二维重力驱动 Navier–Stokes–Korteweg 模型的稳定性与不稳定性

Fei Jiang[a, c, d]、Fucai Li[b]、Zhipeng Zhang[b]

[a]福州大学数学与统计学院，中国福州，350108。[b]南京大学数学系，中国南京，210093[c]福建省应用数学中心，中国福州，350108。[d]福建省高校运筹学与控制重点实验室，中国福州，350108。

arXiv:2302.01013v1 [math.AP] 2 Feb 2023

摘要

Bresch–Desjardins–Gisclon–Sart 基于二维（2D）Navier–Stokes–Korteweg方程的线性化方程，于 2008 年推导出毛细作用能够降低毛细流体中 Rayleigh–Taylor（RT）不稳定性的增长率。受其线性理论启发，我们进一步研究了带 Navier 边界条件的水平方向周期性板状区域内二维不可压缩情形下的非线性 RT 问题，并严格验证了在我们的二维设定下，毛细作用能够抑制 RT 不稳定性。更具体地说，若 RT 密度剖面 $\bar{\rho}$ 满足一项额外的稳定化条件，则存在毛细系数的一个阈值 κ_{C} ；当毛细系数 κ 大于 κ_{C}时，RT 平衡态附近的小扰动解在时间上代数稳定。特别地，若 RT 密度剖面为线性，则阈值 κ_{C} 可由公式 $\kappa_{\mathrm{C}} = g/(\pi^2 h^{-2} + L^{-2})\bar{\rho}'$给出，其中$2\pi L$表示板状区域水平方向上一个周期单元的长度，$h$表示板状区域的高度。此外，我们还给出了针对$\kappa \in [0, \kappa_{\mathrm{C}})$的非线性不稳定性结果。该不稳定性结果表明，若毛细作用强度过小，则毛细作用无法抑制 RT 不稳定性。

关键词：毛细流体；Rayleigh–Taylor 不稳定性；代数时间衰减；稳定性/不稳定性阈值。

1. 引言

在重力作用下，较重流体位于较轻流体上方时，通常是不稳定的。事实上，平衡态受到微小扰动后，扰动会逐渐增长并导致势能释放：较重的流体在重力作用下向下运动，而较轻的流体则被向上推移。Rayleigh [57] 最早研究了这一现象，随后 Taylor [60], 也进行了研究，因此这一现象被称为 Rayleigh–Taylor（RT）不稳定性。过去几十年来，人们从物理、数值和数学等角度对 RT 不稳定性进行了广泛研究；相关实例可参见 [12, 19, 23, 32, 61] 。此外，人们还广泛分析了弹性 [43], 、旋转 [4, 12], 、内部表面张力 [29, 36, 62], 、磁场 [38, 40, 42, 63], 、毛细作用 [7] 等物理因素对 RT 不稳定性动力学的影响。

本文关注毛细作用对 RT 不稳定性演化的影响。在 [7], Bresch–Desjardins–Gisclon–Sart 推导出，毛细作用能够减缓

电子邮箱地址：jiangfei0951@163.com（Fei Jiang）、fli@nju.edu.cn（Fucai Li）、zhangzhipeng@nju.edu.cn（Zhipeng Zhang）

具有内毛细作用的流体中 RT 不稳定性的增长率（在弥散界面设定下），其结论基于线性化的二维（2D）Navier–Stokes–Korteweg（NSK）方程。受其线性理论启发，我们进一步研究了带有 Navier 边界条件的水平板状区域内二维不可压非均匀情形下的非线性 RT 问题，并严格证明，在我们的设定下，毛细作用同样能够抑制 RT 不稳定性。在详细陈述结果之前，我们需要从数学上表述毛细作用抑制 RT 不稳定性这一现象。

1.1 毛细 RT 问题的数学表述

描述处于均匀重力场中的内毛细作用流体动力学的经典模型，是以下可压缩 NSK 方程一般系统：

$$\begin{cases} \rho_t + \mathrm{div}(\rho v) = 0, \\ \rho v_t + \rho v \cdot \nabla v - \mathcal{A} v + \nabla \mathcal{P}(\rho) = \mathrm{div} K - \rho g \mathbf{e}^n, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中，$\rho(x,t) \in \mathbb{R}^+$ 和 $v(x,t) \in \mathbb{R}^n$ 分别表示流体在位置 $x \in \mathbb{R}^n$ 处的密度和速度，空间维数为 $n \geqslant 2$，时间为 $t \in [0, +\infty)$。扩散算子为 $\mathcal{A}v = \mathrm{div}(\mu(\rho)\mathbb{D}v) + \nabla(\lambda(\rho)\mathrm{div}\, v)$，微分算子 $\mathbb{D}$ 定义为$\mathbb{D}v = \nabla v + \nabla v^\top$，其中下标 $\top$ 表示转置。$\mathbf{e}^n$ 表示第 n 个分量为 1 的单位向量，$g > 0$ 表示引力常数，$-\rho g \mathbf{e}^n$ 表示重力。剪切黏度函数 μ、体积黏度函数 λ 和毛细作用函数 κ 均为已知的光滑函数 $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$，并满足 $\mu > 0$、 $2\mu + n\lambda \geqslant 0$ 和 $\kappa > 0$。压力 $\mathcal{P}$ 是给定函数（通常取范德瓦耳斯压力），一般的毛细张量写作

$$K = \left(\rho \mathrm{div}(\kappa(\rho)\nabla\rho) + (\kappa(\rho) - \rho\kappa'(\rho))\,|\nabla\rho|^2/2\right)\mathbb{I} - \kappa(\rho)\nabla\rho \otimes \nabla\rho, \tag{1.2}$$

其中，$\mathbb{I}$表示单位矩阵。

在经典流体力学中，两个不混溶流体之间的界面被建模为随时间演化的自由边界。描述各流体运动的方程还需辅以自由表面上的边界条件，这些条件涉及界面的物理性质。例如，在自由边界表述中，假设界面具有内部表面张力。然而，当界面厚度与所考察现象的长度尺度相当时，自由边界描述便不再适用。弥散界面模型提供了另一种描述方式，其中表面张力以最简单的形式表示为 $\mathrm{div}K$，即 Korteweg 在 1901 [50] 中引入的毛细张力。后来，Dunn 和 Serrin [20] 推导出了它的现代形式。

从物理角度来看，它可作为一种相变模型，用于描述具有毛细作用的可压缩流体的运动。鉴于可压缩 NSK 系统在数学和物理中的重要性，关于其数学理论已有大量研究，例如，[2, 8, 30] 研究了具有大初值的整体时间弱解，[18, 31, 34,49, 55] 研究了具有小初值的全局强解，[13, 33, 51, 52] 研究了具有大初值的局部强解/经典解，[17] 研究了定常解，[21] 研究了高速旋转极限，[16, 35] 研究了黏性激波的稳定性，[6, 15, 24, 47] 研究了毛细作用消失极限，[58]研究了最大 L^p–L^q 正则性理论，[10, 14, 48] 研究了整体解的时间衰减，等等。此外，无黏情形也得到了广泛研究，参见[3, 5, 9, 59]及其中引用的文献。

为便于研究毛细作用对流动的影响，我们按照 [7], 的做法，令 κ 为一个正实数，从而得到

$$\mathrm{div}K = \kappa\rho\nabla\Delta\rho. \tag{1.3}$$

进一步地，考虑方程 (1.1) 的一个平衡态 $(\bar{\rho}, 0)$，其中密度剖面 $\bar{\rho}$ 仅依赖于第 n 个变量。于是，平衡态方程为

$$\nabla\mathcal{P}(\bar{\rho}) = \kappa\bar{\rho}\nabla\Delta\bar{\rho} - g\bar{\rho}\mathbf{e}^n,$$

它可以改写为关于 $\bar{\rho}$ 的常微分方程:

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{P}(\bar{\rho})}{\mathrm{d}x_n} = \kappa\bar{\rho}\frac{\mathrm{d}^3\bar{\rho}}{\mathrm{d}x_n^3} - g\bar{\rho}.$$

正如 Bresch–Desjardins–Gisclon–Sart 所指出的，如何分析上述平衡态 $(\bar{\rho}, 0)$ 的稳定性或不稳定性，仍然是一个有趣的（开放）问题 [7]。由于可压缩性以及维数（在板条区域中）带来的根本困难，我们将关注 [7], 中的二维不可压缩对应系统，即以下二维不可压缩（非均匀）NSK 系统:

$$\begin{cases} \rho_t + v\cdot\nabla\rho = 0, \\ \rho v_t + \rho v\cdot\nabla v + \nabla P - \mathrm{div}(\mu\nabla v) = \kappa\rho\nabla\Delta\rho - \rho g\mathbf{e}^2, \\ \mathrm{div}v = 0, \end{cases} \tag{1.4}$$

其中 $P := P(x,t)$ 表示流体的动力压力。值得一提的是，不可压缩 NSK 系统的适定性问题也已得到广泛研究，参见 [11] 及其中引用的文献。

我们考虑方程 (1.4) 的水平周期运动解，因此将水平周期区域定义为

$$\Omega := 2\pi L\mathbb{T}\times(0,h), \tag{1.5}$$

其中 $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 和 $L > 0$。我们将看到，毛细作用的稳定化效应取决于周期长度 $2\pi L$。对于水平周期区域 Ω，一维周期区域 $2\pi L\mathbb{T}\times\{0,h\}$（记作 $\partial\Omega$）通常被视为 Ω 的边界。为保证系统 (1.4) 的适定性，我们施加以下初始条件与边界条件:

$$(\rho, v)|_{t=0} = (\rho^0, v^0), \tag{1.6}$$

$$v|_{\partial\Omega}\cdot\mathbf{n} = 0,\ ((\mathbb{D}v|_{\partial\Omega})\mathbf{n})_{\tan} = 0, \tag{1.7}$$

其中 n 表示区域 $\partial\Omega$ 的外向单位法向量，下标“tan”表示向量的切向分量（例如，$v_{\tan} = v - (v\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$）。此处及下文中，我们始终使用上标 0 来强调初始数据。我们称 (1.7) 为 Navier（滑移）边界条件。由于 Ω 是板条区域，Navier 边界条件等价于边界条件

$$(v_2, \partial_2 v_1)|_{\partial\Omega} = 0. \tag{1.8}$$

我们将在第 1.2 节解释选择上述 Navier 边界条件的原因。

为研究毛细作用对 RT不稳定性的影响，我们将选取一个与 x_1 无关且满足以下条件的 RT 密度剖面 $\bar{\rho}:=\bar{\rho}(x_2)$,

$$\bar{\rho}\in C^5(\overline{\Omega}),\quad \inf_{x\in\Omega}\bar{\rho}>0, \tag{1.9}$$

$$\bar{\rho}'|_{x_2=s}>0\quad \text{for some}\quad s\in\{x_2\mid (x_1,x_2)^\top\in\Omega\}, \tag{1.10}$$

其中 $\bar{\rho}':=\mathrm{d}\bar{\rho}/\mathrm{d}x_2$ 且 $\Omega:=\mathbb{R}\times[0,h]$。我们指出，(1.9) 中的第二个条件使我们无法处理真空，而 (1.10) 中的条件称为 RT条件，它保证至少存在一个区域，使得密度随高度 x_2增加而增大，从而导致经典RT不稳定性，参见 [37, 定理 1.2]。然而，我们将看到，毛细作用能够抑制这种不稳定性。

有了 RT 密度剖面后，我们进一步为系统 (1.4) 定义一个 RT平衡态 $(\bar{\rho},0)$。平衡态下的压力剖面 P由静水关系确定

$$\nabla\bar{P}=\kappa\bar{\rho}\nabla\Delta\bar{\rho}-\bar{\rho}g\mathbf{e}^2\quad \text{in}\quad \Omega, \tag{1.11}$$

即,

$$\bar{P}'=\kappa\bar{\rho}\bar{\rho}'''-\bar{\rho}g.$$

为简单起见，从现在起，我们仅考虑 (1.4) 中的 μ 为常数。将 RT平衡态附近的扰动记为

$$\varrho=\rho-\bar{\rho},\ v=v-0,$$

并回忆关系 (1.11) 以及

$$f\nabla\Delta f=\nabla(f\Delta f+|\nabla f|^2/2)-\mathrm{div}(\nabla f\otimes\nabla f),$$

由（1.4）得到扰动方程组:

$$\begin{cases}\varrho_t+v\cdot\nabla(\varrho+\bar{\rho})=0,\\ (\varrho+\bar{\rho})v_t+(\varrho+\bar{\rho})v\cdot\nabla v+\nabla\beta-\mu\Delta v\\ \qquad=\kappa\mathrm{div}(\nabla\bar{\rho}\otimes\nabla\bar{\rho}-\nabla\rho\otimes\nabla\rho)-\varrho g\mathbf{e}^2,\\ \mathrm{div}v=0,\end{cases} \tag{1.12}$$

其中 $\beta:=P-\bar{P}+\kappa(\bar{\rho}\Delta\bar{\rho}-\rho\Delta\rho+(|\nabla\bar{\rho}|^2-|\nabla\rho|^2)/2)$。相应的初始条件与边界条件如下:

$$(\varrho,v)|_{t=0}=(\varrho^0,v^0), \tag{1.13}$$

$$(v_2,\partial_2 v_1)|_{\partial\Omega}=0. \tag{1.14}$$

为简便起见，我们将初边值问题（1.12）–（1.14）称为毛细 RT（简称 CRT）问题。显然，要证明毛细作用对二维板状区域中 RT 不稳定性的抑制作用，只需验证 CRT 问题在某些非平凡初始数据下解的时间稳定性。

由于毛细张量的非线性，直接证明 CRT 问题的稳定性似乎较为困难。在 [53], Li–Zhang 建立了具有无滑移边界条件（取代 Navier 边界条件）的 CRT 问题的线性稳定性结果。遵循 Li–Zhang 的论证，我们也可以轻松得到本文 CRT 问题的线性稳定性结果，即

存在一个阈值 κ_{C}，使得线性化 CRT 问题（即省略 (1.12) 中的非线性扰动项）在尖锐稳定性条件下是稳定的

$$\kappa > \kappa_{\mathrm{C}}, \tag{1.15}$$

其中，我们定义

$$\kappa_{\mathrm{C}} := \sup_{w\in H^1_\sigma} \frac{g\int \bar{\rho}' w_2^2 \mathrm{d}x}{\int |\bar{\rho}'\nabla w_2|^2 \mathrm{d}x} \tag{1.16}$$

（需要指出的是，默认在上述上确界的定义中，我们排除了满足 $\int |\bar{\rho}'\nabla w_2|^2 \mathrm{d}x = 0$ 的函数 w）且 $\bar{\rho}$ 应满足稳定化条件

$$\inf_{x_2\in(0,h)} \{|\bar{\rho}'(x_2)|\} > 0. \tag{1.17}$$

这里及下文中，$\int := \int_{(0,2\pi L)\times(0,h)}$ 且 $H^1_\sigma := \{w \in W^{1,2}(\Omega) \mid \mathrm{div} w = 0,\ w_2|_{\partial\Omega} = 0\}$。本文旨在提出新的思路，进一步证明在稳定性条件 (1.15) 和 (1.17) 下 CRT问题的非线性稳定性。

1.2. 拉格朗日坐标下的重新表述

在 [62], 中，Wang–Tice–Kim 证明了内部表面张力能够抑制 RT不稳定性。此后，在拉格朗日坐标下的非电阻磁流体（MHD）流体中，也证实了磁张力具有类似的抑制作用 [38, 63]；另请参见 [43] 中关于黏弹性流体弹性的研究。正如 Lin 在 [54], 中指出的那样，具有内部表面张力的分层流体、黏弹性流体、非电阻 MHD 流体以及弥散界面模型（或 NSK 模型）也可视为具有弹性的复杂流体。受 [38, 63] 中拉格朗日坐标下稳定性结果的启发，我们也从在拉格朗日坐标下重新表述 CRT问题入手。值得一提的是，Burtea–Charve [11] 曾研究过拉格朗日坐标下不可压缩 NSK 系统在小初值条件下全局强解的存在性。

令流映射 ζ 为初值问题的解：

$$\begin{cases} \partial_t \zeta(y,t) = v(\zeta(y,t),t), \\ \zeta(y,0) = \zeta^0(y), \end{cases} \tag{1.18}$$

其中，可逆映射 $\zeta^0 := \zeta^0(y)$ 将 Ω 映射到 Ω，并满足

$$J^0 := \det \nabla\zeta^0 = 1, \tag{1.19}$$

$$\zeta_2^0 = y_2 \text{ on } \partial\Omega. \tag{1.20}$$

此处及下文中，“det”表示矩阵的行列式。

稍后我们将看到，流映射 ζ 满足：对于每个固定的 $t > 0$,

$$\zeta|_{y_2=r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{is a } C^1(\mathbb{R})\text{-diffeomorphism mapping for } r = 0,\ h; \tag{1.21}$$

$$\zeta : \overline{\Omega} \to \overline{\Omega} \quad \text{is a } C^1(\overline{\Omega})\text{-diffeomorphism mapping.} \tag{1.22}$$

由于 v 无散且满足 $v_2|_{\partial\Omega} = 0$，由 (1.18)–(1.20) 可推得

$$J := \det \nabla\zeta = 1,$$

$$\zeta_2 = y_2 \quad \text{on} \quad \partial\Omega.$$

我们将矩阵 $\mathcal{A}:=(\mathcal{A}_{ij})_{2\times 2}$ 定义为

$$\mathcal{A}^\top = (\nabla\zeta)^{-1} := (\partial_j\zeta_i)^{-1}_{2\times 2}.$$

接着，我们进一步定义微分算子 $\nabla_{\mathcal{A}}$、散度$_{\mathcal{A}}$ 和旋度$_{\mathcal{A}}$ 如下：对于标量函数 f 和向量函数 $X:=(X_1,X_2)^\top$,

$$\nabla_{\mathcal{A}} f := (\mathcal{A}_{1k}\partial_k f, \mathcal{A}_{2k}\partial_k f)^\top, \quad \mathrm{div}_{\mathcal{A}}(X_1,X_2)^\top := \mathcal{A}_{lk}\partial_k X_l, \quad \Delta_{\mathcal{A}} f := \mathrm{div}_{\mathcal{A}}\nabla_{\mathcal{A}} f$$

and

$$\mathrm{curl}_{\mathcal{A}} X := \mathcal{A}_{1k}\partial_k X_2 - \mathcal{A}_{2k}\partial_k X_1,$$

其中，我们对重复指标采用了爱因斯坦求和约定，且 $\partial_k := \partial_{y_k}$。特别地，旋度$X :=$旋度$_{\mathbb{I}} X$。

如果我们进一步定义

$$\eta := \zeta - y,$$

那么 $\mathcal{A}^\top = (\nabla\eta + \mathbb{I})^{-1}$，特别是,

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1+\partial_2\eta_2 & -\partial_1\eta_2 \\ -\partial_2\eta_1 & 1+\partial_1\eta_1 \end{pmatrix}$$

and

$$\tilde{\mathcal{A}} := \mathcal{A} - \mathbb{I} = \begin{pmatrix} \partial_2\eta_2 & -\partial_1\eta_2 \\ -\partial_2\eta_1 & \partial_1\eta_1 \end{pmatrix}.$$

˜根据 $\mathcal{A}$ 的上述表达式，容易验证

$$\mathrm{curl}_{\tilde{\mathcal{A}}}\eta = 0. \tag{1.23}$$

定义拉格朗日未知量:

$$(\vartheta, u, Q)(y,t) := (\rho, v, P)(\zeta(y,t),t) \ \text{ for } (y,t)\in\Omega\times\mathbb{R}^+_0,$$

那么，在拉格朗日坐标下，初边值问题 (1.4)、(1.6) 和 (1.8) 可改写为

$$\begin{cases} \zeta_t = u, \ \vartheta_t = 0, \ \mathrm{div}_{\mathcal{A}} u = 0, \\ \vartheta u_t + \nabla_{\mathcal{A}} Q - \kappa\vartheta\nabla_{\mathcal{A}}\Delta_{\mathcal{A}}\vartheta + \vartheta g\mathbf{e}^2 = \mu\Delta_{\mathcal{A}} u, \\ (\zeta,\vartheta,u)|_{t=0} = (\zeta^0,\vartheta^0,u^0), \\ (\zeta_2 - y_2, u_2, \mathcal{A}_{2i}\partial_i u_1)|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{1.24}$$

其中 $(\vartheta^0,u^0) := (\rho^0(\zeta^0) \ v^0(\zeta^0))$ 。此外，拉格朗日坐标中的关系式 (1.11) 具有如下形式

$$\nabla_{\mathcal{A}}\bar{P}(\zeta_2) = \kappa\bar{\rho}(\zeta_2)\nabla_{\mathcal{A}}\Delta_{\mathcal{A}}\bar{\rho}(\zeta_2) - \bar{\rho}(\zeta_2)g\mathbf{e}^2. \tag{1.25}$$

Let

$$\begin{aligned} q &= P(\zeta) - \bar{P}(\zeta_2) + \kappa(\bar{\rho}(\zeta_2)\Delta_{\mathcal{A}}\bar{\rho}(\zeta_2) - \bar{\rho}(y_2)\Delta_{\mathcal{A}}\bar{\rho}(y_2) + (|\nabla_{\mathcal{A}}\bar{\rho}(\zeta_2)|^2 - |\nabla_{\mathcal{A}}\bar{\rho}(y_2)|^2)/2), \\ K^\eta &= \mathrm{div}_{\mathcal{A}}(\nabla_{\mathcal{A}}\bar{\rho}(\zeta_2) \otimes \nabla_{\mathcal{A}}\bar{\rho}(\zeta_2) - \nabla_{\mathcal{A}}\bar{\rho}(y_2) \otimes \nabla_{\mathcal{A}}\bar{\rho}(y_2)), \\ G^\eta &= g(\bar{\rho}(\zeta_2) - \bar{\rho}(y_2)). \end{aligned} \tag{1.26}$$

现在我们进一步假设 ϑ^0 满足

$$\vartheta^0 = \bar{\rho}(y_2), \tag{1.27}$$

then

$$\vartheta = \bar{\rho}(y_2), \tag{1.28}$$

此外，初边值问题 (1.24) 与关系式 (1.28) 一起推出 (1.25)

$$\begin{cases} \eta_t = u, \\ \bar{\rho}u_t + \nabla_{\mathcal{A}}q - \mu\Delta_{\mathcal{A}}u = \kappa\mathcal{K}^\eta + G^\eta\mathbf{e}^2, \\ \mathrm{div}_{\mathcal{A}}u = 0, \\ (\eta, u)|_{t=0} = (\eta^0, u^0), \end{cases} \tag{1.29}$$

$$(\eta_2, u_2)|_{\partial\Omega} = 0, \tag{1.30}$$

$$((1 + \partial_1\eta_1)\partial_2 u_1 - \partial_2\eta_1\partial_1 u_1)|_{\partial\Omega} = 0. \tag{1.31}$$

我们将方程组 $(1.29)_1$–$(1.29)_3$ 称为变换后的 CRT（简称 TCRT）系统。

值得指出的是，TCRT 系统与变换后的磁性 RT（简称 TMRT）系统非常相似，后者如下所示（相关物理背景见 [45] ）

$$\begin{cases} \eta_t = u, \\ \bar{\rho}u_t + \nabla_{\mathcal{A}}q - \mu\Delta_{\mathcal{A}}u = \lambda m^2\partial_1^2\eta + G^\eta\mathbf{e}^2, \\ \mathrm{div}_{\mathcal{A}}u = 0. \end{cases} \tag{1.32}$$

由于缺少关于 η 的边界条件，难以得到其高阶法向导数的估计，因此 Jiang–Jiang–Zhao 自然地在线性化 TMRT 问题 [45] 上施加了以下边界条件:

$$(\eta_2, \partial_2\eta_1, u_2, \partial_2 u_1)|_{\partial\Omega} = 0, \tag{1.33}$$

这自动推出边界条件 (1.30) 和 (1.31)。值得注意的是，如果解 (η, u) 满足 $\partial_2\eta_1^0|_{\partial\Omega} = 0$ 以及额外的小量条件，边界条件 (1.30) 和 (1.31) 也能推出条件 (1.33)，见 *[45]* 中的命题 A.1。因此，他们基于带有边界条件 (1.33) 的 TMRT 系统 (1.32)，证明了水平磁场产生的磁张力 $\lambda m^2\partial_1^2\eta$ 能够抑制 RT 不稳定性。为简洁起见，我们将 $(1.29)_4$, (1.32) 和 (1.33) 的初边值问题称为 TMRT 问题。

我们称该边界条件为

$$(\eta_2, \partial_2\eta_1)|_{\partial\Omega} = 0 \tag{1.34}$$

特征边界条件。事实上，如果初始数据 η^0 满足 $(\eta_2^0, \partial_2\eta_1^0)|_{\partial\Omega}= 0$，那么由于 $(1.29)_1$ ， η 自动满足 (1.34)，且边界条件

$$(u_2, \partial_2 u_1)|_{\partial\Omega} = 0. \tag{1.35}$$

需要指出的是，边界条件 (1.34) 意味着

$$\mathrm{curl}_{\mathcal{A}}\partial_1^i\eta|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{for} \quad i = 0, 1, \tag{1.36}$$

这一点将在通过旋度估计建立 η 的高阶法向估计时发挥重要作用。

受 Jiang–Jiang–Zhao 在 [45], 中的结果启发，我们将用 (1.33) 替换 (1.30) 和 (1.31) 中的边界条件，并将 (1.29) 和 (1.33) 的初边值问题也称为 TCRT 问题。因此，CRT 问题的稳定性归结为研究 TCRT 问题的稳定性。由于 TCRT 系统和 TMRT 系统的结构相似，我们自然期望遵循 Jiang–Jiang–Zhao 在 [45] 中的论证来验证 TCRT 系统的稳定性。然而，毛细作用 $\kappa\mathcal{K}^\eta$ 比磁张力更为复杂，因此还需进一步提出新思路，以克服毛细作用带来的困难。

2. 主要结果及其证明策略

在陈述 TCRT 问题的主要结果之前，与 [45], 类似，我们将介绍贯穿本文使用的简化记号。

（1）基本简化记号： $\langle t\rangle := 1 + t$， $I_a := (0, a)$ 表示一个时间区间，特别地，$I_\infty = \mathbb{R}^+ := [0, \infty)$。$\overline{S}$ 表示集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ 的闭包，其中 $n \geqslant 1$，特别地，$\overline{I_T} = [0, T]$ 和 $\overline{I_\infty} = \mathbb{R}_0^+$。$\Omega_t := \Omega \times I_t$。 $(u)_\Omega$ 表示周期单元 $(0, 2\pi L) \times (0, h)$ 中 u 的平均值，即 $(u)_\Omega = \frac{1}{2\pi Lh}\int u\mathrm{d}y$。 $a \lesssim b$ 表示对于某个常数 $c > 0$， $a \leqslant cb$ 成立。如果未明确说明，正实数 c 可以依赖于 TCRT 问题中的 $\bar\rho$、 μ、 g、 κ 和 Ω，并且随行而变。字母 α 始终表示关于变量 y的多重指标， $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$ 称为该多重指标的阶， $\partial^\alpha := \partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2}$和$[\partial^\alpha, \phi]\varphi := \partial^\alpha(\phi\varphi) - \phi\partial^\alpha\varphi$。我们将使用克罗内克记号 δ_{ij}，即对于 $i = j$， $\delta_{ij} = 1$；否则 $\delta_{ij} = 0$。此外，我们定义

$$\underline{\tilde{\mathcal{A}}}_{ij} := \tilde{\mathcal{A}}_{ij} \quad \text{for} \quad (i, j) \neq (2, 1) \quad \text{and} \quad \underline{\tilde{\mathcal{A}}}_{21} := 0.$$

