setminus \alpha$，满足 $\mathrm{cof}(\beta) = \nu$，在这种情况下，$\nu$-$\vec{}$ 相干性蕴含 $C_\lambda \cap \alpha = C_\beta \cap \alpha \subseteq C_\beta$。这表明 C_λ 见证了 C 是平凡的。□

下文中，我们假设对于某个正则基数 ν，$\kappa = \nu^+ = 2^\nu$。令 $\mathcal{Coh}(\kappa, \nu)$ 表示所有长度为 κ 的 ν-相干 C-序列组成的集合。我们赋予$\mathcal{Coh}(\kappa, \nu)$ 以如下拓扑：其基本开集由所有长度小于 κ 的 ν-相干 C-序列的延拓组成。

命题 3.3。空间 $\mathcal{Coh}(\kappa, \nu)$ 与 ${}^{\kappa}\kappa$ 同胚。

证明。我们将把$\mathcal{Coh}(\kappa, \nu)$表示为一棵与${}^{<\kappa}\kappa$同构的树 T 的分支集合。定义 T 为由所有 ν-相干的 C-序列 $\langle C_\alpha \mid \alpha < \gamma\rangle$组成的树，其中满足以下条件之一：$\gamma < \kappa$ 是共尾数为 ν 的序数的极限，或者 $\gamma = \bar{\gamma} + 1 < \kappa$ 且 $\bar{\gamma}$是共尾数为 ν 的极限序数，但不是共尾数为 ν的序数的极限。我们首先证明 T 是 κ-分支的。

断言。假设 C 是一个长度为 $\gamma < \kappa$ 的 ν-相干 C-序列，并且 δ 是大于 γ且共尾数为 ν 的最小序数。那么，在$_\frown T$中，存在 κ多个长度为 $\delta + 1$ 且延伸 C的序列。

断言的证明。由于 δ 有 κ多个序型为 ν的闭无界子集，因此也有 κ多个序列 $\langle C_\alpha \mid \alpha \in \mathrm{Lim} \cap [\gamma, \delta]\rangle$，它们具有如下性质：对于区间 $[\gamma, \delta]$中的每个极限序数，C_α 都是 α 的一个序型至多为 ν 的闭无界子集。由于每个这样的序列都唯一确定 T中 C 的一个直接$\vec{}$后继，因此命题得证。□

由于树 T 在大小为 $<\kappa$的递增并下封闭，上述断言推出树 T 和 ${}^{<\kappa}\kappa$ 同构。这便得到了命题的结论，因为 $\mathcal{Coh}(\kappa, \nu)$ 的所有子集所组成的集合——其中每个子集都是 T 中某个元素的所有延拓构成的集合——构成了该空间拓扑的一个基。□

下文中，我们总是将空间 $\mathcal{Coh}(\kappa, \nu)$ 与 ${}^{\kappa}\kappa$等同起来。

定理 3.4. 假设 ν 是一个无限正则基数，且 $\kappa = \nu^+ = 2^\nu$。令 $\mathcal{Triv}(\kappa, \nu)$ 表示 $\mathcal{Coh}(\kappa, \nu)$ 的子集，它由所有平凡的 ν-相干 C-序列组成。

(i) $\mathcal{Triv}(\kappa, \nu)$ 是 ${}^{\kappa}\kappa$的连续单射像。(ii) $\mathcal{Triv}(\kappa, \nu)$ 不具有 κ-Baire 性质。

证明。定义 $\mathcal{Thr}(\kappa, \nu)$ 为所有有序对 $(\vec{C}, C)$ 构成的集合，其中 $\vec{C}$是 $\mathcal{Coh}(\kappa, \nu)$ 的一个元素，且 C 是穿过 $\vec{C}$的一个 ν-贯穿。于是 $\mathcal{Triv}(\kappa, \nu) = p[\mathcal{Thr}(\kappa, \nu)]$,，其中$p$：$\mathcal{Thr}(\kappa, \nu) \longrightarrow \mathcal{Coh}(\kappa, \nu)$ 是到第一坐标的投影。

令 $\mathcal{S}$ 为由所有有序对 $(\vec{D}, D)$ 构成的树，其中 $\vec{D}$ 是长度为 $\gamma \in \mathrm{Lim} \cap \kappa$ 的 ν-相干 C-序列，而 D 是贯穿 $\vec{D}$ 的贯穿。给定 $\mathcal{S}$ 中的 $(\vec{D}, D)$,

集合 D 在 $\vec{D}$ 的长度上无界，这使我们能够将 $\mathcal{Thr}(\kappa,\nu)$ 视为贯穿 $\mathcal{S}$ 的所有共尾分支组成的集合，并为 $\mathcal{Thr}(\kappa,\nu)$ 配备这样一种拓扑：其基本开集由 $\mathcal{S}$ 中元素的所有延拓构成。

断言。空间 $\mathcal{Thr}(\kappa,\nu)$ 与 ${}^{\kappa}\kappa$ 同胚。

断言的证明。根据上述说明，我们再次只需证明树$\mathcal{S}$ 与 ${}^{<\kappa}\kappa$ 同构。由于 $\mathcal{S}$ 也是 $<\kappa$-闭的，因此我们需要证明 $\mathcal{S}$ 中的每个节点都有 κ 个直接后继。固定这样一对 $(\langle D_\alpha \mid \alpha<\gamma\rangle, D_\gamma) \in \mathcal{S}$。那么序列 $\vec{D}_* = \langle D_\alpha \mid \alpha \le \gamma\rangle$ 也是一个 ν-相干的 C-序列。给定一个具有可数共尾性的序数 $\gamma<\delta<\kappa$，存在一个延伸 $\vec{D}_*$ 的 ν-相干 C-序列 $\vec{D}_\delta = \langle D^\delta_\alpha \mid \alpha<\delta\rangle$，使得对每个 $\gamma<\alpha<\delta$，都有 $\mathrm{otp}\left(D^\delta_\alpha\right) \le \nu$。若 D^δ 是 δ 的一个闭无界子集，满足 $\gamma \in D^\delta \subseteq \delta\setminus\gamma$ 且 $\mathrm{otp}\left(D^\delta\right)=\omega$，那么有序对 $(\vec{D}_\delta, D_\gamma \cup D^\delta)$ 是 $\mathcal{S}$ 中 $\vec{D}$ 的直接后继。满足这些性质的序数有 κ 个 δ，因此断言得证。□

现在我们证明 $\mathcal{Triv}(\kappa,\nu)$ 是 I^κ 的一个元素。

断言。投影 $p\colon \mathcal{Thr}(\kappa,\nu) \longrightarrow \mathcal{Coh}(\kappa,\nu)$ 是单射。

断言的证明。假设存在一个序列 $\vec{C}$ in $\mathcal{Coh}(\kappa,\nu)$，以及 κ 的闭无界子集 C 和 D，使得 $(\vec{C}, C)$、$(\vec{C}, D) \in \mathcal{Thr}(\kappa,\nu)$。那么存在任意大的 $\alpha<\kappa$，满足 $\mathrm{cof}(\alpha)=\nu$ 和 $C\cap\alpha = C_\alpha = D\cap\alpha$。这意味着$C=D$。□

断言。投影 $p\colon \mathcal{Thr}(\kappa,\nu) \longrightarrow \mathcal{Coh}(\kappa,\nu)$ 是连续的。

断言的证明。令 $(\vec{C}, C) \in \mathcal{Thr}(\kappa,\nu)$ 且 $\alpha<\kappa$。令 γ 为C中大于 α的一个极限点。那么，配对 $(\vec{C}\restriction\gamma, C\cap\gamma)$ 是 $\mathcal{S}$ 的一个元素，并且该配对在 $\mathcal{Thr}(\kappa,\nu)$ 中每个扩展的投影，都是 $\mathcal{Coh}(\kappa,\nu)$ 中 $\vec{C}\restriction\alpha$ 的一个扩展。□

接下来还需证明，集合 $\mathcal{Triv}(\kappa,\nu)$ 不具有 κ-贝尔性质。

断言。集合 $\mathcal{Triv}(\kappa,\nu)$ 在 $\mathcal{Coh}(\kappa,\nu)$ 中不具有 κ-贝尔性质。

证明。我们首先说明，$\mathcal{Triv}(\kappa,\nu)$ 在任何非空开集内都不是余瘦的；也就是说，如果 U 是 $\mathcal{Coh}(\kappa,\nu)$ 的一个非空开子集，且 $\langle U_\alpha \mid \alpha<\kappa\rangle$ 是 U 的一列稠密开子集，那么就存在一个 $\vec{C} \in \bigcap_{\alpha<\kappa} U_\alpha$ 不属于$\mathcal{Triv}(\kappa,\nu)$。设 $\vec{C}_0$ 是一个长度为 $\gamma_0<\kappa$ 的 ν-相干 C-序列，且 $\langle U_\alpha \mid \alpha<\kappa\rangle^{\rightarrow}$是集合 $N_{\vec{C}_0}$（即C_0的所有延拓组成的集合）的一列稠密开子集。在这种情况下，我们可以构造一个序列 $\vec{C} = \langle C_\alpha \mid \alpha<\kappa\rangle$ 和一个严格递增的连续序数列 $\langle \gamma_\alpha \mid \alpha<\kappa\rangle$（其元素小于 κ），使得对每个 $\alpha<\kappa$，下列陈述均成立。

(i) $\langle C_\beta \mid \beta<\gamma_\alpha\rangle$ 是一个扩展 $\vec{C}_0$ 的 ν-相干 C-序列。

(ii) $N_{\langle C_\beta \mid \beta<\gamma_{\alpha+1}\rangle}$ 是 U_α 的子集。(iii) $\mathrm{otp}\,(C_{\gamma_\alpha}) \le \nu$。

那么，$\vec{C}$ 是一个包含于 $\bigcap_{\alpha<\kappa} U_\alpha$中的 ν-相干 C-序列。此外，我们的构造确保，对于闭无界子集 $\{\gamma_\alpha \mid \alpha<\kappa\}$ of κ中的每个元素 γ，都有 $\mathrm{otp}(C_\gamma) \le \nu$ 成立。反设 $\vec{C}$ 是$^{\rightarrow}$平凡的，并令 D 为贯穿 C 的贯穿序列，以此见证这一点。那么，$C\cap D$ 有共尾数为 ν的极限点$\gamma<\delta$。根据命题 3.2，我们有

$$\nu \;=\; \mathrm{otp}\,(C_\gamma) \;=\; \mathrm{otp}\,(D\cap\gamma) \;<\; \mathrm{otp}\,(D\cap\delta) \;=\; \mathrm{otp}\,(C_\delta) \;=\; \nu,$$

矛盾。这表明$\mathcal{Triv}(\kappa,\nu)$在任何开集中都不是余瘦的。

要证明$\mathcal{Triv}(\kappa,\nu)$的补集在任何非空开集中都不是余瘦的，取如上所述的 $\vec{C}_0$ 和 $\langle U_\alpha \mid \alpha<\kappa\rangle$。再次构造一个序列$\vec{C}=\langle C_\alpha \mid \alpha<\kappa\rangle$ 和一个严格递增的连续序数序列 $\langle \gamma_\alpha \mid \alpha<\kappa\rangle$，其中序数小于 κ，并且它们满足上述前两个陈述，以及对每个 $\alpha\in \mathrm{Lim}\cap\kappa$都成立的以下陈述。

(iii)′ $C_{\gamma_\alpha} = \{\gamma_{\bar{\alpha}} \mid \bar{\alpha}<\alpha\}$.

