arXiv:2302.01040v1 [quant-ph] 2 Feb 2023

机械驱动下四镜腔光力学系统中的混沌调控

Kashif Ammar Yasir[1], * 和 Gao Xianlong[1], †[1] *Department of Physics, Zhejiang Normal University, Jinhua 321004, China.*（日期：2023年2月3日）

我们研究了外部机械驱动与腔体中横向布置的两个移动端镜相互作用时，带有机械驱动的四镜光机械腔中混沌的出现。泵浦激光驱动的强腔模通过辐射压力激发两个移动端镜的机械振荡。这些由辐射压力引起的机械效应继而导致两个横向反射镜之间的间接耦合，此时腔内场如同连接两个机械物体的弹簧。通过在很宽的初始条件范围内计算两个反射镜的庞加莱截面，我们展示了在外部机械驱动下，庞加莱截面如何从稳定状态转变为混合状态——包含稳定岛和混沌海。为了进一步探究机械驱动下混沌的出现，我们测量了最初位于混合庞加莱截面中的移动端镜的时空响应。我们发现，即使缺少任意一个机械驱动，在外部机械驱动下，两个反射镜都会经历混沌的时间演化。为定量测量混沌的出现，我们计算了系统可能的李雅普诺夫指数以及整体柯尔莫哥洛夫-辛奈《熵》。我们发现，最大李雅普诺夫指数及其对应的柯尔莫哥洛夫-辛奈《熵》不仅会随着外部驱动增强而取正值，而且关键地取决于从庞加莱截面中选取的初始条件。此外，我们还展示了与反射镜振荡运动相关的机械阻尼率会增强反射镜的混沌动力学。

一、引言

光力学——通过辐射压力在微观/宏观谐振器中产生机械运动的一种体现——已成为一个引人入胜的研究领域，尤其是在腔量子电动力学方面，并且正受到越来越多的关注[1——3]。在宏观尺度上展示光的机械特性，使得引力波探测器的设计成为可能[4, 5] ；而在微观尺度上，则使我们能够开展高精度测量[6] 并发展光力学晶体[7]。光力学为我们更好地展示和研究量子镜的基态冷却提供了机会[8——13]以及能够产生光力学诱导透明的量子非线性光学相互作用[14——16]。此外，多个机械对象，尤其是超冷原子[17], 与光机械系统的耦合，促成了多组分混合腔光力学。腔光机械学的混合化实现了超冷原子诱导量子冷却 [18], 、多体量子纠缠 [19——22],高保真态转移[23, 24], 、多重电磁诱导透明 [25——28], 以及具有合成着装原子态的腔光机械学[29——31]。

谐振器的稳定与不稳定动力学对于全面理解光机械系统至关重要，在混合环境中尤其如此。这一动机促使研究人员开始研究光学 [32–34] as

以及混合光机械学中的空间双稳态 [35] ，并令人瞩目地展示了腔光力学中的混沌现象，该现象由辐射压力的非线性相互作用 [36–42]所诱发。利用辐射压力的非线性相互作用在光机械学中产生混沌[43], ，进一步实现了动力学局域化的展示——这是一种源于混沌区域中最大量子干涉的量子力学现象[44] ——适用于光机械镜 [45] 和超冷原子[46]。近期对四镜光机械系统的研究中，两个横向布置的移动端镜为研究混合与复杂系统提供了新的装置[47–50]。外部机械驱动对这类系统中机械谐振器的影响，催生了多项新颖研究[51, 52]。然而，仍有必要研究四镜光机械系统中机械驱动的动力学效应，尤其是混沌方面。此外，讨论横向布置的二体系统中的动力学特性（例如混沌与无序）十分重要；在该系统中，二体之间通过腔内光子辐射压力产生耦合。这有助于理解多种由混沌介导的量子现象。

本文讨论了四镜腔中的混沌现象。该腔经过特殊设计，两个机械驱动分别与两个移动端镜发生外部相互作用，且这两个移动端镜分别沿腔的 x 轴和 y 轴横向布置。位于腔中心的分束器 (BS) 将腔模分开，随后腔模与移动端镜耦合。光的机械效应以辐射压力的形式激发移动端镜的机械振荡。由于腔辐射压的非线性，机械振荡会呈现双稳态行为

* kayasir@zjnu.edu.cn
† gaoxl@zjnu.edu.cn

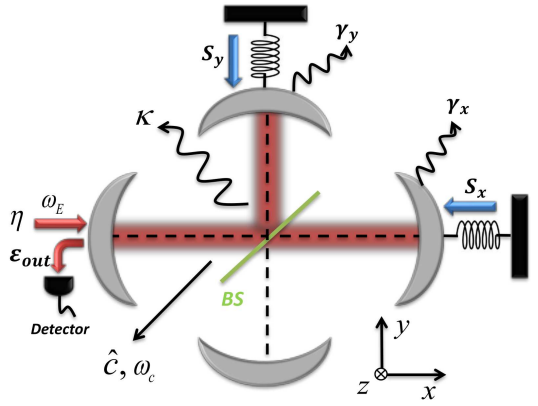


图 1. 光机四反射镜腔的示意图，其中两个移动端镜沿横向（x 轴和 y 轴）耦合。泵浦激光沿纵向驱动腔，而用于机械驱动的两束激光—— S_x 沿 x 轴、 S_y 沿 y 轴——则与反射镜发生外部相互作用。 η和 ω_E 分别表示泵浦激光的强度和频率。泵浦激光激发腔模，该模式从位于腔中心的分束器（BS）分出后，在腔内的横向移动端镜之间构建耦合。

在腔辐射压的作用下，双稳态的两个稳定状态中，不稳定的状态会在镜场强耦合时导致反射镜发生混沌演化；此前的研究已通过将多个振子与腔耦合，在传统光力学系统中观察到这一现象[32, 35–37]。然而，在本研究中，我们在四镜腔装置中采用外部机械驱动，即使在镜腔弱耦合的情况下，也能使机械振子产生混沌响应。这不仅使装置本身具有新颖性，获取混沌的方法也别具一格。

通过绘制可能初始条件区间对应的庞加莱截面，我们表明，对于两个移动端镜，外部机械驱动的存在都会使规则的庞加莱截面转变为混合的庞加莱截面，其中既包含稳定岛，也包含混沌海。一个反射镜的机械驱动也会在第二个反射镜中留下混沌特征，即使第二个反射镜没有机械驱动。为进一步佐证这一观点，我们通过从庞加莱截面中选取初始态，展示反射镜时间演化过程中混沌的出现。我们还展示了初始条件对混沌时间演化的影响。为了定量分析混沌，我们计算了系统可能的李雅普诺夫指数以及集体柯尔莫哥洛夫-辛奈熵。我们发现，随着外部驱动增强，最大李雅普诺夫指数转为正值，这确实会产生正的柯尔莫哥洛夫-辛奈熵。但李雅普诺夫指数和柯尔莫哥洛夫-辛奈熵似乎都对从庞加莱截面中选取的初始位置十分敏感。这意味着，如果系统初始时不处于混沌海中，那么随着外部驱动增强，与系统初始时处于混沌海中的情况相比，李雅普诺夫指数和柯尔莫哥洛夫-辛奈熵的增长速度会较慢。此外，我们讨论了机械阻尼对混沌行为的影响，并发现机械阻尼率增大将增强混沌行为。

本文内容安排如下。第II 节介绍系统建模和数学细节。第III 节给出结果，并讨论庞加莱截面´。第IV 节描述移动端镜相对于外部机械驱动的时空动力学。第V 节通过展示李雅普诺夫指数和柯尔莫哥洛夫-辛奈熵，对外部机械驱动下混沌的发生进行定量分析。第VI 节讨论机械阻尼对混沌动力学的影响。最后，第VII节给出结论。

II. 系统描述与哈密顿量

我们考虑一个四镜腔光力学系统，其中两个移动端镜分别位于腔的 x轴和 y轴上，如图1所示。由强外部泵浦激光驱动的腔模，其光强为 η 、频率为 ω_E，从部分透射分束器处分出，并与腔的移动端镜相互作用。腔模施加的辐射压力会激发两面反射镜的多稳态振动，这与传统光力学系统中的情况类似 [32, 35]。然而，在本研究中，我们采用两种机械驱动——它们从外部作用并扰动移动端镜的机械运动——以在腔的移动端镜中产生哈密顿混沌。

系统哈密顿量包含与两面移动端镜、腔内场及其相互耦合相关的能量，可表示为[32, 45, 53]，

$$\begin{aligned}\hat{H} = \sum_{j=x,y}\Big(&\frac{\hbar\omega_j}{2}(\hat{p}_j^2+\hat{q}_j^2) + \hbar G_j \hat{c}^\dagger\hat{c}\hat{q}_j \\ &+ S_j q_j cos(\delta_j t+\phi_j)\Big) + \hbar\Delta_c\hat{c}^\dagger\hat{c} \\ &- i\hbar\eta(\hat{c}-\hat{c}^\dagger). \end{aligned} \tag{1}$$

其中第一项对应移动端镜的运动，其无量纲位置正交分量为 $\hat{q}_j = (\hat{a}_j + \hat{a}_j^\dagger)/\sqrt{2}$ ，动量正交分量为 $\hat{p}_j = i(\hat{a}_j - \hat{a}_j^\dagger)/\sqrt{2}$，下标为 $j = x, y$ ，分别对应沿 x 轴和 y 轴的反射镜。这些正交分量满足正则对易关系 $[\hat{q}_j, \hat{p}_j] = i$ ，并分别由声子湮灭算符 $\hat{a}_j$ 和产生算符 $\hat{a}_j^\dagger$ 定义[30, 53]。哈密顿量中的第二项