（2）简化的巴拿赫空间、范数和半范数：

$$\begin{aligned}
&L^p := L^p(\Omega) = W^{0,p}(\Omega), \quad H^i := W^{i,2}(\Omega), \quad H^j_{\mathrm{s}} := \{w \in H^j \mid w_2|_{\partial\Omega} = 0\},\\
&H^j_\sigma := \{w \in H^j_{\mathrm{s}} \mid \mathrm{div} w = 0\}, \quad H^3_\gamma := \{w \in H^3_{\mathrm{s}} \mid \|\nabla w\|_2 \leqslant \gamma\},\\
&\mathcal{H}^k_{\mathrm{s}} := \{w \in H^k_{\mathrm{s}} \mid \partial_2 w_1|_{\partial\Omega} = 0\}, \quad H^j_1 := \{w \in H^j \mid \det(\nabla w + I) = 1\},\\
&{}^0X := \{w \in X \mid (\bar\rho w_1)_\Omega = 0,\ w_1 \text{ is the first component of } w\},\\
&\underline{X} := \{w \in X \mid (w)_\Omega = 0\},\ \mathcal{H}^k_\sigma := \mathcal{H}^k_{\mathrm{s}} \cap H^1_\sigma, \quad \mathcal{H}^{3,\mathrm{s}}_{1,\gamma} := H^3_1 \cap \mathcal{H}^3_{\mathrm{s}} \cap H^3_\gamma,\\
&\|\cdot\|_i := \|\cdot\|_{H^i}, \quad \|\cdot\|_{l,i} := \|\partial_1^l \cdot\|_i, \quad \|\cdot\|_{\underline{l},i} := \sqrt{\sum_{0\leqslant n\leqslant l} \|\cdot\|^2_{n,i}},
\end{aligned}$$

其中 $1 \leqslant p \leqslant \infty$, i, $l \geqslant 0$, $j \geqslant 1$, $k \geqslant 2$, X 表示一般的巴拿赫空间， $\gamma \in (0,1)$ 是引理 A.4 中的常数。

(3) 取值于巴拿赫空间的简化函数空间:

$$
\begin{aligned}
&L_T^p X := L^p(I_T, X),\\
&\mathcal{U}_T := \{u \in C^0(\overline{I_T}, \mathcal{H}_{\mathrm{s}}^2) \cap L_T^2 H^3 \mid u_t \in C^0(\overline{I_T}, L^2) \cap L_T^2 H_{\mathrm{s}}^1\},\\
&\widetilde{\mathfrak{H}}_{\gamma,T}^{1,3} := \{\eta \in C^0(\overline{I_T}, \mathcal{H}_{\mathrm{s}}^3) \mid \eta(t) \in {}^0\mathcal{H}_{1,\gamma}^{3,\mathrm{s}} \ \text{ for each } t \in \overline{I_T}\}.
\end{aligned}
$$

（4）势能泛函:

$$
E(w) := g \int \bar{\rho}' w_2^2 \mathrm{d}y - \kappa \|\bar{\rho}' \nabla w_2\|_0^2, \quad w \in H^1. \tag{2.1}
$$

（5）能量与耗散泛函（广义）:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{E} := \|\eta\|_3^2 + \|u\|_2^2 + \|u_t\|_0^2 + \|q\|_1^2,\\
&\mathcal{D} := \|\eta_1\|_{1,2}^2 + \|\eta_2\|_3^2 + \|u\|_3^2 + \|u_t\|_1^2 + \|q\|_2^2.
\end{aligned}
$$

我们分别称 $\mathcal{E}$ 为总能量， $\mathcal{D}$ 为耗散泛函。（6）时间衰减的其他记号:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{E} :=& \langle t\rangle \|\partial_2^2(\partial_1\eta_1, \partial_2\eta_2)\|_0^2 + \langle t\rangle^2(\|\partial_2(\partial_1\eta_1, \partial_2\eta_2)\|_{\underline{1},0}^2\\
&+ \|u\|_2^2 + \|q\|_1^2) + \langle t\rangle^3(\|(\partial_2\eta_2, \partial_1\eta)\|_{\underline{2},0}^2 + \|(\eta_2, u_t)\|_0^2),
\end{aligned} \tag{2.2}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{D} :=& \langle t\rangle(\|\partial_2(\partial_1\eta_1, \partial_2\eta_2)\|_{\underline{1},0}^2 + \|u\|_{\underline{1},2}^2 + \|q\|_{\underline{1},1}^2) + \langle t\rangle^2(\|\eta_2\|_0^2\\
&+ \|(\partial_2\eta_2, \partial_1\eta)\|_{\underline{2},0}^2 + \|u\|_1^2) + \langle t\rangle^3(\|\partial_1 u\|_{\underline{1},1}^2 + \|u_t\|_1^2).
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

2.1. 稳定性

现在，我们陈述 TCRT 问题的稳定性结果，该结果表明，只要毛细系数足够大，毛细作用就能抑制 RT 不稳定性。

定理 2.1（稳定性）。设 μ 和 κ 为正实数，且 $(\eta^0, u^0) \in {}^0\mathcal{H}^{3,\,\mathrm{s}}_{1,\,\gamma} \times {}^0\mathcal{H}_{\mathrm{s}}^2$ 且 $\mathrm{div}_{\mathcal{A}^0} u^0 = 0$，其中 $\mathcal{A}^0 = (\nabla\eta^0 + I)^{-\top}$。进一步假设 κ 和 $\bar{\rho}$ 满足 (1.9)、尖锐稳定性条件 (1.15) 和稳定化条件 (1.17)。那么，存在一个充分小的常数 $\delta > 0$，使得对于任意满足下列条件的 (η^0, u^0)

$$
\|(\nabla\eta^0, u^0)\|_2 \leqslant \delta,
$$

(1.29) 和 (1.33) 的 TCRT 问题在函数类 $\widetilde{\mathfrak{H}}^{1,\,3}_{\gamma,\,\infty} \times {}^0\mathcal{U}_\infty \times (C^0(\mathbb{R}_0^+, \underline{H}^1) \cap L_\infty^2 H^2)$ 中存在唯一的整体强解 (η, u, q)。此外，该解满足具有代数时间衰减的稳定性估计：对于任意 $t > 0$,

$$
\mathcal{E}(t) + \mathfrak{E}(t) + \int_0^t (\mathcal{D}(\tau) + \mathfrak{D}(\tau))\mathrm{d}\tau \lesssim \|(\nabla\eta^0, u^0)\|_2^2. \tag{2.4}
$$

此外，对于任意 $t > 0$,

$$
\langle t\rangle^3 \|u\|_0^2 \lesssim \|(\nabla\eta^0, u^0)\|_2^2, \tag{2.5}
$$

$$
\langle t\rangle \|\eta_1(t) - \eta_1^\infty\|_0^2 \lesssim \|(\nabla\eta^0, u^0)\|_2^2, \tag{2.6}
$$

其中 $\eta_1^\infty \in H^2$ 仅依赖于 y_2。

注 2.1. 需要指出的是，在某些情况下 $\kappa_{\mathrm{C}}=+\infty$。例如，我们可以选择$\bar{\rho}'\geqslant 0$，使得存在四个正实数 $\tilde{c}_1$、 $\tilde{c}_2$、 s、 δ 以及一个区间 $(y_2^0-\delta,y_2^0+\delta)\subset(0,h)$，满足

$$\tilde{c}_1\leqslant\frac{\bar{\rho}'}{|y_2-y_2^0|^{2+s}}\leqslant\tilde{c}_2\quad\text{for any } y_2\in(y_2^0-\delta,y_2^0+\delta),$$

请参阅 [64, 命题 2.1] 的证明以及 (A.14) 中的构造方法。不过，由于我们关注毛细作用的抑制效应，这里根据稳定化条件 (1.17) 排除了这种情况 $\kappa_{\mathrm{C}}=+\infty$。

注 2.2. 我们很容易发现

$$0<\kappa_{\mathrm{C}}\leqslant g\|\bar{\rho}'\|_{L^\infty}\|(\bar{\rho}')^{-1}\|_{L^\infty}^2(\pi^2h^{-2}+L^{-2})^{-1}.$$

特别地，如果 RT 密度剖面是线性的，那么

$$\kappa_{\mathrm{C}}=g/(\pi^2h^{-2}+L^{-2})\bar{\rho}',$$

见引理 A.7。作为一个推论，我们发现，周期单元的长度越短，毛细作用的稳定效应就越强。内部表面张力对 RT不稳定性的抑制作用中也能观察到这种现象 [36, 62], ，但磁张力对 RT不稳定性的抑制作用中则不存在这种现象 [45, 63]。

注 2.3. 对每个固定的 $t\in\mathbb{R}_0^+$，定理 2.1 中的解 $\eta(y,t)$ 属于 H^3_γ。令$\zeta=\eta+y$，则根据引理 A.4， ζ 对每个 $t\in\mathbb{R}_0^+$ 都满足 (1.21) 和 (1.22)。我们将 ζ 的逆变换记为 ζ^{-1}，并定义

$$(\varrho,v,\beta)(x,t):=(\bar{\rho}(y_2)-\bar{\rho}(\zeta_2),u(y,t),q(y,t))|_{y=\zeta^{-1}(x,t)}.\tag{2.7}$$

因此，我们可以很容易地验证，(ϱ,v,β) 是 CRT问题 (1.12)–(1.14) 的一个强解，并且当 δ 充分小时，满足类似于 (2.4) 的稳定性估计。

注 2.4. 在定理 2.1 中，我们假设

$$(\bar{\rho}\eta_1^0)_\Omega=(\bar{\rho}u_1^0)_\Omega=0.$$

如果 $(\bar{\rho}\eta_1^0)_\Omega,(\bar{\rho}u_1^0)_\Omega\neq 0$，我们可以定义 $\bar{\eta}_1^0:=\eta_1^0-(\bar{\rho}\eta_1^0)_\Omega(\bar{\rho})^{-1}\Omega$，$\bar{u}_1^0:=u_1^0-(\bar{\rho}u_1^0)_\Omega(\bar{\rho})^{-1}\Omega$ 和 $(\bar{\eta}_2^0,\bar{u}_2^0):=(\eta_2^0,u_2^0)$。于是，根据定理 2.1，存在一个具有初始数据 $(\bar{\eta}^0,\bar{u}^0)$ 的 TCRT 问题的唯一整体强解 $(\bar{\eta},\bar{u},q)$。容易验证，$(\eta_1,\eta_2,u_1,u_2,q):=(\bar{\eta}_1+t(\bar{\rho}u_1^0)_\Omega(\bar{\rho})^{-1}\Omega+(\bar{\rho}\eta_1^0)_\Omega(\bar{\rho})^{-1}\Omega\quad\bar{\eta}_2,\bar{u}_1+(\bar{\rho}u_1^0)_\Omega(\bar{\rho})^{-1}\Omega\quad\bar{u}_2,q)$ 是具有初始数据 (η^0,u^0) 的 TCRT 问题的唯一强解。

注 2.5. 此外，若定理 2.1 中的初始数据 (η^0,u^0) 满足奇偶性条件 $(\eta_1^0,u_1^0)(y_1,y_2)=-(\eta_1^0,u_1^0)(-y_1,y_2)$ 和 $(\eta_2^0,u_2^0)(y_1,y_2)=(\eta_2^0,u_2^0)(-y_1,y_2)$，则有$\eta_1^\infty=0$ 在 (2.6) 中。

注 2.6. 值得注意的是，我们对定理 2.1 的证明高度依赖二维结构，因此无法推广到相应的三维情形。不过，基于 [53], 中的线性三维稳定性结果，我们认为，毛细作用对RT不稳定性的抑制现象应当能在三维NSK系统中得到验证。这一猜想将在未来进一步研究。

现在，我们概述定理 2.1 的证明，该证明在 [45]中论证的基础上作了调整，并进一步引入了新的思路。整体小解存在性证明的关键步骤是推导先验一致时间能量估计 (2.4)。为此，设 (η, u) 是 TCRT 问题的一个解，满足对于某个 $T > 0$,

$$(\bar{\rho}\eta_1)_\Omega \equiv 0 \quad \text{for any} \quad t \in \overline{I_T}, \tag{2.8}$$

$$\det(I + \nabla\eta) = 1 \quad \text{in} \quad \Omega \times \overline{I_T}, \tag{2.9}$$

$$\sup_{t\in\overline{I_T}} \|(\nabla\eta, u)(t)\|_2 \leqslant \delta \in (0, 1]. \tag{2.10}$$

在上述先验假设下，Jiang–Jiang–Zhao [45] 推导出 TMRT 问题满足以下能量不等式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{E} + \mathcal{D} \leqslant 0, \tag{2.11}$$

其中，E 与 $\mathcal{E}$ 等价，前提是 TMRT 问题满足尖锐稳定性条件。显然，上述能量不等式立即蕴含稳定解的整体存在性。

然而，直接沿用 Jiang–Jiang–Zhao 的论证，我们会发现 TCRT 问题满足以下能量不等式

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{\mathcal{E}} + c\mathcal{D} \lesssim \|\eta_2\|_{2,1}\|\eta\|_3^2 + (&\|\partial_2\eta_2\|_{1,0}^{1/2}\|\partial_2^2\eta_2\|_0^{1/2} \\ &+ \|\partial_2\eta_2\|_{\underline{1},0})(\|\partial_2^2\eta_1\|_{1,0}^{1/2}\|\partial_2^3\eta_1\|_0^{1/2} + \|\partial_2^2\eta_1\|_{\underline{1},0})\end{aligned} \tag{2.12}$$

对于某个能量泛函 $\mathcal{E}$，在稳定性条件 (1.15) 和 (1.17) 下，它与 $\mathcal{E}$ 等价。特别地，在 $(0, t)$ 上对 (2.12) 积分，可得以下能量估计

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(t) + \int_0^t \mathcal{D}(\tau)\mathrm{d}\tau \lesssim \|(\nabla\eta^0, u^0)\|_2^2 + \int_0^t (&\|\eta_2\|_{2,1}\|\eta\|_3^2 + (\|\partial_2\eta_2\|_{1,0}^{1/2}\|\partial_2^2\eta_2\|_0^{1/2} \\ &+ \|\partial_2\eta_2\|_{\underline{1},0})(\|\partial_2^2\eta_1\|_{1,0}^{1/2}\|\partial_2^3\eta_1\|_0^{1/2} + \|\partial_2^2\eta_1\|_{\underline{1},0}))\mathrm{d}\tau.\end{aligned} \tag{2.13}$$

我们指出，不等式 (2.12) 右端的所有项都与毛细作用有关。显然，我们不能直接期望从 (2.13) 得到能量估计的闭包，因此还需要进一步从方程组 (1.29) 中挖掘新的能量估计。

首先，让我们回顾线性化 TCRT 问题的解 (ς, v) 所满足的基本能量等式：

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\sqrt{\bar{\rho}}v\|_0^2 - E(\varsigma)\right) + \|\nabla v\|_0^2 = 0. \tag{2.14}$$

为简便起见，我们将 (ς, v) 称为 TCRT 问题的线性解（即线性化 TCRT 问题的解），它由 (2.14) 满足基本能量估计：

$$\|(\varsigma_2, \nabla\varsigma_2)(t)\|_0^2 + \|v(t)\|_0^2 + \int_0^t \|\nabla v\|_0^2 \lesssim \|(\varsigma_2^0, \nabla\varsigma_2^0)\|_0^2 + \|v^0\|_0^2.$$

类似地，TMRT 问题的线性解（同样记为（ς, v））满足如下基本能量估计：

$$\|(\varsigma_2, \partial_1\varsigma)(t)\|_0^2 + \|v(t)\|_0^2 + \int_0^t \|\nabla v\|_0^2 \lesssim \|(\varsigma_2^0, \partial_1\varsigma^0)\|_0^2 + \|v^0\|_0^2.$$

注意到在线性化问题中，$\mathrm{div}\varsigma = 0$，因此不难看出，两个范数 $\|\nabla\varsigma_2(t)\|_0$和 $\|\partial_1\varsigma(t)\|_0$ 彼此等价。受这两个范数等价性以及线性化 TMRT 问题的稳定解具有代数时间衰减 [45], 这一事实的启发，我们猜想线性化 CRT问题的解 ς 也具有与线性化 TMRT 问题的解相同的时间衰减，即

$$\begin{aligned}&\langle t\rangle\|\partial_2^2(\partial_1\varsigma_1,\partial_2\varsigma_2)\|_0^2+\langle t\rangle^2\|\partial_2(\partial_1\varsigma_1,\partial_2\varsigma_2)\|_{\underline{1},0}^2+\langle t\rangle^3(\|\varsigma_2\|_0^2+\|(\partial_2\varsigma_2,\partial_1\varsigma)\|_{\underline{2},0}^2)\\&+\int_0^t(\langle\tau\rangle\|\partial_2(\partial_1\varsigma_1,\partial_2\varsigma_2)\|_{\underline{1},0}^2+\langle\tau\rangle^2(\|\varsigma_2\|_0^2+\|(\partial_2\varsigma_2,\partial_1\varsigma)\|_{\underline{2},0}^2))\mathrm{d}\tau\lesssim\|(\nabla\varsigma^0,v^0)\|_2^2.\end{aligned}\tag{2.15}$$

掌握了 ς 的时间衰减后，我们可以进一步从线性化 TCRT 问题推导出 v 及其对应压力函数 σ 的时间衰减:

$$\begin{aligned}&\langle t\rangle^2(\|v\|_2^2+\|\sigma\|_1^2)+\langle t\rangle^3\|v_t\|_0^2+\int_0^t(\langle\tau\rangle(\|v\|_{\underline{1},2}^2\\&+\|\sigma\|_{\underline{1},1}^2)+\langle\tau\rangle^2\|v\|_1^2+\langle\tau\rangle^3(\|\partial_1v\|_{\underline{1},1}^2+\|v_\tau\|_1^2))\mathrm{d}\tau\lesssim\|(\nabla\varsigma^0,v^0)\|_2^2.\end{aligned}\tag{2.16}$$

基于上述线性分析，我们自然认为，TCRT 问题的解（η,u）也具有与线性解相同的上述两种时间衰减估计，因此在（2.2）和（2.3）中分别引入涉及时间衰减的两个记号 $\mathfrak{E}$ 和 $\mathfrak{D}$ 。此外，受 η时间衰减的启发，我们由（2.13）推得

$$\begin{aligned}&\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}\mathcal{E}(\tau)+\int_0^t\mathcal{D}(\tau)\mathrm{d}\tau\\&\lesssim\|(\nabla\eta^0,u^0)\|_2^2+\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}\left(\langle\tau\rangle^{3/2}\|\eta_2(\tau)\|_{2,1}\mathcal{E}(\tau)+\sqrt{\mathfrak{E}(\tau)\|\partial_2^2\eta_1(\tau)\|_{\underline{1},0}}\mathcal{E}^{1/4}(\tau)\right).\end{aligned}\tag{2.17}$$

显然，我们还需进一步估计 $\mathfrak{E}$ 和 $\|\partial_2^2\eta_1\|_{\underline{1}\,0}^{1/2}$, 分别见（3.108）和（3.111）。由于去掉（2.12）中对 η 的三阶法向估计后，很容易得到 $\|\partial_2^2\eta_1\|_{\underline{1}\,0}^{1/2}$, 的估计，因此接下来我们重点说明 $\mathfrak{E}$的估计。

由于 Jiang–Jiang–Zhao 已经建立了 [45], 中 TMRT 问题稳定解的时间衰减估计，因此我们也期望遵循他们的论证，推导出所需的时间衰减估计。然而，我们将面临两个困难:

(1) 由于毛细作用的线性部分包含二阶法向导数，TCRT 问题的解 (v,q) 的时间衰减速度比 TMRT 问题的解慢。如果直接沿用 [45] 中的方法推导涉及 $\langle t\rangle^3$的时间衰减估计，这种较慢的时间衰减行为会导致无法控制涉及压力的非线性积分（即在区域 Ω 上的被积函数是至少三个函数的乘积，例如 η、 u 和 q）。因此，我们必须提出新的思路。

(2) 在某些涉及毛细作用的非线性项中，总是存在一个不随时间衰减的导数 $\partial_2\eta_1$。这也给推导涉及 $\langle t\rangle^3$的时间衰减估计带来了困难。

为克服第一个困难，我们利用 $\mathrm{div}\eta$、$\mathrm{div}_{\mathcal{A}}u$ 和 ∂_1p 表达式中结构的精细性质，处理涉及压力的非线性积分，并获得更多切向估计，这些估计具有更快的时间衰减，参见 (3.49) 和 (3.60) 的导数。至于第二个困难，我们将利用能量积分的结构、关系式 $(1.32)_1$ 以及

不可压缩条件，将涉及 $\partial_2\eta_1$ 的非线性积分改写为其他非线性积分之和（这些积分不含 $\partial_2\eta_1$），以及涉及 $\partial_2\eta_1$ 的积分的时间导数；例如，参见引理 3.4 证明中对 $I_{8,\,i}$ 的估计。克服这两个困难后，我们便能在 $\mathfrak{E}$中建立所需的时间衰减估计。

将上述 $\mathfrak{E}$ 的能量估计加到 (2.17) 上，然后利用杨氏不等式和 $\|\partial_2^2\eta_1\|_{\underline{1}\,0}^{1/2}$ 的估计，即可得到如下能量估计

$$\begin{aligned}&\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}(\mathcal{E}(\tau)+\mathfrak{E}(\tau))+\int_0^t(\mathcal{D}(\tau)+\mathfrak{D}(\tau))\mathrm{d}\tau\\&\lesssim\|(\nabla\eta^0,u^0)\|_2^2+\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}(\langle\tau\rangle^{3/2}\|\eta_2(\tau)\|_{2,1}\mathcal{E}(\tau)+\langle\tau\rangle^3\|u(\tau)\|_2^4)\\&\quad+\int_0^t(\|\eta_2\|_{2,1}\|\eta\|_1\|\eta\|_3+\mathcal{I})\mathrm{d}\tau,\end{aligned}\tag{2.18}$$

$\mathcal{I}$ 的定义见 (3.109)。

通过仔细观察被积函数 $\mathcal{I}$ 的表达式，我们很容易提出以下附加先验假设

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}:=&\langle t\rangle(\|\partial_2^2\eta_1\|_{1,0}^2+\|\partial_2^3\eta_2\|_0^2)+\langle t\rangle^2(\|\partial_2(\partial_1\eta_1,\partial_2\eta_2)\|_{\underline{1},0}^2\\&+\|u\|_2^2)+\langle t\rangle^3(\|\eta_2\|_0^2+\|(\partial_2\eta_2,\partial_1\eta)\|_{\underline{2},0}^2)\leqslant\delta^2\quad\text{for any}\quad t\in\overline{I_T}.\end{aligned}\tag{2.19}$$

在上述先验假设下，不等式 (2.18) 右端最后两项可由左端两项吸收，从而闭合能量估计（或得到 (2.4)）。

借助 (2.4) 以及命题 3.2 中 TCRT 问题的唯一局部（时间）可解性，我们立即进一步得到唯一整体可解性。利用 $(1.32)_2$ 和 (2.4) 的抛物结构，我们还可以提高 $\|u\|_0^2$ 的时间衰减率，从而得到 (2.5)。最后，通过渐近分析方法，由 (2.4) 和 (2.5) 很容易得到 (2.6)。

2.2. 不稳定性

我们指出，在条件 $\kappa\in[0,\kappa_{\mathrm{C}}$ 下，不能期待 TCRT 问题具有稳定性结果。事实上，我们有如下不稳定性结果。

定理 2.2（不稳定性）。设 μ 和 κ 为正实数，且 $\bar\rho$ 满足（1.9）和（1.10）。若 $\kappa\in[0,\kappa_{\mathrm{C}}$，则平衡态（$\bar\rho$, 0）在 Hadamard意义下是不稳定的，即存在正实数 ϖ、ϵ、δ_0 和（$\tilde\eta^0$、η^{r}、$\tilde u^0$、u^{r}）$\in{}^0\mathcal{H}_{\mathrm{s}}^3$，使得对于任意 $\delta\in$（0，δ_0]，初始数据

$$(\eta^0,u^0):=\delta(\tilde\eta^0,\tilde u^0)+\delta^2(\eta^{\mathrm{r}},u^{\mathrm{r}}),$$

在$[0,T_{\max})$上，存在唯一的强解（η、u、q）满足 TCRT 问题（1.29）和（1.33），其中（η、u、q）$\in\widetilde{\mathfrak{H}}^{1,\,3,\,\tau}\times{}^0\mathcal{U}_\tau\times(C^0(\overline{I_\tau},\underline{H}^1)\cap L_\tau^2H^2)$ 对于任意给定的 $\tau\in I_{T^{\max}}$，且 $T_{\max}$ 表示该解的最大存在时间。此外，该解满足

$$\begin{aligned}&\|\bar\rho(y_2)-\bar\rho(\eta_2(y,T^\delta)+y_2)\|_{L^1},\quad\|\chi_i(T^\delta)\|_{L^1},\quad\|\partial_1\chi_i(T^\delta)\|_{L^1},\\&\|\partial_2\chi_i(T^\delta)\|_{L^1},\quad\|\mathcal{A}_{1k}\partial_k\chi_i(T^\delta)\|_{L^1},\quad\|\mathcal{A}_{2k}\partial_k\chi_i(T^\delta)\|_{L^1}\geqslant\epsilon\end{aligned}\tag{2.20}$$

对于某个逃逸时间 $T^\delta:=\Lambda^{-1}\ln(2\epsilon/\varpi\delta)\in I_{T^{\text{最大值}}}$，其中 $i=1$、2 和 $\chi=\eta$或 u。

注 2.7. 应当注意，由于 $\bar\rho$ 满足 (1.10)，且 κ_{C} 在上述定理中允许为无穷大，因此 $\kappa_{\mathrm{C}}>0$。

注 2.8. 通过 (2.7) 中拉格朗日坐标的逆变换以及 (2.20) 中的不等式，我们很容易得到欧拉坐标下相应的不稳定性：对于 $i=1,2$,

$$\|\varrho(T^\delta)\|_{L^1},\ \|v_i(T^\delta)\|_{L^1},\ \|\partial_1 v_i(T^\delta)\|_{L^1},\ \|\partial_2 v_i(T^\delta)\|_{L^1}\geqslant\epsilon.$$

此外，上述二维不稳定性结果自动蕴含相应的三维结果，其中三维板状区域分别关于空间变量的两个水平分量具有水平周期性。

我们可以采用 [45] 中标准的自举不稳定性方法（感兴趣的读者可参阅 [22, 26–28, 37, 44] 中的其他版本），轻松地证明定理 2.2。为完整起见，我们将在第 4 节简要概述证明。