若定义 $C=\{\gamma_\alpha \mid \alpha<\kappa\}$，则有序对 $(\vec{C},C)$ 是$\mathcal{Thr}(\kappa,\nu)$的一个元素，且 $\vec{C}\in\bigcap_{\alpha<\kappa}U_\alpha$。因此，$\mathcal{Triv}(\kappa,\nu)$的补集在任何开集中都不是余瘦的。

现在反设存在$\mathcal{Coh}(\kappa,\nu)$的一个开子集 U，以及$\mathcal{Coh}(\kappa,\nu)$的一个闭无处稠密子集序列 $\langle N_\alpha \mid \alpha<\kappa\rangle$，使得$\mathcal{Triv}(\kappa,\nu)_\Delta U\subseteq\bigcup_{\alpha<\kappa}N_\alpha$。那么 U包含一个基本开集 $N_{\vec{C}_0}$，因为$\mathcal{Triv}(\kappa,\nu)$的补集在$\mathcal{Coh}(\kappa,\nu)$中不是余瘦的。由于$\mathcal{Triv}(\kappa,\nu)$在$N_{\vec{C}_0}$中不是余瘦的，因此存在一个 $\vec{C}\in N_{\vec{C}_0}\setminus\mathcal{Triv}(\kappa,\nu)$，使得对所有 $\alpha<\kappa$都有 $\vec{C}\notin N_\alpha$，矛盾。□

这就完成了该定理的证明。 □

推论 3.5。设 G 是 $\mathrm{Add}(\kappa,\kappa^+)$-泛型的。在 $V[G]$中，平凡的 ν-相干 C-序列集合 $\mathcal{Triv}(\kappa,\nu)$ 不是 $\mathcal{Coh}(\kappa,\nu)$ 的 $\mathbf{\Delta}^1_1$-子集。

证明。这由前一个定理以及如下事实推出：在基模型的每个 $\mathrm{Add}(\kappa,\kappa^+)$-泛型扩张中，$\mathbf{\Delta}^1_1$ 的 ${}^\kappa\kappa$ 子集都具有 κ-贝尔性质（参见 [FHK，定理 49]）。□

定理 1.10 的证明。设 ν 是一个具有 $\nu=\nu^{<\nu}$ 和 $\kappa=\nu^+=2^\nu$ 的无限正则基数。假设每个不含 κ-苏斯林子树的 κ-阿隆佐恩树都是特殊的。由定理 3.4，只需证明集合 $\mathcal{Triv}(\kappa,\nu)$ 是 $\mathcal{Coh}(\kappa,\nu)$ 的 $\mathbf{\Delta}^1_1$-子集，即可证明存在一个不具有 κ-贝尔性质的 $\mathbf{\Delta}^1_1$-子集 ${}^\kappa\kappa$。

我们为每个 C-序列 $\vec{C}=\langle C_\alpha \mid \alpha<\kappa\rangle$ 关联一棵树 $(\kappa,<^{\vec{C}}_\nu)$，其定义如下：

$$\alpha <^{\vec{C}}_\nu \beta \iff \alpha\in \mathrm{Lim}(C_\beta)\ \wedge\ \mathrm{cof}(\alpha)=\nu.$$

断言。设 $\vec{C}\in\mathcal{Coh}(\kappa,\nu)$。那么 $\vec{C}$ 是平凡的，当且仅当存在一条经过树 $(\kappa,<^{C}_\nu)$ 的 κ-分支$^{\rightarrow}$。

$^{\rightarrow}$断言的证明。设 $B\subseteq\kappa$ 是经过树 $(\kappa,<^{C}_\nu)$ 的一条 κ-分支，并令 $C=\bigcup\{C_\alpha \mid \alpha\in B\}$。那么，对于每个 $\alpha\in B$，都有 $C\cap\alpha=C_\alpha$；这表明 C 是 κ的一个闭无界子集。由于 B 是一条分支，我们可以得出结论：B等于 C 中共尾数为 ν的所有极限点构成的集合。这表明 C 是经过 C的一条$_\nu$-贯穿。

$^{\rightarrow}$反过来，设 C 是经过 C 的一条 ν-贯穿，并将 B 定义为 C 中共尾数为 ν 的所有极限点构成的集合。直接可得，B 是经过树 $(\kappa,<^{C}_\nu)$ 的一条 κ-分支$^{\rightarrow}$。□

$^{\rightarrow}$下面，我们称 C-序列 C 为 ν-特殊的，若相应的$^{\rightarrow}$树 $(\kappa,<^{C}_\nu)$ 是特殊树。由于特殊树没有共尾分支，以下陈述是上述断言的直接推论。

断言。设 $\vec{C} \in \mathcal{C}oh(\kappa,\nu)$。若 $\vec{C}$ 是 ν-特殊的，则 $\vec{C}$ 并非平凡。 □

现在我们要利用上述假设，得出¯上述蕴含的逆命题也成立。由于形如 $(\kappa, <^C_\nu)$ 的树可能具有基数为 κ 的层，我们必须将一个 κ-Aronszajn 树与给定的 C-序列相关联，并将假设应用于这些树。我们将使用 Todor˘cevi´c 的最小游走方法来构造这些树。

固定一个非平凡的 ν-相干 C-序列 $\vec{C} = \langle C_\alpha \mid \alpha < \kappa\rangle$。令 $T(\rho_0)$ 表示由穿过 $\vec{C}$ 的游走的完整编码所得到的树（见 [Tod87，第 1] 节）。那么 $T(\rho_0)$ 是一棵高度为 κ 的树。根据 [Tod87，1.7], ，树 $T(\rho_0)$ 有一条 κ- 分支，当且仅当存在 κ 的一个闭无界子集 C 以及 $\xi < \kappa$，使得对每个 $\xi \leq \alpha < \kappa$，都存在一个 $\alpha \leq \beta < \kappa$ 满足 $C \cap \alpha = C_\beta \cap [\xi, \alpha)$。考虑共尾数为 ν 的此类闭无界集的极限点，我们可以得出结论：存在¯这样的子集将意味着 C 是平凡的。因此，$T(\rho_0)$ 中不存在 κ-分支。接下来，[Tod87，1.3] 表明，对每个 $\alpha < \kappa$，$T(\rho_0)$ 的 α 层的基数至多为 $|\{C_\beta \cap \alpha \mid \alpha \leq \beta < \kappa\}| + \aleph_0$。利用 $\vec{C}$ 的 ν-相干性以及假设 $\nu = \nu^{<\nu}$，我们可以通过归纳证明，对所有 $\alpha < \kappa$，该基数至多为 ν。这表明 $T(\rho_0)$ 是一棵 κ-阿伦斯佐恩树。由于 [Tod07，推论 6.3.3] 指出，形如 $T(\rho_0)$ 的树不包含 κ-苏斯林子树，我们的假设意味着树 $T(\rho_0)$ 是特殊的。对 [Tod07，引理 7.1.7] 证明中的论证作显然的改编可知，存在一个从 $(\kappa, <^{\vec{C}}_\nu)$ 到 $T(\rho_0)$ 的严格递增映射，因此我们可以得出结论：$\vec{C}$ 是 ν-特殊的。我们在以下断言中总结上述推导。

断言. 设 $\vec{C} \in \mathcal{C}oh(\kappa,\nu)$。那么，$\vec{C}$ 是 ν-特殊的，当且仅当 $\vec{C}$ 不是平凡的。 □

考虑由所有有序对 $(\vec{D}, s)$ 组成的树，其中 $\vec{D} = \langle D_\alpha \mid \alpha < \gamma\rangle$是长度为 $\gamma < \kappa$ 的 ν-相干 C序列，并且 s：对于所有 $\beta < \gamma$ 以及满足 $\mathrm{cof}(\alpha) = \nu$的 $\alpha \in \mathrm{Lim}(C_\beta)$，$\gamma \longrightarrow \nu$ 是一个满足$s(\alpha) \neq s(\beta)$的函数。容易看出，所有 ν-特殊的 ν-相干 C序列构成 $\mathcal{C}oh(\kappa,\nu)$ 的一个 $\mathbf{\Sigma}^1_1$-子集。根据上述断言，我们可以得出 $\mathcal{T}riv(\kappa,\nu)$ 是 $\mathcal{C}oh(\kappa,\nu)$ 的一个 $\mathbf{\Delta}^1_1$-子集。□

在本节余下部分，我们令 κ 表示一个满足$\kappa = \kappa^{<\kappa}$的不可数基数。为了证明更一般的定理 1.8，我们将构造 ${}^\kappa\kappa$ 的子集，使其具有一项已在定理 3.4 的证明中用到的性质。

定义 3.6. 若子集 A of ${}^\kappa\kappa$ 满足：只要 $\langle U_\alpha \mid \alpha < \kappa\rangle$ 是 ${}^\kappa\kappa$ 中某个非空开子集的稠密开子集序列，就有 $A \cap (\bigcap_{\alpha<\kappa} U_\alpha) \neq \emptyset$，则称其为超稠密。

以下命题实质上已在定理 3.4 的证明中得出。

命题 3.7. 假设 A 和 B 是 ${}^\kappa\kappa$ 的不相交超稠密子集。若 $A \subseteq X \subseteq {}^\kappa\kappa \setminus B$，则 X 不具有 κ-Baire 性质。□