定义了移动端镜与腔模之间由辐射压力产生的耦合。$\hat{c}$ ($\hat{c}^{\dagger}$) 分别表示腔模的光子湮灭（产生）场算符，而 $G_j = \sqrt{2}(\omega_c/L_j)x_j, (j = x, y)$ 表示耦合强度，其中包含镜面质量为 m 的反射镜的零点空间振荡 $x_j = \sqrt{\hbar/2m\omega_j}$。这里，$\omega_j = \omega_x, \omega_y$ 是沿腔臂 x 轴和 y 轴定向的移动端镜的频率，其长度为 $L_j = L_{x,\ y}$。我们假设两个移动端镜相同，且质量均为 m。此外，横向臂（纵向和竖直方向）的长度相同，$i.e. L_x = L_y$。

哈密顿量（1）中的第三项描述了外部机械驱动与移动端镜之间的耦合，其机械力强度定义为 $S_j = \alpha_j\sqrt{(\hbar/\omega_j m_j)}, (j = x, y)$。这里 $\alpha_j = \alpha_x, \alpha_y$ 对应振幅，而 $\delta_j = \delta_{x,\ y}$ 和 $\phi_j = \phi_{x,\ y}$ 分别表示与沿x轴和 y轴运动的移动端镜相互作用的机械力的频率和相位[47–52]。第四项定义了腔模相对于腔泵浦失谐 $\Delta_c = \omega_E - \omega_c$的能量，其中 ω_c 为腔模的频率。最后一项定义了腔模与外部泵浦激光之间的耦合，其中 $|\eta| = \sqrt{P \times \kappa/\hbar\omega_E}$ 为耦合强度参数。

为纳入移动端镜机械运动及腔模相关的阻尼和噪声效应，我们采用海森堡-朗之万方程（QLE）方法来描述系统中每个自由度的时空行为。考虑标准噪声算符和阻尼后，量子朗之万方程可写为：

$$\frac{d\hat{c}}{dt} = (i\Delta_c + \sum_{j=x,y} iG_j\hat{q}_j - \kappa)\hat{c} + \eta + \sqrt{2\kappa}\hat{c}_{in}, \quad (2)$$

$$\frac{d\hat{q}_j}{dt} = \omega_j\hat{p}_j, (j = x, y) \quad (3)$$

$$\frac{d\hat{p}_j}{dt} = -\omega_j\hat{q}_j + G_j\hat{c}^{\dagger}\hat{c} + S_j cos(\delta_j t + \phi_j) - \gamma_j\hat{p}_j + \hat{F}_j, (j = x, y). \quad (4)$$

其中，κ 对应有效腔内场衰减率，包括朝向沿 $-x$轴的底部反射镜的光子泄漏（或散射），该反射镜来自分束器。$\hat{c}_{in}$ 表示由腔输入产生的噪声，并由均值为零的马尔可夫噪声算符定义：$\langle\hat{c}_{in}(t)\rangle = 0$，其时间δ关联为 $\langle\hat{c}_{in}(t)\hat{c}^{\dagger}_{in}(\acute{t})\rangle = \delta(t - \acute{t})$。$\gamma_j = \gamma_{x,\ y}$ 分别表示与沿 x轴和 y轴振动的移动端镜相关的机械阻尼率。$F_{j=x,\ y}$ 是均值为零的朗之万力算符，对应于移动端镜沿x轴和 y轴布朗运动相关的量子噪声。这些朗之万力算符可由非马尔可夫关联定义：$\langle\hat{F}_j(t)\hat{F}_j(\acute{t})\rangle = \frac{\gamma_j}{2\pi\omega_j}\int d\omega e^{-i\omega(t-\acute{t})}[1 + coth(\frac{\hbar\omega}{2k_BT})], (j = x, y)$ [54, 55]，其中，k_B 为玻尔兹曼常数，T为系统周围热库的温度。然而，在本研究中，通过采用强腔模区（即$\hbar\omega_c >> k_BT$），并分别考虑强耦合区中的高阶振荡 $\hbar\omega_j >> k_BT$、（$j = x$、y），我们忽略这些噪声的影响。

利用上述近似，并将腔内场视为经典变量，可从量子朗之万方程中提取腔场的稳态值（即 $^{d}\!/_{dt} \to 0$），

$$c_s = \frac{\eta}{\kappa - i(\Delta_c + \sum_{j=x,y} G_j q_j)}. \quad (5)$$

此处，c_s 表示稳态腔场。进一步地，将腔场的稳态值代入移动端镜的量子朗之万方程（3）和（4），并忽略相关噪声的影响，可推导出两个移动端镜的运动方程（EoM），即：

$$\frac{1}{\omega_j}\frac{d^2q_j}{dt^2} + \frac{\gamma_j}{\omega_j}\frac{dq_j}{dt} + \omega_j q_j - \frac{G_j\eta^2}{\kappa^2 + (\Delta_c + \sum_{i=x,y} G_i q_i)^2} = S_j Cos(\delta_j t + \phi_j), (j = x, y). \quad (6)$$

运动方程对于描述两个移动端镜的时空动力学至关重要。此外，可由运动方程在半经典域 $H_{eff} = E + V$ 中推导出有效哈密顿量，其中两个移动端镜的动能可简单写为 $E = \sum_{j=x,\ y}(\hbar\omega_j/2)p_j^2$。另一方面，两个移动端镜动力学振荡对应的势能可从运动方程的二阶导数项中提取 [35, 45, 46]，

$$V = \sum_{j=x,y}\int\frac{d^2q_j}{dt^2}dq_j = \sum_{j=x,y}\Big[-\frac{\omega_j q_j^2}{2} + S_j q_j cos(\delta_j t + \phi_j) + \frac{\eta^2}{\kappa}arctan\big[(\Delta_c + \sum_{i=x,y} G_i q_i)/\kappa\big]\Big]. \quad (7)$$

为了控制时空动量空间中的哈密顿动力学，我们对系统的有效哈密顿量采用了哈密顿方程方法，

$$\frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial\hat{H}_{eff}}{\partial q_j}, \frac{dq_j}{dt} = +\frac{\partial\hat{H}_{eff}}{\partial p_j}, (j = x, y). \quad (8)$$

另一方面，也可以直接使用运动方程来获得系统动力学。不过，为了使其具有普适性，我们采用了哈密顿方程方法。

为了使我们的研究结果在实验中切实可行，我们采用了一组特定参数，这些参数在近期最先进的实验中均已实现 [1, 56, 57]。我们考虑一个四镜腔，其两条横向臂的长度为 $L = 1.25 \times 10^{-4}$，并由单个

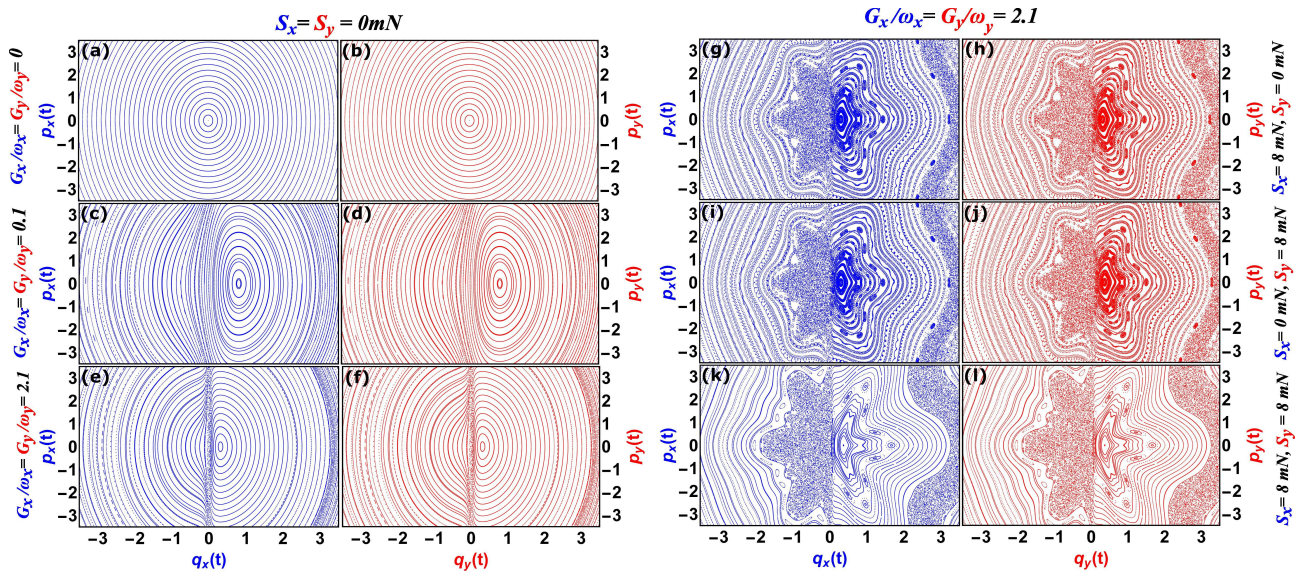


图2. 两个沿 x 轴和 y 轴定向的移动端镜 q_x, p_x 和 q_y, p_y 的庞加莱截面。(a)、(c) 和 (e) [(b)、(d) 和 (f)] 分别对应于沿 x 轴 [y 轴的反射镜在 $S_x = S_y = 0$ 时的腔镜耦合 $G_x = 0\omega_x$, $0.1\omega_x$ 和 $2.1\omega_x$ [$G_y = 0\omega_y$, $0.1\omega_y$ 和 $2.1\omega_y$]。而 (g)、(i) 和 (k) [(h)、(j) 和 (l)] 分别展示了在 $G_x/\omega_x = G_y/\omega_y = 2.1$ 时，当 $S_x = 8mN$, $0mN$ 和 $8mN$ [$S_y = 0mN$, $8mN$ 和 $8mN$] 时外部机械驱动的影响。此处假设反射镜的阻尼率为零 $\gamma_x = \gamma_y = 0$。其他系统参数设为 $\omega_x = \omega_y = 0.1\Delta_c$ 和 $\kappa \approx 1.3 \times 2\pi$ MHz。