本文其余部分安排如下。第 3 节和第 4 节分别给出定理 2.1 和定理 2.2 的证明。最后，我们在附录中列出一些将在第 3–4 节用到的数学结果。

3. 定理 2.1 的证明

本节旨在证明定理 2.1。证明的关键步骤是为 TCRT 问题 (1.29) 和 (1.33) 建立时间衰减能量估计 (2.4)。为此，设 (η,u,q) 是 TCRT 问题的一个解，并满足 (2.8)–(2.10)，其中 δ 充分小，且 δ 的小量条件取决于 $\bar\rho$、μ、g、κ 和 Ω。需要指出的是，$\bar\rho$ 和 κ 满足定理 2.1 中的假设。

3.1. 初步估计

我们首先推导一些关于 (η,u) 的初步估计。

引理 3.1. 对于任意给定的 $t\in\overline{I_T}$，有：

(1) $\operatorname{div}\eta$ 的估计：

$$\|\operatorname{div}\eta\|_i\lesssim\|\eta\|_{1,i}\|\eta\|_3\quad for\ \ 0\leqslant i\leqslant 2, \tag{3.1}$$

$$\|\operatorname{div}\eta\|_{i,0}\lesssim\begin{cases}\|\eta\|_{1+i,0}\|\eta\|_3 & for\ \ i=0,1;\\ \|\eta\|_{3,0}\|\eta\|_3+\|\eta_1\|_{2,1}\|\eta_2\|_{2,1} & for\ \ i=2,\end{cases} \tag{3.2}$$

$$\|\operatorname{div}\eta\|_{1,1}\lesssim\|\eta\|_{2,1}\|\eta\|_3. \tag{3.3}$$

(2) 关于 η、u 和 u_t 的 Poincaré 不等式：对于 $i=1$、2 和 $0\leqslant j\leqslant 2$,

$$\|\eta_i\|_{j,1}\lesssim\|\nabla\eta_i\|_{j,0}, \tag{3.4}$$

$$\|u_i\|_{j,1}\lesssim\|\nabla u_i\|_{j,0}, \tag{3.5}$$

$$\|\partial_t u_i\|_1\lesssim\|\nabla\partial_t u_i\|_0. \tag{3.6}$$

(3) 旋度估计：设 $0\leqslant i\leqslant 2$，则对于充分小的 δ,

$$\|\eta\|_{i,3-i}\lesssim\|\operatorname{curl}\eta\|_{i,2-i}. \tag{3.7}$$

(4) $(\partial_1\eta_1,\partial_2\eta_2,\partial_2 u_2)$ 的估计：当 δ 充分小时,

$$\|\partial_2^j\eta_2\|_{i,0}\lesssim\|\eta\|_{1+i,j-1}\quad for\ \ 1\leqslant i+j\leqslant 3\ \ and\ \ 1\leqslant j, \tag{3.8}$$

$$\|\eta_1\|_{1+i,j}\lesssim\|\eta_2\|_{i,1+j}\quad for\ \ 0\leqslant i+j\leqslant 2, \tag{3.9}$$

$$\|\partial_2 u_2\|_0\lesssim\|u\|_{1,0}+\|\eta_2\|_{2,1}\|\partial_2 u_1\|_0. \tag{3.10}$$

注 3.1. 鉴于 (3.4)、(3.8)、(3.9) 和 (A.5)，容易验证

$$\|\partial_1\eta_1\|_{\underline{i},j-1} \lesssim \|\eta_2\|_{\underline{i},j} \lesssim \|\eta_2\|_{i,j} \text{ for } 1 \leqslant i+j \leqslant 3 \text{ and } 1 \leqslant j. \tag{3.11}$$

Proof. 我们依次只估计 (3.3) 和 (3.8)–(3.10)，因为其余估计可在满足条件 (2.8)–(2.10) 时由 [45] 中的引理 2.1 和引理 2.2 得到。

回顾 (2.9)，可知

$$\mathrm{div}\eta = \partial_2\eta_1\partial_1\eta_2 - \partial_1\eta_1\partial_2\eta_2, \tag{3.12}$$

对上述恒等式关于 y_1 求导，得到

$$\partial_1\mathrm{div}\eta = \partial_2\eta_1\partial_1^2\eta_2 + \partial_2\partial_1\eta_1\partial_1\eta_2 - \partial_1^2\eta_1\partial_2\eta_2 - \partial_1\eta_1\partial_2\partial_1\eta_2.$$

对上述恒等式取范数 $\|\cdot\|_1$，再利用 (A.2)、(A.3) 和 (A.5)，即可得到 (3.3)。

由 (3.12)，可得

$$\|\partial_2^j\eta_2\|_{i,0} \lesssim \|\eta_1\|_{1+i,j-1} + \|\mathrm{div}\eta\|_{i,j-1}.$$

利用 (3.1)–(3.3)，当 δ 充分小时，可由上述估计进一步推出 (3.8)。类似地，有

$$\|\eta_1\|_{1+i,j} \lesssim \|\eta_2\|_{i,1+j} + \|\mathrm{div}\eta\|_{i,j}.$$

利用 (3.1)–(3.3)，我们还可得到 (3.9)。

回顾 $(1.32)_3$, 可得

$$\partial_2 u_2 = -\partial_1 u_1 - \tilde{\mathcal{A}}_{jk}\partial_k u_j. \tag{3.13}$$

将 $\|\cdot\|_0$ 应用于上述恒等式可得

$$\|\partial_2 u_2\|_0 \lesssim \|u_1\|_{1,0} + \|\tilde{\mathcal{A}}_{jk}\partial_k u_j\|_0 \lesssim \|u\|_{1,0} + \|\partial_1\eta_2\|_{\underline{1},1}\|\partial_2 u_1\|_0 + \|\eta\|_3\|\partial_2 u_2\|_0, \tag{3.14}$$

结合 (3.11)，可得到 (3.10)。 □

引理 3.2. 对于任意给定的 $t \in \overline{I_T}$，有

(1) 涉及重力项的估计：当 δ 足够小时，

$$\|\mathcal{G}\|_{\underline{1},0} \lesssim \|\eta_2\|_0\|\eta_2\|_{2,1}, \tag{3.15}$$

$$\|\mathcal{G}\|_1 \lesssim \|\eta_2\|_0, \tag{3.16}$$

其中 $\mathcal{G} := G^\eta - g\bar{\rho}'\eta_2$。

(2) 涉及毛细作用项的估计：令 $1 \leqslant j$、k、$l \leqslant 2$，其中 δ 足够小，

$$\left\|\mathcal{N}_{j,k}^{\eta,1}\right\|_{i,0} \lesssim \begin{cases} \|\eta_2\|_1\|\eta\|_3 & for\ \ i=0; \\ \|\eta_2\|_{i,1}\|\eta\|_3 + \|\partial_2\eta_1\|_{i,0}\|\eta_2\|_{1,2} & for\ \ i=1,\ 2, \end{cases} \tag{3.17}$$

$$\left\|\mathcal{N}_{j,k}^{\eta,2}\right\|_{i,0} \lesssim \begin{cases} \|\eta_2\|_1\|\eta_2\|_3 & for\ \ i=0; \\ \|\eta_2\|_{1,2}^2 + \|\eta_2\|_{i,1}\|\eta_2\|_3 & for\ \ i=1,\ 2, \end{cases} \tag{3.18}$$

$$\left\|\partial_k \mathcal{N}_{j,k}^{\eta,l}\right\|_{i,0} \lesssim \|\eta_2\|_{i,2}\|\eta_2\|_3 + \|\eta_2\|_{i+1,1}\|\eta\|_3 \qquad for\ \ i=0,\ 1, \tag{3.19}$$

$$\|\partial_2(\mathcal{N}^{\eta,111},,\mathcal{N}^{\eta,122},)\|_{1,0} \lesssim \|\eta_2\|_{2,1}\|\eta\|_3, \tag{3.20}$$

$$\left\|\nabla\mathcal{N}_{j,k}^{\eta,l}\right\|_{2,0} \lesssim \|\eta_2\|_{m,2+n}\|\eta\|_3 + \|\eta_2\|_{1,2}\|\eta\|_{m,2+n} \qquad for\ \ 0\leqslant m+n\leqslant 1, \tag{3.21}$$

$$\|\nabla\mathcal{N}_{,j}^{\eta,n}{}_{,k}^{m}\|_1 \lesssim \|\eta_2\|_3^2, \tag{3.22}$$

$$\left\|\partial_t \mathcal{N}_{j,k}^{\eta,l}\right\|_0 \lesssim \|\eta\|_3\|u_2\|_1 + \|\eta_2\|_{1,1}\|u\|_2, \tag{3.23}$$

其中我们定义

$$\mathcal{N}_{j,k}^{\eta,1} := \begin{cases} \kappa|\bar\rho'|^2(\tilde{\mathcal{A}}_{2k} - \underline{\tilde{\mathcal{A}}}_{2k})\partial_1\eta_2 & for\ \ j=1; \\ \kappa|\bar\rho'|^2(\tilde{\mathcal{A}}_{21}\partial_1\eta_2(\mathcal{A}_{ik}\mathcal{A}_{i2}+\mathcal{A}_{2k}) + (\tilde{\mathcal{A}}_{2k} - \underline{\tilde{\mathcal{A}}}_{2k})\partial_2\eta_2) & for\ \ j=2, \end{cases} \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{j,k}^{\eta,2} :=& \kappa(\mathcal{A}_{ik}(|\bar\rho'(y_2+\eta_2)|^2\mathcal{A}_{il}\partial_l\eta_2\mathcal{A}_{jm}\partial_m\eta_2 + (|\bar\rho'(y_2+\eta_2)|^2 \\ &- |\bar\rho'|^2)(\mathcal{A}_{i2}(\mathcal{A}_{j1}\partial_1\eta_2 + 2\mathcal{A}_{j2}\partial_2\eta_2) + \mathcal{A}_{i1}\mathcal{A}_{j2}\partial_1\eta_2) \\ &+ |\bar\rho'|^2(\mathcal{A}_{i2}(\underline{\tilde{\mathcal{A}}}_{j1}\partial_1\eta_2 + 2\tilde{\mathcal{A}}_{j2}\partial_2\eta_2) + \tilde{\mathcal{A}}_{i2}(\delta_{j1}\partial_1\eta_2 + 2\delta_{j2}\partial_2\eta_2) \\ &+ (\mathcal{A}_{i1}\tilde{\mathcal{A}}_{j2} + \underline{\tilde{\mathcal{A}}}_{i1}\delta_{j2})\partial_1\eta_2) + \mathcal{A}_{i2}\mathcal{A}_{j2}\mathcal{R} + (|\bar\rho'|^2)'(\mathcal{A}_{i2}\tilde{\mathcal{A}}_{j2} \\ &+ \tilde{\mathcal{A}}_{i2}\delta_{j2})\eta_2) + \underline{\tilde{\mathcal{A}}}_{ik}(|\bar\rho'|^2(\delta_{i2}(\delta_{j1}\partial_1\eta_2 + 2\delta_{j2}\partial_2\eta_2) + \delta_{i1}\delta_{j2}\partial_1\eta_2) \\ &+ (|\bar\rho'|^2)'\delta_{i2}\delta_{j2}\eta_2) - \underline{\tilde{\mathcal{A}}}_{jk}\partial_2(|\bar\rho'|^2\eta_2)) \end{aligned} \tag{3.25}$$

and

$$\mathcal{R} := \int_0^{\eta_2} (\eta_2(y,t)-z)\,(|\bar\rho'(s)|^2)''|_{s=y_2+z}\mathrm{d}z. \tag{3.26}$$

(3) 涉及黏性项的估计：对于 $0\leqslant i\leqslant 2$, $l=1,2$ 和 $k=0,1$,

$$\|\mathcal{N}_{j,l}^{\mu}\|_{i,0} \lesssim (1-\delta_{i0})\|\eta\|_{i,1}\|u\|_{\underline{1},2} + \|\eta\|_3\|u\|_{i,1}, \tag{3.27}$$

$$\|\partial_2\mathcal{N}_{j,2}^{\mu}\|_{k,0} \lesssim \|\eta\|_{1+k,1}\|u\|_{\underline{1},2} + \|\eta\|_3\|u\|_{1+k,1}, \tag{3.28}$$

$$\|\mathcal{N}^{\mu}\|_{k,0} \lesssim \|\eta\|_{1+k,1}\|u\|_{\underline{1},2} + \|\eta\|_{\underline{1},2}\|u\|_{1+k,1}, \tag{3.29}$$

$$\|\mathcal{N}^{\mu}\|_{k} \lesssim \|\eta\|_3\|u\|_{k+2}, \tag{3.30}$$

其中我们定义

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^{\mu} =& \partial_l(\mathcal{N}_{1,l}^{\mu}, \mathcal{N}_{2,l}^{\mu})^{\top}, \\ \mathcal{N}_{j,1}^{\mu} :=& \mu(\mathcal{A}_{k1}\tilde{\mathcal{A}}_{km} + \tilde{\mathcal{A}}_{m1})\partial_m u_j = \mu((2\partial_2\eta_2 + (\partial_2\eta_1)^2 + (\partial_2\eta_2)^2)\partial_1 u_j - \Theta\partial_2 u_j), \\ \mathcal{N}_{j,2}^{\mu} :=& \mu(\mathcal{A}_{k2}\tilde{\mathcal{A}}_{km} + \tilde{\mathcal{A}}_{m2})\partial_m u_j = \mu((2\partial_1\eta_1 + (\partial_1\eta_1)^2 + (\partial_1\eta_2)^2)\partial_2 u_j - \Theta\partial_1 u_j), \\ \Theta :=& \partial_1\eta_2 + \partial_2\eta_1 + \partial_1\eta_2\partial_2\eta_2 + \partial_1\eta_1\partial_2\eta_1. \end{aligned}$$

Proof. **(1)** 根据 **(2.10)** 和引理 **A.4**, $\zeta=\eta+y$ 满足微分同胚性质 **(1.21)** 和 **(1.22)**，其中 δ 足够小。因此，对于任意 $y\in\Omega$, $\bar\rho^{(m)}(y_2+\eta_2)$ 有意义，并且

$$\bar\rho^{(m)}(y_2+\eta_2) - \bar\rho^{(m)}(y_2) = \int_0^{\eta_2} \bar\rho^{(m+1)}(s)|_{s=y_2+z}\mathrm{d}z \quad \text{for}\ \ 0\leqslant m\leqslant 4. \tag{3.31}$$

此外,

$$\sup_{y\in\overline{\Omega}}\sup_{z\in\Psi}\left|\bar\rho^{(m+1)}(s)|_{s=y_2+z}\right| \lesssim 1, \tag{3.32}$$

其中，对于 $\eta_2 \geqslant 0$， $\Psi := [0, \eta_2]$；否则为 $[\eta_2, 0]$。

利用 (3.31) 及关系式

$$\bar{\rho}(y_2+\eta_2) - \bar{\rho}(y_2) = \bar{\rho}'(y_2)\eta_2 + \int_0^{\eta_2} (\eta_2(y,t) - z)\, \bar{\rho}''(s)|_{s=y_2+z} \mathrm{d}z,$$

我们得到

$$\begin{aligned}
\mathcal{G} &= g \int_0^{\eta_2} (\eta_2(y,t) - z)\, \bar{\rho}''(s)|_{s=y_2+z} \mathrm{d}z, \\
\partial_1 \mathcal{G} &= g\big(\bar{\rho}'(s)|_{s=y_2+\eta_2} - \bar{\rho}'(y_2)\big)\partial_1\eta_2, \\
\partial_2 \mathcal{G} &= g\left(\int_0^{\eta_2} \partial_2\eta_2(y,t)\bar{\rho}''(s)|_{s=y_2+z} \mathrm{d}z + \int_0^{\eta_2} (\eta_2(y,t) - z)\, \bar{\rho}'''(s)|_{s=y_2+z} \mathrm{d}z\right).
\end{aligned}$$

借助估计式 (3.11)、(3.31)、(3.32) 和 (A.3)，我们进一步由上述三个恒等式推出 (3.15) 和 (3.16)。

(2) 回忆 $\mathcal{R}$ 在 (3.26) 中的定义，然后利用 (3.32)、(A.3) 和 (A.5)，可得

$$\|\mathcal{R}\|_{i,0} \lesssim \|\eta_2\|_{i,0}\|\eta_2\|_2, \ \|\nabla\mathcal{R}\|_{m,n} \lesssim \|\eta_2\|_{m,1+n}\|\eta_2\|_2 \text{ and } \|\mathcal{R}_t\|_0 \lesssim \|\eta_2\|_2\|u_2\|_0, \tag{3.33}$$

其中 $0 \leqslant i \leqslant 2$ 和 $0 \leqslant m+n \leqslant 1$。注意到

$$\Phi := |\bar{\rho}'(y_2+\eta_2)|^2 - |\bar{\rho}'(y_2)|^2 = (|\bar{\rho}'(y_2)|^2)'\eta_2 + \mathcal{R}, \tag{3.34}$$

因此，利用 (3.33)，我们很容易由上述恒等式推出

$$\|\Phi\|_{i,0} \lesssim \|\eta_2\|_{i,0}, \ \|\nabla\Phi\|_{m,n} \lesssim \|\eta_2\|_{m,1+n} \text{ and } \|\Phi_t\|_0 \lesssim \|u_2\|_0. \tag{3.35}$$

利用 (3.11)、(3.33)、(3.35)、(A.2) 和 (A.3)，可以得到 (3.18)–(3.23)。类似地，也可以验证 (3.17) 成立。

(3) 最后，再次利用 (A.2)、(A.3) 和 (A.5)，我们可以很容易地从 $\mathcal{N}_j^{\mu}{}_{,1}$、$\mathcal{N}_j^{\mu}{}_{,2}$ 和 $\mathcal{N}^{\mu}$ 的表达式推导出 (3.27)–(3.30)。□

3.2. 切向估计

本小节旨在建立以下三个引理中给出的切向估计，其中包括 (η, u) 的水平导数以及 u 的时间导数的有界性。

引理 3.3. 对于充分小的 δ，当 $0 \leqslant i \leqslant 2$ 时，有

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int \bar{\rho}\partial_1^i\eta \cdot \partial_1^i u \mathrm{d}y + \frac{\mu}{2}\|\nabla\partial_1^i\eta\|_0^2\right) - E(\partial_1^i\eta) \\
&\lesssim \|u\|_{i,0}^2 + \|\eta\|_{i+1,0}(\|\eta\|_3\|u\|_{i,1} + \|\eta\|_{i,1}\|u\|_{\underline{1},2}) \\
&\quad + \delta_{i0}(\|\eta\|_{1,1}\|\eta\|_2\|u\|_1 + \|\eta\|_3(\|\eta_2\|_1^2 + \|\eta_2\|_1\|\eta_2\|_3) + \|\eta\|_{1,0}\|\eta\|_3\|\tilde{q}\|_0) \\
&\quad + (1-\delta_{i0})(\|\eta_2\|_{2,1}(\|\eta_2\|_{2,1}\|\eta\|_3 + \|\eta_2\|_{1,2}\|\eta_2\|_3) + \|\eta_2\|_{1,2}^3 + \|\eta_2\|_{2,1}\|\eta_2\|_{1,2}\|\tilde{q}\|_{\underline{1},1}),
\end{aligned} \tag{3.36}$$

其中 $\tilde{q} := q - \kappa\partial_2(|\bar{\rho}'|^2\eta_2)$ 和 $E(\cdot)$ 定义如式 (2.1) 所示。

Proof. 从现在起，我们定义

$$\mathcal{N}^{\eta}_{j,k}:=\mathcal{N}^{\eta,1}_{j,k}+\mathcal{N}^{\eta,2}_{j,k}\quad\text{and}\quad\mathcal{N}^{\eta}:=\partial_k(\mathcal{N}^{\eta}_{1,k},\mathcal{N}^{\eta}_{2,k})^{\top},$$

定义见 (3.24) 和 (3.25)，分别对应 $\mathcal{N}^{\eta,\ {}^{1}_{j\,k}}$，以及 $\mathcal{N}^{\eta,\ {}^{2}_{j\,k}}$。

利用关系式

$$\partial_j(\mathcal{A}_{ij}f)=\mathcal{A}_{ij}\partial_j f,\tag{3.37}$$

我们得到

$$\mu\Delta_{\mathcal{A}}u=\mu\Delta u+\mathcal{N}^{\mu}.\tag{3.38}$$

利用恒等式 (3.34)、(3.37) 以及

$$\begin{aligned}&\delta_{ik}\partial_k(|\bar\rho'|^2(\delta_{i2}(\delta_{j1}\partial_1\eta_2+2\delta_{j2}\partial_2\eta_2)+\delta_{i1}\delta_{j2}\partial_1\eta_2)+(|\bar\rho'|^2)'\delta_{i2}\delta_{j2}\eta_2)\\&=\delta_{2j}\mathrm{div}(|\bar\rho'|^2\nabla\eta_2)+\partial_j\partial_2(|\bar\rho'|^2\eta_2),\end{aligned}$$

我们可以计算得，对于 $j=1$ 和 2，

$$\begin{aligned}\mathcal{K}^{\eta}_{j}=&\kappa\mathcal{A}_{ik}\partial_k(|\bar\rho'(y_2+\eta_2)|^2\mathcal{A}_{il}\mathcal{A}_{jm}\partial_l(y_2+\eta_2)\partial_m(y_2+\eta_2)-|\bar\rho'|^2\mathcal{A}_{i2}\mathcal{A}_{j2})\\=&\kappa(\delta_{2j}\mathrm{div}(|\bar\rho'|^2\nabla\eta_2)+\mathcal{A}_{jk}\partial_k\partial_2(|\bar\rho'|^2\eta_2)\\&+\mathcal{A}_{ik}\partial_k(|\bar\rho'(y_2+\eta_2)|^2\mathcal{A}_{il}\partial_l\eta_2\mathcal{A}_{jm}\partial_m\eta_2+(|\bar\rho'(y_2+\eta_2)|^2\\&-|\bar\rho'|^2)(\mathcal{A}_{i2}(\mathcal{A}_{j1}\partial_1\eta_2+2\mathcal{A}_{j2}\partial_2\eta_2)+\mathcal{A}_{i1}\mathcal{A}_{j2}\partial_1\eta_2)\\&+|\bar\rho'|^2(\mathcal{A}_{i2}(\tilde{\mathcal{A}}_{j1}\partial_1\eta_2+2\tilde{\mathcal{A}}_{j2}\partial_2\eta_2)+\tilde{\mathcal{A}}_{i2}(\delta_{j1}\partial_1\eta_2+2\delta_{j2}\partial_2\eta_2)\\&+(\mathcal{A}_{i1}\tilde{\mathcal{A}}_{j2}+\tilde{\mathcal{A}}_{i1}\delta_{j2})\partial_1\eta_2)+\mathcal{A}_{i2}\mathcal{A}_{j2}\mathcal{R}+(|\bar\rho'|^2)'(\mathcal{A}_{i2}\tilde{\mathcal{A}}_{j2}\\&+\tilde{\mathcal{A}}_{i2}\delta_{j2})\eta_2)+\tilde{\mathcal{A}}_{ik}\partial_k(|\bar\rho'|^2(\delta_{i2}(\delta_{j1}\partial_1\eta_2+2\delta_{j2}\partial_2\eta_2)+\delta_{i1}\delta_{j2}\partial_1\eta_2)\\&+(|\bar\rho'|^2)'\delta_{i2}\delta_{j2}\eta_2)-\tilde{\mathcal{A}}_{jk}\partial_k\partial_2(|\bar\rho'|^2\eta_2))\\=&\kappa(\delta_{2j}\mathrm{div}(|\bar\rho'|^2\nabla\eta_2)+\mathcal{A}_{jk}\partial_k\partial_2(|\bar\rho'|^2\eta_2))+\partial_k\mathcal{N}^{\eta}_{j,k},\end{aligned}\tag{3.39}$$

其中 $\mathcal{R}$ 已在 (3.26) 中定义。

对于任意给定的 $0\leqslant i\leqslant 2$，将 ∂_1^i 应用于 (1.29) 和 (1.33)，再利用 (3.38) 和 (3.39)，可得

$$\begin{cases}\partial_1^i\eta_t=\partial_1^i u,\\\partial_1^i(\bar\rho u_t-\mu\Delta u)\\\qquad=\partial_1^i((\kappa\mathrm{div}(|\bar\rho'|^2\nabla\eta_2)+g\bar\rho'\eta_2+\mathcal{G})\mathbf{e}^2+\mathcal{N}^{\mu}+\mathcal{N}^{\eta}-\nabla_{\mathcal{A}}\tilde q),\\[\mathcal{A}_{kl}]\partial_l u_k+\mathcal{A}_{kl}\partial_1^i\partial_l u_k=0,\\\partial_1^i(\eta_2,u_2,\partial_2(\eta_1,u_1))|_{\partial\Omega}=0.\end{cases}\tag{3.40}$$

此外，由边界条件 (1.33) 可得

$$\partial_1^i\mathcal{N}^{\mu}_{1,2}|_{\partial\Omega}=\partial_1^i\mathcal{N}^{\eta}_{1,2}|_{\partial\Omega}=0.\tag{3.41}$$

将 $(3.40)_2$ 乘以 $\partial_1^i\eta$，然后使用分部积分、$(3.40)_1$, $(3.40)_4$ 以及 (3.41) 中 $\partial_1^i\mathcal{N}^{\eta}_1$ 的2 边界条件，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int\bar\rho\partial_1^i\eta\cdot\partial_1^i u\mathrm{d}y+\frac{\mu}{2}\|\nabla\partial_1^i\eta\|_0^2\right)-E(\partial_1^i\eta)=\|\sqrt{\bar\rho}\partial_1^i u\|_0^2+\sum_{j=1}^{5}I_{j,i},\tag{3.42}$$

其中

$$I_{1,i} := \int \partial_1^i \mathcal{G} \partial_1^i \eta_2 \mathrm{d}y,\ I_{2,i} := -\int \partial_1^i \mathcal{N}_{j,1}^{\mu} \partial_1^{i+1} \eta_j \mathrm{d}y,\ I_{3,i} := \int \partial_2 \partial_1^i \mathcal{N}_{j,2}^{\mu} \partial_1^i \eta_j \mathrm{d}y$$
$$I_{4,i} := -\int \partial_1^i \mathcal{N}_{j,k}^{\eta} \partial_k \partial_1^i \eta_j \mathrm{d}y, \quad \text{and} \quad I_{5,i} := -\int \partial_1^i \nabla_{\mathcal{A}} \tilde{q} \cdot \partial_1^i \eta \mathrm{d}y.$$

接下来我们将依次估计这五个积分 $I_{1,\ i}$ 至$I_{5,\ i}$。

（1）利用分部积分、H¨older 不等式和（3.15），我们推得 t

$$I_{1,i} \lesssim \begin{cases} \|\eta_2\|_0^2 \|\eta_2\|_{2,1} & \text{for } i = 0; \\ \|\eta_2\|_0 \|\eta_2\|_{2,1} \|\eta_2\|_{1+i,0} & \text{for } i = 1,\ 2. \end{cases} \tag{3.43}$$