定理 1.8 的证明。假设 f：${}^{<\kappa}\kappa \times {}^{<\kappa}\kappa \longrightarrow \{2 \cdot \alpha \mid \alpha < \kappa\}$ 是一个单射。固定 κ 的一个驻定子集 S，并令 χ_S：$\kappa \longrightarrow 2$ 表示其特征函数。令 $\mathcal{A}_S$ 表示所有有序对 $(x, y) \in {}^\kappa\kappa \times {}^\kappa\kappa$ 的集合，其中集合 $C = \{\alpha < \kappa \mid x(\alpha) = y(\alpha)\}$ 是 κ 中的一个闭无界集，并且

$$x(\alpha) \;=\; f(x \restriction \alpha,\; y \restriction \alpha) \;+\; \chi_S(\alpha)$$

对所有 $\alpha \in C$ 都成立。定义 $\mathcal{T}_S$ 为由所有有序对 $(s,t) \in {}^{\gamma}\kappa \times {}^{\gamma}\kappa$ 构成的树，使得 $\gamma \in \mathrm{Lim} \cap \kappa$，$D = \{\alpha < \gamma \mid s(\alpha) = t(\alpha)\}$ 是 γ 中的一个闭无界集，并且

$$s(\alpha) = f(s \restriction \alpha,\ t \restriction \alpha) + \chi_S(\alpha)$$

对所有 $\alpha \in D$。我们赋予 $\mathcal{A}_S$ 如下拓扑，其基本开集具有形式 $\{(x,y) \in \mathcal{A} \mid s \subseteq x,\ t \subseteq y\}$ with $(s,t) \in \mathcal{T}_S$。

断言。空间 $\mathcal{A}_S$ 与 ${}^{\kappa}\kappa$同胚。

断言的证明。由于我们可以将 $\mathcal{A}_S$ 视为穿过树 $\mathcal{T}_S$的所有共尾分支的集合，只需证明树 $\mathcal{T}_S$ 和 ${}^{<\kappa}\kappa$ 同构。给定 $(s,t) \in \mathcal{T}_S$和 $\gamma \geq \mathrm{lh}(s)$，我们可以归纳地构造一个元素 (s_*, t_*)，使其属于$\mathcal{T}_S$且延伸 (s,t)，并满足 $\mathrm{lh}(s_*) \geq \gamma$且对所有 $\alpha \in [\mathrm{lh}(s)\ \gamma)$，都有 $s_*(\alpha) \neq t_*(\alpha)$。这表明 $\mathcal{T}_S$ 中的每个节点都有 κ个直接后继。由于 $\mathcal{T}_S$ 是 $<\kappa$-闭的，因此树 $\mathcal{T}_S$ 和 ${}^{<\kappa}\kappa$ 同构。□

令 $p\colon \mathcal{A}_S \longrightarrow {}^{\kappa}\kappa$ 为到第一坐标的投影。定义 $A_S = p[\mathcal{A}_S]$。

断言。投影 $p\colon \mathcal{A}_S \longrightarrow {}^{\kappa}\kappa$ 是连续的。 □

断言。投影 $p\colon \mathcal{A}_S \longrightarrow {}^{\kappa}\kappa$ 是单射。

断言的证明。假设 (x,y)、$(x,y') \in \mathcal{A}_S$。令 C 和 C' 为 κ 的相应闭无界子集。固定 $\alpha \in C \cap C'$。于是

$$f(x \restriction \alpha,\ y \restriction \alpha) + \chi_S(\alpha) = x(\alpha) = f(x \restriction \alpha,\ y' \restriction \alpha) + \chi_S(\alpha).$$

由于 f 是单射，对于任意大的 $\alpha < \kappa$，我们都有 $y \restriction \alpha = y' \restriction \alpha$。 □

上述断言表明，所有形如 A_S 的集合都包含在类 I^{κ} 中。下一个断言意味着，形如 A_S 和 $A_{S'}$ 的不相交集合无法被具有 κ-Baire 性质的集合分离。

断言。集合 A_S 是超稠密的。

断言的证明。设 $\langle U_\alpha \mid \alpha < \kappa\rangle$ 是某个基本开集 N_{s_0} 的 ${}^{\kappa}\kappa$ 中的稠密开子集序列。令 $\gamma_0 = \mathrm{lh}(s_0)$，并通过设定$t_0(\alpha) = s_0(\alpha) + 1$ 来定义 $t_0 \in {}^{\gamma_0}\kappa$，对所有 $\alpha < \gamma_0$ 都成立。现在我们可以构造一个严格递增的连续序列 $\langle \gamma_\alpha \mid \alpha < \kappa\rangle$ 和一个序列 $\langle (s_\alpha, t_\alpha) \in {}^{\gamma_\alpha}\kappa \times {}^{\gamma_\alpha}\kappa \mid \alpha < \kappa\rangle$，使得以下陈述对所有 $\alpha < \kappa$ 都成立。

(i) 若 $\bar{\alpha} < \alpha$，则 $s_{\bar{\alpha}} = s_\alpha \restriction \gamma_{\bar{\alpha}}$ 和 $t_{\bar{\alpha}} = t_\alpha \restriction \gamma_{\bar{\alpha}}$。(ii) $s_{\alpha+1}(\gamma_\alpha) = t_{\alpha+1}(\gamma_\alpha) = f(s_\alpha, t_\alpha) + \chi_S(\alpha)$。(iii) $N_{s_{\alpha+1}} \subseteq U_\alpha$。
(iv) 对所有满足 $\gamma_\alpha < \beta < \gamma_{\alpha+1}$ 的 β，$t_{\alpha+1}(\beta) = s_{\alpha+1}(\beta) + 1$。

若 $x = \bigcup_{\alpha<\kappa} s_\alpha$，则 $x \in A_S \cap (\bigcap_{\alpha<\kappa} U_\alpha)$。 □

剩下的任务是构造 A_S 形式的 2^{κ} 个两两不交集。令 $\langle S_\alpha \mid \alpha < \kappa\rangle$ 为 κ 的一个划分，其中包含 κ 个驻定子集。给定 $\emptyset \neq X \subseteq \kappa$，定义 $S_X = \bigcup_{\alpha\in X} S_\alpha$。那么，对于所有满足 $X \neq Y$ 的 $\emptyset \neq X$、$Y \subseteq \kappa$，$S_X \Delta S_Y$ 都是驻定的，而上述结论可由以下断言推出。

断言. 设 S 和 S' 是 κ的驻定子集。如果 $S\Delta S'$ 在 κ中是驻定的，那么子集 A_S 和 $A_{S'}$ 不相交。

断言的证明. 假设 $(x,y) \in \mathcal{A}_S$ 且 $(x,y') \in \mathcal{A}_{S'}$。令 C 和 C' 为相应的闭无界集。取 $\alpha \in (C \cap C' \cap (S_\Delta S')$。于是

$$f(x \restriction \alpha,\ y \restriction \alpha) + \chi_S(\alpha) = x(\alpha) = f(x \restriction \alpha,\ y \restriction \alpha) + \chi_{S'}(\alpha).$$

但这就产生了矛盾，因为序数 $f(x \restriction \alpha,\ y \restriction \alpha)$ 和 $f(x \restriction \alpha,\ y \restriction \alpha)$ 都是偶数，而 $\chi_S(\alpha) + \chi_{S'}(\alpha) = 1$。□

这就完成了定理的证明。 □

4. Continuous injective images of closed sets

在本节中，我们考察连续单射函数 $f\colon A \longrightarrow {}^\kappa\kappa$ 对某个 ${}^\kappa\kappa$ 的闭子集 A 所作的像。我们首先证明定理 1.12。

定理 1.12 的证明。假设 $\varphi(u,v)$ 是一个 Σ^1_1-公式，$z \in {}^\kappa\kappa$，并且 A 是所有满足 $L[x,z] \models \varphi(x,z)$ 的 $x \in {}^\kappa\kappa$ 构成的集合。接下来，我们将借助双射 $f\colon L_\gamma[x] \longrightarrow \kappa$ with $f[\kappa] = \{2 \cdot \alpha \mid \alpha < \kappa\}$，用某个（不唯一的）$y \in {}^\kappa\kappa$ 来编码形如 $(L_\gamma[x], \in)$ 的模型。这样，我们就能根据任意 $v \subseteq \kappa$ 和 y 轻松判断 v 是否是 $L_\gamma[x]$ 的元素。

令 C 表示由三元组 $(x, y, \langle y_n \mid n \in \omega\rangle) \in {}^\kappa\kappa \times {}^\kappa\kappa \times {}^\omega({}^\kappa\kappa)$ 组成的集合，其中每个 y_n 编码一个 Kripke-Platek 集合论 KP 的极小良基模型 M_n，且满足“$\mathrm{V} = \mathrm{L}[x,z]$”，并且对所有 $n < \omega$，以下陈述均成立。

- 若 $i < n$，则 $x, y, y_i, z \in M_n$。
- $M_0 \models$“y 是 $<_{\mathrm{L}[x,z]}$ 中 ${}^\kappa\kappa$ 的最小元素，且满足 $\varphi(x,y)$。”
- 若 $n = k+1$，则 $M_{k+1} \models$“y_k 是 M_k 的 $<_{\mathrm{L}[x,z]}$-最小编码。”

集合 C 是 κ-Borel 集，因为 $M_n \models \mathrm{KP} +$“$\mathrm{V} = \mathrm{L}[x,z]$”与其余条件的合取，等价于一个关于元素 $x, y, \langle y_n \mid n < \omega\rangle$ 和 z 的算术句子。根据引理 1.11，C 是类 I^κ_{cl} 中的一个元素。我们有 $A = p_0[C]$，其中

$$p_0 : {}^\kappa\kappa \times {}^\kappa\kappa \times {}^\omega({}^\kappa\kappa) \longrightarrow {}^\kappa\kappa;\ (x, y, \langle y_n \mid n < \omega\rangle) \longmapsto x.$$

此外，$p_0 \restriction C$ 是单射，因为每个 $x \in p_0[C]$ 都唯一确定 C 中的一个元素（x，y，$\langle y_n \mid n < \omega\rangle$）。□

下面的观察将使我们能够简化接下来的证明。

命题 4.1。设 A 是类 I^κ_{cl} 中的一个元素。那么存在 ${}^{<\kappa}\kappa \times {}^{<\kappa}\kappa$ 的一个子树 T，使得 $A = p[T]$，并且投影 $p\colon [T] \longrightarrow A$ 是单射。