模泵浦激光驱动，其功率为 $P = 0.0164mW$，频率为 $\omega_E = 3.8 \times 2\pi \times 10^{14}Hz$。泵浦场产生一个强腔模，其频率为 ω_c，为实现量子非线性相互作用，该频率几乎等于外部泵浦激光的频率。集体衰减率为 $\kappa \approx 1 \times 2\pi MHz$。腔场对两面反射镜施加相同的辐射压力，产生频率 $\omega_j = 15.2 \times 2\pi kHz$，其中 $j = x$、y 分别对应位于 x轴和 y轴上的凝聚体。腔内场与反射镜之间的耦合 G_j（其中 $j = x$、y）可定义为 $G_j/\omega_j = 1.1 \times 2\pi MHz$。在条件 $G_j/\omega_j >> \kappa$下，我们假设两条臂的耦合相等，其中 $j = x$、y。然而，为了获得期望的结果，我们对有效耦合强度$G_{x,\ y}$ 进行调制。

III. 混合庞加莱截面

任何机械系统的动力学都可以通过其相空间得到全面理解，因为相空间包含系统在任意时刻、取决于初始条件的所有可能时空动量状态（或其他共轭变量状态）。通过在二维平面上可视化时空动量的时间演化，并沿时间维度截取快照，即可得到相空间。在特定时刻对时空动量平面取一个截面，对应于 Poincar´e 截面（或 Poincar´e 截面），而 Poincar´e 截面上的每个点都代表时空动量轨迹的一次重现。这种时空动量动量动力学通常可由系统的哈密顿方程（8）描述。对于规则或稳定的系统，时空动量轨迹会根据初始条件，在相空间中呈现彼此区分、互不干涉的模式（大多为圆形）。而对于不稳定或受扰动的系统，这些轨迹则会彼此干涉，并可能在 Poincar´e 截面中形成混沌海般的随机状态。时空动量轨迹对初始条件（位置和动量的初始值）的依赖至关重要。例如，某些初始条件可能使时空动量轨迹呈现规则形态，而另一些初始条件则可能使同一系统走向混沌。由此得到的相空间图像会呈现混合的 Poincar´e 截面，其中既有稳定岛，也有混沌海[58]。

为了控制时空动量相空间动力学，我们针对三维二次空间（q_j，p_j，q_{j0}），同时对两个反射镜数值求解哈密顿方程（8），其中$j = x$，y。这里，q_{j0} 对应于每条轨迹的初始条件（或移动端镜的初始位置），我们认为其在区间 $q_{j0} \to [-2\pi, 2\pi]$内服从正态分布。我们假设两个移动端镜最初均处于静止状态，因此 $p_{j0} \to 0$，以便在庞加莱截面上精确映射初始腔长构型。对于每个初始条件，我们将系统数值演化至 $t \to 800\pi$，并通过测量时间间隔2π 内的回归，绘制庞加莱截面；该时间间隔相对于两个移动端镜各自的外部机械驱动 S_x 和 S_y 而言，结果如下：

如图 2所示。

在没有机械驱动 $S_x = S_y = 0$ 且不与腔 $G_x = G_y = 0$耦合的情况下，两个反射镜均沿规则（或稳定）的庞加莱截面运动，其上具有不同的圆形轨迹——彼此之间没有干涉——如图2 (a) 和2 (b) 所示，其中移动端镜分别沿 x轴和 y轴定向。这里，每条圆形轨迹对应一个初始条件，并围绕 $q_x = q_y = 0$呈现对称行为。然而，当我们在腔内场与移动端镜之间施加较弱的耦合时，相空间轨迹开始出现弯折（或倾斜），使庞加莱截面的圆形图案不对称地向中心 $q_x = q_y = 0$收缩，如图2 (c) 和2 (d) 所示，其中 $G_x = G_y = 0.1$。如果进一步增强腔镜耦合，相空间轨迹的弯折也会加剧，导致行为更加不对称，见图2 (e) 和2 (f)，其中 $G_x = G_y = 2.1$。

移动端镜与腔场之间的耦合对 Poincar´é截面映射的影响，可以通过将腔类比为连接两个移动端镜的弹簧来理解，尽管两个反射镜并不位于同一轴线上。腔场弹簧效应的变化对反射镜的机械振荡构成扰动。换言之，由于辐射压力增加，镜腔耦合增强，导致移动端镜机械运动的势能变得不稳定。当反射镜沿负 $q_x = q_y = 0$ 方向和 x轴以及 y轴移动远离原点时（或反射镜运动导致腔长减小时），这些弹簧效应（或镜腔耦´合）将表现出更大的影响。与右半平面相比，这将使 Poincar´é截面左半平面上的圆形轨迹受到更强的挤压或压缩，从而导致不对称的相空间，见图 2(e) 和 2(f)。圆形轨迹的压缩最终导致这些轨迹在 $q_x = q_y = 0$附近重叠。但仍然没有混沌的显著特征。

然而，当我们对反射镜施加外部机械驱动力（即 S_x 和 S_y）时，原本规则且非混沌的庞加莱´截面开始转变为包含混沌海和稳定岛的混合庞加莱´截面 [58]，见图 2（g-l）。可以观察到相空间轨迹之间显著的干涉，导致圆形轨道大幅扩展，以至于彼此无法区分。因此，混沌海遍布整个庞加莱´截面，但主要出现在 $-2 < q_{x、y} < 0$ 和 $-3 < p_{x、y} < 3$之间。即使机械驱动只施加在一个移动端镜上，也能在两个移动端镜中观察到这些混沌特征。如图 2 （g）和 2 （h），以及图2 （i）和 2 （j）所示，其中 $S_x = 2mN$ 和 $S_y = 0mN$，以及$S_x = 0mN$ 和 $S_y = 2mN$，分别如此。

由于两个移动端镜均通过腔场间接耦合在一起，腔场弹簧效应（或反射镜-腔耦合）对任一反射镜所诱导的扰动，也会改变另一个移动端镜的动力学。具体而言，机械驱动对反射镜施加力，随后该反射镜将机械能传递给腔场，从而产生作用于另一个反射镜的不稳定辐射压力。通过这种方式，任一反射镜上的机械驱动都会同等地扰动两个反射镜的运动。这就是为什么未施加机械驱动的反射镜也呈现出与施加机械驱动的反射镜相似的 Poincar´e 截面。

在两个移动端镜均受到机械驱动时，庞加莱´截面呈现出相似的模式，如图2 (k) 和2 (l) 所示。此处，扰动 S_x 和 S_y 所引起的扰动增强了相空间振荡路径之间的干涉，使得庞加莱截面中混沌与稳定特征的混合现象更加显著。´稳定岛——即小型圆形结构——对应于这样的区域：如果移动端镜最初位于其中，就会保持稳定并被束缚在稳定区域内[58, 59]。然而，如果任一移动端镜最初处于混沌区域——例如出现在$-2 < q_{x、y} < 0$ 和 $-3 < p_{x、y} < 3$之间——它就会变得混沌、不稳定且难以预测。还可以注意到，稳定岛呈现出多重对称图样，并从庞加莱截面的中心´处出现 [58, 59]。这种多重对称行为源于有效哈密顿量中的余弦项，其振幅基本上决定了机械驱动的强度，并可通过调节 δ 和 ϕ进行调控。这些多重对称的混合庞加莱截面，与参考文献 [45] 和 [46]，中研究的相空间动力学相似；该研究将腔的机械反射镜用作调制器，以激发超冷原子态的密度激发，反之亦然。混合相空间行为还可以进一步探究，但庞加莱截面中混沌的出现已足以支持我们当前研究的论点。

IV. 时空动力学

A. 镜面-腔耦合规则

通过测量时空响应，可以进一步理解移动端镜动力学中混沌的出现。在这里，两面反射镜的初始态或初始条件起着至关重要的作用，我们可以从庞加莱´截面中仔细选取这些条件。在稳定构型下——即两面反射镜要么被限制在稳定岛中，要么与受扰系统隔离——它们都会随时间进行稳定且无阻尼的振荡。如图3(a1-a4)所示，当镜腔耦合（$G_x/\omega_x = G_y/\omega_y = 0$）以及外部机械力（$S_x = S_y = 0$）均设为零时，便是这种情况。两面