（2）利用 H¨older 不等式和（3.27），我们 deduce that

$$I_{2,i} \lesssim \|\eta\|_{1+i,0} (\|\eta\|_{i,1} \|u\|_{\underline{1},2} + \|\eta\|_3 \|u\|_{i,1}). \tag{3.44}$$

（3）根据（3.28）和分部积分，我们同样有

$$I_{3,i} \lesssim \|\eta\|_{1+i,0} (\|\eta\|_{i,1} \|u\|_{\underline{1},2} + \|\eta\|_3 \|u\|_{i,1}), \quad i = 1,\ 2. \tag{3.45}$$

此外，我们还有（见 [45]中的（2.26））

$$I_{3,0} \lesssim \|\eta\|_{1,1} \|\eta\|_2 \|u\|_1. \tag{3.46}$$

（4）注意到 $\mathcal{N}^{\eta,\ 1\,1,\ 2} = 0$ 由（3.24）结合（j, k） =（1, 2），我们有

$$I_{4,i} = -\int (\partial_1^i \mathcal{N}_{1,1}^{\eta,1} \partial_1^{1+i} \eta_1 + \partial_1^i \mathcal{N}_{2,k}^{\eta,1} \partial_k \partial_1^i \eta_2 + \partial_1^i \mathcal{N}_{j,k}^{\eta,2} \partial_k \partial_1^i \eta_j) \mathrm{d}y.$$

因此使 用 (3.9)、(3.17) 和 (3.18)，由上述恒等式可得

$$I_{4,i} \lesssim \begin{cases} \|\eta\|_3 (\|\eta_2\|_1^2 + \|\eta_2\|_1 \|\eta_2\|_3) & \text{for} i = 0; \\ (\|\eta_2\|_{i,1} \|\eta\|_3 + \|\partial_2 \eta_1\|_{i,0} \|\eta_2\|_{1,2}) \|(\partial_1 \eta_1, \nabla \eta_2)\|_{i,0} & \\ \quad + \|\eta\|_{i,1} (\|\eta_2\|_{1,2}^2 + \|\eta_2\|_{i,1} \|\eta_2\|_3) \lesssim \|\eta_2\|_{i,1} (\|\eta_2\|_{1,2}^2 & \\ \quad + \|\eta_2\|_{i-1,2} \|\eta_2\|_3 + \|\eta_2\|_{i,1} \|\eta\|_3) + \|\eta_2\|_{i-1,2} \|\eta_2\|_{1,2}^2 & \text{for } i = 1,\ 2. \end{cases} \tag{3.47}$$

(5) 最后，我们控制积分项 $I_{5,\ i}$。回忆

$$\mathrm{div}_{\tilde{\mathcal{A}}} \eta = 2(\partial_1 \eta_1 \partial_2 \eta_2 - \partial_1 \eta_2 \partial_2 \eta_1),$$

我们对 $I_{5,\ i}$ 分部积分，然后利用 (3.2)、(3.11)、$(3.40)_4$ 和 (A.3)，得到

$$I_{5,0} = \int \mathrm{div}_{\tilde{\mathcal{A}}} \eta \tilde{q} \mathrm{d}y + \int \mathrm{div} \eta \tilde{q} \mathrm{d}y \lesssim \|\eta\|_{1,0} \|\eta\|_3 \|\tilde{q}\|_0, \tag{3.48}$$

且对于 $i = 1$，2，

$$I_{5,i} = \int \partial_1^{i+1} \eta \cdot \partial_1^{i-1} \nabla_{\tilde{\mathcal{A}}} \tilde{q} \mathrm{d}y + \int \partial_1^i \mathrm{div} \eta \partial_1^i \tilde{q} \mathrm{d}y$$

$$
\begin{aligned}
&=\int(\partial_1^{i+1}\eta_k\partial_1^{i-1}(\tilde{\mathcal{A}}_{k2}\partial_2\tilde{q})+\partial_1^{i+1}\eta_1\partial_1^{i-1}(\tilde{\mathcal{A}}_{11}\partial_1\tilde{q}))\mathrm{d}y-\int\partial_1^i(\partial_1\eta_1\partial_2\eta_2)\partial_1^i\tilde{q}\mathrm{d}y\\
&\quad-\int\partial_1^{i+1}\eta_2[\partial_1^{i-1},\partial_2\eta_1]\partial_1\tilde{q}\mathrm{d}y+\int[\partial_1^i,\partial_2\eta_1]\partial_1\eta_2\partial_1^i\tilde{q}\mathrm{d}y\\
&\lesssim\|\tilde{q}\|_{\underline{1},1}(\|\eta\|_{1+i,0}(\|\partial_1\eta\|_{\underline{i-1},1}+\|\eta_2\|_{i-1,2})+\|\partial_1\eta\|_{\underline{1},1}\|\partial_1\eta_2\|_{\underline{i-1},1})\\
&\lesssim\|\tilde{q}\|_{\underline{1},1}(\|\eta_2\|_{i,1}\|\eta_2\|_{i-1,2}+\|\eta_2\|_{i,1}\|\eta_2\|_{1,2}).
\end{aligned}\tag{3.49}
$$

因此，借助估计式 (3.43)–(3.49) 和 (A.5)，我们由 (3.42) 得到 (3.36)。证明至此完成。□

引理 3.4. 对于充分小的 δ，对于 $0\leqslant i\leqslant 2$，有

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\|\sqrt{\bar\rho}u\|_{i,0}^2-E(\partial_1^i\eta)+\frac{\kappa}{2}\|\bar\rho'\partial_2\eta_1\partial_1^{1+i}\eta_2\|_0^2\\
&-\kappa\int|\bar\rho'|^2\partial_2\eta_1\partial_1^{1+i}\eta_2\partial_2\partial_1^i\eta_2\mathrm{d}y\Big)+c\|u\|_{i,1}^2\\
&\lesssim\delta_{i0}\|\eta_2\|_1\|\eta_2\|_3\|u\|_1+(1-\delta_{i0})(\|\eta_2\|_{2,1}(\|\eta_2\|_3\|u\|_{2,1}+\|\eta_2\|_{2,1}\|u\|_{\underline{1},2})\\
&\quad+\|u\|_{2,1}(\|\eta_2\|_{1,2}^2+\|\eta\|_{3,0}\|u\|_3+\|\eta\|_{2,1}\|u\|_{\underline{1},2})\\
&\quad+\|\tilde{q}\|_{\underline{1},1}(\|\eta\|_{2,1}\|u\|_{2,1}+\|\eta\|_{3,0}(\|\eta_2\|_{1,2}\|u\|_{\underline{1},2}+\|\eta\|_3\|u\|_{2,1}))\\
&\quad+\|\eta\|_{3,0}\|u\|_{\underline{1},2}(\|\eta_2\|_{2,1}+\|u_t\|_1+\|\eta_2\|_{1,2}\|\eta_2\|_3+\|\eta\|_{2,1}\|u\|_{\underline{1},2})).
\end{aligned}\tag{3.50}
$$

Proof. 将 $(3.40)_2$ 乘以 $\partial_1^i u$in L^2，然后使用分部积分、$(3.40)_1$, $(3.40)_4$和 (3.41)，可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\sqrt{\bar\rho}u\|_{i,0}^2-E(\partial_1^i\eta)\right)+\mu\|\nabla u\|_{i,0}^2\\
&=\int\partial_1^i\mathcal{G}\partial_1^i u_2\mathrm{d}y-\int\partial_1^i\mathcal{N}_{j,l}^{\mu}\partial_l\partial_1^i u_j\mathrm{d}y\\
&\quad-\int\partial_1^i\mathcal{N}_{j,k}^{\eta}\partial_k\partial_1^i u_j\mathrm{d}y-\int\partial_1^i\nabla_{\mathcal{A}}\tilde{q}\cdot\partial_1^i u\mathrm{d}y=:\sum_{j=6}^{9}I_{j,i}.
\end{aligned}\tag{3.51}
$$

接下来，我们将依次估计四个积分 $I_{6,\ i}$ 至 $I_{9,\ i}$。

(1) 类似于 (3.43) 和 (3.44)，我们得到

$$
I_{6,i}\lesssim\begin{cases}\|\eta_2\|_0\|\eta_2\|_{2,1}\|u_2\|_0 & \text{for }\ i=0;\\ \|\eta_2\|_0\|\eta_2\|_{2,1}\|u_2\|_{1+i,0} & \text{for }\ i=1,\ 2\end{cases}\tag{3.52}
$$

and

$$
I_{7,i}\lesssim(1-\delta_{i0})\|\eta\|_{i,1}\|u\|_{\underline{1},2}\|u\|_{i,1}+\|\eta\|_3\|u\|_{i,1}^2.\tag{3.53}
$$

(2) 我们将 $I_{8,i}$ 重写如下

$$
\begin{aligned}
I_{8,i}=&\kappa\int|\bar\rho'|^2(\partial_1^i(\partial_2\eta_1\partial_1\eta_2)\partial_1^{1+i}u_1+\partial_1^i(\partial_2\eta_1\partial_2\eta_2-\partial_2\eta_1\partial_1\eta_2(2\partial_2\eta_1\\
&+\partial_1\eta_2(1+\partial_2\eta_2)+\partial_1\eta_1\partial_2\eta_1))\partial_1^{1+i}u_2+\partial_1^i(\partial_2\eta_1\partial_1\eta_2(2+3\partial_1\eta_1\\
&+|\partial_1(\eta_1,\eta_2)|^2))\partial_2\partial_1^i u_2)\mathrm{d}y-\int\partial_1^i\mathcal{N}_{j,k}^{\eta,2}\partial_k\partial_1^i u_j\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

$$= I_{8,i,1} + I_{8,i,2}, \tag{3.54}$$

其中我们定义

$$I_{8,i,1} = \kappa \int \big\{ |\vec{\rho}'|^2 (\partial_1^i (\partial_2\eta_1 \partial_1\eta_2)(\partial_1^{1+i} u_1 + 2\partial_2 \partial_1^i u_2) + \partial_1^i (\partial_2\eta_1 \partial_2\eta_2 - 2|\partial_2\eta_1|^2 \partial_1\eta_2)\partial_1^{1+i} u_2) \big\} \mathrm{d}y$$

and

$$I_{8,i,2} := \kappa \int \big\{ |\vec{\rho}'|^2 (\partial_1^i (\partial_2\eta_1 \partial_1\eta_2 (3\partial_1\eta_1 + |\partial_1(\eta_1,\eta_2)|^2)) \partial_2 \partial_1^i u_2 - \partial_1^i [\partial_2\eta_1 |\partial_1\eta_2|^2 (1+\partial_2\eta_2) + \partial_1\eta_1 |\partial_2\eta_1|^2 \partial_1\eta_2] \partial_1^{1+i} u_2) \big\} \mathrm{d}y - \int \partial_1^i \mathcal{N}_{j,k}^{\eta,2} \partial_k \partial_1^i u_j \mathrm{d}y.$$

利用 (3.13) 和 $(3.40)_1$，，积分 $I_{8,\ i,\ 1}$ 可进一步改写如下

$$I_{8,i,1} = \kappa \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int |\vec{\rho}'|^2 (\partial_2\eta_1 \partial_1^{1+i} \eta_2 \partial_2 \partial_1^i \eta_2 - |\partial_2\eta_1 \partial_1^{1+i} \eta_2|^2/2) \mathrm{d}y + \tilde{I}_{8,i,1}, \tag{3.55}$$

其中定义了

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{8,i,1} := \kappa \int \big\{ & |\vec{\rho}'|^2 ([\partial_1^i, \partial_2\eta_1]\partial_1\eta_2 (\partial_1^{1+i} u_1 + 2\partial_2 \partial_1^i u_2) \\ & + ([\partial_1^i, \partial_2\eta_1]\partial_2\eta_2 - 2[\partial_1^i, |\partial_2\eta_1|^2]\partial_1\eta_2)\partial_1^{1+i} u_2 \\ & - \partial_2\eta_1 \partial_1^{1+i} \eta_2 (\partial_1^i (\tilde{\mathcal{A}}_{j2} \partial_2 u_j + \tilde{\mathcal{A}}_{11} \partial_1 u_1) - [\partial_1^i, \partial_2\eta_1]\partial_1 u_2) \\ & + \partial_2\eta_1 \partial_2 u_1 |\partial_1^{1+i} \eta_2|^2 - \partial_2 u_1 \partial_1^{1+i} \eta_2 \partial_2 \partial_1^i \eta_2) \big\} \mathrm{d}y. \end{aligned}$$

利用 (3.11) 和 (3.18)，我们很容易得到

$$\tilde{I}_{8,i,1} + I_{8,i,2} \lesssim \begin{cases} \|\eta_2\|_1 \|\eta_2\|_3 \|u\|_1 & \text{for } \ i = 0, \\ \|\eta_2\|_{i,1} (\|\eta_2\|_3 \|u\|_{i,1} + \|\eta_2\|_{i,1} \|u\|_{\underline{1},2}) + \|\eta_2\|_{1,2}^2 \|u\|_{i,1} & \text{for } \ i = 1,\ 2. \end{cases} \tag{3.56}$$

˜(3) 对 $I_{9,\ i}$ 进行分部积分，然后利用 (3.37) 和 $(3.40)_3$ 可得 t

$$I_{9,i} = \begin{cases} 0 & \text{for } i = 0; \\ I_{9,i,1} + I_{9,i,2} & \text{for } i = 1,\ 2, \end{cases} \tag{3.57}$$

其中定义了

$$I_{9,i,1} := -\int [\partial_1^i, \mathcal{A}_{kl}] \partial_l \tilde{q} \partial_1^i u_k \mathrm{d}y,$$

$$I_{9,i,2} := -\int [\partial_1^i, \mathcal{A}_{kl}] \partial_l u_k \partial_1^i \tilde{q} \mathrm{d}y.$$

容易推导出，对于 $i = 1$，2，

$$I_{9,i,1} \lesssim \|\eta\|_{i,1} \|u\|_{i,1} \|\tilde{q}\|_{\underline{1},1} \tag{3.58}$$

and

$$I_{9,i,2} = \int \big\{ ([\partial_1^i, \partial_1\eta_1]\partial_1 u_1 + [\partial_1^i, \partial_2\eta_1]\partial_1 u_2 + [\partial_1^i, \partial_1\eta_2]\partial_2 u_1$$

$$
\begin{aligned}
&- [\partial_1^i, \partial_2\eta_2]\partial_1 u_1 + [\partial_1^i, \partial_1\eta_1](\tilde{\mathcal{A}}_{kl}\partial_l u_k))\partial_1^i\tilde{q}\big\}\mathrm{d}y \\
&\leqslant c(\|\eta\|_{i,1}\|u\|_{2,1} + \|\eta\|_{1+i,0}(\|\eta_2\|_{1,2}\|u\|_{\underline{1},2} + \|\eta\|_3\|u\|_{2,1}))\|\tilde{q}\|_{i,0} + \tilde{I}_{9,i,2}, \qquad (3.59)
\end{aligned}
$$

其中我们定义

$$
\tilde{I}_{9,i,2} := \int \partial_1^{1+i}\eta_2\partial_2 u_1\partial_1^i\tilde{q}\mathrm{d}y.
$$

由 (3.40)$_2$, 对于 $i = 1$ 和 2,

$$
\partial_1^i\tilde{q} = \partial_1^{i-1}(\mu\Delta u_1 - \bar{\rho}\partial_t u_1 + \mathcal{N}_1^{\mu} + \mathcal{N}_1^{\eta} - \tilde{\mathcal{A}}_{1l}\partial_l\tilde{q}).
$$

利用 (3.11)、(3.19)、(3.29)、(A.3) 以及上述恒等式，可得

$$
\begin{aligned}
\tilde{I}_{9,i,2} = &\int \partial_1^{1+i}\eta_2\partial_2 u_1\partial_1^{i-1}(\mu\Delta u_1 - \bar{\rho}\partial_t u_1 + \mathcal{N}_1^{\mu} + \mathcal{N}_1^{\eta} - \tilde{\mathcal{A}}_{1l}\partial_l\tilde{q})\mathrm{d}y \\
\lesssim &\|\eta\|_{1+i,0}\|u\|_{\underline{1},2}(\|u\|_{1+i,0} + \|u_t\|_{i-1} + \|\eta\|_{i,1}\|u\|_{\underline{1},2} + \|\eta\|_{\underline{1},2}\|u\|_{i,1} \\
&+ \|\eta_2\|_{i-1,2}(\|\eta_2\|_3 + \|\tilde{q}\|_{\underline{1},1}) + \|\eta_2\|_{i,1}\|\eta\|_3) + \left|\int \partial_1^{1+i}\eta_2\partial_2 u_1\partial_2^2\partial_1^{i-1}u_1\mathrm{d}y\right|.
\end{aligned}
$$

此外，利用分部积分和 (A.3)，可推出

$$
\begin{aligned}
\Big|\int \partial_1^{1+i}\eta_2\partial_2 u_1\partial_2^2\partial_1^{i-1}u_1\mathrm{d}y\Big| =&\frac{1}{2}\Big|\int (\partial_2\partial_1^i\eta_2\partial_1^i(\partial_2 u_1)^2 - \delta_{i2}\partial_1^{1+i}\eta_2\partial_2\partial_1^{i-1}u_1\partial_2^2 u_1)\mathrm{d}y\Big| \\
\lesssim&\|\eta_2\|_{i,1}\|u\|_{i,1}\|u\|_{\underline{1},2} + \|\eta_2\|_{1+i,0}\|u\|_{i,1}\|u\|_3.
\end{aligned}
$$

现在将 (3.58) 和 (3.59) 代入 (3.57)，再利用上述两个估计，可得

$$
\begin{aligned}
I_{9,i} \lesssim &(1-\delta_{i0})(\|\eta\|_{i,1}\|u\|_{i,1}\|\tilde{q}\|_{\underline{1},1} + (\|\eta\|_{i,1}\|u\|_{2,1} + \|\eta\|_{1+i,0}(\|\eta_2\|_{1,2}\|u\|_{\underline{1},2} \\
&+ \|\eta\|_3\|u\|_{2,1}))\|\tilde{q}\|_{i,0} + \|\eta\|_{1+i,0}\|u\|_{\underline{1},2}(\|u\|_{1+i,0} + \|u_t\|_{i-1} + \|\eta\|_{i,1}\|u\|_{\underline{1},2} \\
&+ \|\eta\|_{\underline{1},2}\|u\|_{i,1} + \|\eta_2\|_{i-1,2}(\|\eta_2\|_3 + \|\tilde{q}\|_{\underline{1},1}) + \|\eta_2\|_{i,1}\|\eta\|_3) \\
&+ \|\eta_2\|_{i,1}\|u\|_{i,1}\|u\|_{\underline{1},2} + \|\eta_2\|_{1+i,0}\|u\|_{i,1}\|u\|_3). \qquad (3.60)
\end{aligned}
$$

因此，将 (3.55) 代入 (3.51)，再利用 (2.10)、(3.5)、(3.52)、(3.53)、(3.56)、(3.60) 和 (A.5)，可得当 δ 充分小时 (3.50) 成立。证明完毕。 □

引理 3.5. 当 δ 充分小时，有

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\nabla_{\mathcal{A}}u\|_0^2 + \kappa\int|\bar{\rho}'|^2\nabla\eta_2\cdot\nabla u_2\mathrm{d}y\right) + c\|u_t\|_0^2 \\
&\lesssim \|(\eta_2, u_2)\|_1^2 + \|u\|_2^3 + \|u\|_2^2\|\tilde{q}\|_1 + \|\eta_2\|_1\|u_t\|_1 \qquad (3.61)
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\sqrt{\bar{\rho}}\psi\|_0^2 - E(u)\right) + c\|u_t\|_1^2 \\
&\lesssim (\|\eta_2\|_2^2 + \|u\|_2^2)\|u\|_2^2 + \|\eta\|_3^2(\|u\|_{1,0}^2 + \|\eta_2\|_{2,1}^2\|u\|_1^2) \\
&\quad + (\|u\|_{1,0} + \|\eta_2\|_{2,1}\|u\|_1)\|u\|_2^2 + \|u\|_2^4, \qquad (3.62)
\end{aligned}
$$

其中 $\psi := u_t - u\cdot\nabla_{\mathcal{A}}u$。

PROOF. (1) 我们将 (1.29)$_2$ 改写如下,

$$\bar{\rho}u_t + \nabla_{\mathcal{A}}\tilde{q} - \mu\Delta_{\mathcal{A}}u = (\kappa\mathrm{div}(|\vec{\rho}'|^2\nabla\eta_2) + g\vec{\rho}'\eta_2 + \mathcal{G})\mathbf{e}^2 + \mathcal{N}^\eta. \tag{3.63}$$

由 (1.29)$_3$, 可知

$$\mathrm{div}_{\mathcal{A}}u_t = -\mathrm{div}_{\mathcal{A}_t}u.$$

将 (3.63) 乘以 u_t 在 L^2 中的表达式，再利用上述关系和 (1.33)，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mu}{2}\|\nabla_{\mathcal{A}}u\|_0^2 + \kappa\int|\vec{\rho}'|^2\nabla\eta_2\cdot\nabla u_2\mathrm{d}y\right) + \|\sqrt{\bar{\rho}}u_t\|_0^2 = J_1 + J_2, \tag{3.64}$$

其中

$$\begin{aligned}
J_1 &:= \int(g\vec{\rho}'\eta_2\partial_t u_2 + \mathcal{G}\partial_t u_2 + \mu\nabla_{\mathcal{A}}u : \nabla_{\mathcal{A}_t}u - \mathrm{div}_{\mathcal{A}_t}u\tilde{q})\mathrm{d}y,\\
J_2 &:= \int(\kappa|\vec{\rho}'\nabla u_2|^2 - \mathcal{N}^\eta_{j,k}\partial_k\partial_t u_j)\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

由 H¨older 不等式、 $L^3 \hookrightarrow H^1$ 的嵌入不等式、(3.15)、(3.17) 和 (3.18)，可得

$$J_1 + J_2 \lesssim (\|\eta_2\|_0 + \|\eta_2\|_1)\|u_t\|_0 + \|u_2\|_1^2 + \|u\|_2^3 + \|u\|_2^2\|\tilde{q}\|_1 + \|\eta_2\|_1\|u_t\|_1.$$

将上述估计代入 (3.64)，并利用杨氏不等式，可得 (3.61)。(2) 令

$$\begin{aligned}
J_3 &:= -\int\partial_t\mathcal{N}^\eta_{j,k}\partial_k\psi_j\mathrm{d}y,\\
J_4 &:= \int((\mu\mathcal{A}_{il}\partial_l(\mathcal{A}_{ik}\partial_k u) + (\mathcal{G} + g\vec{\rho}'\eta_2 + \kappa\mathrm{div}(|\vec{\rho}'|^2\nabla\eta_2))\mathbf{e}^2 + \mathcal{N}^\eta\\
&\quad - \bar{\rho}u\cdot\nabla_{\mathcal{A}}u - \bar{\rho}\psi)\cdot(u\cdot\nabla_{\mathcal{A}}\psi) - \partial_t(\bar{\rho}u\cdot\nabla_{\mathcal{A}}u)\cdot\psi)\mathrm{d}y,\\
J_5 &:= \int((g\vec{\rho}'(s)|_{s=y_2+\eta_2}u_2 + \kappa\mathrm{div}(|\vec{\rho}'|^2\nabla u_2))\psi_2 - \mu\partial_t(\mathcal{A}_{il}\mathcal{A}_{ik}\partial_k u)\cdot\partial_l\psi)\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

因此，根据 (1.29) 可得下列恒等式（参见 [45] 中的 (2.38)）

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\sqrt{\bar{\rho}}\psi\|_0^2 = J_3 + J_4 + J_5. \tag{3.65}$$

注意，积分项 J_5 可以进一步改写如下:

$$J_5 = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(u) - \mu\|\nabla u_t\|_0^2 + \tilde{J}_5, \tag{3.66}$$

其中

$$\begin{aligned}
\tilde{J}_5 := \int\big\{&(g(\vec{\rho}'(y_2+\eta_2) - \vec{\rho}'(y_2))u_2\partial_t u_2 - (g\vec{\rho}'(y_2+\eta_2)u_2 + \kappa\mathrm{div}(|\vec{\rho}'|^2\nabla u_2))u\cdot\nabla_{\mathcal{A}}u_2\\
&+ \mu(\partial_t(\mathcal{A}_{il}\mathcal{A}_{ik}\partial_k u)\cdot\partial_l(u\cdot\nabla_{\mathcal{A}}u) - \partial_t(\mathcal{A}_{il}\tilde{\mathcal{A}}_{ik}\partial_k u + \tilde{\mathcal{A}}_{il}\partial_i u)\cdot\partial_l\partial_t u))\big\}\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

利用 (1.29)$_1$, (3.16)、(3.19)、(3.23) 和 (A.2)，可推得

$$\begin{aligned}
J_3 + J_4 + \tilde{J}_5 \lesssim{}& (\|\eta_2\|_2 + \|u\|_2 + \|u_t\|_1)\|u\|_2\|u_t\|_1 + \|\eta\|_3\|u_2\|_1\|u_t\|_1\\
&+ \|u_2\|_1\|u\|_2^2 + (\|\eta_2\|_2 + \|u\|_2)\|u\|_2^3 + \|\eta\|_3\|u_t\|_1^2.
\end{aligned}$$

将（3.66）代入（3.65），并利用上述估计、（3.5）、（3.6）、（3.10）以及杨不等式，当 δ 充分小时，可得（3.62）。证明至此完成。□

3.3. 稳定性估计

本小节旨在建立稳定性估计。

引理 3.6. 我们有

$$\|\eta_2\|_{i,1}^2 \lesssim -E(\partial_1^i\eta) \quad for \quad 0 \leqslant i \leqslant 2, \tag{3.67}$$

$$\|u_2\|_1^2 \lesssim -E(u) + \|\eta\|_3\|u\|_1^2. \tag{3.68}$$

Proof. 根据 κ_{C}的定义，容易看出

$$-g\int \bar{\rho}' w_2^2 \mathrm{d}y \geqslant -\kappa_{\mathrm{C}}\|\bar{\rho}'\nabla w_2\|_0^2 \quad \text{for any} \quad w \in H^1_\sigma,$$

which，结合稳定性条件 (1.17) 和 $\kappa > \kappa_{\mathrm{C}}$，可推出 tha t

$$\|w_2\|_1^2 \lesssim (\kappa-\kappa_{\mathrm{C}})\|\bar{\rho}'\nabla w_2\|_0^2 \leqslant -E(w) \quad \text{for any} \quad w \in H^1_\sigma. \tag{3.69}$$

为了将上述估计应用于 η，由于 $\mathrm{div}\eta \neq 0$，我们必须对 η 进行修改。设$0 \leqslant i \leqslant 2$ 给定。于是存在一个 Bogovskii 算子 $\mathcal{B}$：$\partial_1^i\mathrm{div}\eta \in \underline{L}^2 \to H_0^1$，使得（见[44,引理 A.5]）

$$\mathrm{div}\mathcal{B}(\partial_1^i\mathrm{div}\eta) = \partial_1^i\mathrm{div}\eta \quad \text{and} \quad \|\mathcal{B}(\partial_1^i\mathrm{div}\eta)\|_1 \lesssim \|\partial_1^i\mathrm{div}\eta\|_0. \tag{3.70}$$