证明。设 T_0 是 ${}^{<\kappa}\kappa$ 的一个子树，且 $f\colon [T_0] \longrightarrow A$ 是一个连续双射。固定 ${}^{<\kappa}\kappa$ 的一个枚举 $\langle u_\alpha \mid \alpha < \kappa\rangle$。定义 T 为所有满足以下条件的有序对（s，t）所组成的集合：$s \in {}^{<\kappa}\kappa$，$\langle u_{t(\alpha)} \mid \alpha < \mathrm{lh}(s)\rangle$ 是 T_0 中的一个严格递增节点序列，并且对所有 $\alpha < \mathrm{lh}(s)$，$f[T_{t(\alpha)}] \subseteq N_{s\restriction(\alpha+1)}$ 都成立。

取 $y \in A$，并令 x 表示 $[T_0]$ 中满足 $f(x) = y$ 的唯一元素。我们可以构造一个由小于 κ 的序数组成的严格递增序列 $\langle \beta_\alpha \mid \alpha < \kappa\rangle$，使得对所有 $\alpha < \kappa$，$f[T_{x\restriction\beta_\alpha}] \subseteq N_{y\restriction(\alpha+1)}$ 都成立。取满足对所有 $\alpha < \kappa$ 均有 $x \restriction \beta_\alpha = u_{z(\alpha)}$ 的 $z \in {}^\kappa\kappa$。于是，数对 (y,z) 是穿过 T 的一个 κ-分支。反过来，如果 (y,z) 是 $[T]$ 的一个元素，那么 $x = \bigcup_{\alpha<\kappa} u_{z(\alpha)}$ 就是 $[T_0]$ 中满足 $f(x) = y$ 的唯一元素。□

引理 4.2。类 I^κ_{cl} 在连续原像下封闭。

证明。设 T 是 ${}^{<\kappa}\kappa \times {}^{<\kappa}\kappa$ 的一个子树，且 $p \restriction [T]$ 是单射， $f\colon {}^{\kappa}\kappa \longrightarrow {}^{\kappa}\kappa$ 是连续的。令 $B = p[T]$ 和 $A = f^{-1}[B]$。定义

$$C = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in \mathrm{Graph}(f),\ (y, z) \in [T]\}.$$

那么 $A = p_0[C]$, C 是闭的，并且 $p_0 \restriction C$ 是单射。 □

注 4.3。由 ${}^{\kappa}\kappa$ 的单射连续像构成的类 I^{κ} 不包含单点集，因此，并非每个属于 I^{κ} 的集合的非空连续原像都属于 I^{κ}。

接下来，我们证明定理 1.15，该定理使我们能够构造出将类 I^{κ}_{cl} 与 $\mathbf{\Sigma}^1_1(\kappa)$ 分离的模型。

定理 1.15 的证明。令 $\lambda > \kappa$ 为不可达基数， G 为在 V 上 Col($\kappa, <\lambda$)-泛型。反设存在 ${}^{<\kappa}\kappa \times {}^{<\kappa}\kappa$ 的一个子树 $T \in \mathrm{V}[G]$ ，使得 $\mathsf{Club}_{\kappa} = p[T]$ 且 $p \restriction [T]$ 在 $\mathrm{V}[G]$ 中是单射。通过转到一个适当的中间模型，我们可以假设 T 是 V 中的一个元素。

在 V 中定义偏序 $\mathbb{Q}$ 为 Add(κ, 1) 的标准名称，该偏序通过初始段在 Add(κ, 1)-泛型子集 κ 中加入一个闭无界集。容易看出，Add(κ, 1) $*\,\mathbb{Q}$ 和 Add(κ, 1) $*\,(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$ 都包含 $<\kappa$-闭稠密子集，因此这些偏序与 Add(κ, 1) 强迫等价。

假设 g 在 V 上是 Add(κ, 1)-泛型的，且 h 在 $\mathrm{V}[g]$ 上是 $\mathbb{Q}^g$-泛型的，并且存在一个在 $\mathrm{V}[g, h]$ 上的 Col($\kappa, <\lambda$)-泛滤子 H，使得 $\mathrm{V}[g, h, H] = \mathrm{V}[G]$。令 $\dot{x}$ 为 Add(κ, 1) 的标准名称，表示由该泛滤子所诱导的 κ 子集的特征函数。根据 Silver 的经典定理（例如参见 [Lücuc12, 命题 7.3]），有 $(\mathrm{H}(\kappa^+)^{\mathrm{V}[g,h]}, \in) \prec_{\Sigma_1} (\mathrm{H}(\kappa^+)^{\mathrm{V}[G]}, \in)$，这表明存在某个 $y \in ({}^{\kappa}\kappa)^{\mathrm{V}[g,h]}$，使得 $(\dot{x}^g, y) \in [T]^{\mathrm{V}[g,h]}$。由于偏序 Add($\kappa$, 1) 是齐次的，我们有

$$\mathbb{1}_{\mathrm{Add}(\kappa,1)*\dot{\mathbb{Q}}} \Vdash \exists y\ (\dot{x}, y) \in [\check{T}].$$

现在假设 g 在 V 上是 Add(κ, 1)-泛型的，且 $h_0 \times h_1$ 在 V 上是 $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})^g$-泛型的$[g]$，并且存在一个 Col($\kappa, <\lambda$)-泛型滤子 H，其基于 $\mathrm{V}[g, h_0, h_1]$ 且满足 $\mathrm{V}[G] = \mathrm{V}[g, h_0, h_1, H]$。根据上述计算，存在 $y_0 \in \mathrm{V}[g, h_0]$ 和$y_1 \in \mathrm{V}[g, h_1]$，使得 $(x, y_i) \in [T]^{\mathrm{V}[g,h_i]} \subseteq [T]^{\mathrm{V}[G]}$。于是 $y_0 = y_1$，因此由相互泛性可得$y_0 \in \mathrm{V}[g]$ 。由于 Add(κ, 1) 是齐次的，我们有

$$\mathbb{1}_{\mathrm{Add}(\kappa,1)} \Vdash \exists y\ (\dot{x}, y) \in [\check{T}].$$

最后，设 g 在 V 上是 Add(κ, 1)-泛型的，且 H 在 V 上是 Col($\kappa, <\lambda$)-泛型的$[g]$, 并满足 $\mathrm{V}[G] = \mathrm{V}[g, H]$。在这种情况下，上述计算表明存在某个 $y \in \mathrm{V}[g]$，使得 $(x, y) \in [T]^{\mathrm{V}[g]} \subseteq [T]^{\mathrm{V}[G]}$，这说明 $\dot{x}^g$ 是 $\mathrm{V}[G]$中的 Club_{κ} 的一个元素。由于在这种情况下 $(\mathrm{H}(\kappa^+)^{\mathrm{V}[g]}, \in) \prec_{\Sigma_1} (\mathrm{H}(\kappa^+)^{\mathrm{V}[G]}, \in)$ 成立，这表明由 g 诱导的 κ 的子集在 $\mathrm{V}[g]$中包含一个闭无界子集，产生矛盾。

用 Add(κ, κ^+) 替代 Col($\kappa, <\lambda$) 的证明类似。 □

下一个结论是定理 1.15 和引理 4.2 的直接推论。

推论 4.4. 经由使用 Add(κ, κ^+) 或 Col($\kappa, <\lambda$) 进行力迫后，若 $\lambda > \kappa$ 是不可达基数，则没有 No $\mathbf{\Sigma}^1_1$-完全集（见例 1.2）包含于类I^{κ}_{cl} 中。在

特别地，若 ν 是正则且具有 $\kappa = \nu^+ = 2^\nu$，则上述强迫扩张中的平凡 ν-相干序列集合 $\mathcal{T}riv(\kappa,\nu)$ 不是 $\mathcal{C}oh(\kappa,\nu)$ 的 $\mathbf{\Sigma}^1_1$-完全子集。□

注 4.5。 [L¨uc12] 的结果表明，在基模型通过一个满足 κ^+-链条件的 $<\kappa$-闭偏序 $\mathbb{P}(A)$ 进行强迫扩张后，任意 A 的子集 ${}^{\kappa}\kappa$ 都包含于类 I^{κ}_{cl} 中。给定 ${}^{<\kappa}\kappa$ 的某个枚举 $\langle s_\alpha \mid \alpha<\kappa\rangle$，且对所有 $\alpha<\kappa$均有 $\mathrm{lh}(s_\alpha)\leq\alpha$，在[L¨uc12 第 3] 节构造的强迫 $\mathbb{P}(A)$ 会添加 ${}^{<\kappa}2$ 的一个子树 T 以及一个双射 $f\colon A\longrightarrow[T]$，使得对于每个 $x\in A$，分支 $f(x)$ 是满足以下性质的 $[T]$ 中的唯一元素 y：存在一个 $\beta<\kappa$，使得

$$s_\alpha\subseteq x \iff y(\prec\alpha,\beta\succ)=1$$

对所有 $\alpha<\kappa$均成立。在 V 的 $\mathbb{P}(A)$-泛型扩张中，我们定义 D 为由 ${}^{\gamma}\kappa\times{}^{\gamma}2\times{}^{\gamma}\kappa$ 中的所有元组 (s,t,u) 构成的集合，其中 γ 在 G ¨odel 配对下封闭，$t\in T$、u 均为常值且取值为 β，并且 $t(\prec\alpha,\beta\succ)=1$ 当且仅当对所有 $\alpha<$，$\mathrm{lh}(s)$ $s_\alpha\subseteq s$。令 T_* 为 ${}^{<\kappa}\kappa\times{}^{<\kappa}2\times{}^{<\kappa}\kappa$ 的子树，它由 D的向下闭包得到。根据上述说明，投影到第一坐标是子集 $[T_*]$ 与 A之间的连续双射。

5. Classes defined from inner models

我们从证明定理 1.16 开始本节。该结果给出了图 2 所示的类 $S^{\mathrm{L}}_{,1}{}^{\kappa}$, I^{κ}, I^{κ}_{cl} 和 $\mathbf{\Sigma}^1_1(\kappa)$ 之间其余的关系。

定理 1.16 的证明。设 κ 是一个不可数基数，$\kappa=\kappa^{<\kappa}$, G 对某个不可达基数 $\lambda>\kappa$ 在 V 上是 Col$(\kappa,<\lambda)$-泛型，并且 M 是 V$[G]$ 的一个内模型，满足 $M\subseteq$V。我们在 V$[G]$ 中工作。