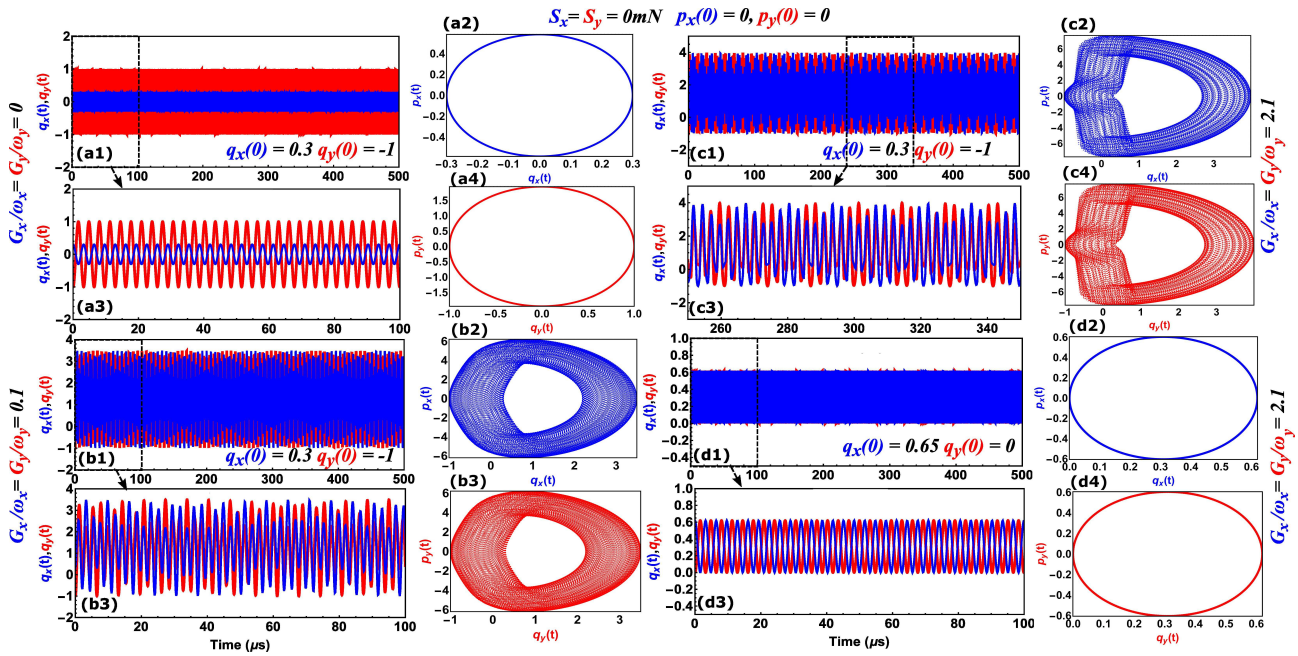


图3. 当 $S_x = S_y = 0$时，移动端镜 q_x（蓝色）和 q_y（红色）的时空动力学。(a)、(b)、(c)和(d)分别对应 $G_x/\omega_x = G_y/\omega_y = 0$、0.1、2.1和2.1。($\mathcal{O}1$)为时间响应，($\mathcal{O}3$)为其放大图，其中 $\mathcal{O} \to [a, b, c, d]$。($\mathcal{O}2$)和($\mathcal{O}4$)分别表示沿 x轴和 y轴的反射镜对应的相空间行为。对于(a)、(b)和(c)，初始条件为(q_x(0) p_x(0)) = (0.3, 0)以及(q_y(0) p_y(0)) = $(-1, 0)$；而对于(d)，$q_x(0) = q_y(0) = 0.65$ 且 p_x(0) = p_y(0) = 0。其余参数与图2相同。

反射镜都会随时间进行谐波且稳定（可预测）的振荡，如图3(a1)和3(a3)所示。对于这一特定构型，若绘制它们的时空动量相空间，两面反射镜都会沿单一圆形轨迹运动[58, 59], ，如图3(a2)和3(a4)所示，分别对应沿 x轴和 y轴运动的移动端镜。需要指出的是，目前我们忽略了两面反射镜各自的机械阻尼，即 $\gamma_x = \gamma_y = 0$，以便考察镜腔耦合和机械驱动的影响。不过，本文后文将讨论这些影响。

此外，可以注意到两面反射镜的振荡振幅存在差异。这是因为我们选择了不同的初始条件 $(q_x(0)\ p_x(0)) = (0.3, 0)$ 和 $(q_y(0)\ p_y(0)) = (-1, 0)$，这两个初始条件取自图 2所示的庞加莱截面。由于两面反射镜均未与腔系统耦合，它们的初始态不会受到彼此运动的影响，因此会以相同的初始振幅振荡。尽管在孤立构型中，不同的初始态并未显示出显著影响，除了振荡振幅不同之外。但随后，在存在镜腔耦合和外部机械驱动时，不同的振幅不仅会消失，这些不同的初始态也会对混沌调控产生影响。

当我们将移动端镜与腔场耦合时，两个反射镜以相同但 180^0偏移的振幅振荡，如图3(b1-b4) 和3(c1-c4) 所示，其中 $G_x/\omega_x = G_y/\omega_y = 0.1$ 和 $G_x/\omega_x = G_y/\omega_y = 2.1$ 分别对应。这是因为现在两个反射镜都通过腔场相互依赖于彼此的振动。换句话说，腔场现在对两个反射镜施加相等的辐射压力，从而使它们具有相等的振荡振幅，但相位相反。此外，由于它们通过腔场相互耦合，两个反射镜的振幅都呈现正弦包络。

两面移动端镜的时间演化都呈现显著的非线性行为，尤其是在 $G_x/\omega_x = G_y/\omega_y = 2.1$。相应的相空间图也展示了镜腔耦合所诱发的非线性效应；(q_x,p_x)见图 3(b2) 和 3(c2)，(q_y,p_y)见图 3(b4) 和 3(c4)。相空间中的轨迹在每次时间演化时都会沿着与前一次不同且彼此分离的路径运动，使相空间呈现椭圆盘形。这些非线性效应在 $G_x/\omega_x = G_y/\omega_y = 2.1$ 时更为明显：椭圆盘形在 p_x, $_y \to 0$ 附近出现凸起，给人一种相空间轨迹彼此重叠的印象。然而，如果改变移动端镜的初始态，将它们置于稳定区域——或置于图 2(e) 和 2(f) 中 p_x,$_y = 0$ 和 q_x, $_y = 0.65$ 附近出现的小圆内——那么两面镜都将被线性束缚在这些稳定区域中。图 3(d1-d4) 展示了这一点，其中初始条件分别设为 $(q_x(0)\ p_x(0)) = (0.65, 0)$ 和 $(q_y(0)\ p_y(0)) = (0.65, 0)$。尽管镜腔耦合给移动端镜的动力学带来了显著的非线性，且随着耦合强度进一步增大，这种非线性可能会增强，但仍没有足够的混沌特征表明这些反射镜呈现混沌。

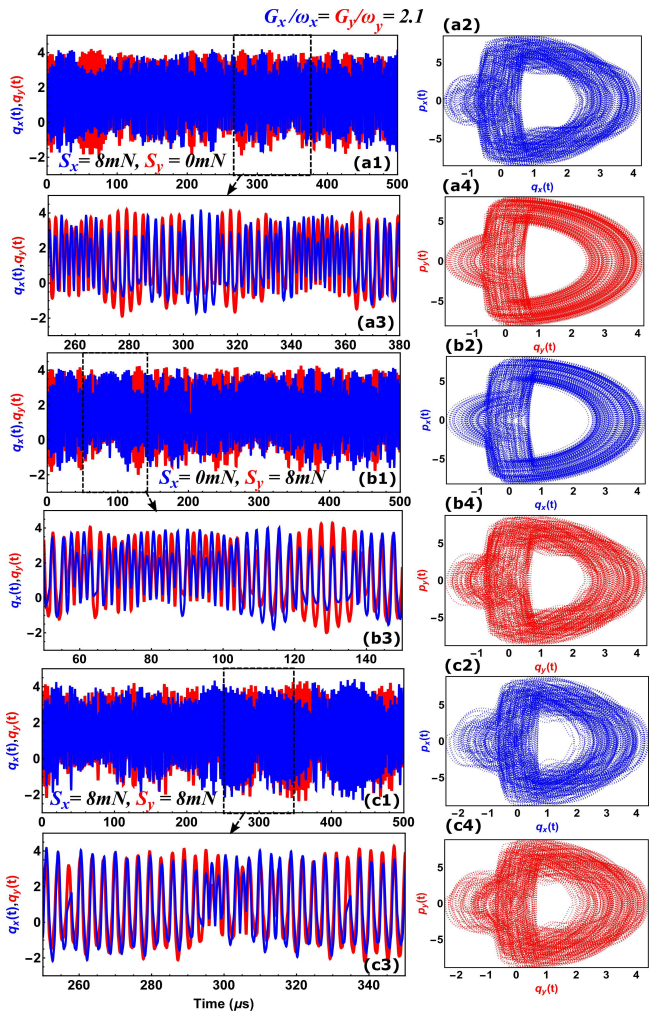


图4. 当 $G_x/\omega_x = G_y/\omega_y = 2.1$ 时，移动端镜 q_x （蓝色）和 q_y （红色）的时空动力学。这里，(a)、(b) 和 (c) 分别对应 $S_x = 8mN$ $S_y = 0mN$ $S_x = 0mN$ $S_y =$、 、 $8mN$ $S_x = 8mN$ $S_y = 8mN$ $\mathcal{O}1$ 和 、 。( ) 表示时间响应，放大图为（ $\mathcal{O}3$ ）。而（ $\mathcal{O}2$ ）和（ $\mathcal{O}4$ ）分别展示了反射镜沿 x 轴和 y 轴的相对相空间，其中 $\mathcal{O} \to [a, b, c]$。初始条件设为（$q_x(0)$ $p_x(0)$） $=(0.3, 0)$ 和（$q_y(0)$ $p_y(0)$） $=(-1, 0)$。计算中使用的其他参数与图2中所述相同。

B. 机械驱动混沌调控

对于两面反射镜都受到外部机械驱动，或任意一面反射镜受到外部机械驱动的情况，两面移动端镜都表现出不稳定且不可预测的时间响应，如图 4 所示。此时，两面反射镜的振荡振幅都会随时间随机变化，没有遵循任何规律。这些随机的振荡振幅继而导致相空间轨迹重叠并发生干涉。与庞加莱截面类似，即使机械驱动仅施加于一面反射镜，两面镜也都呈现出混沌特征。然而，与庞加莱截面不同，在两种情况下（机械驱动施加于一面反射镜时