现在，我们用 $\partial_1^i\eta - \mathcal{B}(\partial_1^i\mathrm{div}\eta)$ 将 $E(\partial_1^i\eta)$ 重写为

$$E(\partial_1^i\eta) = E(\partial_1^i\eta - \mathcal{B}(\partial_1^i\mathrm{div}\eta)) - E(\mathcal{B}(\partial_1^i\mathrm{div}\eta)) - J_{6,i}, \tag{3.71}$$

其中

$$J_{6,i} := 2\kappa\int |\bar{\rho}'|^2\nabla\partial_1^i\eta_2 \cdot \nabla\mathcal{B}_2(\partial_1^i\mathrm{div}\eta)\mathrm{d}y - 2g\int \bar{\rho}'\partial_1^i\eta_2\mathcal{B}_2(\partial_1^i\mathrm{div}\eta)\mathrm{d}y.$$

回顾 $\partial_1^i\eta - \mathcal{B}(\partial_1^i\mathrm{div}\eta) \in H^1_\sigma$，利用（3.69）可得

$$\|\partial_1^i\eta_2 - \mathcal{B}_2(\partial_1^i\mathrm{div}\eta)\|_1^2 \lesssim -E(\partial_1^i\eta - \mathcal{B}(\partial_1^i\mathrm{div}\eta)),$$

结合（3.71）和杨氏不等式，可得

$$\|\eta_2\|_{i,1}^2 \lesssim \|\mathcal{B}_2(\partial_1^i\mathrm{div}\eta)\|_1^2 - E(\mathcal{B}(\partial_1^i\mathrm{div}\eta)) - E(\partial_1^i\eta) - J_{6,i}. \tag{3.72}$$

利用（3.70）中的估计，我们得到

$$\begin{aligned} &- E(\mathcal{B}(\partial_1^i\mathrm{div}\eta)) - J_{6,i} + \|\mathcal{B}_2(\partial_1^i\mathrm{div}\eta)\|_1^2 \\ \lesssim &\|\eta_2\|_{i,1}\|\mathcal{B}_2(\partial_1^i\mathrm{div}\eta)\|_1 + \|\mathcal{B}_2(\partial_1^i\mathrm{div}\eta)\|_1^2 \\ \lesssim &\|\eta_2\|_{i,1}\|\mathrm{div}\eta\|_{i,0} + \|\mathrm{div}\eta\|_{i,0}^2. \end{aligned}$$

最后，将上述估计代入（3.72），并利用（3.2）、（3.11）和杨氏不等式，可得（3.67）。

另一方面，类似于利用 $i = 0$ 推导（3.67）的过程，通过使用关系式，我们可以建立（3.68）

$$\mathrm{div}u = -\mathrm{div}_{\tilde{\mathcal{A}}}u \tag{3.73}$$

以及估计

$$\|\mathrm{div}_{\tilde{\mathcal{A}}}u\|_0 \lesssim \|\eta\|_3\|u\|_1.$$

至此，证明完成。 □

3.4. (u,q) 的法向估计与等价估计

在本小节中，我们利用斯托克斯方程的正则性理论推导(u,q)的法向估计。

引理 3.7. 当 δ充分小时，我们有

$$\|u\|_{\underline{i},2+j}+\|\tilde{q}\|_{\underline{i},1+j}\lesssim\|\eta_2\|_{\underline{i},2+j}+\|u_t\|_{\underline{i},j}\quad for\quad 0\leqslant i+j\leqslant 1. \tag{3.74}$$

Proof. 由 (3.37)、$(3.40)_2$ 和 (3.73) 可知，u 满足以下斯托克斯问题：对于$i=0$，1，

$$\begin{cases}\partial_1^i(\nabla\tilde{q}-\mu\Delta u)=\partial_1^i((\kappa\mathrm{div}(|\bar{\rho}'|^2\nabla\eta_2)+g\bar{\rho}'\eta_2+\mathcal{G})\mathbf{e}^2-\bar{\rho}u_t+\mathcal{N}^\mu+\mathcal{N}^\eta-\nabla_{\tilde{\mathcal{A}}}\tilde{q}),\\ \partial_1^i\mathrm{div}u=-\partial_1^i\mathrm{div}(\tilde{\mathcal{A}}^\top u),\\ \partial_1^i(u_2,\partial_2u_1)|_{\partial\Omega}=0.\end{cases} \tag{3.75}$$

我们对上述 Stokes 问题应用正则性估计 (A.8)，得到

$$\|u\|_{i,2+j}+\|\tilde{q}\|_{i,1+j}\lesssim\|\mathrm{div}(|\bar{\rho}'|^2\nabla\eta_2),\eta_2,u_t)\|_{i,j}+\|\mathcal{N}^\eta\|_{i,j}+J_7, \tag{3.76}$$

其中 $0\leqslant i+j\leqslant 1$ 且

$$J_7:=\|(\mathcal{G},\mathcal{N}^\mu,\nabla_{\tilde{\mathcal{A}}}\tilde{q},\tilde{\mathcal{A}}^\top u)\|_{i,j}+\|\mathrm{div}(\tilde{\mathcal{A}}^\top u)\|_{i,1+j}.$$

由 (3.19)–(3.21)，我们有

$$\|\mathcal{N}^\eta\|_{i,j}\lesssim\|\eta_2\|_{i,2+j}\|\eta\|_3. \tag{3.77}$$

由 (3.15)、(3.16)、(3.29) 和 (3.30)，容易看出

$$J_7\lesssim\|\eta_2\|_0+\|\eta\|_3\|\tilde{q}\|_{\underline{i},1+j}+\|\eta\|_3\|u\|_{\underline{i},2+j}.$$

将上述两个不等式代入 (3.76)，即可得到所需的估计 (3.74)。证明完毕。□

引理 3.8. 当 δ 充分小时，有

$$\sqrt{\mathcal{E}}\ \ and\ \ \|(\nabla\eta,u)\|_2\ \ are\ equivalent\ to\ each\ other, \tag{3.78}$$

其中，(3.78) 中的等价系数与 δ 无关。

Proof. 为证明 (3.78)，回忆 $\mathcal{E}$ 的定义，利用 (3.4) 和带有 $i=j=0$ 的斯托克斯估计，可得 (3.74)

$$\|(\nabla\eta,u)\|_2^2\lesssim\mathcal{E}\lesssim\|(\nabla\eta,u)\|_2^2+\|u_t\|_0^2. \tag{3.79}$$

显然，要完成证明，只需证明

$$\|u_t\|_0\lesssim\|\nabla\eta\|_2+\|u\|_2. \tag{3.80}$$

为此，我们将（1.29）$_2$ 乘以 u_t 中的 L^2，得到

$$\|\sqrt{\bar{\rho}}u_t\|_0^2=\int(((\kappa\mathrm{div}(|\bar{\rho}'|^2\nabla\eta_2)+g\bar{\rho}'\eta_2+\mathcal{G})\mathbf{e}^2+\mu\Delta_{\mathcal{A}}u)\cdot u_t+\nabla\tilde{q}\cdot(\mathcal{A}_t^\top u))\mathrm{d}y$$

$$+\int \mathcal{N}^{\eta}\cdot u_t \mathrm{d}y =: J_8 + J_9. \tag{3.81}$$

利用（3.19），可得

$$J_9 \lesssim \|\mathcal{N}^{\eta}\|_0\|u_t\|_0 \lesssim \|\eta_2\|_2\|\eta\|_3\|u_t\|_0.$$

此外，有

$$J_8 \lesssim (\|(\eta_2,u)\|_2+\|u\|_2^2)\|u_t\|_0 + \|\eta_2\|_2\|u\|_2^2.$$

将上述两个估计代入 (3.81)，并利用 (2.10) 和杨氏不等式，可得 (3.80)。证明完毕。□

3.5. η 的旋度估计

在本小节中，我们为 η 的法向估计建立 η 的旋度估计。

引理 3.9. 有

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mu}{2}\|\nabla_{\mathcal{A}}\partial_1^i \mathrm{curl}\eta\|_0^2 + \int \partial_1^i \mathrm{curl}\eta \partial_1^i \mathrm{curl}_{\mathcal{A}}(\bar{\rho}u)\,\mathrm{d}y\right) + c\|\nabla^2\eta_2\|_{i,0}^2\\
&\lesssim \|\eta_2\|_{i,1}(\|\eta_2\|_1+\|\eta_2\|_{1+i,1}) + \|u\|_{i,1}\|u\|_{\underline{i},1} + \|\eta\|_{2i,0}\|\eta_2\|_3^2\\
&\quad + \|\eta\|_3(\|\eta_2\|_{i,2}^2 + \|\eta\|_{2i,1}\|\eta_2\|_{2,1} + \delta_{i0}\|\eta\|_{1,2}\|u\|_2 + \|u\|_2^2)\\
&\quad + \delta_{i1}(\|\eta\|_{1,2}^2\|u\|_{\underline{1},2} + \|\eta\|_{1,2}\|\eta\|_3\|u\|_{2,1}) \quad \textit{for} \quad i=0,1
\end{aligned} \tag{3.82}$$

and

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mu}{2}\|\nabla\partial_2\mathrm{curl}\eta\|_0^2 + \mathcal{I}_1\right) + c\|\partial_2^2\eta\|_{1,0}^2\\
&\lesssim \|\eta_2\|_2^2 + \|\eta_2\|_{2,1}^2 + \|u\|_1\|u\|_3 + (\|\partial_2\eta_2\|_{1,0}^{1/2}\|\partial_2^2\eta_2\|_0^{1/2}\\
&\quad + \|\partial_2\eta_2\|_{\underline{1},0})(\|\partial_2^2\eta_1\|_{1,0}^{1/2}\|\partial_2^3\eta_1\|_0^{1/2} + \|\partial_2^2\eta_1\|_{\underline{1},0}) + \|\eta_2\|_{2,1}\|\eta\|_3^2 + \sqrt{\mathcal{E}}\mathcal{D},
\end{aligned} \tag{3.83}$$

其中我们定义

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_1 &:= \int (\mu\partial_2^2(\partial_1\eta_1\partial_2\eta_1)\partial_2^2\mathrm{curl}\eta - \partial_2^2\mathrm{curl}\eta\mathrm{curl}_{\mathcal{A}}(\bar{\rho}u))\mathrm{d}y + \mathcal{I}_2,\\
\mathcal{I}_2 &:= \int \partial_2^2\mathrm{curl}\eta(\partial_2(\partial_2\eta_1\mathrm{curl}_{\mathcal{A}}\partial_1\eta) + \partial_2\eta_1(\partial_2\mathrm{curl}_{\mathcal{A}}\partial_1\eta - \partial_2\eta_1\mathrm{curl}_{\mathcal{A}}\partial_1^2\eta))\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Proof. 我们可以直接计算得出

$$\mathrm{curl}_{\mathcal{A}}\left(G^{\eta}\mathbf{e}^2\right) = g\mathrm{curl}_{\mathcal{A}}\left(-\bar{\rho}\mathbf{e}^2\right) = -g\mathcal{A}_{1j}\partial_j\bar{\rho} = g\bar{\rho}'\partial_1\eta_2.$$

因此，对 $(1.29)_2$ 取旋度$_{\mathcal{A}}$，并注意到

$$\mathrm{curl}_{\mathcal{A}}\Delta_{\mathcal{A}}u = \Delta_{\mathcal{A}}\mathrm{curl}_{\mathcal{A}}u,$$

我们得到

$$\begin{aligned}
&\partial_t\mathrm{curl}_{\mathcal{A}}(\bar{\rho}u) - \mu\Delta_{\mathcal{A}}\mathrm{curl}_{\mathcal{A}}u - \kappa\mathcal{A}_{1j}\partial_j\mathrm{div}(|\bar{\rho}'|^2\nabla\eta_2)\\
&= g\bar{\rho}'\partial_1\eta_2 + \mathrm{curl}_{\mathcal{A}_t}(\bar{\rho}u) + \mathrm{curl}_{\mathcal{A}}\mathcal{N}^{\eta}.
\end{aligned} \tag{3.84}$$

设 α 为一个多重指标。将 ∂^α 应用于 (3.84)，得到

$$\begin{aligned}&\partial_t\partial^\alpha \mathrm{curl}_{\mathcal{A}}(\bar{\rho}u)-\mu\partial^\alpha\Delta_{\mathcal{A}}\mathrm{curl}_{\mathcal{A}}u-\kappa\partial^\alpha\mathrm{div}(|\bar{\rho}'|^2\nabla\partial_1\eta_2)\\&=g\partial^\alpha(\bar{\rho}'\partial_1\eta_2)+\partial^\alpha\mathrm{curl}_{\mathcal{A}_t}(\bar{\rho}u)+\kappa\partial^\alpha(\tilde{\mathcal{A}}_{1j}\partial_j\mathrm{div}(|\bar{\rho}'|^2\nabla\eta_2)+\mathrm{curl}_{\mathcal{A}}\mathcal{N}^\eta).\end{aligned}\tag{3.85}$$

(1) 若取 $\alpha=(i,0)$ $(0\leqslant i\leqslant 1)$，再将 (3.85) 乘以 ∂_1^i旋度η 于 L^2，则可得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\partial_1^i\mathrm{curl}_{\mathcal{A}}(\bar{\rho}u)\partial_1^i\mathrm{curl}\eta\mathrm{d}y=\sum_{j=1}^5K_{j,i},\tag{3.86}$$

其中

$$\begin{aligned}K_{1,i}:=&\kappa\int\partial_1^i(\tilde{\mathcal{A}}_{1j}\partial_j\mathrm{div}(|\bar{\rho}'|^2\nabla\eta_2)+\mathrm{curl}_{\mathcal{A}}\mathcal{N}^\eta)\partial_1^i\mathrm{curl}\eta\mathrm{d}y,\\K_{2,i}:=&\kappa\int\partial_1^i(\mathrm{div}(|\bar{\rho}'|^2\nabla\partial_1\eta_2))\partial_1^i\mathrm{curl}\eta\mathrm{d}y,\\K_{3,i}:=&\mu\int\partial_1^i\Delta_{\mathcal{A}}\mathrm{curl}_{\mathcal{A}}u\partial_1^i\mathrm{curl}\eta\mathrm{d}y,\\K_{4,i}:=&\int\partial_1^i\mathrm{curl}_{\mathcal{A}_t}(\bar{\rho}u)\partial_1^i\mathrm{curl}\eta\mathrm{d}y,\\K_{5,i}:=&\int\left(\partial_1^i\mathrm{curl}_{\mathcal{A}}(\bar{\rho}u)\partial_1^i\mathrm{curl}u-g\bar{\rho}'\partial_1^i\eta_2\partial_1^{1+i}\mathrm{curl}\eta\right)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

接下来我们将依次估计上述五个积分。

由 (3.11) 和 (3.20)–(3.22)，我们可以估计得到

$$\begin{aligned}K_{1,i}=&\kappa(-1)^i\int(\tilde{\mathcal{A}}_{1j}\partial_j\mathrm{div}(|\bar{\rho}'|^2\nabla\eta_2)+\mathcal{A}_{11}\partial_2\partial_1\mathcal{N}_{2,2}^{\eta,1}+\mathcal{A}_{11}\partial_1^2\mathcal{N}_{2,1}^{\eta,1}+\mathcal{A}_{12}\partial_2\partial_k\mathcal{N}_{2,k}^{\eta,1}\\&-\mathcal{A}_{21}\partial_1^2\mathcal{N}_{1,1}^{\eta,1}-\mathcal{A}_{22}\partial_2\partial_1\mathcal{N}_{1,1}^{\eta,1}+\mathcal{A}_{1l}\partial_l\partial_k\mathcal{N}_{2,k}^{\eta,2}-\mathcal{A}_{2l}\partial_l\partial_k\mathcal{N}_{1,k}^{\eta,2})\partial_1^{2i}\mathrm{curl}\eta\mathrm{d}y\\\lesssim&\|\eta\|_{2i,1}(\|\eta_2\|_{2,1}\|\eta\|_3+\|\eta_2\|_3^2).\end{aligned}\tag{3.87}$$

利用 (3.1)、(3.3)、分部积分以及 (3.40) 中的边界条件$_4$，，我们有

$$\begin{aligned}K_{2,i}=&\kappa\int|\bar{\rho}'|^2\nabla\partial_1^{1+i}\eta_2\cdot\nabla\partial_2\partial_1^i\eta_1\mathrm{d}y-\kappa\|\bar{\rho}'\nabla\eta_2\|_{1+i,0}^2\\=&\kappa\int(|\bar{\rho}'|^2\nabla\partial_2\partial_1^i\eta_2\cdot\nabla\partial_1^i\mathrm{div}\eta+\partial_2|\bar{\rho}'|^2\nabla\partial_1^i\eta_2\cdot\nabla\partial_1^{1+i}\eta_1)\mathrm{d}y-\kappa\|\bar{\rho}'\nabla^2\eta_2\|_{i,0}^2\\\leqslant&c\|\eta_2\|_{i,1}\|\eta\|_{1+i,1}+\|\eta\|_3\|\eta\|_{1+i,1}\|\eta_2\|_{i,2}-\kappa\|\bar{\rho}'\nabla^2\eta_2\|_{i,0}^2.\end{aligned}\tag{3.88}$$

通过分部积分，我们得到

$$K_{3,i}=\sum_{j=1}^3K_{3,i,j}-\frac{\mu}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla_{\mathcal{A}}\partial_1^i\mathrm{curl}\eta\|_0^2,\tag{3.89}$$

其中

$$K_{3,i,1}:=\mu\int\nabla_{\mathcal{A}}\partial_1^i\mathrm{curl}\eta\cdot\nabla_{\mathcal{A}}\partial_1^i\mathrm{curl}_{\mathcal{A}_t}\eta\mathrm{d}y,$$

$$K_{3,i,2} := \mu \int \nabla_{\mathcal{A}} \partial_1^i \mathrm{curl}\eta \cdot \nabla_{\mathcal{A}_t} \partial_1^i \mathrm{curl}\eta \mathrm{d}y,$$

$$K_{3,i,3} := \begin{cases} 0 & \text{for } \ i = 0; \\ -\mu \int \partial_1(\mathcal{A}_{kl}\mathcal{A}_{kn}) \partial_n \mathrm{curl}_{\mathcal{A}} u \cdot \partial_l \partial_1 \mathrm{curl}\eta \mathrm{d}y & \text{for } \ i = 1. \end{cases}$$

由（A.3）可轻易得到

$$\sum_{j=1}^{3} K_{3,1,j} \lesssim \|\eta\|_{1,2}^2 \|u\|_{\underline{1},2} + \|\eta\|_{1,2} \|\eta\|_3 \|u\|_{2,1}.$$

此外,

$$K_{3,0,1} + K_{3,0,2} \lesssim \|\eta\|_2 \|\eta\|_{1,2} \|u\|_2.$$

根据上述两个估计，由 (3.89) 可得

$$\begin{aligned} K_{3,i} \leqslant & c(\delta_{i0}\|\eta\|_{1,2}\|\eta\|_2\|u\|_2 + \delta_{i1}(\|\eta\|_{1,2}^2\|u\|_{\underline{1},2} \\ & + \|\eta\|_{1,2}\|\eta\|_3\|u\|_{2,1})) - \frac{\mu}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla_{\mathcal{A}}\partial_1^i \mathrm{curl}\eta\|_0^2. \end{aligned} \tag{3.90}$$

再次利用 (A.3)，可得

$$K_{4,i} + K_{5,i} \lesssim \|u\|_{i,1}\|u\|_{\underline{i},1} + \|\eta_2\|_{i,0}\|\eta\|_{1+i,1} + \|\eta\|_3\|u\|_2^2. \tag{3.91}$$

将估计 (3.87)、(3.88)、(3.90) 和 (3.91) 代入 (3.86)，再利用 (3.11)，即可得到 (3.82)。

(2) 现在，我们来推导 (3.83)。将 (3.84) 乘以 $-\partial_2^2$旋度η，对所得结果进行分部积分，并利用 (1.23)、(1.34) 和 ∂_1旋度$_{\mathcal{A}} u|_{\partial\Omega} = 0$ ，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mu}{2}\|\nabla\partial_2 \mathrm{curl}\eta\|_0^2 - \int \partial_2^2 \mathrm{curl}\eta \mathrm{curl}_{\mathcal{A}}(\bar{\rho}u)\mathrm{d}y\right) = K_6 + K_7 + K_8, \tag{3.92}$$

其中

$$\begin{aligned} K_6 := & -\kappa \int (\mathrm{curl}_{\mathcal{A}}\mathcal{N}^{\eta} + \tilde{\mathcal{A}}_{1j}\partial_j \mathrm{div}(|\bar{\rho}'|^2\nabla\eta_2))\partial_2^2 \mathrm{curl}\eta \mathrm{d}y, \\ K_7 := & -\kappa \int \mathrm{div}(|\bar{\rho}'|^2\nabla\partial_1\eta_2)\partial_2^2 \mathrm{curl}\eta \mathrm{d}y, \\ K_8 := & \int \big\{(\mu\nabla\partial_2 \mathrm{curl}\eta \cdot \nabla\partial_2 \mathrm{curl}_{\mathcal{A}_t}\eta + (\mu(\Delta - \Delta_{\mathcal{A}})\mathrm{curl}_{\mathcal{A}} u \\ & - \mathrm{curl}_{\mathcal{A}_t}(\bar{\rho}u))\partial_2^2 \mathrm{curl}\eta - \mathrm{curl}_{\mathcal{A}}(\bar{\rho}u)\partial_2^2 \mathrm{curl}u - g\bar{\rho}'\partial_2\eta_2\partial_1\partial_2 \mathrm{curl}\eta)\big\}\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

接下来，我们将估计上述三个积分。

类似于 (3.87)，我们可以估计得

$$\begin{aligned} K_6 = & -\kappa \int (\mathcal{A}_{11}\partial_2\partial_1\mathcal{N}_{2,2}^{\eta,1} + \mathcal{A}_{11}\partial_1^2\mathcal{N}_{2,1}^{\eta,1} + \mathcal{A}_{12}\partial_2\partial_k\mathcal{N}_{2,k}^{\eta,1} - \mathcal{A}_{21}\partial_1^2\mathcal{N}_{1,1}^{\eta,1} - \mathcal{A}_{22}\partial_2\partial_1\mathcal{N}_{1,1}^{\eta,1} \\ & + \mathcal{A}_{1l}\partial_l\partial_k\mathcal{N}_{2,k}^{\eta,2} - \mathcal{A}_{2l}\partial_l\partial_k\mathcal{N}_{1,k}^{\eta,2} + \tilde{\mathcal{A}}_{1j}\partial_j \mathrm{div}(|\bar{\rho}'|^2\nabla\eta_2))\partial_2^2 \mathrm{curl}\eta \mathrm{d}y \\ \lesssim & \|\eta\|_3(\|\eta_2\|_{2,1}\|\eta\|_3 + \|\eta_2\|_3^2). \end{aligned} \tag{3.93}$$

利用分部积分 K_7 以及 (A.9)，我们得到

$$\begin{aligned}K_7 =&\kappa\int((\partial_2(|\vec{\rho}'|^2\partial_1^2\eta_2+2\vec{\rho}'\vec{\rho}''\partial_2\eta_2)-2\vec{\rho}'\vec{\rho}''\partial_2\partial_1\eta_1)\partial_2^2\partial_1\eta_1\\&-(2\vec{\rho}'\vec{\rho}''\partial_2\partial_1\eta_2+|\vec{\rho}'|^2\partial_1^3\eta_2)\partial_2^2\partial_1\eta_2+|\vec{\rho}'|^2\partial_2\partial_1\mathrm{div}\eta\partial_2^3\eta_1)\mathrm{d}y\\&-\kappa\|\vec{\rho}'\partial_2^2\eta\|_{1,0}^2-2\kappa\int_{\partial\Omega}\mathbf{n}_2\vec{\rho}'\vec{\rho}''\partial_2\eta_2\partial_1\partial_2^2\eta_1\mathrm{d}y_1\\\lesssim&\|\partial_2^2\eta_1\|_{1,0}(\|\partial_2\eta_1\|_{1,0}+\|(\eta_2,\partial_2\eta_2)\|_{2,0}+\|(\partial_2\eta_2,\partial_2^2\eta_2)\|_0)\\&+(\|\partial_2\eta_2\|_{1,0}^{1/2}\|\partial_2^2\eta_2\|_0^{1/2}+\|\partial_2\eta_2\|_{\underline{1},0})(\|\partial_2^2\eta_1\|_{1,0}^{1/2}\|\partial_2^3\eta_1\|_0^{1/2}+\|\partial_2^2\eta_1\|_{\underline{1},0})\\&+\|\partial_2^2\eta_2\|_{1,0}(\|\partial_2\eta_2\|_{1,0}+\|\eta_2\|_{3,0})-\|\partial_2^2\eta\|_{1,0}^2+\sqrt{\mathcal{E}}\mathcal{D},\end{aligned}\tag{3.94}$$

其中，n_2 表示 $\partial\Omega$ 的外向单位法向量 n 的第二个分量。此外（参见 [44] 中 (2.41) 的推导），

$$\begin{aligned}K_8\leqslant&-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mu\int\partial_2^2(\partial_1\eta_1\partial_2\eta_1)\partial_2^2\mathrm{curl}\eta\mathrm{d}y+\mathcal{I}_1\right)\\&+c(\|\partial_2\eta_1\|_{1,0}\|\partial_2^2\eta_2\|_0+\|\eta_2\|_{2,1}\|\eta_2\|_1+\|u\|_1\|u\|_3+\sqrt{\mathcal{E}}\mathcal{D}).\end{aligned}\tag{3.95}$$

最后，将 (3.93)–(3.95) 代入 (3.92)，再利用估计 (3.11) 和杨氏不等式，即得 (3.83)。证明至此完成。□

3.6. 总能量估计

现在，我们可以在假设 (2.8)–(2.10) 下建立先验稳定性估计 (2.4)。

由引理 3.3–3.4 和估计 (3.62) 可知，存在两个常数 c 和（充分大的）$\tilde{\chi}$，使得对任意 $\chi\geqslant\tilde{\chi}$ 以及任意充分小的 $\delta\in(0,1],$，以下切向能量不等式成立：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}_{\tan}+c\mathcal{D}_{\tan}\lesssim\chi\sqrt{\mathcal{E}}\mathcal{D},\tag{3.96}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\tan}:=&\chi\sum_{0\leqslant i\leqslant2}\left(\frac{\kappa}{2}\|\vec{\rho}'\partial_2\eta_1\partial_1^{1+i}\eta_2\|_0^2-\kappa\int|\vec{\rho}'|^2\partial_2\eta_1\partial_1^{1+i}\eta_2\partial_2\partial_1^i\eta_2\mathrm{d}y-E(\partial_1^i\eta)\right)\\&+\chi\|\sqrt{\bar{\rho}}u\|_{\underline{2},0}^2+\sum_{0\leqslant i\leqslant2}\left(\int\bar{\rho}\partial_1^i\eta\cdot\partial_1^iu\mathrm{d}y+\frac{\mu}{2}\|\nabla\eta\|_{i,0}^2\right)+\|\sqrt{\bar{\rho}}\psi\|_0^2-E(u),\\\mathcal{D}_{\tan}:=&\chi\|u\|_{\underline{2},1}^2-\sum_{0\leqslant i\leqslant2}E(\partial_1^i\eta)+\|u_t\|_1^2.\end{aligned}$$