设 $\varphi(u,v)$ 是一个 Σ_n-公式，$z\in{}^{\kappa}2$ 且

$$A=\{x\in{}^{\kappa}\kappa\mid M[x,z]\models\varphi(x,z)\}.$$

假设 $z_0\in({}^{\kappa}\kappa)^{\mathrm{V}}$ 编码了 κ 与 ${}^{<\kappa}\kappa$ 之间的一个双射。令 C 表示 ${}^{\kappa}\kappa$ 中对 $M[z,z_0]$ 泛型的 Add$(\kappa,1)$-元素的集合，并令 $\dot{x}\in M[z,z_0]$ 表示 ${}^{\kappa}\kappa$ 中泛型元素的规范 Add$(\kappa,1)$-名称。设

$$U=\bigcup\{N_s\mid s\Vdash^{M[z,z_0]}_{\mathrm{Add}(\kappa,1)}\varphi^{M[\dot{x},\check{z}]}(\dot{x},\check{z})\}.$$

由于我们是在 Col$(\kappa,<\lambda)$-泛型扩张中工作，包含于 $M[z,z_0]$ 中的 Add$(\kappa,1)$ 的稠密开子集集合在 V$[G]$ 中的基数为 κ。因此，C 是 ${}^{\kappa}\kappa$ 的余瘦集，也就是说，它等于 ${}^{\kappa}\kappa$ 中 κ 个稠密开子集的交。我们断言 $A_\Delta U\subseteq{}^{\kappa}\kappa\setminus C$。容易看出 $C\cap U\subseteq A$。假设 $x\in A\cap C$。那么 $M[x,z]\models\varphi(x,z)$，这意味着

$$x\restriction\alpha\Vdash^{M[z,z_0]}_{\mathrm{Add}(\kappa,1)}\varphi^{M[\dot{x},\check{z}]}(\dot{x},\check{z})$$

对于某个 $\alpha<\kappa$。在这种情况下，我们可以得出 x 是 U 的一个元素。□

我们给出定理 1.16 和推论 1.17 的一个有趣推论。 [ST13] 中给出了这样一个集合的另一个例子。

命题 5.1. 假设 V $=$ L$[G]$，其中 G 是在 L 上的 Col$(\kappa,<\lambda)$-泛型，且 $\lambda>\kappa$ 在 L 中是不可达基数。那么类 $S^{\mathrm{L}}_{,1}{}^{\kappa}$ 包含一个真 $\mathbf{\Sigma}^1_1$-集，它不是 $\mathbf{\Sigma}^1_1$-完备的。

证明. 令 $A = \{(x, y) \in {}^{\kappa}\kappa \times {}^{\kappa}\kappa \mid y \in \mathrm{L}[x]\}$。为了证明 A 的补集在 $\mathrm{L}[G]$中不是一个 $\mathbf{\Sigma}^1_1$-子集，假设当且仅当 $\varphi(x, x_0)$在 $\mathrm{H}(\kappa^+)$中成立时， $x \in A$ 成立，其中 $\varphi(u, v)$是一个 Σ_1-公式，且 $x_0 \in \mathrm{H}(\kappa^+)$。那么存在某个 $x \in {}^{\kappa}\kappa$ ，使得 $x_0 \in \mathrm{L}[x]$ 且 $(\mathrm{H}(\kappa^+)^{\mathrm{L}[x]}, \in) \prec_{\Sigma_1} (\mathrm{H}(\kappa^+) \in)$。由于 ${}^{\kappa}\kappa \not\subseteq \mathrm{L}[x]$，可知$\exists y \in {}^{\kappa}\kappa\ \varphi(x, y)$在 $\mathrm{H}(\kappa^+)$中成立，并且存在一个 $z \in ({}^{\kappa}\kappa)^{\mathrm{L}[x]}$ ，使得 $\varphi(x, z)$在 $\mathrm{H}(\kappa^+)$中成立。但根据 $\varphi(u, v)$的选取，这意味着 $z \notin \mathrm{L}[x]$ ，矛盾。

通过将连续函数 $f\colon {}^{\kappa}\kappa \longrightarrow {}^{\kappa}\kappa$ 编码为 ${}^{\kappa}\kappa$ 的元素，很容易看出，类 $S^{\mathrm{L},\ {}^{\kappa}\kappa}_{1}$ 在连续原像下封闭。这表明集合 A 不是 $\mathbf{\Sigma}^1_1$-完全的；否则， ${}^{\kappa}\kappa$ 的每个 $\mathbf{\Sigma}^1_1$-子集都会包含在类 $S^{\mathrm{L},\ {}^{\kappa}\kappa}_{1}$ 中，这与推论 1.17 矛盾。□

根据命题 1.13，类 $S^{\mathrm{L},\ {}^{\kappa}\kappa}_{1}$ 和 $\mathbf{\Sigma}^1_1(\kappa)$ 在 L 中相同。相比之下，对于固定的 $n < \omega$，类 $S^{\mathrm{L},\ {}^{\kappa}\kappa}_{n}$ 由 $\mathbf{\Delta}^1_1$-子集组成，这也是一致的。

备注5.2。给定 $0 < n < \omega$，可以修改 [HL] 中提出的编码技术，从而构造基模型 V 的一个强迫扩张，使得类$S^{\mathrm{L},\ {}^{\kappa}\kappa}_{n}$由 $\mathbf{\Delta}^1_1(\kappa)$ 个 ${}^{\kappa}\kappa$ 的子集组成。在此构造中，我们固定一个通用的 Σ_n-公式 $\Phi(v_0, v_1)$，并递归地构造一个强迫概念 $\mathbb{P}$ ，使得集合

$$Sat^{\mathrm{L}}_n \ = \ \{(n, x) \in \omega \times ({}^{\kappa}\kappa)^{\mathrm{V}[G]} \mid \Phi(n, x)^{\mathrm{L}[x]}\}$$

在 V 的每个 $\mathbb{P}$-泛型扩张 $\mathrm{V}[G]$ 中，都可由带有参数的 Σ_1 公式在结构 $(\mathrm{H}(\kappa^+)^{\mathrm{V}[G]}, \in)$ 上定义。这是可能的，因为陈述 $\Phi(n, x)^{\mathrm{L}[x]}$ 的有效性在 $\mathrm{V}[G]$ 与由 $\mathbb{P}$ 的某个完全子强迫给出的任意中间扩张之间是绝对的。容易看出， $\mathbf{\Sigma}^1_1(\kappa)$-可定义性意味着 $S^{\mathrm{L},\ {}^{\kappa}\kappa}_{n}$ 中的每个子集都是 $\mathbf{\Delta}^1_1(\kappa)$-可定义的。

包含于类 $S^{\mathrm{L},\ {}^{\kappa}\kappa}_{1}$ 中的集合总是 $\mathbf{\Sigma}^1_1$-可定义的。我们以证明如下结论来结束本节：对于任意内模型 M，类 $S^{M,\ {}^{\kappa}\kappa}_{1}$ 中的集合未必能由序数和 κ 的子集定义。

命题 5.3。设 $\mu > \kappa$ 是一个基数，且 $G \times H$ 是 V 上的 $(\mathrm{Add}(\kappa, \mu) \times \mathrm{Add}(\kappa, \mu))$-泛型。在 $\mathrm{V}[G, H]$ 中，存在一个集合 A ，它包含于类 $S^{\mathrm{V}[G],\ {}^{\kappa}\kappa}_{1}$ 中，且不能由序数和 κ 的子集定义。

证明。令 $\mu = X_0 \sqcup X_1$ with $|X_0| = |X_1| = \mu$。不妨设 $G \times H$ 在 V 上是 $(\mathbb{P} \times \mathbb{Q})$-泛型，其中 $\mathbb{P} = \mathrm{Add}(\kappa, X_0)$ 且 $\mathbb{Q} = \mathrm{Add}(\kappa, X_1)$。给定 $x \in {}^{\kappa}2$，定义 $s(x) = \{\alpha < \kappa \mid s(\alpha) = 1\}$。令 A 为所有满足以下条件的 $x \in {}^{\kappa}2$ 所构成的集合：$s(x)$ 在 $\mathrm{V}[G, x]$中包含一个闭无界集。

反设存在公式 $\psi(v_0, v_1, v_2)$，它使用参数 $a \in {}^{\kappa}\kappa$和 $\gamma \in$序数类来定义A。假设 $\dot{a} \in \mathrm{V}$ 是一个良好的 $(\mathbb{P} \times \mathbb{Q})$-名称，且 $\dot{a}^{G \times H} = a$。那么存在一个条件 $p \in G \times H$ ，它强迫在 V 上A 由 $\psi(\cdot, \dot{a}, \check{\gamma})$ 定义。令 $S = \mathrm{supp}(p) \cup \mathrm{supp}(\dot{a})$。由于 $|S| \leq \kappa$，我们可以找到$\alpha \in X_0 \setminus S$、 $\beta \in X_1 \setminus S$ 以及 $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ 的一个自同构 π ，它只交换坐标 α 和 β。

Let $\bar{\mathbb{Q}}$表示一个偏序的标准 $\mathrm{Add}(\kappa, 1)$ 名称，该偏序通过初始段在 κ 的泛型子集上添加一个闭无界集。那么，$\mathrm{Add}(\kappa, 1) * \bar{\mathbb{Q}}$ 与 $\mathrm{Add}(\kappa, 1)$ 强迫等价。给定 $\delta < \mu$、 $\dot{x}_\delta$和 $\dot{y}_\delta$为标准的（$\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$）名称，使得 $\dot{x}_\delta^{\bar{G} \times \bar{H}}$是由 g诱导的泛型子集，并且当 $G \times H$在 V 上是（$\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$）-泛型时， $\dot{y}_\delta^{\bar{G} \times \bar{H}}$是相应的泛型$\bar{\mathbb{Q}}$闭无界子集； G_δ是 $\mathrm{Add}(\kappa, 1)$ 上的滤子

¯ ˙由 G的第 δ 个分量诱导，而 $g*h$ 是 Add(κ, 1) 中由 G_δ诱导的滤子$*\mathbb{Q}^{\bar{}}$。

由于 $\alpha\in X_0$，我们有 $\dot{x}_\alpha^{G\times H},\dot{y}_\alpha^{G\times H}\in \mathrm{V}[G]$，因此 $\dot{x}_\alpha^{G\times H}\in A$。根据 $\mathbb{P}\times\mathbb{Q}$ 的齐次性，我们有 $p\Vdash\psi(\dot{x}_\alpha,\dot{a},\check{}\gamma)$。应用 π 后，我们得到 $p\Vdash\psi(\dot{x}_\beta,\dot{a},\check{}\gamma)$，且 $\dot{x}_\beta^{G\times H}$ 是 A 的一个元素。但这会导致矛盾，因为 $\dot{x}_\beta^{G\times H}$ 在 $\mathrm{V}[G]$ 上是 Add(κ,1)-泛型，因此 $\dot{x}_\beta^{G\times H}$ 在 $\mathrm{V}[G,\dot{x}_\beta^{G\times H}]$ 中不包含闭无界子集。□