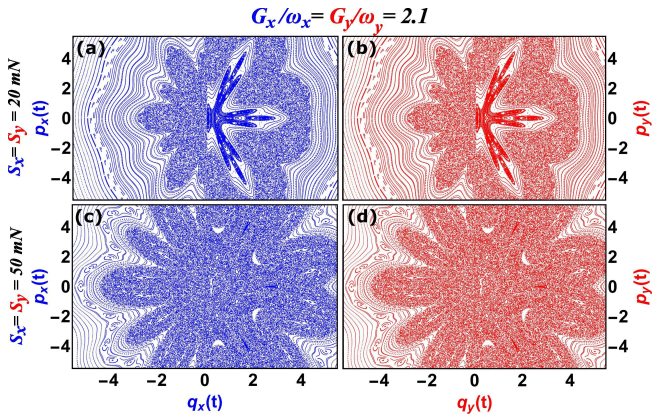


图 5. 庞加莱截面中两个移动端镜的 q_x， p_x （蓝色）和 q_y， p_y （红色）分别沿 x轴和 y轴，在 $G_x/\omega_x = G_y/\omega_y = 2.1$处的取向。这里，(a) 和 (b) 对应于机械驱动的强度 $S_x = S_y$ =20mN，而 (c) 和 (d) 展示了机械驱动强度为 $S_x = S_y = 20mN$时的影响。其余配置和参数与图2中所用的相同。

另一反射镜未受驱动，而另一反射镜受机械驱动、第一面反射镜未受驱动时，前者与后者的情况不同。图4(a1) 和4(a3)、图4(b1) 和4(b3)中可观察到这一点，其中$S_x = 8mN$， $S_y = 0mN$和 $S_x = 0mN$， $S_y = 8mN$ 分别如此。然而，显然，未受机械驱动的移动端镜的相空间呈现出相似的模式（见图4(a4) 和4(b2)），受机械驱动的移动端镜的相空间也相同（见图4(a2) 和4(b4)）。这是因为，与每次时间回归对应的相空间轨迹会与前一次轨迹发生干涉，从而形成复杂的相空间结构，因此难以从中提取时间演化 [58, 59]。

与未施加机械驱动的反射镜的相空间相比，施加机械驱动的移动端镜的相空间轨迹之间的干涉更加显著。这表明，机械驱动会对相互作用的反射镜产生更强的扰动效应；显然，这与庞加莱截面不同。事实上，在庞加莱截面中，我们考察的是经过特定时间后的状态，这会抑制此类差异。然而，如果对两个移动端镜施加相同大小的外部机械驱动力，那么它们都会表现出相似的行为，如图4(c1-c4)所示。可以观察到，显著的混沌模式不仅出现在时间动力学中，也出现在相应的相空间中。相空间轨迹之间的距离随着每次回归而减小，导致轨迹路径之间发生干涉。这种干涉正是混沌发生的标志。

这里，我们为两个移动端镜采用了与前文讨论相同的初始态，即，沿 x 轴的反射镜为 ($q_x(0)$ $p_x(0)$) $=$ $(0.3, 0)$，沿 y 轴的反射镜为 ($q_y(0)$ $p_y(0)$) $=(-1, 0)$。

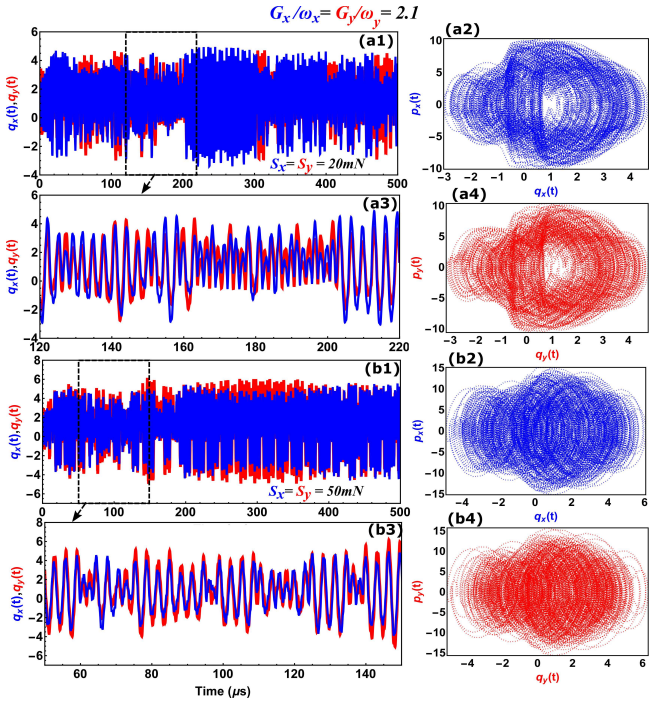


图2。镜腔耦合下移动端镜 q_x （蓝色）和 q_y （红色）的时空响应，其中 $G_x/\omega_x = G_y/\omega_y = 2.1$。（a）和（b）分别展示了机械驱动强度 $S_x = S_y = 20mN$ 和 $S_x = S_y = 50mN$ 的影响。此处，($\mathcal{O}1$) 展示了时间动力学及其放大图（$\mathcal{O}3$），其中 $\mathcal{O} \to [a, b]$。而 ($\mathcal{O}2$) 和 ($\mathcal{O}4$) 分别是沿 x 轴和 y 轴的反射镜对应的相空间。反射镜的初始态设为 ($q_x(0)$ $p_x(0)$) = (0.3, 0) 和 ($q_y(0)$ $p_y(0)$) = $(-1, 0)$。数值计算所用的其余参数与图2相同。

回顾图 2(k) 和 2(l)——它们对应的参数与图 4(c1-c4) 中所用参数相同——并比较这些初始条件，可以很容易地发现，沿 x轴的反射镜最初位于稳定（或亚稳定）区域。而沿 y轴的反射镜最初位于庞加莱截面左半平面的混沌区域。通常，由于沿 x轴的反射镜最初位于庞加莱截面的稳定区域，因此它应当在该稳定区域内呈现稳定的时间演化[58, 59]。但实际情况并非如此。沿 y轴的反射镜最初确实处于混沌区域，并呈现出混沌行为；而且，沿 x 轴的反射镜也表现出类似的混沌动力学。其原因在于两个移动端镜之间存在腔场介导的耦合。只要其中一个反射镜具有不稳定和混沌特征，这些特征就会传递给另一个反射镜。因此，若要获得稳定性，两个反射镜最初都应位于稳定区域。如果其中一个反射镜最初不在稳定岛内，那么两个移动端镜都会呈现混沌。

如果我们进一步增大外部机械驱动的幅度，对时空动力学的扰动也会进一步增强。这将导致相空间轨迹之间的干涉加剧，并使庞加莱截面中的混沌区域扩大，如图 5(a) 和 5(b)，以及图5(c) 和 5(d) 所示，其中外部机械驱动的强度分别增至 $S_x = S_y = 20mN$ 和 $S_x = S_y = 50mN$。其余参数配置与图 2相同。可以看到，混沌海如今占据了庞加莱截面中的大部分空间。当 时，右半平面中心附近出现了一些稳定岛。但在 $S_x = S_y = 20mN$的情况下，这些稳定区域显著缩小。这种情况下，混沌完全主导了系统。

在相同系统配置下测量两面反射镜的时间响应，也可以观察到类似的增强混沌效应，如图6(a1-a4) 和 6(b1-b4) 所示，分别对应 $S_x = S_y = 20mN$ 和 $S_x = S_y = 50mN$。此时，时间响应变得更加随机（不可预测）和混沌，但仅从时间动力学本身难以提取这些增强效应。不过，随着外部机械驱动增大，相应的相空间图显示出显著增强。扰动导致反复出现的相空间轨迹彼此重叠并相交，这种现象如今超越了镜面动力学的极限，从而产生混沌。尤其是在$S_x = S_y = 50mN$的情况下，混沌显然占据了整个空间，破坏了相空间中出现任何模式的可能性 [58, 59]。因此，这些结果和讨论揭示了外部机械驱动所诱发的两面移动端镜的混沌动力学。

V. 定量分析：从李雅普诺夫指数到柯尔莫哥洛夫-辛奈熵

前文对稿件中系统出现混沌的情况进行了充分的定性分析。但了解混沌的定量行为也很重要。为此，我们计算了所有可能的李雅普诺夫指数[60–62] ，并收集了系统的柯尔莫哥洛夫-辛奈熵 [63, 64]。李雅普诺夫指数是衡量相空间轨迹之间无穷小间距的参数。不同初始取向的相空间轨迹向量，其间距变化率可能不同，尤其是在哈密顿系统中。这些间距变化率决定了李雅普诺夫指数谱，其数量与相关自由度的维数成正比 [60–62]。由于谱中数值最大的李雅普诺夫指数对应相空间轨迹的最大间距，因此它表征了系统中混沌的出现。