另一方面，利用引理 3.6、(3.4)、(3.74) 和杨氏不等式，我们可得，对于任意充分大的 χ 和任意充分小的 $\delta\in(0,\chi^{-1})$，

$$\|\eta_1\|_{\underline{2},1}^2+\|u\|_2^2+\|u_t\|_0^2+\|\tilde{q}\|_1^2+\chi(\|\eta_2\|_{\underline{2},1}^2+\|u\|_{\underline{2},0}^2)\lesssim\mathcal{E}_{\tan}\lesssim\chi\mathcal{E}\tag{3.97}$$

and

$$\|\eta_2\|_{\underline{2},1}^2+\chi\|u\|_{\underline{2},1}^2+\|u_t\|_1^2\lesssim\mathcal{D}_{\tan}.\tag{3.98}$$

因此，我们可以进一步由引理 3.9 和 (3.96) 推导出总能量不等式：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{\mathcal{E}}+c\tilde{\mathcal{D}}\lesssim\|\eta_2\|_2^2+\|u\|_1\|u\|_3+(\|\partial_2\eta_2\|_{1,0}^{1/2}\|\partial_2^2\eta_2\|_0^{1/2}+\|\partial_2\eta_2\|_{\underline{1},0})(\|\partial_2^2\eta_1\|_{1,0}^{1/2}\|\partial_2^3\eta_1\|_0^{1/2}\\+\|\partial_2^2\eta_1\|_{\underline{1},0})+\|\eta_2\|_{2,1}\|\eta\|_3^2+\chi^3\sqrt{\mathcal{E}}\mathcal{D},\end{aligned}\tag{3.99}$$

其中我们定义

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{E}}&:=\mathcal{I}_3+\frac{\mu}{2}\|(\chi^{\frac{1}{2}}\nabla_{\mathcal{A}}\mathrm{curl}\eta,\chi^{\frac{1}{2}}\nabla_{\mathcal{A}}\partial_1\mathrm{curl}\eta,\nabla\partial_2\mathrm{curl}\eta)\|_0^2+\chi^2\mathcal{E}_{\tan},\\\tilde{\mathcal{D}}&:=\|\partial_2^2\eta\|_{1,0}^2+\chi\|\nabla^2\eta_2\|_{\underline{1},0}^2+\chi^2\mathcal{D}_{\tan},\\\mathcal{I}_3&:=\mathcal{I}_1+\chi\int(\mathrm{curl}\eta\,\mathrm{curl}_{\mathcal{A}}(\bar{\rho}u)-\partial_1^2\mathrm{curl}\eta\,\mathrm{curl}_{\mathcal{A}}(\bar{\rho}u))\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

此外，b 由 (3.8)、(3.9) 和 (3.98) 可知，对于任意充分小的 $\delta\in(0,\chi^{-1})$，

$$\mathcal{D}\lesssim\|\eta_1\|_{1,2}^2+\|\eta_2\|_3^2+\|u\|_3^2+\|\tilde{q}\|_2^2+\chi\|\partial_2^2\eta_2\|_{\underline{1},0}^2+\chi^2(\|\eta_2\|_{\underline{2},1}^2+\chi\|u\|_{\underline{2},1}^2+\|u_t\|_1^2)\lesssim\tilde{\mathcal{D}}.\tag{3.100}$$

注意到

$$\begin{aligned}\|\mathrm{curl}\eta\|_2^2&\lesssim\|\nabla\eta\|_0^2+\|\nabla\mathrm{curl}\eta\|_1^2\\&\lesssim\|(\nabla\eta,\nabla_{\mathcal{A}}\mathrm{curl}\eta,\nabla_{\mathcal{A}}\partial_1\mathrm{curl}\eta,\nabla\partial_2\mathrm{curl}\eta,\nabla_{\tilde{\mathcal{A}}}\mathrm{curl}\eta,\nabla_{\tilde{\mathcal{A}}}\partial_1\mathrm{curl}\eta)\|_0^2\\&\lesssim\|(\nabla\eta,\nabla_{\mathcal{A}}\mathrm{curl}\eta,\nabla_{\mathcal{A}}\partial_1\mathrm{curl}\eta,\nabla\partial_2\mathrm{curl}\eta)\|_0^2+\|\nabla\eta\|_2^4,\end{aligned}\tag{3.101}$$

由 (3.7) 得

$$\|\eta\|_3^2\lesssim\|(\nabla\eta,\nabla_{\mathcal{A}}\mathrm{curl}\eta,\nabla_{\mathcal{A}}\partial_1\mathrm{curl}\eta,\nabla\partial_2\mathrm{curl}\eta)\|_0^2.$$

此外，容易验证

$$|\mathcal{I}_3|\lesssim\chi\|\eta\|_3\|u\|_1+\|\eta\|_3^3.$$

由上述两个估计、(3.78)、(3.97) 以及插值不等式 (A.1) 可知，对于任意充分大的 χ 和任意充分小的 δ，

$$\mathcal{E}\lesssim\|\eta\|_3^2+\chi^2(\|u\|_2^2+\|u_t\|_0^2+\|\tilde{q}\|_1^2)+\chi^3\|u\|_{\underline{2},0}^2\lesssim\tilde{\mathcal{E}}\lesssim\chi^3\mathcal{E}\lesssim\chi^3\|(\nabla\eta,u)\|_2^2.\tag{3.102}$$

借助 (3.100)、插值不等式 (A.1) 和杨氏不等式，我们进一步从 (3.99) 推导出，对于任意充分小的 δ，(2.12) 对某个适当充分大的 χ 成立，其中 $\mathcal{E}$ 满足 (3.102)。对 (2.12) 在 $(0,t)$ 上积分，得到 (2.13)，进而推出 (2.17)。

3.7. 时间衰减估计

本小节旨在推导 $\mathfrak{E}$ 中的时间衰减估计。通过分部积分，由引理 3.3 和引理 3.4 可得，对于 $i=1,2$，

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}_{1,\mathrm{D}}+c\sum_{i=1}^{2}\langle t\rangle^i\{\gamma\|u\|_{i,1}^2-E(\partial_1^i\eta)\}\\&\lesssim\sum_{i=1}^{2}\langle t\rangle^{i-1}(\|(\nabla\partial_1^i\eta,\partial_1^{i-1}u)\|_0^2+\gamma(\|u\|_{i,0}^2-E(\partial_1^i\eta)))+\mathcal{I}_4,\end{aligned}\tag{3.103}$$

其中 $\gamma \geqslant 1$ 是一个足够大的常数（可能取决于 $\bar{\rho}$、 μ、 g、 κ 和 Ω），

$$\mathcal{E}_{1,\mathrm{D}} := \sum_{i=1}^{2} \langle t\rangle^{i} \left\{ \int \bar{\rho}\partial_1^i \eta \cdot \partial_1^i u \mathrm{d}y + \frac{\mu}{2}\|\nabla \partial_1^i \eta\|_0^2 + \gamma \left(\|\sqrt{\bar{\rho}} u\|_{i,0}^2 - E(\partial_1^i \eta) \right) \right.$$
$$\left. + \gamma\kappa \left(\frac{1}{2}\|\bar{\rho}' \partial_2 \eta_1 \partial_1^{1+i} \eta_2\|_0^2 - \int |\bar{\rho}'|^2 \partial_2 \eta_1 \partial_1^{1+i} \eta_2 \partial_2 \partial_1^i \eta_2 \mathrm{d}y \right) \right\}$$

and

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_4 := & \langle t\rangle^2 \big\{ \|\eta\|_{3,0}(\|\eta\|_3 \|u\|_{2,1} + \|\eta\|_{2,1}\|u\|_{\underline{1},2}) + \|\eta_2\|_{2,1}(\|\eta_2\|_{2,1}\|\eta\|_3 \\
& + \|\eta_2\|_{1,2}\|\eta_2\|_3) + \|\eta_2\|_{1,2}^3 + \|\eta_2\|_{2,1}\|\eta_2\|_{1,2}\|\tilde{q}\|_{\underline{1},1} \big\} \\
& + \gamma \langle t\rangle^3 \|\eta_2\|_{2,1}(\|\eta_2\|_3 \|u\|_{2,1} + \|\eta_2\|_{2,1}\|u\|_{\underline{1},2}) \\
& + (\|\eta_2\|_{1,2}^2 + \|\eta\|_{2,1}\|u\|_{\underline{1},2} + \|\eta\|_{3,0}\|u\|_3)\|u\|_{2,1} \\
& + \|\eta\|_{2,1}\|u\|_{2,1} + \|\eta\|_{3,0}(\|\eta_2\|_{1,2}\|u\|_{\underline{1},2} + \|\eta\|_3 \|u\|_{2,1}))\|\tilde{q}\|_{\underline{1},1} \\
& + \|\eta\|_{3,0}\|u\|_{\underline{1},2}(\|\eta_2\|_{2,1} + \|u_t\|_1 + \|\eta_2\|_{1,2}\|\eta_2\|_3 + \|\eta\|_{2,1}\|u\|_{\underline{1},2}).
\end{aligned}$$

利用（3.11）和（3.67），结合带有 $i = 2$ 的（3.50）、带有 $i = 1$ 的（3.82）以及（3.103），由此可从（3.50）推得

$$\begin{aligned}
& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathcal{E}_{\mathrm{D}} + \gamma^2 \langle t\rangle \int \partial_1 \mathrm{curl}\eta \partial_1 \mathrm{curl}_{\mathcal{A}}(\bar{\rho}u)\,\mathrm{d}y \right) + c\mathcal{D}_{\mathrm{D}} \\
& \lesssim \gamma \big\{ \gamma(\|\eta\|_{1,2}^2 + \|u\|_{\underline{1},1}^2) + \langle t\rangle(\|(\nabla\partial_1^2\eta, \partial_1 u)\|_0^2 + \gamma(\|\eta_2\|_{2,1}^2 + \|u\|_{2,0}^2 \\
& \quad + \|u\|_{1,1}\|u\|_2)) \big\} + \langle t\rangle^2(\|u\|_{2,0}^2 + \|\eta_2\|_{2,1}^2) + \gamma\mathcal{I}_4 + \mathcal{I}_5,
\end{aligned} \tag{3.104}$$

其中我们定义

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{\mathrm{D}} := & \gamma\mathcal{E}_{1,\mathrm{D}} + \mu\gamma^2\langle t\rangle\|\nabla_{\mathcal{A}}\partial_1\mathrm{curl}\eta\|_0^2/2 \\
& + \langle t\rangle^3 \left(\|\sqrt{\bar{\rho}}u\|_{2,0}^2 - E(\partial_1^2\eta) + \frac{\kappa}{2}\|\bar{\rho}'\partial_2\eta_1\partial_1^3\eta_2\|_0^2 - \kappa\int |\bar{\rho}'|^2 \partial_2\eta_1\partial_1^3\eta_2\partial_2\partial_1^2\eta_2 \mathrm{d}y \right) \\
\mathcal{D}_{\mathrm{D}} := & \gamma \sum_{i=1}^{2} \langle t\rangle^i \|(\eta_2, \sqrt{\gamma}u)\|_{i,1}^2 + \langle t\rangle^3\|u\|_{2,1}^2 + \gamma^2\langle t\rangle\|\nabla^2\eta_2\|_{1,0}^2, \\
\mathcal{I}_5 := & \gamma^2\langle t\rangle \big\{ \|\eta\|_3(\|\eta_2\|_{1,2}^2 + \|\eta\|_{2,1}^2 + \|\eta\|_{1,2}\|u\|_{2,1} + \|u\|_2^2) + \|\eta\|_{1,2}^2\|u\|_{\underline{1},2} + \|\eta\|_{2,0}\|\eta_2\|_3^2 \big\}.
\end{aligned}$$

按照（3.101）的导数过程，我们有

$$\|\mathrm{curl}\eta\|_{1,1}^2 \lesssim \|(\nabla\partial_1\eta, \nabla_{\mathcal{A}}\partial_1\mathrm{curl}\eta)\|_0^2 + \|\eta\|_{1,2}^2\|\nabla\eta\|_2^2,$$

结合（3.7）可知

$$\|\eta\|_{1,2}^2 \lesssim \|(\nabla\partial_1\eta, \nabla_{\mathcal{A}}\partial_1\mathrm{curl}\eta)\|_0^2.$$

根据上述估计、(3.67) 和 (A.5)，我们进一步发现，对于任意给定的充分大的 γ，

$$\begin{cases}
\langle t\rangle\|\partial_2^2\eta\|_{1,0}^2 + \langle t\rangle^2\|\partial_2\partial_1\eta\|_{\underline{1},0}^2 + \langle t\rangle^3\|\eta_2\|_{\underline{2},1}^2 \\
\quad -c\gamma^2\langle t\rangle^3\|\eta_2\|_{2,1}^2\|\eta\|_3 \lesssim \mathcal{E}_{\mathrm{D}} \lesssim \gamma^2\langle t\rangle^3\|(\nabla\eta, u)\|_2^2, \\
\gamma^2\langle t\rangle\|\nabla^2\eta_2\|_{1,0}^2 + \gamma\langle t\rangle^2\|\eta_2\|_{\underline{2},1}^2 + (\gamma^2\langle t\rangle^2 + \langle t\rangle^3)\|u\|_{2,1}^2 \lesssim \mathcal{D}_{\mathrm{D}}.
\end{cases} \tag{3.105}$$

另一方面，我们很容易看出

$$\left|\int \partial_1 \mathrm{curl}\eta \partial_1 \mathrm{curl}_{\mathcal{A}}(\bar{\rho}u)\,\mathrm{d}y\right| \lesssim \|\eta\|_{1,1}\|u\|_2.$$

因此，在区间 $(0,t)$ 上对 (3.104) 乘以适当大的 γ 并积分，然后利用 (2.17)、(3.8)、(3.11)、(3.105)、(A.5)、上述估计以及杨氏不等式，我们推得：对于任意充分小的 δ,

$$\begin{aligned}
&\langle t\rangle\|\partial_2^2(\partial_1\eta_1,\partial_2\eta_2)\|_0^2+\langle t\rangle^2\|\partial_2(\partial_1\eta_1,\partial_2\eta_2)\|_{\underline{1},0}^2+\langle t\rangle^3(\|\eta_2\|_0^2+\|(\partial_2\eta_2,\partial_1\eta)\|_{\underline{2},0}^2)\\
&+\int_0^t\big\{\langle\tau\rangle\|\partial_2(\partial_1\eta_1,\partial_2\eta_2)\|_{\underline{1},0}^2+\langle\tau\rangle^2(\|\eta_2\|_0^2+\|(\partial_2\eta_2,\partial_1\eta)\|_{\underline{2},0}^2)+\langle\tau\rangle^3\|\partial_1 u\|_{\underline{1},1}^2\big\}\mathrm{d}\tau\\
\lesssim&\|(\nabla\eta^0,u^0)\|_2^2+\int_0^t(\|u\|_2^2+\|\eta\|_{1,2}^2+\mathcal{I}_4+\mathcal{I}_5)\mathrm{d}\tau\\
&+\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}\left(\langle\tau\rangle^{3/2}\|\eta_2(\tau)\|_{2,1}\mathcal{E}(\tau)+\sqrt{\mathfrak{E}(\tau)\|\partial_2^2\eta_1(\tau)\|_{\underline{1},0}}\mathcal{E}^{1/4}(\tau)\right).
\end{aligned}\tag{3.106}$$

由 (3.50)、(3.61) 和 (3.62) 可容易推出：对于任意充分大的 α （可能依赖于 $\bar{\rho}$、μ、g、κ 和 Ω），

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^2\alpha^{4-i}\langle t\rangle^i\left(\|\sqrt{\bar{\rho}}u\|_0^2-E(\eta)+\frac{\kappa}{2}\|\bar{\rho}'\partial_2\eta_1\partial_1\eta_2\|_0^2-\kappa\int|\bar{\rho}'|^2\partial_2\eta_1\partial_1\eta_2\partial_2\eta_2\mathrm{d}y\right)\right.\\
&\left.+\alpha\langle t\rangle^2\left(\|\nabla_{\mathcal{A}}u\|_0^2+\kappa\int|\bar{\rho}'|^2\nabla\eta_2\cdot\nabla u_2\mathrm{d}y\right)+\langle t\rangle^3(\|\sqrt{\bar{\rho}}\psi\|_0^2-E(u))\right)\\
&+c(\alpha\langle t\rangle^2(\alpha\|u\|_1^2+\|u_t\|_0^2)+\langle t\rangle^3\|u_t\|_1^2)\\
\lesssim&\,\alpha^3(\|\eta_2\|_1^2+\|u\|_0^2+\langle t\rangle\|\eta_2\|_1\|\eta_2\|_3\|u\|_1)+\langle t\rangle^2(\alpha(\|\eta_2\|_1^2\\
&+\|u\|_2^3+\|u\|_2^2\|\tilde{q}\|_1+\alpha\|\eta_2\|_1\|\eta_2\|_3\|u\|_1)+\|u\cdot\nabla_{\mathcal{A}}u\|_0^2)+\langle t\rangle^3((\|\eta_2\|_2^2\\
&+\|u\|_2^2)\|u\|_2^2+\|\eta\|_3^2(\|u\|_{1,0}^2+\|\eta_2\|_{2,1}^2\|u\|_1^2)+(\|u\|_{1,0}+\|\eta_2\|_{2,1}\|u\|_1)\|u\|_2^2+\|u\|_2^4).
\end{aligned}$$

若在区间 $(0,t)$ 上对上述估计积分，并利用 (2.10)、(3.5)、(3.78)、引理 3.6 以及乘积估计 (A.2)，则由上述估计可得

$$\begin{aligned}
&\langle t\rangle^2\|u\|_1^2+\langle t\rangle^3\|u_t\|_0^2+c\int_0^t(\langle\tau\rangle^2\|u\|_1^2+\langle\tau\rangle^3\|u_\tau\|_1^2)\mathrm{d}\tau\\
\lesssim&\,\|(\nabla\eta^0,u^0)\|_2^2+\langle t\rangle^3\|u\|_2^4+\int_0^t(\langle\tau\rangle^2\|\eta_2\|_1^2+\|u\|_0^2+\mathcal{I}_6)\mathrm{d}\tau,
\end{aligned}\tag{3.107}$$

其中我们定义

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_6:=&\|\eta_2\|_1^2\|\eta_2\|_3^2+\langle\tau\rangle^2(\|\eta_2\|_1\|\eta_2\|_3\|u\|_1+\|u\|_2^3+\|u\|_2^2\|\tilde{q}\|_1)+\langle\tau\rangle^3((\|\eta_2\|_2^2+\|u\|_2^2)\|u\|_2^2\\
&+\|\eta\|_3^2(\|u\|_{1,0}^2+\|\eta_2\|_{2,1}^2\|u\|_1^2)+(\|u\|_{1,0}+\|\eta_2\|_{2,1}\|u\|_1)\|u\|_2^2+\|u\|_2^4).
\end{aligned}$$

利用 (3.74) 和杨氏不等式，由 (3.107) 可进一步得到，对某个充分大的 α，有

$$\langle t\rangle^2(\|u\|_2^2+\|(q,\tilde{q})\|_1^2)+\langle t\rangle^3\|u_t\|_0^2$$

$$
\begin{aligned}
&+c\int_0^t(\langle\tau\rangle(\|u\|^2_{\underline{1},2}+\|(q,\tilde{q})\|^2_{\underline{1},1})+\langle\tau\rangle^2\|u\|^2_1+\langle\tau\rangle^3\|u_\tau\|^2_1)\mathrm{d}\tau\\
&\lesssim\|(\nabla\eta^0,u^0)\|^2_2+\langle t\rangle^2\|\eta_2\|^2_2+\langle t\rangle^3\|u\|^4_2\\
&\quad+\int_0^t(\|u\|^2_0+\langle\tau\rangle\|\eta_2\|^2_{1,2}+\langle\tau\rangle^2\|\eta_2\|^2_1+\mathcal{I}_6)\mathrm{d}\tau,
\end{aligned}
$$

结合 (3.106)，可得

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{E}(t)+\int_0^t\mathfrak{D}(\tau)\mathrm{d}\tau\lesssim&\|(\nabla\eta^0,u^0)\|^2_2+\langle t\rangle^3\|u\|^4_2+\int_0^t(\|\eta\|^2_{1,2}+\|u\|^2_2+\mathcal{I})\mathrm{d}\tau\\
&+\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}\left(\langle\tau\rangle^{3/2}\|\eta_2(\tau)\|_{2,1}\mathcal{E}(\tau)+\sqrt{\mathfrak{E}(\tau)\|\partial_2^2\eta_1(\tau)\|_{\underline{1},0}}\mathcal{E}^{1/4}(\tau)\right),
\end{aligned}
\tag{3.108}
$$

其中我们定义

$$
\mathcal{I}:=\mathcal{I}_4+\mathcal{I}_5+\mathcal{I}_6. \tag{3.109}
$$

3.8. ,0 的能量估计

现在我们进一步建立 (2.17) 中 $\|\partial_2^2\eta_1\|^2_{\underline{1},0}$ 的估计。首先，我们可以由 (3.82) 和 (3.96) 推导出以下估计，其中 $\mathcal{E}_{\tan}$ 和 $\mathcal{D}_{\tan}$ 满足 (3.97) 和 (3.98)：

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mu}{2}\|(\nabla_{\mathcal{A}}\mathrm{curl}\eta,\nabla_{\mathcal{A}}\partial_1\mathrm{curl}\eta)\|^2_0+\chi\mathcal{E}_{\tan}+\sum_{i=0}^{1}\int\partial_1^i\mathrm{curl}\eta\partial_1^i\mathrm{curl}_{\mathcal{A}}\left(\bar{\rho}u\right)\mathrm{d}y\right)\\
&\quad\lesssim\chi^2\sqrt{\mathcal{E}}\mathcal{D}+\|\eta_2\|_{2,1}\|\eta\|_1\|\eta\|_3.
\end{aligned}
\tag{3.110}
$$

容易验证

$$
\begin{aligned}
\|\eta\|^2_{\underline{1},2}\lesssim&\frac{\mu}{2}\|(\nabla_{\mathcal{A}}\mathrm{curl}\eta,\nabla_{\mathcal{A}}\partial_1\mathrm{curl}\eta)\|^2_0+\chi\mathcal{E}_{\tan}\\
&+\sum_{i=0}^{1}\int\partial_1^i\mathrm{curl}\eta\partial_1^i\mathrm{curl}_{\mathcal{A}}\left(\bar{\rho}u\right)\mathrm{d}y\lesssim\chi^2\|(\nabla\eta,u)\|^2_2.
\end{aligned}
$$

在 $(0,t)$ 上对 (3.110) 积分，然后利用上述关系，得到

$$
\|\partial_2^2\eta_1\|^2_{\underline{1},0}\lesssim\|(\nabla\eta^0,u^0)\|^2_2+\int_0^t(\|\eta_2\|_{2,1}\|\eta\|_1\|\eta\|_3+\sqrt{\mathcal{E}}\mathcal{D})\mathrm{d}\tau. \tag{3.111}
$$

3.9. 稳定性估计

将 (2.17) 和 (3.108) 合并，再利用 (3.78) 和杨氏不等式，可得

$$
\begin{aligned}
&\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}(\mathfrak{E}(\tau)+\mathcal{E}(\tau))+\int_0^t(\mathfrak{D}(\tau)+\mathcal{D}(\tau))\mathrm{d}\tau\\
&\lesssim\|(\nabla\eta^0,u^0)\|^2_2+\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}(\langle\tau\rangle^{3/2}\|\eta_2(\tau)\|_{2,1}\mathcal{E}(\tau)+\|\partial_2^2\eta_1(\tau)\|^2_{1,0})+\langle\tau\rangle^3\|u\|^4_2)+\int_0^t\mathcal{I}\mathrm{d}\tau,
\end{aligned}
$$

结合 (3.111)，即可得到 (2.18)。

现在假设 (η,u) 满足 (2.19)，由 (η,u,q) 满足的估计可立即推出 (2.18)

$$
\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}(\mathfrak{E}(\tau)+\mathcal{E}(\tau))+\int_0^t(\mathfrak{D}(\tau)+\mathcal{D}(\tau))\mathrm{d}\tau\leqslant\tilde{c}\|(\nabla\eta^0,u^0)\|^2_2, \tag{3.112}
$$

其中正实数 $\tilde{c}\geqslant1$ 依赖于 $\bar{\rho}$、μ、g、κ 和 Ω。

最后，我们将先验稳定性估计总结如下，其中包含时间衰减。

命题 3.1. 设 (η, u, q) 是方程 (1.29) 和 (1.33) 所描述的 TCRT 问题的一个解，并满足 (2.8)–(2.10)。若 $\bar{\rho}$ 和 κ 满足定理 2.1 中的假设，则存在常数δ_1，其可能依赖于 $\bar{\rho}$, μ, g, κ 和 Ω，使得解 (η, u, q) 满足估计 (3.112)，对任意 $\delta \leqslant \delta_1/\sqrt{2}$ 均成立。

3.10. 定理 2.1 的证明

本小节中，我们证明定理 2.1。首先，我们陈述 TCRT 问题的一个局部适定性结果。

命题 3.2. 设 $b > 0$ 为一个常数，$\gamma > 0$ 为引理 A.4 中的同一常数。假设 $\bar{\rho}$满足 (1.9)，$(\eta^0, u^0) \in \mathcal{H}^3_{\mathrm{s}} \times \mathcal{H}^2_{\mathrm{s}}$, $\|(\nabla\eta^0, u^0)\|_2 \leqslant b$且 $\mathrm{div}_{\mathcal{A}^0} u^0 = 0$，其中$\mathcal{A}^0 := (\nabla\eta^0 + \mathbb{I})^{-\top}$。那么，存在一个充分小的常数 $\delta_2 \leqslant \gamma/2$，使得若 η^0 满足

$$\|\nabla\eta^0\|_2 \leqslant \delta_2,$$

(1.29) 和 (1.33) 所描述的 TCRT 问题存在唯一的局部时间经典解 $(\eta, u, q) \in C^0(\overline{I_T}, \mathcal{H}^3_{\mathrm{s}}) \times \mathcal{U}_T \times (C^0(\overline{I_T}, \underline{H}^1) \cap L^2_T H^2)$，其中某个 $T > 0$。此外，(η, u) 满足 [1]

$$\sup_{t\in I_T} \|\nabla\eta\|_2 \leqslant 2\delta_2,$$

其中 δ_2 和 T 可能依赖于 μ、g、$\bar{\rho}$ 和 Ω，而 T 还依赖于 b。

Proof. 由于命题 3.2可通过与 [45],中相同的标准迭代方法轻易证明，因此我们省略这个简单的证明。□

注 3.2. 若命题 3.2中的初始数据 (η^0, u^0) 还满足 $\det(\nabla\eta^0 + \mathbb{I}) = 1$且 $(\bar{\rho}\eta^0_1)_\Omega = (\bar{\rho}u^0_1)_\Omega = 0$，则 $(\eta, u) \in \widetilde{\mathfrak{H}}^{1,\,\gamma^3,\,T} \times {}^0\mathcal{U}_T$。