6. Trees of higher cardinalities

下面的观察表明，如果考虑 ${}^{<\kappa}\kappa\times{}^{<\kappa}(\kappa^+)$ 的子树，那么高度为 κ 且没有末端节点的 $<\kappa$-闭树的投影类会扩大；也就是说，类 C^κ 总是真子类 $C^{\kappa,\,\kappa^+}$。

引理 6.1. 第 2 节中由方程 (2) 定义的闭子集 W 是一个没有末端节点的 $<\kappa$-闭子树 ${}^{<\kappa}\kappa\times{}^{<\kappa}(\kappa^+)$ 的投影。

证明. 令 D 表示 ${}^{\gamma}2\times{}^{\gamma}(\kappa^+)$ 中所有有序对 (s,t) 构成的集合，其中 $\gamma<\kappa$ 在 G¨odel 配对运算下封闭，且 $t:\gamma\longrightarrow\kappa^+$ 是一个单射，使得对所有 $\alpha,\beta<\gamma$,$\alpha<_s\beta$，当且仅当 $t(\alpha)<t(\beta)$ 时成立，其中关系 $<_s:=R_s$ 按第 2 节中的定义给出。那么 D 是 ${}^{<\kappa}\kappa\times{}^{<\kappa}(\kappa^+)$ 的一个 $<\kappa$-闭子集。

断言。 D 中的每个元素都被 $[D]$中的某个元素延伸。特别是， D 没有末端节点。

断言的证明。假设（s， t）$\in D$ 且 lh(s) $=\gamma$。我们将 s 延伸为 $x\in{}^{\kappa}2$，使得对于所有满足 $\beta\geq\gamma$ 的 α、$\beta<\kappa$， $x(\prec\alpha,\ \beta\succ)=1$ 都等价于 $\alpha<\beta$；并将 t 延伸为 $y\in{}^{\kappa}(\kappa^+)$，使得 ran($t$) $\subseteq y(\gamma)$且 $y\restriction[\gamma,\kappa)$严格递增。于是（$x$， y）是 $[D]$中的一个元素。□

在这种情况下，引理 2.3意味着存在一个 $<\kappa$-闭子树 T，它是${}^{<\kappa}\kappa\times{}^{<\kappa}(\kappa^+)$的子树，且满足 $W=p[D]=p[T]$。□

下面的结果表明，对于某个 $\mu<2^\kappa$，类 $C^{\kappa,\,\mu}$ 和 $C^{\kappa,\,cl}{}^{\mu}$ 相等是相容的。特别是，可能存在一个 $\mu<2^\kappa$，使得每个$\mathbf{\Sigma}^1_1$-子集都是 $C^{\kappa,\,\mu}$中的一个元素。

引理 6.2. 设 κ 是一个不可数基数，且对于某个基数 θ， $\kappa=\kappa^{<\kappa}$、 $\mu=2^\kappa$ 和 G 是在 V 上的 Add(κ,θ)-泛型。在 $\mathrm{V}[G]$ 中， ${}^{\kappa}\mu$ 的每个闭子集都是 ${}^{\kappa}\mu$ 的连续像。

证明. 我们可以假设 $\theta>\mu$，否则 $\mu=|{}^{\kappa}\mu|^{\mathrm{V}[G]}$，且引理的陈述显然成立。设 $A=[T]^{\mathrm{V}[G]}$ 是 $\mathrm{V}[G]$中 ${}^{\kappa}\mu$ 的一个闭子集。由于 Add(κ,θ) 满足 κ^+-链条件，且我们可以将 T 与 μ 的一个子集等同起来，因此可以假设 T 是 V 的一个元素。根据命题 1.3，只需证明 A 等于 $\mathrm{V}[G]$中一个 $<\kappa$-闭子树 ${}^{<\kappa}\mu\times{}^{<\kappa}\mu$ 的投影，且该子树没有端节点。

设 σ 是 V 中 $[T]$ 的一个 Add(κ,θ)-良好名称。由于 Add(κ,θ) 满足 κ^+-链条件，集合 $X=$supp(σ) 是 θ 的一个子集，且基数至多为 κ。定义 T_σ 为 ${}^{<\kappa}\mu\times{}^{<\kappa}$Add($\kappa,X$) 的子树，它由所有满足 $\gamma<\kappa$ 及以下陈述的有序对 $(t,\vec{p})\in{}^{\gamma}\kappa\times{}^{\gamma}$Add($\kappa,X$) 组成。

- $\langle\vec{p}(\alpha)\mid\alpha<\gamma\rangle$ 是 Add(κ,X) 中的条件递降序列。
- 如果 $\alpha<\gamma$，那么 $\vec{p}(\alpha)\Vdash^{V}_{\mathrm{Add}(\kappa,X)}$“$\check{s}\restriction(\check{}\alpha+1)\subseteq\sigma$”。

那么， $[T_\sigma]$ 是一棵 $<\kappa$-闭树，没有末端节点。我们有 $\sigma^G \in p[T_\sigma]^{\mathrm{V}[G]}$ 和 $p[T_\sigma]^{\mathrm{V}[G]} \subseteq A$，因为 A 是闭的。

我们可以在 V 中找到 Add(κ,θ) 的一个自同构 π，使得 supp$(\pi(\sigma)) \subseteq \kappa$。如果 $(t, \langle \vec{p}(\alpha) \mid \alpha<\gamma\rangle)$ 是 T_σ 的一个元素，那么可知 $(t, \langle \pi(\vec{p}(\alpha)) \mid \alpha<\gamma\rangle)$ 是 $T_{\pi(\sigma)}$ 的一个元素。这表明 $p[T_\sigma]^{\mathrm{V}[G]} = p[T_{\pi(\sigma)}]^{\mathrm{V}[G]}$。

上述计算表明，对于 A 的每个元素 x，在 V 中都存在一个 Add(κ,κ)-良好名称 σ，它对应于 $[T]$ 的一个元素，并且满足 $x \in p[T_\sigma]^{\mathrm{V}[G]} \subseteq A$。由于在 V 中，$[T]$ 的元素至多有 μ 个 Add(κ,κ)-良好名称，且 Add(κ,κ) 的基数在 V 中为 κ，我们可以得出结论：A 等于 μ 个没有末端节点的 ${}^{<\kappa}\mu \times {}^{<\kappa}\kappa$ 的 $<\kappa$-闭子树的投影之并。但这表明 A 等于一个没有末端节点的 ${}^{<\kappa}\mu \times {}^{<\kappa}\mu$ 的 $<\kappa$-闭子树的投影。□

7. Perfect embeddings

本节中，我们提炼出 ${}^{<\kappa}\kappa$ 的子树的一种性质，该性质意味着 ${}^{\kappa}\kappa$ 的相应闭子集不是形如 ${}^{\kappa}\mu$ 的空间的连续像。我们将利用这一推论证明小节 1.4 中提到的若干相容性结果。

定理 7.1. 设 κ 是不可数正则的，U 是 κ 的无界子集，且 T 是 ${}^{<\kappa}\kappa$ 的子树。若 μ 是一个基数，满足 $\mu^{<\kappa} < |[T]|$，且 $c : {}^{\kappa}\mu \longrightarrow [T]$ 是一个连续满射，则存在一个严格递增序列 $\langle \lambda_n \in U \mid n<\omega\rangle$，其最小上界为 λ，以及一个单射

$$i : \prod_{n<\omega} \lambda_n \longrightarrow T(\lambda).$$

使得

对所有 x、$y \in \prod_{n<\omega} \lambda_n$ 和 $n<\omega$，$x \restriction n = y \restriction n \iff i(x) \restriction \lambda_n = i(y) \restriction \lambda_n$ 均成立。

证明. 我们先证明两个断言。

断言。如果 U 是 ${}^{\kappa}\nu$ 的开子集，且满足 $|c[U]| > \mu^{<\kappa}$，那么存在一个 $x \in U$，使得对于所有 $\alpha<\kappa$，都有 $|c[N_{x\restriction\alpha}]| > \mu^{<\kappa}$。

断言的证明。反设，对于每个 $x \in U$，都存在一个 $\alpha_x<\kappa$，使得 $|c[N_{x\restriction\alpha_x}]| \leq \mu^{<\kappa}$。定义 $A = \{x\restriction\alpha_x \mid x \in U\} \subseteq {}^{<\kappa}\mu$。于是

$$|c[U]| \;\leq\; |\bigcup_{t\in A} c[N_t]| \;\leq\; \sum_{t\in A} |c[N_t]| \;\leq\; \mu^{<\kappa},$$

这就产生了矛盾。 □

断言。设 $\bar\gamma$、$\lambda<\kappa$ 和 $s \in {}^{<\kappa}\mu$ 满足 $|c[N_s]| > \mu^{<\kappa}$。那么存在一个序数 $\bar\gamma \leq \gamma < \kappa$ 和一个序列 $\langle y_\alpha \in N_s \mid \alpha<\lambda\rangle$，使得对于所有 α、$\bar\alpha<\lambda$，以下陈述均成立。

(i) 对于所有 $\beta<\kappa$，都有 $|c[N_{y_\alpha\restriction\beta}]| > \mu^{<\kappa}$。

(ii) $c(y_\alpha)\restriction\gamma = c(y_{\bar\alpha})\restriction\gamma$ 当且仅当 $\alpha=\bar\alpha$。

断言的证明。我们递归地构造

- a strictly increasing sequence $\langle\gamma_\alpha \mid \alpha<\lambda\rangle$ of ordinals and
- a sequence $\langle y_\alpha \in N_s \mid \alpha<\lambda\rangle$

使得以下陈述对所有 $\alpha < \lambda$ 均成立。

(a) $|c[N_{y_\alpha \restriction \beta}]| > \mu^{<\kappa}$ 对所有 $\beta < \kappa$。

(b) 若 $\bar{\alpha} < \alpha$，则 $c(y_\alpha) \restriction \gamma_\alpha \neq c(y_{\bar{\alpha}}) \restriction \gamma_\alpha$。