在我们的系统中，我们采用格拉姆-施密特数值过

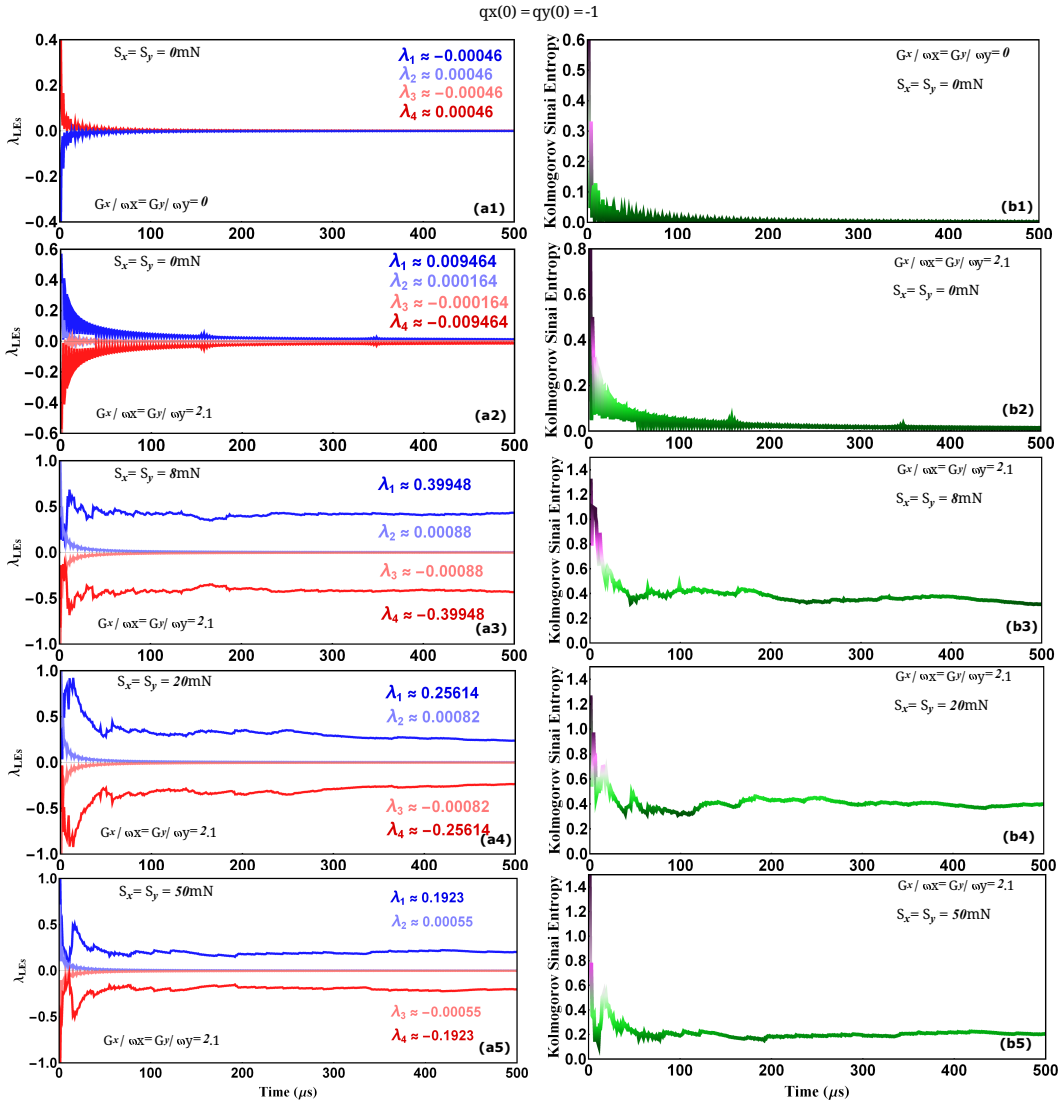


图7. 混沌发生的定量分析。(a1-a5)展示李雅普诺夫指数谱，(b1-b5)则展示柯尔莫哥洛夫-辛奈熵。对于($\mathcal{O}$1-5)，耦合分别为 $G_x/\omega_x = G_y/\omega_y = 0$、2.1、2.1、2.1，外部驱动强度分别为 $S_x = S_y = 0$、0、8、20、$50mN$，其中 $\mathcal{O} \to [a, b]$。这些计算的初始条件为(q_x(0) p_x(0)) =(q_y(0) p_y(0)) =(−1, 0)。此外， λ_{1-4} 对应李雅普诺夫指数的长期饱和值。其余参数与图2相同。

程对雅可比矩阵方程中的向量进行正交归一化，该方程由系统的量子朗之万方程组[60–64]推导而来。雅可比方程解的特征值基本上决定了相空间轨迹的分离程度，并以李雅普诺夫指数谱的形式表示，如图7(a1-a5)和图8(a1-a5)所示。这里需要注意的是，这些李雅普诺夫指数代表了系统中所有相关子系统或自由度的集体响应。其次，根据施加于雅可比矩阵方程的奥塞莱德茨定理，谱中的李雅普诺夫指数数量应为系统所包含子[60–64]系统数量的两倍。谱中最大的李雅普诺夫指数定义了系统在特定时刻发生的混沌程度，这取决于所选参数以及初始条件。

为进一步定量分析系统中发生的混沌或集体无序性，我们计算了系统的柯尔莫哥洛夫-辛奈熵。柯尔莫哥洛夫-辛奈熵表示任意系统的总无序性，按照惯例，可通过佩辛恒等式（佩辛熵公式） [63, 64], 计算，即将系统所有正的李雅普诺夫指数相加[65–67],

$$\mathcal{H}_{KS} \approx \sum_{\lambda^i_{LE}>0}^{2\mathbb{N}} \lambda^i_{LE}. \tag{9}$$

此处， λ^i_{LE} 对应于与 i^{th} 自由度相关联的李雅普诺夫指数，而 $\mathbb{N}$ 是相关自由度的总数。所有正

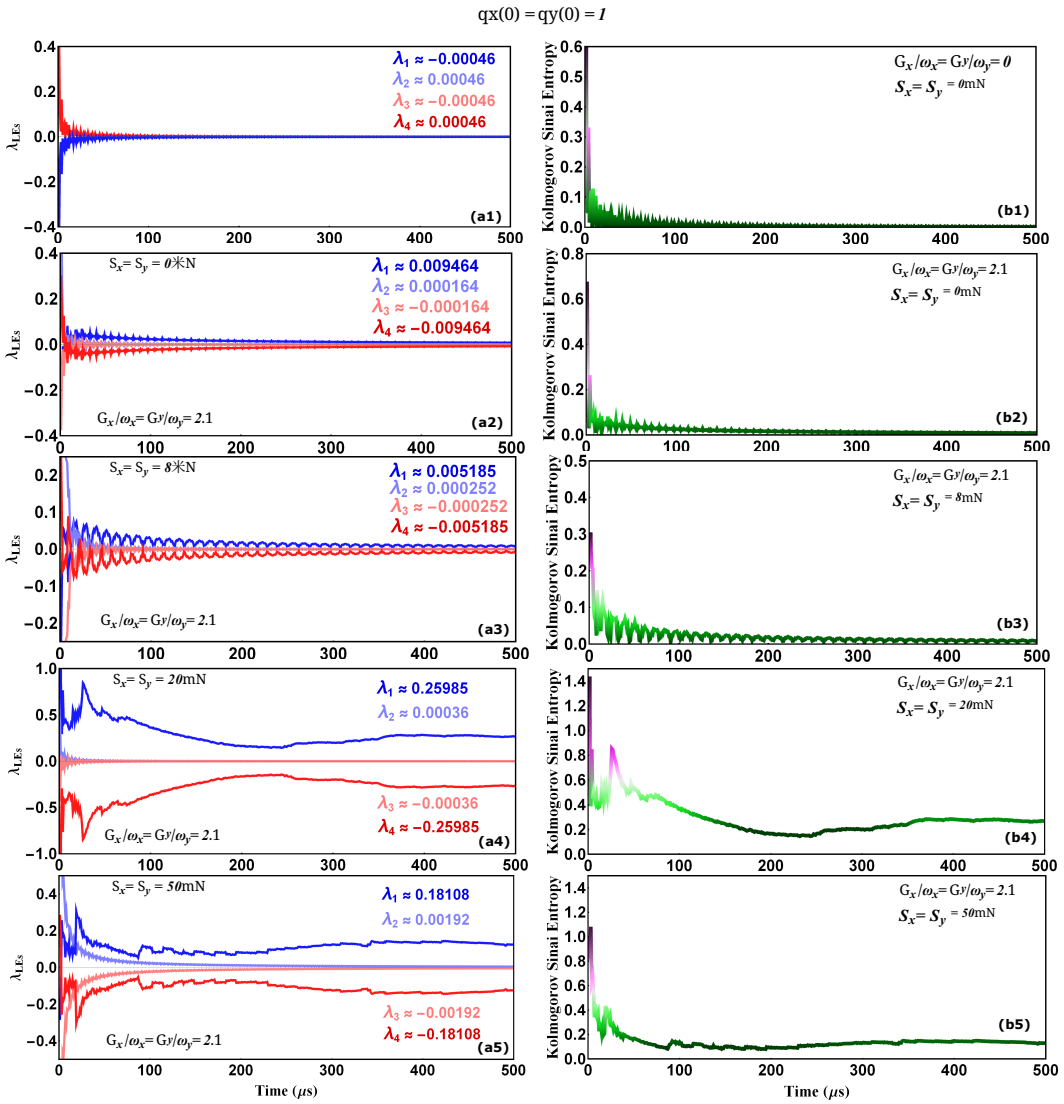


图8. 与图7类似，这里 (a1-a5) 展示李雅普诺夫指数谱，(b1-b5) 展示柯尔莫哥洛夫-辛奈熵。对于 ($\mathcal{O}$1-5)，镜腔耦合分别为 $G_x/\omega_x = G_y/\omega_y = 0$、2.1、2.1、2.1，外部驱动强度分别为 $S_x = S_y = 0$、0、8、20、$50mN$，其中 $\mathcal{O} \to [a, b]$。这些计算的初始条件为 (q_x(0) p_x(0)) =(q_y(0) p_y(0)) =(1, 0)。此外， λ_{1-4} 对应李雅普诺夫指数的长期饱和值。其余参数与图2相同。

李雅普诺夫指数基本上给出了熵的上限。但要计算可能达到的最高无序度，可以将正李雅普诺夫指数的总和近似为熵[63, 64]。

在图7中，(a1)-(a5)展示了系统的李雅普诺夫指数谱，(b1)-(b5)展示了相应的柯尔莫哥洛夫-辛奈熵。初始条件为$(q_x(0)\ p_x(0)) = (q_y(0)\ p_y(0)) = (-1, 0)$，取自图 2所示的庞加莱截面。在图7(a1) 和 7(b1)中，当 $G_x/\omega_x = G_y/\omega_y = 0$ 和$S_x = S_y = 0$时，可以看到李雅普诺夫指数谱 λ_{LEs} (λ_{1-4}) 和柯尔莫哥洛夫-辛奈熵均随时间趋近于零。这意味着，在没有外部机械驱动和镜腔耦合的情况下，系统不存在混沌，表现为线性行为。根据所选初始条件，系统会出现一些初始波动但这些波动随时间推移最终趋于零。在存在镜腔耦合的情况下，李雅普诺夫谱和柯尔莫哥洛夫-辛奈熵同样趋近于零附近，但其数值和波动略高于无耦合情形，如图7(a2) 和 7(b2)所示，其中 $G_x/\omega_x = G_y/\omega_y = 2.1$ 和 $S_x = S_y = 0$。这是由于镜腔耦合引起了非线性效应。这些非线性特征也可见于图 2(e) 和 2(f)所示的庞加莱截面，在$(q_x(0)\ p_x(0)) = (q_y(0)\ p_y(0)) = (-1,0)$处。然而，正如相空间和时间响应的讨论所示，目前尚无足够证据表明混沌的发生。