由 (3.112) 和命题 3.2，我们可以轻易建立定理 2.1中的整体可解性。接下来，我们简要介绍证明。

设 (η^0, u^0) 满足定理 2.1中的假设，且 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}/\sqrt{2\tilde{c}}$，其中 $\tilde{c}$是 (3.112) 中的常数。注意到

$$\|(\nabla\eta^0, u^0)\|_2 \leqslant \delta \leqslant \delta_2/\sqrt{2\tilde{c}} < \delta_2,$$

因此，根据命题 3.2 和注 3.2，存在方程 (1.29) 和 (1.33) 的 TCRT 问题的唯一局部解 (η, u, q)，其最大存在时间为 $T^{\max}$，并满足

- 对于任意 $a \in I_{T_{\text{最大值}}}$，解 (η, u, q) 属于 $\widetilde{\mathfrak{H}}^{1,\,\gamma^3,\,a} \times {}^0\mathcal{U}_a \times (C^0(\overline{I_a}, \underline{H}^1) \cap L^2_a H^2)$，且 $\sup_{t\in I_a} \|\nabla\eta\|_2 \leqslant 2\delta_2$;
- 上极限$_{t\to T_{\text{最大值}}} \|\nabla\eta(t)\|_2 > \delta_2$，或者上极限$_{t\to T_{\text{最大值}}} \|(\nabla\eta, u)(t)\|_2 = \infty$ 若 $T_{\text{最大值}} < \infty$。

[1]这里，唯一性意味着：如果存在另一个解 $(\tilde{u}, \tilde{\eta}, \tilde{q}) \in C^0(\overline{I_T}, \mathcal{H}^3_{\mathrm{s}}) \times \mathcal{U}_T \times (C^0(\overline{I_T}, \underline{H}^1) \cap L^2_T H^2)$ 满足 $0 < \inf_{(y,t)\in\Omega_T} \det(\nabla\tilde{\eta} + I)$，那么根据小量条件“$\sup_{t\in\overline{I_T}} \|\nabla\eta\|_2 \leqslant 2\delta_2$”，有 $(\tilde{\eta}, \tilde{u}, \tilde{q}) = (\eta, u, q)$。此外，根据“$\sup_{t\in\overline{I_T}} \|\nabla\eta\|_2 \leqslant \gamma$”这一事实以及引理 A.4，我们有

$$\inf_{(y,t)\in\Omega_T} \det(\nabla\eta + I) \geqslant 1/4.$$

Let

$$T^* := \sup\{\tau \in I_{T^{\max}} \mid \|(\nabla\eta, u)(t)\|_2^2 + \mathfrak{A} \leqslant 2\tilde{c}\delta^2 \ \text{ for any } \ t \leqslant \tau\},$$

其中 $\mathfrak{A}$ 在 (2.19) 中定义。容易看出， T^* 的定义是合理的。因此，要证明整体解的存在性，只需验证 $T^* = \infty$。下面我们将用反证法证明这一点。

假设 $T^* < \infty$，则由命题 3.2 可得

$$T^* \in (0, T^{\max}) \tag{3.113}$$

and

$$(\|(\nabla\eta, u)(t)\|_2^2 + \mathfrak{A})|_{t=T^*} = 2\tilde{c}\delta^2.$$

注意到

$$\sup_{t\in\overline{I_{T^*}}}(\|(\nabla\eta, u)(t)\|_2^2 + \mathfrak{A}) \leqslant 2\tilde{c}\delta^2 \leqslant \delta_1^2, \tag{3.114}$$

我们利用 (3.114) 和标准的正则化方法，并沿用推导 (3.112) 时的相同论证，得到

$$\sup_{t\in\overline{I_{T^*}}}(\mathcal{E}(t) + \mathfrak{E}(t)) + \int_0^{T^*}(\mathcal{D}(\tau) + \mathfrak{D}(\tau))\mathrm{d}\tau \leqslant \tilde{c}\|(\nabla\eta^0, u^0)\|_2^2 \leqslant \tilde{c}\delta^2.$$

特别地，

$$\sup_{t\in\overline{I_{T^*}}}(\|(\nabla\eta, u)(t)\|_2^2 + \mathfrak{A}) \leqslant \tilde{c}\delta^2. \tag{3.115}$$

由 (3.113)、(3.115) 以及强连续性 $(\nabla\eta, u) \in C^0([0, T^{\max}) \ H^2)$，可知存在常数 $T \in (T^*, T_{\text{最大值}})$，使得~

$$\sup_{t\in\overline{I_{\tilde{T}}}}(\|(\nabla\eta, u)(t)\|_2^2 + \mathfrak{A}) \leqslant 2\tilde{c}\delta^2,$$

这与 T^* 的定义矛盾。因此， $T^* = \infty$，从而 $T_{\text{最大值}} = \infty$。至此，整体解的存在性得证。由命题 3.2 中局部解的唯一性结果以及 $\sup_{t\geqslant 0}\|\nabla\eta\|_2 \leqslant 2\delta_2$ 这一事实可知，整体解的唯一性显然成立。

回顾 (3.112) 的导数，我们很容易发现，通过标准的正则化方法，整体解 (η, u) 满足 (2.4)。为完成定理 2.1 的证明，还需推导扰动速度更快的时间衰减估计 (2.5)。

注意到 (η, u) 满足 (2.10)，因此我们可以利用 $(1.29)_1$ 和杨氏不等式，从 (3.50) 推导出 $i = 0$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\sqrt{\bar{\rho}}u\|_0^2 - \kappa\int|\vec{\rho}'|^2\partial_2\eta_1\partial_1\eta_2\partial_2\eta_2\mathrm{d}y\right) + c\|u\|_1^2 \lesssim \|\eta_2\|_1^2.$$

显然，我们还可以由上述不等式推出，对于某个正实数 ν （可能依赖于 $\bar{\rho}$、 μ、 g、 κ 和Ω），

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{\nu t}\left(\|\sqrt{\bar{\rho}}u\|_0^2 - \kappa\int|\vec{\rho}'|^2\partial_2\eta_1\partial_1\eta_2\partial_2\eta_2\mathrm{d}y\right)\right) + ce^{\nu t}\|u\|_1^2 \lesssim e^{\nu t}\|\eta_2\|_1^2,$$

由此可得

$$\|u\|_0^2 + \int_0^t e^{\nu(\tau-t)}\|u\|_1^2\mathrm{d}\tau \lesssim \|u^0\|_0^2 e^{-\nu t} + \int_0^t e^{\nu(\tau-t)}\|\eta_2\|_1^2\mathrm{d}\tau. \tag{3.116}$$

由不等式可知

$$e^{-\nu t} \lesssim \langle t\rangle^{-3} \text{ and } \int_0^t e^{\nu(\tau-t)}\langle\tau\rangle^{-3}\mathrm{d}\tau \lesssim \langle t\rangle^{-3},$$

由 (2.4) 和 (3.116) 可立即推出 (2.5)。最后，利用渐近分析方法，我们很容易由 (2.4) 和 (2.5) 得到 (2.6)，导数过程见 [45] 。定理 2.1 的证明到此完成。

4. 定理 2.2 的证明

关于 RT 不稳定解的存在性已有广泛研究，例子见 [37, 44, 45]。按照 [45] 中相同的证明框架，我们也可以在定理 2.2 中建立 (1.29) 和 (1.33) 的 TCRT 问题的不稳定性结果。为完整起见，下面简述证明。下文中，区域 Ω 上的固定正常数 c_i^I 对 $i \geqslant 1$ 可能依赖于 $\bar{\rho}$、μ、g、κ 以及区域 Ω。

首先，我们介绍在不稳定性条件 $\kappa \in [0, \kappa_{\mathrm{C}})$ 下线性化 CRT 问题的不稳定性结果。

命题 4.1。设 $\mu > 0$ 和 $\bar{\rho}$ 满足 (1.9) 和 (1.10)。若 $\kappa \in [0, \kappa_{\mathrm{C}})$，则零解对于线性化毛细 RT 问题是不稳定的

$$\begin{cases} \eta_t = u, \\ \bar{\rho}u_t + \nabla\tilde{q} - \mu\Delta u = (\kappa\mathrm{div}(|\bar{\rho}'|^2\nabla\eta_2) + g\bar{\rho}'\eta_2)\mathbf{e}^2, \\ \mathrm{div}u = 0, \\ (\eta_2, \partial_2\eta_1, u_2, \partial_2 u_1)|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{4.1}$$

也就是说，对于上述问题 (4.1)，存在一个不稳定解 $(\eta, u, \tilde{q}) := e^{\Lambda t}(w/\Lambda, w, \beta)$，其中

$$(w, \beta) \in {}^0\mathcal{H}_{\mathrm{s}}^5 \times \underline{H}^5$$

满足边值问题

$$\begin{cases} \Lambda^2\bar{\rho}w + \Lambda\nabla\beta - \Lambda\mu\Delta w = (\kappa\mathrm{div}(|\bar{\rho}'|^2\nabla w_2) + g\bar{\rho}'w_2)\mathbf{e}^2, \\ \mathrm{div}w = 0, \\ (w_2,\ \partial_2 w_1)|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

其增长率为 $\Lambda > 0$，且满足

$$E(v) \leqslant \Lambda^2\|\sqrt{\bar{\rho}}v\|_0^2 + \Lambda\mu\|\nabla v\|_0^2 \quad \textit{for any} \quad v \in H^1_\sigma. \tag{4.2}$$

此外，

$$\int \bar{\rho}'|w_2|^2\mathrm{d}y\|w_i\|_0\|\partial_1 w_i\|_0\|\partial_2 w_i\|_0 \neq 0 \quad \textit{for} \quad i = 1,\ 2. \tag{4.3}$$

Proof. 我们可以利用引理 A.5 和 [44, 命题 3.1] 中的修正变分方法证明命题 4.1，因此此处省略证明。□

基于线性 RT 不稳定性，我们转而研究非线性 RT 不稳定性。为此，我们首先为 TCRT 问题的解建立如下 Gronwall 型能量不等式。

命题 4.2. 设 $\Lambda > 0$ 与命题 4.1 中相同，且 (η, u, q) 是由命题 3.2 构造的、以 (η^0, u^0) 为初始数据的局部解 $\in {}^0\mathcal{H}^{3,1}_{\mathrm{s},\gamma} \times {}^0\mathcal{H}^2_{\mathrm{s}}$. 假设存在一个常数 δ_1^I（可能依赖于 $\bar{\rho}$, μ, g, κ 和 Ω），使得在某个时间区间内 $\|(\nabla\eta, u)\|_2 \leqslant \delta_1^I$，其中 I_T 是 (η, u, q) 的存在时间区间。那么，对于某个常数 $c_1^I > 0$，(η, u, q) 满足 Gronwall 型能量不等式：对所有 $t \in I_{\tilde{T}}$,

$$\begin{aligned}&\Xi(t) + \underline{\|\eta\|}_3^2 + \int_0^t (\|u\|_{\underline{2},1}^2 + \|u_t\|_1^2)(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &\leqslant c_1^I \|(\nabla\eta^0, u^0)\|_2^2 + \int_0^t \left(c_1^I \|(\eta_2, u_2)\|_0^2 + \Lambda \underline{\|\eta\|}_3^2\right) \mathrm{d}\tau \end{aligned} \tag{4.4}$$

with

$$\mathcal{E} \lesssim \Xi(t) + \underline{\|\eta\|}_3^2 \quad \textit{and} \quad \|\eta\|_3 \lesssim \underline{\|\eta\|}_3 \lesssim \|\eta\|_3, \tag{4.5}$$

此外，我们有

$$\mathcal{D} \lesssim \|\eta_2\|_3^2 + \|u_t\|_1^2. \tag{4.6}$$

Proof. 设 (η, u, q) 是命题 3.2 给出的局部解。那么，$(\eta, u) \in \widetilde{\mathfrak{H}}^{1,3}_{\gamma,T} \times {}^0\mathcal{U}_T$. 我们进一步假设

$$\|(\nabla\eta, u)\|_2^2 \leqslant \delta \in (0, 1] \quad \text{for all} \quad t \in I_{\tilde{T}} \subset I_T.$$

回顾 (3.96) 的推导，并利用 (η, u, q) 的正则性，我们得出：当 δ充分小时,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Xi_{\tan} + c\mathfrak{D}_{\tan} \lesssim \|(\eta_2, u_2)\|_{\underline{2},0}^2 + \chi\sqrt{\mathcal{E}}\mathcal{D}, \tag{4.7}$$

˜其中， $\Xi_{\tan}$ 由 $\mathcal{E}$ 定义，且 $g = 0$； χ 是满足下式的常数:

$$\|\eta\|_{\underline{2},1}^2 + \|u\|_2^2 + \|u_t\|_0^2 + \|\tilde{q}\|_1^2 + \chi\|u\|_{\underline{2},0}^2 \lesssim \Xi_{\tan} \lesssim \chi\mathcal{E} \tag{4.8}$$

and

$$\chi\|u\|_{\underline{2},1}^2 + \|u_t\|_1^2 \lesssim \mathcal{D}_{\tan}. \tag{4.9}$$

注意到 (η, u) 也满足 (3.8) 和 (3.74)，由关系式 $\eta_t = u$ 可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\eta\|_{\underline{1},2}^2 \lesssim \|\eta\|_{\underline{1},2}\|u\|_{\underline{1},2} \lesssim \|\eta\|_{\underline{1},2}(\|\eta\|_{\underline{2},1} + \|u_t\|_1), \tag{4.10}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\eta\|_3^2 \lesssim \|\eta\|_3\|u\|_3 \lesssim \|\eta\|_3(\|\eta\|_{1,2} + \|u_t\|_1). \tag{4.11}$$

我们可立即由 (4.7)、(4.10) 和 (4.11) 推得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Xi_{\tan} + a_1\|\eta\|_{\underline{1},2}^2 + a_1^2\|\eta\|_3^2) + c\mathfrak{D}_{\tan}$$

$$\lesssim \|(\eta_2,u_2)\|^2_{\underline{2},0}+\chi\sqrt{\mathcal{E}}\mathcal{D}+a_1\|\eta\|_{\underline{1},2}(\|\eta\|_{\underline{2},1}+\|u_t\|_1)+a_1^2\|\eta\|_3(\|\eta\|_{1,2}+\|u_t\|_1). \tag{4.12}$$

通过分部积分和柯西–施瓦茨不等式，对于任意 $\varepsilon\in(0,1]$,

$$\|\chi_2\|_{k,0}\lesssim\begin{cases}\varepsilon^{-1}\|\chi_2\|_0+\varepsilon\|\chi_2\|_{2,0} & \text{for}\quad k=1;\\ \varepsilon^{-1}\|\chi_2\|_{1,0}+\varepsilon\|\chi_2\|_{3,0} & \text{for}\quad k=2,\end{cases} \tag{4.13}$$

其中 $\chi=\eta$ 或 u。此外，(η,u) 也满足估计式 (3.74)，因此

$$\mathcal{D}\lesssim\|\eta_2\|_3^2+\|u_t\|_1^2. \tag{4.14}$$

与 (3.78) 类似，我们也有

$$\sqrt{\mathcal{E}}\text{ and }\|(\nabla\eta,u)\|_2\text{ are equivalent to each other,} \tag{4.15}$$

因此，借助 (4.13)–(4.15)，当 a_1和 δ 足够小时，我们可由 (4.12) 推得 (4.4)，其中 Ξ、$\underline{\|\eta\|}$ 和 $\mathcal{D}$ 满足 (4.5) 和 (4.6)。证明完毕。□

对于任意给定的 $\delta>0$，令

$$(\eta^{\mathrm{a}},u^{\mathrm{a}},q^{\mathrm{a}})=\delta e^{\Lambda t}(\tilde{\eta}^0,\tilde{u}^0,\tilde{q}^0), \tag{4.16}$$

其中 $(\tilde{\eta}^0,\tilde{u}^0,\tilde{q}^0):=(w/\Lambda,w,\beta)$，且 (w,β,Λ) 由命题 4.1 给出。则 $(\eta^{\mathrm{a}},u^{\mathrm{a}},q^{\mathrm{a}})$ 也是线性化 CRT 问题 (4.1) 的一个解，并满足以下估计：对于任意 $j\geqslant 0$,

$$\|\partial_t^j(\eta^{\mathrm{a}},u^{\mathrm{a}})\|_3+\|\partial_t^j q^{\mathrm{a}}\|_2=\Lambda^j\delta e^{\Lambda t}(\|(\tilde{\eta}^0,\tilde{u}^0)\|_3+\|\tilde{q}^0\|_2)\lesssim\Lambda^j\delta e^{\Lambda t}. \tag{4.17}$$

此外，由 (4.3) 可得

$$\|\bar{\rho}'\chi_2\|_0\|\chi_i\|_0\|\partial_1\chi_i\|_0\|\partial_2\chi_i\|_0>0,\quad i=1,2, \tag{4.18}$$

其中 $\chi=\tilde{\eta}^0$ 或 $\tilde{u}^0$。

由于线性化 CRT 问题的解 $(\eta^{\mathrm{a}},u^{\mathrm{a}},q^{\mathrm{a}})$ 的初始数据可能不满足相应（非线性）TCRT 问题的初始数据所要求的必要相容条件。因此，我们必须按照 [44, 命题 5.1], 中的做法修改线性化问题的初始数据，使修改后的初始数据逼近线性化问题的原始初始数据，并满足相应非线性问题的相容条件。更确切地说,

命题 4.3. 设 $(\tilde{\eta}^0,\tilde{u}^0):=(w/\Lambda,w)$ 与 (4.16) 中的相同。则存在一个常数$\delta_2^I\in(0,1],$，使得对于任意 $\delta\in(0,\delta_2^I]$，存在 $(\eta^{\mathrm{r}},u^{\mathrm{r}})\in{}^0\mathcal{H}^3_{\mathrm{s}}$满足以下性质：

（1）修正后的初始数据

$$(\eta_0^\delta,u_0^\delta):=\delta(\tilde{\eta}^0,\tilde{u}^0)+\delta^2(\eta^{\mathrm{r}},u^{\mathrm{r}})$$

属于 ${}^0\mathcal{H}^3_{,\,1^{\mathrm{s}},\,\gamma}\times{}^0\mathcal{H}^3_{\mathrm{s}}$ 并满足相容性条件

$$\mathrm{div}_{\mathcal{A}_0^\delta}u_0^\delta=0\ \ in\ \Omega,$$

其中，$\mathcal{A}_0^\delta$ 定义为 $\mathcal{A}$，其中 η_0^δ 替代 η。

(2) 关于δ的一致估计:

$$\|(\eta^{\mathrm{r}}, u^{\mathrm{r}})\|_3 \leqslant c_2^I, \tag{4.19}$$

其中正实数 c_2^I 与 δ 无关。

Proof. 得益于引理 A.5，运用与 [44, 命题 5.1]，中相同的论证，我们可以得到命题 4.3，因此此处省略详细证明。□

现在，设 $(\eta_0^\delta, u_0^\delta) \in {}^0\mathcal{H}^3_{,1^{\mathrm{s}},\gamma} \times {}^0\mathcal{H}^3_{\mathrm{s}}$ 由命题 4.3 构造,

$$c_3^I = \|(\tilde{\eta}^0, \tilde{u}^0)\|_3 + c_2^I > 0 \tag{4.20}$$

and

$$\delta_0 = \frac{1}{2c_3^I} \min\left\{\gamma, \delta_1^I, \delta_2, 2c_3^I\delta_2^I\right\} \leqslant 1. \tag{4.21}$$

从现在起，我们假设 $\delta \leqslant \delta_0$。由于 $\delta \leqslant \delta_2^I$，我们可以利用命题 4.3 构造满足以下条件的 $(\eta_0^\delta, u_0^\delta)$

$$\|(\eta_0^\delta, u_0^\delta)\|_3 \leqslant c_3^I\delta \leqslant \delta_2.$$

根据命题 3.2，对于以 (η^0, u^0) 替代初始数据 $(\eta_0^\delta, u_0^\delta)$ 的 (1.29) 和 (1.33) 的 TCRT 问题，存在唯一解 (η, u, q)，其中 $(\eta, u, q) \in \widetilde{\mathfrak{H}}^{1,3}_{,\gamma,\tau} \times {}^0\mathcal{U}_\tau \times (C^0(\overline{I_\tau}, \underline{H}^1) \cap L^2_\tau H^2)$ 对于 $\tau \in I_{T^{\max}}$，且 $T_{\max}$ 表示最大存在时间。

Let $\epsilon_0 \in (0, 1]$ 为一个常数，将在稍后的 (4.33) 中确定。我们定义 e

$$T^\delta := \Lambda^{-1}\ln(\epsilon_0/\delta) > 0, \quad \text{i.e.,} \quad \delta e^{\Lambda T^\delta} = \epsilon_0, \tag{4.22}$$

$$T^* := \sup\left\{t \in I_{T^{\max}} \,\middle|\, \sup_{\tau\in[0,t)} \sqrt{\|\eta(\tau)\|_3^2 + \|u(\tau)\|_2^2} \leqslant 2c_3^I\delta_0\right\}, \tag{4.23}$$

$$T^{**} := \sup\left\{t \in I_{T^{\max}} \,\middle|\, \sup_{\tau\in[0,t)} \|(\eta, u)(\tau)\|_0 \leqslant 2c_3^I\delta e^{\Lambda\tau}\right\}. \tag{4.24}$$

由于

$$\sqrt{\|\eta(t)\|_3^2 + \|u(t)\|_2^2}\Big|_{t=0} = \sqrt{\|\eta_0^\delta\|_3^2 + \|u_0^\delta\|_2^2} \leqslant c_3^I\delta < 2c_3^I\delta, \tag{4.25}$$

我们有 $T^* > 0$, $T^{**} > 0$。显然,

$$T^* = T^{\max} = \infty \quad \text{or} \quad T^* < T^{\max}, \tag{4.26}$$

$$\|(\eta, u)(T^{**})\|_0 = 2c_3^I\delta e^{\Lambda T^{**}} \quad \text{if} \quad T^{**} < T^{\max}, \tag{4.27}$$

$$\sqrt{\|\eta(T^*)\|_3^2 + \|u(T^*)\|_2^2} = 2c_3^I\delta_0 \quad \text{if} \quad T^* < T^{\max}. \tag{4.28}$$

从现在起，我们定义

$$T^{\min} := \min\{T^\delta, T^*, T^{**}\}.$$

注意到 $\sup_{t\in[0,T^{\min})} \sqrt{\|\eta(t)\|_3^2 + \|u(t)\|_2^2} \leqslant \delta_1^I$，由命题 4.2 可知，对于任意 $t \in I_{T^{\min}}$，(η, u, q) 满足 Gronwall 型能量不等式 (4.4) 和 (4.5)。利用这一事实、(4.23)–(4.25)、引理 A.4 以及条件 $\|\eta\|_3 \leqslant \gamma$，可得对于任意 $t \in [0, T^{\min})$,

$$\mathcal{E}(t) + \int_0^t \mathcal{D}(\tau)\mathrm{d}\tau \leqslant c_4^I\delta^2 e^{2\Lambda t}, \tag{4.29}$$

$$\left\|\int_0^{\eta_2} (\eta_2 - z)\,\bar{\rho}''(y_2 + z)\mathrm{d}z\right\|_{L^1} \leqslant (c_4^I\delta e^{\Lambda t})^2. \tag{4.30}$$

由 (4.29)，我们接下来对 (η, u) 与 $(\eta^{\mathrm{a}}, u^{\mathrm{a}})$ 之间的误差进行估计。

命题 4.4. 设 $(\eta^{\mathrm{d}}, u^{\mathrm{d}}) = (\eta, u) - (\eta^{\mathrm{a}}, u^{\mathrm{a}})$，则存在一个常数 c_5^I，使得对任意$\delta \in (0, \delta_0]$ 以及任意 $t \in I_{T^{\min}}$,

$$\|(\bar{\rho}'\chi^{\mathrm{d}}, \eta^{\mathrm{d}}, u^{\mathrm{d}})\|_{\mathfrak{X}} + \|u_t^{\mathrm{d}}\|_0 \leqslant c_5^I\sqrt{\delta^3 e^{3\Lambda t}}, \tag{4.31}$$

$$\|(\mathcal{A}_{ik}\partial_k\chi_j - \partial_i\chi_j^{\mathrm{a}})(t)\|_{L^1} \leqslant c_5^I\sqrt{\delta^3 e^{3\Lambda t}}, \tag{4.32}$$

wh其中 $i, j = 1, 2$, $\chi = \eta$或 u, $\mathfrak{X} = W^{1,1}$或 H^1，且 c_5^I与 $T^{\min}$无关 .