假设上述序列已构造至 $\alpha < \lambda$。我们定义

$$U \;=\; N_s \setminus c^{-1}[\{c(y_{\bar{\alpha}}) \mid \bar{\alpha} < \alpha\}].$$

那么 U 是开集且 $|c[U]| > \mu^{<\kappa}$。在这种情况下，上述断言意味着存在一个 $y_\alpha \in U$，使得陈述 (a) 成立。由于对所有$\bar{\alpha} < \alpha$，都有 $c(y_\alpha) \neq c(y_{\bar{\alpha}})$，因此存在一个 $\bar{\gamma} \leq \gamma < \kappa$，满足 $\gamma \geq \mathrm{lub}_{\bar{\alpha}<\alpha} \gamma_{\bar{\alpha}}$ 和 $c(y_{\bar{\alpha}}) \notin N_{c(y_\alpha)\restriction\gamma_\alpha}$，对所有 $\bar{\alpha} < \alpha$ 均成立。这意味着上述陈述 (b) 成立。

若我们定义 $\gamma = \sup_{\alpha<\lambda} \gamma_\alpha < \kappa$，则此构造保证引理的陈述成立。□

现在我们递归地构造

- 一个由序数组成的严格递增序列 $\langle \lambda_n < \kappa \mid n < \omega \rangle$，
- 一个函数序列 $\langle s_p \in {}^{<\kappa}\mu \mid n < \omega,\ p \in \prod_{m<n}(\lambda_m + 1) \rangle$，以及
- 一个由节点构成的序列 $\langle t_p \in T(\lambda_n) \mid n < \omega,\ p \in \prod_{m<n}(\lambda_m + 1) \rangle$，位于 T 中

使得对所有 $n < \omega$ 和 $p, q \in \prod_{m<n}(\lambda_m + 1)$，以下陈述均成立。

(i) $0 < \lambda_{n+1} \in U$。 (ii) $|c[N_{s_p}]| > \mu^{<\kappa}$ 和 $c[N_{s_p}] \subseteq N_{t_p}$。 (iii) $N_{t_p} \cap N_{t_q} \neq \emptyset$ 当且仅当 $p = q$。

(iv) 若 $m < n$，则 $s_{p\restriction m} \subsetneq s_p$ 和 $t_{p\restriction m} = t_p \restriction \lambda_m$。

令 $s_\emptyset = t_\emptyset = \emptyset$ 和 $\lambda_0 = 0$。现在假设 $n < \omega$ 以及序列$\langle \lambda_m \mid m \leq n \rangle$、$\langle s_p \mid p \in \prod_{m<n}(\lambda_m + 1) \rangle$ 和 $\langle t_p \mid p \in \prod_{m<n}(\lambda_m + 1) \rangle$ 均已构造。取 $p \in \prod_{m<n}(\lambda_m + 1)$。将第二个断言应用于 λ_n、$\lambda_n + 1$ 和 s_p，得到一个序数 $\lambda_n \leq \gamma_p < \kappa$ 和一个序列 $\langle y^p_\alpha \in N_{s_p} \mid \alpha < \lambda_n + 1 \rangle$，它们满足该断言中所述的性质 (i) 和 (ii)。定义

$$\lambda_{n+1} \;= \min(U \setminus \mathrm{lub}\{\gamma_p \mid p \in \prod_{m<n} (\lambda_m + 1)\}) \;<\; \kappa.$$

给定 $p \in \prod_{m<n}(\lambda_m + 1)$ 和 $\alpha < \lambda_n + 1$，我们定义

$$t_{p^\frown\langle\alpha\rangle} \;=\; c(y^p_\alpha) \restriction \lambda_{n+1}$$

and

$$s_{p^\frown\langle\alpha\rangle} \;=\; y^p_\alpha \restriction \min\{\beta < \kappa \mid c[N_{y^p_\alpha\restriction\beta}] \subseteq N_{t_{p^\frown\langle\alpha\rangle}}\}.$$

设 $\lambda = \sup_{n<\omega} \lambda_n$。固定一个 $z \in \prod_{n<\omega}(\lambda_n + 1)$。于是，对于所有 $n < \omega$，我们有 $s_{z\restriction n} \subseteq s_{z\restriction(n+1)}$ 和 $t_{z\restriction n} \subseteq t_{z\restriction(n+1)}$。因此存在一个 $x_z \in \bigcap_{n<\omega} N_{s_{z\restriction n}}$，并且我们的构造得到

$$c(x_z) \;\in\; [T] \;\cap\; \bigcap N_{t_{z\restriction n}}.$$

取 $z_0, z_1 \in \prod_{n<\omega}(\lambda_n + 1)$ 和 $n < \omega$。假设 $z_0 \restriction (n+1) \neq z_1 \restriction (n+1)$。我们的构造保证，对于所有 $i < 2$，$N_{t_{z_0\restriction(n+1)}} \cap N_{t_{z_1\restriction(n+1)}} = \emptyset$ and $c(x_{z_i}) \in N_{t_{z_i\restriction(n+1)}}$。因此 $c(x_{z_0}) \restriction \lambda_{n+1} \neq c(x_{z_1}) \restriction \lambda_{n+1}$。反过来，如果 $z_0 \restriction n = z_1 \restriction n$，那么 $c(x_{z_0}) \in N_{t_{z_0\restriction n}} \cap N_{t_{z_1\restriction n}} \neq \emptyset$，由此得到 $z_0 \restriction n = z_1 \restriction n$。特别地，我们可以得出结论，诱导映射

$$i_0 : \prod_{n<\omega} (\lambda_n + 1) \longrightarrow T(\lambda);\ z \longmapsto c(x_z) \restriction \lambda$$

是一个单射。通过将乘积 $\prod_{0<n<\omega}\lambda_n$ 嵌入 $\prod_{n<\omega}(\lambda_n+1)$，定理得证。□

我们利用定理 7.1 证明以下结果，由此可推出定理 1.18 和定理 1.19。

定理 7.2. 假设存在一个 ZFC 的内模型 M，使得 $\mathbb{R}\not\subseteq M$和 M 具有 ω_1-覆盖性质（见 [Ham03]），即 V 中每个可数序数集都包含于一个属于 M 且在 M中可数的集合。若 κ 是不可数正则基数，则存在 ${}^{\kappa}\kappa$ 的一个闭子集 A，使得对于每个满足 $\mu^{<\kappa}<|(2^{\kappa})^M|^{\mathrm{V}}$的基数 μ，A 都不是 ${}^{\kappa}\mu$ 的连续像。

Veli˘ckovi´c 和 Woodin 提出的以下结果是本证明的关键。记住，若一棵树 T 的每个节点上方都存在一个有无穷多个直接后继的节点，则称 T 为超完美树。

定理 7.3（[VW98，定理 2]）。设 T 是 ${}^{<\omega}\omega$ 的超完美子树。若M是一个满足 $[T]^{\mathrm{V}}\subseteq M$ 的 ZFC 内模型，则 $\mathbb{R}^{\mathrm{V}}\subseteq M$。

定理 7.2 的证明。设 M 是一个满足 $\mathbb{R}^{\mathrm{V}}\not\subseteq M$ 的 ZFC 内模型，并且具有如下性质：V 中每个序数可数集都被一个包含于 M 且在 M 中可数的集合所覆盖。我们在 V 中进行论证。固定一个不可数正则基数 κ，并令 T 表示 ${}^{<\kappa}\kappa$ 的子树 $({}^{<\kappa}2)^M$。反设存在一个连续满射 $c\colon {}^{\kappa}\mu\longrightarrow[T]$，其中某个基数 μ 满足 $\mu^{<\kappa}<|(2^{\kappa})^M|$。由于 T 至少有 $|(2^{\kappa})^M|$ 个共尾分支，我们可以应用定理 7.1，找到一个极限为λ 的严格递增序列 $\langle\lambda_n<\kappa\mid n<\omega\rangle$，以及一个单射 $i\colon {}^{\omega}\omega\longrightarrow T(\lambda)$，使得

$$x\restriction n=y\restriction n\iff i(x)\restriction\lambda_n=i(y)\restriction\lambda_n$$

对于所有 x、$y\in{}^{\omega}\omega$ 和 $n<\omega$。根据我们的假设，$\mathrm{cof}(\lambda)^M=\omega$，并且存在一个包含于 M 中的严格递增序列 $\langle\eta_n\mid n<\omega\rangle$，它在 M中共尾。此外，借助 M 中对 T 的良序，我们可以找到 $C\in M$，使得 C 在 M 中是可数的，并且集合 $\{i(x)\restriction\eta_n\mid x\in{}^{\omega}\omega,\ n<\omega\}$ 包含于C。定义

$$B=\{t\in T(\lambda)\mid\forall n<\omega\ t\restriction\eta_n\in C\}\in M.$$

于是 $\mathrm{ran}(i)\subseteq B$。

断言。若 $t\in{}^{\lambda}2$ 满足：对每个 $k<\omega$，都存在一个 $x\in{}^{\omega}\omega$ 使得 $t\restriction\eta_k=i(x)\restriction\eta_k$，那么 $t\in\mathrm{ran}(i)\subseteq T(\lambda)\subseteq M$。

断言的证明。固定 $n<\omega$。于是存在一个 $k<\omega$ 满足 $\eta_k\geq\lambda_n$，而我们的假设给出一个 $x_n\in{}^{\omega}\omega$ 满足 $t\restriction\lambda_n=i(x_n)\restriction\lambda_n$。定义 $s_n=x_n\restriction n$。给定 $x\in{}^{\omega}\omega$，i 的性质意味着 $i(x)\restriction\lambda_n=t\restriction\lambda_n$ 当且仅当 $s_n\subseteq x$。这表明 $x_t=\bigcup_{n<\omega}s_n$ 是 ${}^{\omega}\omega$ 中的一个元素，且 $i(x_t)=t$。□

固定一个 M 中包含的 C 的单射枚举 $\langle c_n\mid n<\omega\rangle$，并令 $j\colon B\longrightarrow({}^{\omega}\omega)^M$ 表示 M 中定义的单射：

$$j(t)(n)=k\iff t\restriction\eta_n=c_k.$$

断言。集合 $\mathrm{ran}(j\circ i)$ 在 ${}^{\omega}\omega$ 中是闭集。

断言的证明。设 z 是 $\mathrm{ran}(j\circ i)$ 在 ${}^{\omega}\omega$ 中的极限点。固定 $k\leq n<\omega$。那么存在一个 $x\in{}^{\omega}\omega$，使得 $(j\circ i)(x)\restriction(n+1)=z\restriction(n+1)$，并且

$$c_{z(k)}=c_{(j\circ i)(x)(k)}=i(x)\restriction\eta_k\subseteq i(x)\restriction\eta_n=c_{(j\circ i)(x)(n)}=c_{z(n)}\in T(\eta_n).$$

这表明，$t=\bigcup_{n<\omega}c_{z(n)}$ 是 ${}^{\lambda}2$ 的一个元素，且具有如下性质：对于每个$n<\omega$，都存在一个 $x_n\in{}^{\omega}\omega$，使得 $t\restriction\eta_n=i(x_n)\restriction\eta_n$。根据上述断言，存在一个 $x\in{}^{\omega}\omega$，使得 $i(x)=t$。如果 $k<\omega$，那么 $i(x)\restriction\eta_k=t\restriction\eta_k=c_{z(k)}$。这表明$z=(j\circ i)(x)\in\mathrm{ran}(j\circ i)$。□

Let $S=\{(j\circ i)(x)\restriction n\mid x\in{}^{\omega}\omega,\ n<\omega\}$. Then $[S]=\mathrm{ran}(j\circ i)\subseteq M$.