然而，当我们施加外部机械驱动时，李雅普诺夫谱的行为会发生彻底变化。

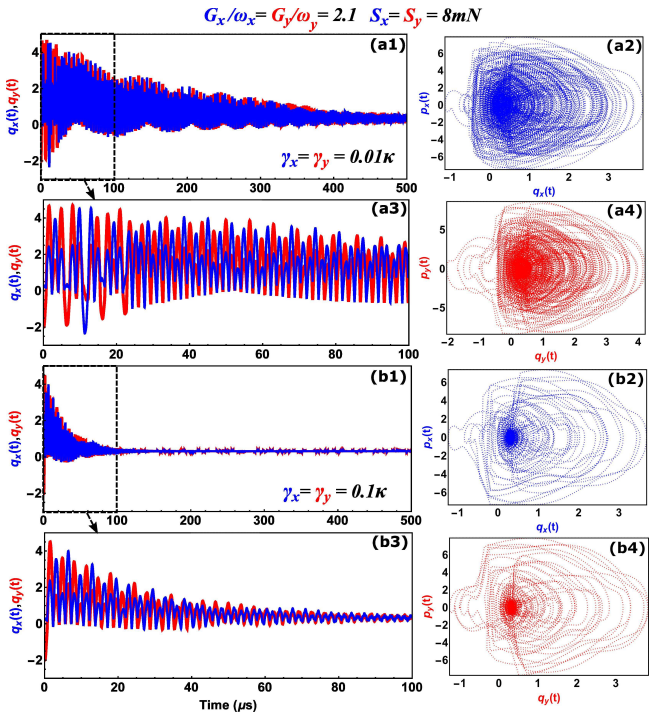


图9. 机械阻尼对移动端镜 q_x （蓝色）和 q_y （红色）时空响应的影响，其中 $G_x/\omega_x = G_y/\omega_y = 2.1$ 和 $S_x = S_y = 8mN$。(a) 和 (b) 分别对应机械运动相关的机械阻尼率 $\gamma_x = \gamma_y = 0.01\kappa$ 和 $\gamma_x = \gamma_y = 0.1\kappa$。与之前的时间响应类似，这里 ($\mathcal{O}1$) 表示时间动力学，其放大图为 ($\mathcal{O}3$)；($\mathcal{O}2$) 和 ($\mathcal{O}4$) 分别是反射镜沿 x 轴和 y 轴的相应相空间，其中 $\mathcal{O} \to [a, b]$。两个反射镜的初始态分别为 $(q_x(0)\ p_x(0)) = (0.3, 0)$ 和 $(q_y(0)\ p_y(0)) = (-1, 0)$。其余参数与图2相同。

现在，最大的李雅普诺夫指数在最初随时间波动后，趋于一个正值$\lambda_1 \approx 0.39948$，如图7(a3)所示，其中 $S_x = S_y = 8mN$。第二和第三个李雅普诺夫指数则分别随时间趋近于零 $\lambda_2 \approx 0.00088$和 $\lambda_3 \approx -0.00088$。第四个李雅普诺夫指数达到可能的最低值 $\lambda_4 \approx -0.39948$，看起来与最大的李雅普诺夫指数呈对称关系。这里，最大的李雅普诺夫指数为正，表明混沌的发生；其数值则定量表征混沌的程度。相应的柯尔莫哥洛夫-辛奈熵如图7(b3)所示，可以看出熵随时间趋于一个非零饱和值。与最大的李雅普诺夫指数类似，它表明系统中混沌的定量程度；并且如前所述，柯尔莫哥洛夫-辛奈熵给出了最大李雅普诺夫指数的上界（或者说，最大的李雅普诺夫指数给出了柯尔莫哥洛夫-辛奈熵的下界），因此其值始终大于最大的李雅普诺夫指数。这两个指标充分且定量地证明了混沌的发生在系统中。

如果进一步增大外部驱动的作用力，李雅普诺夫指数和柯尔莫哥洛夫-辛奈熵仍保持为正，如图7(a4) 和7(b4)、图7(a5) 和7(b5) 所示，其中 $S_x = S_y = 20mN$ 和$= 20mN$分别如此。然而可以注意到，饱和值略低于 $S_x = S_y = 8mN$的情况。这意味着，与较低强度的外部驱动相比，较高强度的外部驱动所产生的无序程度更低。这是由初始条件造成的。也就是说，在特定初始值下，较低扰动所产生的无序程度可能高于较高扰动下的无序程度。通过观察庞加莱截面可以很好地理解这一点。如果反射镜的初始位置恰好位于这样一点，使得在较低外部驱动强度下，庞加莱截面所呈现的混沌程度高于较高强度时的情况，那么显然，较低外力下的李雅普诺夫指数也会更高。混合型庞加莱截面中稳定岛增多，可能会限制或改变系统中的无序程度。为了进一步说明这一点，我们绘制了不同初始条件下的李雅普诺夫指数和柯尔莫哥洛夫-辛奈熵，如图7 所示；图8中展示了不同初始条件下的结果，其中 $(q_x(0)\ p_x(0)) = (q_y(0)\ p_y(0)) = (1,\ 0)$。

在 $G_x/\omega_x = G_y/\omega_y = 0$ 和 $S_x = S_y = 0$ 时（图 8(a1) 和 8(b1)），与前一种情况类似，Lyapunov 熵和柯尔莫哥洛夫-辛奈熵均随时间趋于零。在 $G_x/\omega_x = G_y/\omega_y = 2.1$ 和 $S_x = S_y = 0$时（图 8(a2) 和 8(b2)），两者的行为再次略有不同，但总体上与前一种情况相似。然而，当我们将外力强度增至$S_x = S_y = 8mN$ 时，与前一种初始条件（$q_x(0)\ p_x(0)$）$= (q_y(0)\ p_y(0)) = (-1, 0)$的情况相比，Lyapunov 熵和柯尔莫哥洛夫-辛奈熵均趋于非常低的值，并随时间呈现某种振荡行为。不过，增大外力后，这两个量都会升至较高值，且表现出与前一种情况不同的行为，见图 8(a4) 和 8(b4)、图 8(a5) 和 8(b5)，其中$S_x = S_y = 20mN$ 和 $= 20mN$分别对应上述情况。

在不同初始条件下对李雅普诺夫谱与柯尔莫哥洛夫-辛奈熵进行比较，清楚地表明这两个因素都关键地取决于系统的初始构型。还可以得出结论：尽管李雅普诺夫指数能在特定初始条件下定量表征混沌，但不能反映整体情况。另一方面，庞加莱截面（如图2所示）不仅能揭示混沌的发生，还能展示所有可能初始条件下混沌的动力学行为。本节对柯尔莫哥洛夫-辛奈熵的阐释也加深了我们对无序性的理解，这一方法可用于将无序性和混沌与量子纠缠、局域化等多种现象联系起来。

VI. 机械阻尼的影响

迄今为止，在稿件中我们尚未考虑与移动端镜振荡运动相关的机械阻尼率（$\gamma_{x,\ y}$）对时空动力学的影响。这样做的目的是清楚地展示由外部机械驱动介导的混沌动力学，因为存在机械阻尼时，这种动力学并不十分明显。然而，在本节中，我们打算在存在外部驱动$S_{x,\ y}$的情况下，纳入相应机械阻尼率的影响。正如预期，机械阻尼率会根据阻尼[58, 59]的大小，抑制（限制）两面反射镜的振荡振幅。这将导致时空演化持续受到挤压，如图9 (a1,a3)和图9 (b1,b3)所示，其中阻尼率分别取为 $\gamma_x = \gamma_y = 0.01\kappa$ 和$\gamma_x = \gamma_y = 0.1\kappa$。可以看出，当机械阻尼较大时，挤压效应会显著增强，使运动趋于沿原点饱和，即$q_{x,\ y} \approx 0$，如 $\gamma_x = \gamma_y = 0.1\kappa$的情况所示。

然而，在饱和过程中，甚至在饱和状态下，混沌行为依然存在，如图 9 (a2,a3) 和图 9 (b2,b3) 所示，其中展示了与相对时间响应对应的相空间。相空间轨迹似乎随机地朝中心或原点饱和，这与相应的时间响应类似。在这一饱和过程中，甚至在饱和状态下，相空间轨迹明显相互重叠并发生相互作用，从而产生混沌。在当前构型中，这些轨迹间的干涉在 $\gamma_x = \gamma_y = 0.01\kappa$的情况下更为显著。然而，对于 $\gamma_x = \gamma_y = 0.1\kappa$，虽然也存在干涉效应，但大多数轨迹本身都转移到了饱和区域。通过进一步考察并考虑更高的阻尼率，可以进一步提取机械阻尼在时空动力学中引发的潜在特征。但本文着重于研究的核心主题，即在我们的装置中，外部机械驱动所引发的混沌。