Proof. 利用与 [44,命题 6.1] 或 [45, 命题 3.4], 中相同的论证，可以很容易地得到命题 4.4，因此我们在此省略详细证明。□

Let

$$\varpi := \min_{\chi=\tilde{\eta}^0,\tilde{u}^0} \left\{\|\chi_1\|_{L^1}, \|\partial_1\chi_1\|_{L^1}, \|\partial_2\chi_1\|_{L^1}, \|\chi_2\|_{L^1}, \|\partial_1\chi_2\|_{L^1}, \|\partial_2\chi_2\|_{L^1}, \|\bar{\rho}'\tilde{\eta}_2^0\|_{L^1}\right\},$$

于是由 (4.18) 得到 $\varpi > 0$ 。

现在，记

$$\epsilon_0 = \min\left\{\left(\frac{c_3^I}{2c_5^I}\right)^2, \frac{c_3^I\delta_0}{c_4^I}, \frac{\varpi^2}{4(c_5^I + |c_4^I|^2)^2}, 1\right\} > 0, \tag{4.33}$$

我们断言

$$T^\delta = T^{\min} = \min\left\{T^\delta, T^*, T^{**}\right\} \neq T^* \text{ or } T^{**}, \tag{4.34}$$

事实上，可以如下通过反证法证明这一点。

(1) 若 $T^{\min} = T^{**}$，则由 (4.26) 得 $T^{**} < T_{\text{最大值}}$。回想 $\sqrt{\epsilon_0} \leqslant c_3^I/2c_5^I$，由 (4.16)、(4.20)、(4.22) 和 (4.31) 可知,

$$\begin{aligned}\|\eta(T^{**})\|_0 &\leqslant \|\eta^{\mathrm{a}}(T^{**})\|_0 + \|\eta^{\mathrm{d}}(T^{**})\|_0\\ &\leqslant \delta e^{\Lambda T^{**}}(c_3^I + c_5^I\sqrt{\delta e^{\Lambda T^{**}}})\\ &\leqslant \delta e^{\Lambda T^{**}}(c_3^I + c_5^I\sqrt{\epsilon_0})\\ &\leqslant 3c_3^I\delta e^{\Lambda T^{**}}/2 < 2c_3^I\delta e^{\Lambda T^{**}},\end{aligned}$$

这与 (4.27) 矛盾。因此， $T^{\min} \neq T^{**}$。

(2) 若 $T^{\min} = T^*$，则 $T^* < T^{**}$。回想 $\epsilon_0 \leqslant c_3^I\delta_0/c_4^I$，由 (4.29) 可推出，对任意 $t \in I_{T^{\min}}$,

$$\sqrt{\|\eta(t)\|_3^2 + \|u(t)\|_2^2} \leqslant c_4^I\delta e^{\Lambda T^\delta} \leqslant c_3^I\delta_0 < 2c_3^I\delta_0,$$

这与 (4.28) 矛盾。因此， $T_{\text{最小值}} \neq T^*$。

由于 T^δ满足 (4.34)，不等式 (4.31) 和 (4.32) 对 $t = T^\delta$成立。利用这一事实以及 (4.16)、(4.22)、(4.30) 和条件 $\epsilon_0 \leqslant \varpi^2/4(c_5^I + |c_4^I|^2)^2$, ，我们得到以下不稳定性关系:

$$\begin{aligned}\|\mathcal{A}_{ik}\partial_k\chi_j(T^\delta)\|_{L^1} &\geqslant \|\partial_i\chi_j^{\mathrm{a}}(T^\delta)\|_{L^1} - \|\mathcal{A}_{ik}\partial_k\chi_j(T^\delta) - \partial_i\chi_j^{\mathrm{a}}(T^\delta)\|_{L^1}\\ &\geqslant \delta e^{\Lambda T^\delta}(\|\partial_i\tilde{\chi}_j^0\|_{L^1} - c_5^I\sqrt{\delta e^{\Lambda T^\delta}}) \geqslant \epsilon := \varpi\epsilon_0/2, \quad i, j = 1, 2,\end{aligned}$$

and

$$\|\bar{\rho} - \bar{\rho}(\eta_2(y, T^\delta) + y_2)\|_{L^1} \geqslant \|\bar{\rho}'\eta_2^{\mathrm{a}}(T^\delta)\|_{L^1} - \|\bar{\rho}'\eta_2^{\mathrm{d}}(T^\delta)\|_{L^1}$$

$$
\begin{aligned}
&-\left\|\int_0^{\eta_2(y,T^\delta)}\left(\eta_2(y,T^\delta)-z\right)\vec{\rho}''(y_2+z)\mathrm{d}z\right\|_{L^1}\\
&\geqslant \delta e^{\Lambda T^\delta}(\|\vec{\rho}'\tilde{\eta}_2^0\|_{L^1}-c_5^I\sqrt{\delta e^{\Lambda T^\delta}}-(c_4^I)^2\delta e^{\Lambda T^\delta})\geqslant \varpi\epsilon_0/2,
\end{aligned}
$$

其中 $\chi=\eta$ 或 u。类似地，我们也可以利用 (4.31) 验证 (η,u) 满足 (2.20) 中其余的不稳定性关系。至此，定理 2.2 的证明完成。

附录 A. 分析工具

本附录旨在提供前文各节中用到的一些数学结果。需要指出的是，Ω 以及下文所用的简化记号，与式 (1.5) 和第 2 节中定义的相同。此外，$a\lesssim b$ 仍表示 $a\leqslant cb$，其中正实数 c取决于引理中出现c 时所涉及的参数和区域。

引理 A.1. (1) H^j 中的插值不等式（参见 *[1,* 第 5 节*2]*）：设 D 是$\mathbb{R}^2$ 中满足锥条件的区域，或是 $\mathbb{R}$中的有界区间，则对任意给定的 $0\leqslant j<i$,

$$
\|f\|_{H^j(D)}\lesssim\|f\|_{L^2(D)}^{(i-j)/i}\|f\|_{H^i(D)}^{j/i}\lesssim\varepsilon^{-j/(i-j)}\|f\|_{L^2(D)}+\varepsilon\|f\|_{H^i(D)},\quad\forall\,\varepsilon>0,\tag{A.1}
$$

其中，式 (A.1) 中的两个估计常数均与 ε无关。

(2) 乘积估计（参见 *[39,* 第 4 节*1]*）：设 $D\subset\mathbb{R}^2$ 是满足锥条件的区域，且 φ、ψ 是定义在 D 上的函数。则

$$
\|\varphi\psi\|_{H^i(D)}\lesssim\|\varphi\|_{H^i(D)}\|\psi\|_{H^2(D)}\quad for\ \ 0\leqslant i\leqslant 2.\tag{A.2}
$$

(3) 各向异性乘积估计（见 *[41,* 引理 3.*1]*）：设函数 φ和 ψ 定义在 Ω 上。那么

$$
\|\varphi\psi\|_0\lesssim\begin{cases}\sqrt{\|\varphi\|_0\|\varphi\|_{\underline{1},0}}\|\psi\|_1,\\ \|\varphi\|_0\sqrt{\|\psi\|_{\underline{1},0}\|\psi\|_{\underline{1},1}}.\end{cases}\tag{A.3}
$$

引理 A.2. Poincar´e 不等式（见 *[56,* 引理 1.*43]*）：设 $1\leqslant p<\infty$和 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界 Lipschitz 区域（$n\geqslant 2$）或 $\mathbb{R}$中的有限区间。那么对于任意 $w\in W^{1,\,p}(D)$,

$$
\|w\|_{L^p(D)}\lesssim\|\nabla w\|_{L^p(D)}^p+\left|\int_D w\mathrm{d}y\right|^p.\tag{A.4}
$$

注 A.1. 根据 Poincar´e 不等式，对于任意给定的 $i\geqslant 0$,

$$
\|w\|_{1,i}\lesssim\|w\|_{2,i}\ \text{ for any } w \text{ satisfying } \partial_1 w,\ \partial_1^2 w\in H^i.\tag{A.5}
$$

引理 A.3. Hodge 型椭圆估计（见 *[46,* 引理 A.*4]*）：若 $w\in H^i_{\mathrm{s}}$且 $i\geqslant 1$，则

$$
\|\nabla w\|_{i-1}\lesssim\|(\mathrm{curl}w,\mathrm{div}w)\|_{i-1}.\tag{A.6}
$$

引理 A.4. 微分同胚映射定理（见 *[46,* 引理 A.*8]*）：存在一个充分小的常数 $\gamma\in(0,1)$，其取值可能依赖于 Ω，使得对于任意满足 $\|\nabla\varsigma\|_2\leqslant\gamma$ 的 $\varsigma\in H^3_{\mathrm{s}}$，$\psi:=\varsigma+y$（在可能针对变量 y 于一个零测集上重新定义后）具有与 ζ 在 (1.21) 和 (1.22) 中相同的微分同胚性质，并且 $\inf_{y\in\Omega}\det(\nabla\varsigma+I)\geqslant 1/4$。

引理 A.5. 斯托克斯估计（见 *[45,* 引理 A.*12]*）：设 $i \geqslant 0$，$(f,\varphi) \in H^i \times H^{2+i}$ 和$\varphi_2|_{\partial\Omega} = 0$，则满足 Navier 边界条件的斯托克斯问题

$$\begin{cases} -\Delta v + \nabla P = f & in \quad \Omega, \\ \mathrm{div} v = \mathrm{div}\varphi & in \quad \Omega, \\ (v_2, \partial_2 v_1) = 0 & on \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{A.7}$$

存在唯一解 $(v,P) \in \underline{\mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{2+i}}$(或 ${}^0\mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{2+i}$) $\times \underline{H}^{1+i}$，满足

$$\|v\|_{2+i} + \|P\|_{1+i} \lesssim \|(f,\varphi)\|_i + \|\mathrm{div}\varphi\|_{1+i}. \tag{A.8}$$

引理 A.6. 迹估计：

$$\int_{\partial\Omega} \partial_1\varphi\psi \mathrm{d}y_1 \lesssim \sqrt{\|\varphi\|_{1,0}(\|\varphi\|_0 + \|\partial_2\varphi\|_0)}\sqrt{\|\psi\|_{1,0}(\|\psi\|_0 + \|\partial_2\psi\|_0)} \tag{A.9}$$

对任意 $\varphi, \psi \in H^1$。

∽Proof. 我们将 $\overline{f}$记为 f的共轭函数，并将 $f(\xi, y_2)$ 记为 $f(y)$ 的水平傅里叶变换，即

$$\widehat{f}(\xi, y_2) = \int_{2\pi L\mathbb{T}} f(y_1, y_2) e^{-\mathrm{i}y_1\xi} \mathrm{d}y_1,$$

⌒ ^于是 $\partial_2 f = \partial_2 f$。根据 Parseval 定理（见 [25, 命题 3.1.16]），

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_0} \partial_1\varphi\psi \mathrm{d}y_1 &= \frac{1}{4(\pi L)^2} \sum_{\xi\in L^{-1}\mathbb{Z}} \mathrm{i}\xi\widehat{\varphi}(\xi,0)\overline{\widehat{\psi}(\xi,0)} \\ &\lesssim \frac{1}{4(\pi L)^2} \sqrt{\sum_{\xi\in L^{-1}\mathbb{Z}} |\xi||\widehat{\varphi}(\xi,0)|^2 \sum_{\xi\in L^{-1}\mathbb{Z}} |\xi||\widehat{\psi}(\xi,0)|^2}, \end{aligned} \tag{A.10}$$

其中 $\Sigma_0 := 2\pi L\mathbb{T} \times \{0\}$。

容易估算，对于几乎处处的 $y_2 \in (0,h)$，

$$\begin{aligned} &\sum_{\xi\in L^{-1}\mathbb{Z}} |\xi||\widehat{\varphi}(\xi,0)|^2 \\ =& \sum_{\xi\in L^{-1}\mathbb{Z}} |\xi| \left(|\widehat{\varphi}(\xi,y_2)|^2 - 2\int_0^{y_2} \widehat{\varphi}(\xi,s)\partial_s\widehat{\varphi}(\xi,s)\mathrm{d}s \right) \\ \lesssim& \left(\sum_{\xi\in L^{-1}\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi,y_2)|^2 \sum_{\xi\in L^{-1}\mathbb{Z}} |\xi\widehat{\varphi}(\xi,y_2)|^2 \right)^{1/2} \\ &+ \left(\sum_{\xi\in L^{-1}\mathbb{Z}} \|\xi\widehat{\varphi}(\xi,s)\|_{L^2(0,h)}^2 \sum_{\xi\in L^{-1}\mathbb{Z}} \|\partial_s\widehat{\varphi}(\xi,s)\|_{L^2(0,h)}^2 \right)^{1/2} \\ =& 4(\pi L)^2 (\|\varphi(y_2)\|_{L^2(0,2\pi L)} \|\partial_1\varphi(y_2)\|_{L^2(0,2\pi L)} + \|\varphi\|_{1,0}\|\partial_2\varphi\|_0). \end{aligned}$$

类似地，我们有

$$\sum_{\xi\in L^{-1}\mathbb{Z}} |\xi||\widehat{\psi}(\xi,0)|^2 \lesssim 4(\pi L)^2 (\|\psi(y_2)\|_{L^2(0,2\pi L)} \|\partial_1\psi(y_2)\|_{L^2(0,2\pi L)} + \|\psi\|_{1,0}\|\partial_2\psi\|_0).$$

因此，将上述两个估计代入 (A.10)，再对所得不等式在 $(0,h)$ 上积分，便可立即得到

$$\int_{\Sigma_0}\partial_1\varphi\psi\mathrm{d}y_1\lesssim\sqrt{\|\varphi\|_{1,0}(\|\varphi\|_0+\|\partial_2\varphi\|_0)}\sqrt{\|\psi\|_{1,0}(\|\psi\|_0+\|\partial_2\psi\|_0)}.$$

同理，

$$\int_{\Sigma_h}\partial_1\varphi\psi\mathrm{d}y_1\lesssim\sqrt{\|\varphi\|_{1,0}(\|\varphi\|_0+\|\partial_2\varphi\|_0)}\sqrt{\|\psi\|_{1,0}(\|\psi\|_0+\|\partial_2\psi\|_0)},$$

其中 $\Sigma_h:=2\pi L\mathbb{T}\times\{h\}$。结合上述两个估计可得 (A.9)。证明完毕。□

引理 A.7. 向量值函数的庞加莱不等式及其最优常数：对于任意 $\varphi\in H^1_\sigma$，有

$$\|\varphi_2\|_0^2\leqslant\|\nabla\varphi_2\|_0^2/(\pi^2h^{-2}+L^{-2}),\tag{A.11}$$

其中常数 $(\pi^2h^{-2}+L^{-2})^{-1}$ 是最优的。

⌢Proof. 我们仍记 $f(\xi,y_2)$ 为 $f(y)$ 的水平傅里叶变换。由于 $\mathrm{div}\varphi=0$，我们有

$$i\xi\widehat{\varphi_1}+\partial_2\widehat{\varphi_2}=0.$$

在上述恒等式中取 $\xi=0$，然后利用边界条件 $\widehat{\varphi_2}(0,0)=0$，可得

$$\widehat{\varphi_2}(0,y_2)=\partial_2\widehat{\varphi_2}(0,y_2)=0.\tag{A.12}$$

此外，众所周知，存在一个函数 $\psi_0\in H^1_0(0,h)$，使得（参见 [40] 中的引理 4.4 和式 (4.25)）

$$\frac{\|\psi_0\|_{L^2(0,h)}}{\|\psi_0'\|_{L^2(0,h)}}=\sup_{\psi\in H^1_0(0,h)}\frac{\|\psi\|_{L^2(0,h)}}{\|\psi'\|_{L^2(0,h)}}=\frac{h}{\pi}.\tag{A.13}$$

由 Parseval 定理（参见 [25, 命题 3.1.16]）、式 (A.12) 和 (A.13)，可得

$$\begin{aligned}\|\nabla\varphi_2\|_0^2=&\frac{1}{4(\pi L)^2}\sum_{\xi\in L^{-1}\mathbb{Z}}(\|\xi\widehat{\varphi_2}(\xi,y_2)\|_{L^2(0,h)}^2+\|\partial_2\widehat{\varphi_2}(\xi,y_2)\|_{L^2(0,h)}^2)\\ \geqslant&\frac{(\pi^2h^{-2}+L^{-2})}{4(\pi L)^2}\sum_{0\neq\xi\in L^{-1}\mathbb{Z}}\|\widehat{\varphi_2}(\xi,y_2)\|_{L^2(0,h)}^2=(\pi^2h^{-2}+L^{-2})\|\varphi_2\|_0^2,\end{aligned}$$

这意味着式 (A.11) 成立。

现在我们进一步证明常数 $(\pi^2h^{-2}+L^{-2})^{-1}$ 是最优的。为此，我们定义

$$\varphi:=(-L\psi_0'(y_2)\cos(y_1/L),-\psi_0(y_2)\sin(y_1/L)).$$

容易验证 $\varphi\in H^1_\sigma$；此外，由式 (A.13)，

$$\begin{aligned}\frac{\|\varphi_2\|_0^2}{\|\nabla\varphi_2\|_0^2}=&\frac{\|\psi_0(y_2)\|_{L^2(0,h)}^2\|\sin(y_1/L)\|_{L^2(0,2\pi L)}^2}{\|\psi_0'(y_2)\|_{L^2(0,h)}^2\|\sin(y_1/L)\|_{L^2(0,2\pi L)}^2+\|\psi_0(y_2)\|_{L^2(0,h)}^2\|\cos(y_1/L)\|_{L^2(0,2\pi L)}^2L^{-2}}\\ =&(\pi^2h^{-2}+L^{-2})^{-1}.\end{aligned}\tag{A.14}$$

这意味着常数 $(\pi^2h^{-2}+L^{-2})^{-1}$ 是最优的，从而完成了证明。□

致谢。Fei Jiang 的研究得到国家自然科学基金委员会（项目编号：12022102 和 12231016）以及中国福建省自然科学基金（项目编号：2020J02013 和 2022J01105）的资助；Fucai Li 的研究得到国家自然科学基金委员会（项目编号：12071212）以及江苏高等学校优先学科建设项目的资助；Zhang 的研究得到国家自然科学基金委员会（项目编号：12101305）的资助。

参考文献

[1] R.A. Adams, J.J.F. Fournier，《Sobolev空间》，Academic Press：纽约，2005年。[2] P. Antonelli, S. Spirito，Navier–Stokes–Korteweg方程弱解的整体存在性，《Ann. Inst. H. Poincar´e C Anal. Non Lin´eaire》39（2022）171–200。[3] C. Audiard, B. Haspot，小无旋初始数据下Euler–Korteweg系统的整体适定性，《Comm. Math. Phys.》351（2017）201–247。[4] K.A. Baldwin, M.M. Scase, R. Hill，旋转对Rayleigh–Taylor不稳定性的抑制作用，《Scientific Reports》5（2015）11706。[5] S. Benzoni-Gavage, R. Danchin, S. Descombes，关于Euler–Korteweg模型在多个空间维度下的适定性，《Indiana Univ. Math. J.》（2007）1499–1579。[6] D. Bian, L. Yao, C. Zhu，Korteweg型可压缩流体模型向Navier–Stokes方程的毛细作用消失极限，《SIAM J. Math. Anal.》46（2014）1633–1650。[7] D. Bresch, B. Desjardins, M. Gisclon, R. Sart，与可压缩Korteweg系统相关的不稳定性结果，《Ann. Univ. Ferrara Sez.》54（2008）11–36。[8] D. Bresch, B. Desjardins, C.K. Lin，关于若干可压缩流体模型：Korteweg系统、润滑系统和浅水系统，《Commun. Partial Differ. Equ.》28（2003）843–868。[9] D. Bresch, M. Gisclon, I. Lacroix-Violet，关于Navier–Stokes–Korteweg系统和Euler–Korteweg系统：在量子流体模型中的应用，《Arch. Ration. Mech. Anal.》233（2019）975–1025。[10] D. Bresch, M. Gisclon, I. Lacroix-Violet, A. Vasseur，含阻力项的可压缩Navier–Stokes–Korteweg方程的指数衰减，《J. Math. Fluid Mech.》24（2022）1–16。[11] C. Burtea, F. Charve，针对变毛细系数和黏性系数的一般非均匀不可压缩Navier–Stokes–Korteweg系统的拉格朗日方法，《SIAM J. Math. Anal.》49（2017）3476–3495。[12] S. Chandrasekhar，《流体动力学与磁流体动力学稳定性》，物理学专著国际丛书，牛津，Clarendon出版社，1961年。[13] F. Charve，大初始数据下局部与非局部毛细Navier–Stokes系统的局部时间结果，《J. Differential Equations》256（2014）2152–2193。[14] F. Charve, R. Danchin, J. Xu，含毛细效应的可压缩Navier–Stokes系统的Gevrey解析性与衰减，《Indiana Univ. Math. J.》70（2021）1903–1944。[15] F. Charve, B. Haspot，一维Korteweg系统整体强解的存在性及毛细效应与黏性消失极限，《SIAM J. Math. Anal.》45（2013）469–494。[16] Z. Chen, Y. Li，具有密度依赖黏性和毛细作用的Korteweg型可压缩流体模型不可渗透壁面问题的解的渐近行为，《SIAM J. Math. Anal.》53（2021）1434–1473。[17] Z. Chen, H. Zhao，完整可压缩Navier–Stokes–Korteweg系统定常解的存在性与非线性稳定性，《J. Math. Pures Appl.》101（2014）330–371。[18] R. Danchin, B. Desjardins，Korteweg型可压缩流体模型解的存在性，《Ann. Inst. Henri Poincar´e》18（2001）97–133。[19] B. Desjardins, E. Grenier，《非线性Rayleigh–Taylor不稳定性》，《Acta Math. Sin.》22（2006）1007–1016。[20] J.E. Dunn, J. Serrin，关于间隙功的热力学，《Arch. Rational Mech. Anal.》88（1985）95–133。

[21] F. Fanelli，毛细效应存在下的高速旋转黏性可压缩流体，《数学年刊》366（2016）981–1033。[22] S. Friedlander, W.A. Strauss, M. Vishik，理想流体中的非线性不稳定性，亨利·庞加莱研究所年刊（C）非线性分析14（1997）187–209。[23] B. Gebhard, J.J. Kolumb´an, L. Sz´ekelyhidi Jr.，瑞利–泰勒不稳定性的一种新方法，《Arch. Ration. Mech. Anal.》241（2021）1243–1280。[24] P. Germain, P. LeFloch，可压缩流体的有限能量方法：Navier–Stokes–Korteweg模型，《纯粹与应用数学通讯》69（2016）3–61。[25] L. Grafakos，《经典傅里叶分析》（第二版），施普林格，德国，2008年。[26] Y. Guo, C. Hallstrom, D. Spirn，不稳定界面流体附近的动力学，《数学物理通讯》270（2007）635–689。[27] Y. Guo, W.A. Strauss，周期BGK平衡态的不稳定性，《纯粹与应用数学通讯》48（1995）861–894。[28] Y. Guo, W.A. Strauss，双峰平衡态的非线性不稳定性，《Ann. Inst. H. Poincar´e Anal. Non Lin´eaire》12（1995）339–352。[29] Y. Guo, I. Tice，黏性可压缩流体的线性Rayleigh–Taylor不稳定性，《SIAM J. Math. Anal.》42（2011）1688–1720。[30] B. Haspot，Korteweg型可压缩流体模型整体弱解的存在性，《J. Math. Fluid Mech.》13（2011）223–249。[31] B. Haspot，初始密度属于 L^∞时Korteweg系统的强解，《BMO^{-1}($\mathbb{R}^N$)》，《Proc. London Math. Soc.》121（2020）1766–1797。[32] D. Hateau，Rayleigh–Taylor不稳定性诱导的两相可压缩湍流混合数值模拟，《复杂应用有限体积法IV》（2005）23–31。[33] H. Hattori, D. Li, Korteweg型材料二维系统的解，《SIAM J. Math. Anal.》25（1994）85–98。[34] H. Hong，有界区域内Korteweg型可压缩正压流体模型的强解，《Z. Angew. Math. Phys.》71（2020）1–25。[35] H. Hong，等熵Navier–Stokes–Korteweg系统流入问题中定常解和黏性激波的稳定性，《J. Differential Equations》314（2022）518–573。[36] J. Jang, I. Tice, Y.J. Wang，可压缩黏性表面内波问题：局部适定性，《Arch. Ration. Mech. Anal.》221（2016）215–272。[37] F. Jiang, S. Jiang, 有界区域中三维重力驱动黏性流的稳定性与不稳定性，《Adv. Math.》264（2014）831–863。[38] F. Jiang, S. Jiang，磁场在磁性瑞利–泰勒问题中的稳定化效应，《SIAM J. Math. Anal.》50（2018）491–540。[39] F. Jiang, S. Jiang，分层可压缩磁流体Rayleigh–Taylor问题中的非线性稳定性与不稳定性，《Calc. Var. Partial Differential Equations》58（1）（2019）第29篇，61页。[40] F. Jiang, S. Jiang，非电阻磁流体中的磁抑制理论，《Arch. Ration. Mech. Anal.》233（2019）749–798。[41] F. Jiang, S. Jiang，二维非电阻磁流体方程整体解在大初始扰动下的渐近行为，《Adv. Math》393（2021）108084。[42] F. Jiang, S. Jiang, Y.J. Wang，不可压缩黏性磁流体方程的Rayleigh–Taylor不稳定性，《Comm. Partial Differential Equations》39（2014）399–438。[43] F. Jiang, S. Jiang, G.C. Wu，弹性对分层黏弹性流体Rayleigh–Taylor问题的稳定化效应，《J. Funct. Anal.》272（2017）3763–3824。[44] F. Jiang, S. Jiang, W.C. Zhan，抽象瑞利–泰勒问题的不稳定性及其应用，《Math. Models Methods Appl. Sci.》30（2020）2299–2388。[45] F. Jiang, S. Jiang, Y.Y. Zhao，水平磁场对二维非电阻磁流体Rayleigh–Taylor不稳定性的抑制作用：黏性情形，arXiv:2202.13731（2022）。[46] F. Jiang, S. Jiang, Y.Y. Zhao，水平磁场对Rayleigh–Taylor不稳定性的抑制作用

具有速度阻尼的理想磁流体流体中的磁场，《J. Differential Equations》314 (2022) 574–652。[47] A. J¨ungel，C.K. Lin，K.C. Wu，具有毛细效应的Navier–Stokes系统的渐近极限，《Comm. Math. Phys.》329 (2014) 725–744。[48] S. Kawashima，Y. Shibata，J. Xu，毛细作用下可压缩Navier–Stokes方程的能量方法与衰减，《J. Math. Pures Appl.》154 (2021) 146–184。[49] T. Kobayashi，M. Murata，H. Saito，Korteweg型可压缩流体模型的预解算子估计及其应用，《J. Math. Fluid Mech.》24 (2022) 1–42。[50] D.J. Korteweg，论考虑由密度显著但已知的变化所引起的毛细力时流体运动方程所呈现的形式，以及在密度连续变化假设下的毛细作用理论，《Archives Néerlandaises des Sciences exactes et naturelles》6 (1901年) 1–24。[51] M. Kotschote，Korteweg型可压缩流体模型的强解，《Ann. Inst. H. Poincaré C Anal. Non Linéaire》25 (2008) 679–696。[52] M. Kotschote，Korteweg型可压缩非等温流体动力学模型的强适定性，《J. Math. Fluid Mech.》12 (2010) 473–484。[53] F.C. Li，Z.P. Zhang，毛细作用对黏性不可压缩毛细流体中瑞利–泰勒问题的稳定化效应，即将在《SIAM J. Math. Anal.》发表（2022）。[54] F. Lin，弹性复杂流体中的一些分析问题，《纯粹与应用数学通讯》65 (2012) 893–919。[55] M. Murata，Y. Shibata，Korteweg型可压缩流体模型的整体适定性，《SIAM J. Math. Anal.》52 (2020) 6313–6337。[56] A. Novotný，I. Straškraba，《可压缩流的数学理论导论》，牛津大学出版社，美国，2004。[57] L. Rayleigh，变密度不可压缩重流体平衡态的研究，《科学论文》II (1900) 200–207。[58] H. Saito，一般区域上Korteweg型可压缩流体模型的最大 L^p–L^q 正则性，《J. Differential Equations》268 (2020) 2802–2851。[59] M. Sy，D. Bresch，F. Guill´en-Gonz´alez，J. Lemoine，M.A. Rodr´ıguez-Bellido，不可压缩Korteweg模型的局部强解，巴黎科学院数学报告342 (2006) 169–174。[60] G.I. Taylor，液体表面沿垂直于其平面的方向加速时的稳定性，英国皇家学会会刊A辑201 (1950) 192–196。[61]J.H. Wang，《二维非定常流与激波》（中文），科学出版社，北京，中国，1994。[62] Y. Wang，I. Tice，C. Kim，黏性表面内波问题：整体适定性与衰减，理性力学与分析档案212 (2014) 1–92。[63] Y.J. Wang，三维黏性非电阻磁流体力学内波的尖锐非线性稳定性判据，理性力学与分析档案231 (2019) 1675–1743。[64] Z. Zhang，黏性不可压缩毛细流体的瑞利–泰勒不稳定性，《J. Math. Fluid Mech.》24 (2022) 第70号论文，23页。