断言。 S 是 ${}^{<\omega}\omega$的一个超完美子树。

定理的证明。设 $x\in{}^{\omega}\omega$ 和 $k<\omega$。那么存在 m、$n<\omega$，使得$\eta_k\leq\lambda_m<\lambda_{m+1}\leq\eta_n$。于是存在一个序列 $\langle x_p\in{}^{\omega}\omega\mid p<\omega\rangle$，使得$x_p\restriction m=x\restriction m$ 且 $x_p(m)=p$。给定 $p<\omega$，我们有 $i(x)\restriction\eta_l=i(x_p)\restriction\eta_l$ 对每个 $l<k$ 都成立，因此$(j\circ i)(x)\restriction k\subseteq(j\circ i)(x_p)\restriction(n+1)$。由于

$$(j\circ i)(x_p)\restriction(n+1)\neq(j\circ i)(x_q)\restriction(n+1)$$

对于所有 $p<q<\omega$，这表明 $(j\circ i)(x)\restriction k$ 在第 $n+1$ 层有无穷多个后继。但这表明，在 S 中存在一个位于 $(j\circ i)(x)\restriction k$ 之上的节点，其长度至多为 n，且有无穷多个直接后继。□

结合上一个断言和定理 7.3 可知 $\mathbb{R}\subseteq M$，这就产生了矛盾。□

我们以证明上述定理结束本节。

定理 1.19 的证明。假设 V 是某个基模型 M的 $\mathrm{Add}(\omega,1)$-泛型扩张。那么 M 满足定理 7.2 的假设，因为 $\mathrm{Add}(\omega,1)$ 满足可数链条件并添加一个新的实数。设 κ 是一个不可数正则基数，A 是定理 7.2 给出的 ${}^{\kappa}\kappa$ 的闭子集。若 μ是满足 $\mu^{<\kappa}<2^{\kappa}$的基数，则 $\mu^{<\kappa}<(2^{\kappa})^{M}$，且 A 不等于 ${}^{\kappa}\mu$的连续像。□

定理 1.18 的证明。固定一个满足 $\kappa=\kappa^{<\kappa}$ 的不可数基数 κ、一个满足 $\mu=\mu^{\kappa}$ 的基数 $\mu\geq2^{\kappa}$，以及一个满足 $\theta=\theta^{\kappa}$ 的基数 $\theta\geq\mu$。设 G 是在 V 上的 $\mathrm{Add}(\kappa,\mu)$-泛型，H 是在 $\mathrm{V}[G]$ 上的 $\mathrm{Add}(\omega,1)$-泛型，且 K 是在 $\mathrm{V}[G,H]$上的 $\mathrm{Add}(\kappa,\theta)^{\mathrm{V}[G,H]}$-泛型。于是 $\mu=(2^{\kappa})^{\mathrm{V}[G]}=(2^{\kappa})^{\mathrm{V}[G,H]}$，$\kappa=(\kappa^{<\kappa})^{\mathrm{V}[G,H]}$，$\theta=(2^{\kappa})^{\mathrm{V}[G,H,K]}$，并且所有模型具有相同的基数。

我们在 $\mathrm{V}[G,H,K]$ 中工作。于是，内模型 $\mathrm{V}[G]$ 满足定理 7.2 的假设，并且存在 ${}^{\kappa}\kappa$ 的一个闭子集 A，使得对于任何满足 $\bar{\mu}^{<\kappa}<|(2^{\kappa})^{\mathrm{V}[G]}|=\mu$ 的基数 $\bar{\mu}$，A 都不等于 ${}^{\kappa}\bar{\mu}$ 的连续像。最后，引理 6.2 蕴含 ${}^{\kappa}\mu$ 的每个闭子集都等于${}^{\kappa}\mu$ 的连续像。□

8. Questions

我们以以上结果所引出的问题作为本文的结尾。

命题 1.13 表明，在形如 $\mathrm{L}[x]$ with $x\subseteq\kappa$ 的模型中，类 $\mathbf{\Sigma}^1_1(\kappa)$ 和 $S^{\mathrm{L}.\kappa}_1$ 相同。这引出了一个问题：是否存在其他模型，使这些类也相同。

问题 8.1。如果类 $\mathbf{\Sigma}^1_1(\kappa)$ 和 $S^{\mathrm{L}}_{,1}{}^{\kappa}$ 相同，是否存在一个 $x \subseteq \kappa$ with$^{\kappa}\kappa \subseteq \mathrm{L}[x]$?

根据命题 1.13 和定理 1.15，“俱乐部滤子是 $^{\kappa}\kappa$ 的某个闭子集的连续单射像”这一陈述在不同的集合论模型之间并非绝对的。特别地，可以一致地认为，俱乐部滤子不是整个空间 $^{\kappa}\kappa$的连续单射像。因此，自然会问，这一陈述的否定是否也一致。

问题 8.2. 俱乐部滤子 Club_{κ} 在 κ 上是一类 I^{κ}吗?

小节 1.4 中的讨论表明，可以一致地认为， $C^{\kappa,\ \kappa^+}$ 中的所有子集都是 $\mathbf{\Sigma}^1_1$-可定义的。因此，我们可以进一步问，这些连续像是否也可以一致地包含在本文所讨论的较小类中。

问题 8.3. 类 $C^{\kappa,\ \kappa^+}$ 包含于类 I^{κ}_{cl}吗?

References

[AS85] U. Abraham 和 S. Shelah。Aronszajn 树的同构类型。 *Israel J. Math.*，50 1 2 75(-): –113, 1985。[Bau83] James E. Baumgartner。迭代强迫。载于 *Surveys in set theory* 87 *London* ，第 卷，页码 –。 *Math. Soc. Lecture Note Ser.* 1 59 1983 剑桥大学出版社，剑桥，。[FHK] Sy Friedman、Tapani Hyttinen 和 Vadim Kulikov。 *Memoirs of the American Mathematical Society* 。即将出版。[

Ham03] Joel David Hamkins。具有逼近性质和覆盖性质的延拓没有新的大基数。 *Fund. Math.*，180(3):257–277，2003。[Har77] Leo Harrington。长投影良序。 *Ann. Math. Logic*，12(1):1–24，1977。[HL] Peter Holy 和 Philipp L¨ucke。局部 Σ_1-可定义的 H(κ) 良序。即将载于 *Fundamenta Mathematicae*。[HN73] H. H. Hung 和 S. Negrepontis。与 (2^{α} α *Bull. Amer. Math.*) 同胚的空间。 ，：–。 *Soc.* 79 143 146, 1973

[HS01] Aapo Halko 和 Saharon Shelah。关于 $^{\kappa}2$ 的强零测度子集。 *Fund. Math.*，170 3 219( ): –229, 2001。[Jec03] Thomas Jech。 *Set theory*。施普林格数学专著。施普林格出版社，柏林，2003。第三个千年版，修订并扩充。[JS70] R. B. Jensen 和 R. M. Solovay。几乎不交集的一些应用。载于 *Mathematical Logic and Foundations of Set Theory (Proc. Internat. Colloq., Jerusalem, 1968)* ，第 84–104 页。

北荷兰出版社，阿姆斯特丹，1970。[Kec95] Alexander S. Kechris。 *Classical descriptive set theory* 156 *Graduate Texts in* ，第 卷。施普 *Mathematics* 1995 林格出版社，纽约，。[L¨uc12] Philipp L¨ucke。在不可数正则基数上的 Σ^1_1-可定义性。 *J. Symbolic Logic*，77 3 1011 1046，2012 ( ): –。[MS70] D. A. Martin 和 R. M. Solovay。内部 Cohen 扩张。 *Ann. Math. Logic*，2(2):143–178，1970。[MV93] Alan Mekler 和 Jouko V¨a¨an¨anen。树和 Π^1_1-子集的 $^{\omega_1}\omega_1$。 *J. Symbolic Logic*，58 3 1052( ): –1070，1993。[ST13] Philipp Schlicht 和 Katherine Thompson。树上的 Lipschitz 映射与非定常理想。编写中，2013。[Tal94] Franklin D. Tall。广义 Martin 公理的一些应用。 *Topology Appl.*，57 2 3 215 248，1994 (-): –。[Tod87] Stevo Todor´cevi 159 3 4 261 294, c。可数序数序 1987 对的划分。 *Acta Math.*，(-): –。[Tod89] Stevo Todor´cevi 105 1 199 205, c。特殊方序列。 1989 *Proc. Amer. Math. Soc.*，( ): –。[Tod07] Stevo Todor´cevi *Walks on ordinals and their characteristics* 263 *Progress* c。，第 卷。 *in Mathematics* ¨ 2007 Birkhauser Verlag，巴塞尔，。

[VW98] Boban Velickovic 和 W. Hugh Woodin。集合论内模型中实数的复杂性。
Ann. Pure Appl. Logic, 92(3):283–295, 1998。Philipp Lücke, Mathematisches Institut, Universität Bonn, Endenicher Allee 60, 53115 Bonn, Germany*Email address*: pluecke@math.uni-bonn.dePhilipp Schlicht, Mathematisches Institut, Universität Bonn, Endenicher Allee 60, 53115 Bonn, Germany*Email address*: schlicht@math.uni-bonn.de