VII. 结论

总之，我们研究了外部机械驱动所诱发的四镜光机械腔中的混沌。强泵浦激光沿纵向（沿 x 轴）驱动腔，从而建立起强腔模。该腔模经分束器分束后，与横向布置（沿 x 轴和 y 轴）的移动端镜相互作用。腔模施加的辐射压力使两面反射镜均产生振荡运动。两束横向激光分别与每面移动端镜发生外部相互作用，形成外部机械驱动，扰动其振荡运动。通过在宽泛的初始条件范围内构建庞加莱截面，我们展示了镜腔耦合和外部机械驱动影响下两面移动端镜的时空动量动力学。我们发现，机械驱动的存在会使规则稳定的庞加莱截面转变为混合庞加莱截面，其中包含稳定岛和混沌海。为进一步理解混沌的产生，我们展示了时空动力学并绘制了相应的相空间。机械驱动不仅使两面移动端镜的时间演化变得不可预测，还使相空间中的复现轨迹相互干涉，从而导致混沌。随着机械驱动幅度增大，这些混沌特征会显著增强。

为定量分析混沌，我们计算了李雅普诺夫指数谱和柯尔莫哥洛夫-辛奈熵。我们发现，外部驱动力的增强会使系统产生更多无序，但无序性在很大程度上取决于系统的初始条件。结合李雅普诺夫指数谱计算柯尔莫哥洛夫-辛奈熵，也提供了另一种途径，可将无序性和混沌与量子纠缠、动力学局域化等无序介导现象联系起来。我们还进一步阐明了移动端镜所受机械阻尼的影响，并表明阻尼率会压缩时间动力学中的振荡振幅，但在移动端镜的演化过程中，这些混沌效应依然存在。本研究的发现对于构建复杂动力学系统的量子—经典混合图景至关重要，也有望为检验混沌诱导的量子力学现象提供平台。

致谢

K.A.Y. 感谢国家自然科学基金委员会国际青年科学家研究基金（项目编号：KYZ04Y22050）、浙江师范大学科研经费（项目编号：ZC304021914）以及浙江省博士后科研项目（项目编号：ZC304021952）的资助。G.X.L. 感谢国家自然科学基金委员会项目（项目编号：11835011 和 11774316）的资助。

[1] M. Aspelmeyer、T. J. Kippenberg 和 F. Marquardt, *Rev. Mod. Phys.* **86**, 1391（2014）。

[2] T. J. Kippenberg 和 K. J. Vahala, *Optics Express* **17** ,

20911（2009）。[3] P. Meystre, *Annalen der Physik* **525**, 215（2013）。[4] B. P. Abbott *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **116**, 061102（2016）。[5] Yiqiu Ma, *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 151102（2014）。[6] D. Rugar, *et al.*, *Nature* **430**, 329（2004）。[7] M. Echenfield, *et al.*, *Nature* **462**, 78（2009）。[8] A. D. *O*′Connell *et al.*, *Nature* **464**, 697（2010）。[9] J. D. Teufel *et al.*, *Nature* **475**, 359（2011）。[10] J. Chan *et al.*, *Nature* **478**, 89（2011）。[11] M. Yuan *et al.*, *Nat. Commun.* **6**, 8491（2015）。[12] O. Arcizet *et al.*, *Nature* **444**, 71（2006）。[13] S. Gigan *et al.*, *Nature* **444**, 67（2006）。[14] S. Weis, *et al.*, *Science* **330**, 1520-1523（2010）。[15] M. D. Lukin, 以及 A. Imamo˘glu, *Nature* **413**, 273-276（2001）。[16] M. D. Eisaman, *et al.*, *Nature* **438**, 837-841（2005）。[17] F. Brennecke、S. Ritter、T. Donner 和 T. Esslinger, *Science* **322**, 235（2008）。[18] M. Paternostro、G. D. Chiara 和 G. M. Palma, *Phys.* , （）。[19] *Rev. Lett.* **104** 243602 2010
M. Abdi, *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 143601（2012）。[20] M. Abdi, *et al.*, *Phys. Rev. A* **89**, 022331（2014）。[21] E. A. Sete, *et al.*, *J. Opt. Soc. Am. B* **31**, 2821（2014）。[22] S. G. Hofer, *et al.*, *Phys. Rev. A* **84**, 052327（2011）。[23] Ying-Dan Wang 和 A. A. Clerk, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 153603 2012( )。[24] S. Singh, *et al.*, *Phys. Rev. A* **86**, 021801（2012）。[25] G. S. Agarwal, 以及 S. Huang, *Phys. Rev. A* **81**, 041803 2010(R) ( )。[26] S. Weis, *et al.*, *Science* **330**, 1520（2010）。[27] B. Peng, *et al.*, *Nat. Commun.* **10**, 1038（2014）。[28] A. H. Safavi-Naeini, *et al.*, *Nature* **472**, 69（2011）。[29] K. A. Yasir, 以及 W. M. Liu, *Sci. Rep.* **6**, 22651（2016）。[30] K. A. Yasir、L. Zhuang 和 W. M. Liu, *Phys. Rev. A* , （）。[31] **95** 013810 2017
K. A. Yasir、L. Zhuang 和 W. M. Liu, *npj Quantum Inf.* **8** 109 2022 , （）。[32] K. A. Yasir, 以及 W. M. Liu, *Sci. Rep.* **5**, 10612（2015）。[33] K. A. Yasir, *Opt. Commun.* **488**, 126820（2021）。[34] Yang, S. *et al.*, *Phys. Rev. A* **83**, 053821（2011）。[35] K. Zhang、W. Chen、M. Bhattacharya 和 P. Meystre, *Phys. Rev. A* **81**, 013802（2010）。[36] L. Bakemeier、A. Alvermann 和 H. Fehske, *Phys. Rev.* , （）。[37] J. *Lett.* **114** 013601 2015
Larson 和 M. Horsdal, *Phys. Rev. A* **84**, 021804(R)（2011）。[38] J. Y. Ma、C. You、L. G. Si、H. Xiong、J. H. Li、X. X. Yan 和 Y. Wu, *Phys. Rev. A* **90**, 043839（2014）。[39] X. Y. L ¨ *Phys. Rev. Lett.* u、H. Jing、J. **114** 253601 2015
Y. Ma 和 Y. Wu, , （）。[40]] M. Sciamanna, *Nat. Photonics* **10**, 366（2016）。[41] F. Monifi、J. Zhang、S. K. Ozdemir、B. Peng、Y. X. Liu, F. Bo、F. Nori 和 L. Yang, *Nat. Photonics* **10**, 399（2016）。[42] Deng-Wei Zhang、Cai You 和 Xin-You L ¨ *Phys. Rev.* u, , *A* **101** 053851 2020
（）。[43] Hilborn, R. C., 《混沌与非线性动力学》，第2版（牛津大学出版社，纽约，1980）。[44] F. Saif, *Phys. Rep.* **419**, 207（2005）。[45] K. A. Yasir、M. Ayub 和 F. Saif, *J. Mod. Opt.* **61**, 1318（2014）。[46] M. Ayub、K. A. Yasir 和 F. Saif, *Laser Phys.* **24**, 115503（2014）。[47] W. C. Ge、M. Al-Amri、H. Nha 和 M. Suhail Zubairy, *Phys. Rev. A* **88**, 052301（2013）。[48] P. Fritschel、M. Evans 和 V. Frolov, *Opt. Express* **22**, 4224（2014）。[49] B、Teklu、T、Byrnes 和 F. S. Khan, *Phys. Rev. A* **97**, 023829（2018）。[50] L. Zhou、Y. Han、J.i Jing 和 W. Zhang, *Phys. Rev. A* , （）。**83** 052117 2011
[51] N. Pramanik、K. C. Yellapragada、S. Singh 和 P. A. Lakshmi, *Phys. Rev. A* **101**, 043802（2020）。[52] F. Farman 和 A. Bahrampour, 《光学研究》，OSA技术文摘（在线版）（美国光学学会，2014），论文 JW2A.44。[53] C. K. Law, *Phys. Rev. A* **51**, 2537（1995）。[54] M. Paternostro *et al.*, *New J. Phys.* **8**, 107（2006）。[55] J. Dalibard *et al.*, *Rev. Mod. Phys.* **83**, 1523（2011）。[56] F. Brennecke、T. Donner、S. Ritter、T. Bourdel、M. Kohl 和 T. J. Kippenberg, *Nature* **450**, 268（2007）。[57] T. J. Kippenberg 和 K. J. Vahala, *Science* **321**, 1172（2008）。[58] R. C. Hilborn, 《混沌与非线性动力学》，第2版（牛津大学出版社，纽约，1980）。[59] Steven H. Strogatz, 《非线性动力学与混沌》，第2版（CRC出版社，伦敦，2014）。[60] E. Padmanaban、Stefano Boccaletti 和 S. K. Dana, *Phys. Rev. E* **91**, 022920（2015）。[61] Jinyong Ma textitet al., *Phys. Rev. A* **90**, 043839（2014）。[62] Nan Yang、Adam Miranowicz、Yong-Chun Liu、Keyu Xia 和 Franco Nori, *Sci. Rep.* **9**, 15874（2019）。[63] T. Kamizawa、T. Hara 和 M. Ohya, *J. Math. Phys.* **55**, 032702（2014）。[64] P. L. Garrido, *J. Statist. Phys.* **88**, 3/4（1997）。[65] Chihiro Matsuoka 和 Koichi Hiraide *Chaos* **25**, 103110（2015）。[66] Pankaj Kumar 和 Bruce N. Miller, *Entropy* **19**, 238（2017）。[67] Henk van Beijeren 和 J. R. Dorfman, *Phys. Rev. Lett.* , （）。**74** 4412 1995
[68] Thomas Papenbrock, *Phys. Rev. E* **61**, 1337（2000）。[69] Matheus Capela、Mikel Sanz、Enrique Solano 和 Lucas C. C´eleri, *Phys. Rev. E* **98**, 052109（2018）。